Geometrian vaikeudet kongnitiivisesta näkökulmasta

Pro Gradu -tutkielma
Päivi Mensonen
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2013

Tiivistelmä

Kreikankielinen sana geometria tarkoittaa maanmittausta. Muinaiset kreikkalaiset ja egyptiläiset kehittivätkin nykyään matematiikan alana tunnetun geometrian alun perin maanmittauksen apuvälineeksi. Yhtenä geometrian merkittävimpinä teoksena voidaan pitää Eukleideen noin 300 eaa. laatimaa oppikirjaa nimeltään Alkeet. Tämä teos koostuu 13 kirjasta, joissa on määritelmiä, aksioomia, postulaatteja ja teoreemojen todistuksia. Kirjassa käsitellään lähinnä sen ajan lukuteoriaa ja euklidista geometriaa. Tärkeää on kuitenkin huomata ettei Eukleides kirjoittanut kaikkia todistuksia itse, vaan Alkeet on kokoelma sen ajan matemaatikkojen tuloksista.

Nykyään geometria nähdään matematiikan alana, joka tutkii kappaleita, kuvioita ja niiden ominaisuuksia. Historian saatossa geometria on pystytty jakamaan myös osa-alueisiin sen mukaan mitä tutkitaan ja mitä menetelmiä tutkimuksissa käytetään. Näitä osa-alueita ovat tasogeometria, avaruusgeometria, euklidinen geometria, epäeuklidinen geometria ja analyyttinen geometria.

Kuten muualla maailmassa, myös suomalaisessa koulujärjestelmässä matematiikan opetus oli pitkään rajoittunut aritmetiikan, trigonometrian, algebran ja geometrian opetukseen (Lehtinen,M., 2000). Ennen 1700-luvun puoliväliä geometriaa opetettiin kouluissa huomattavan paljon enemmän kuin nykyään ja opetus oli paljon syvällisempää. Tämä mahdollistikin oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymisen koulunkäynnin aikana.

Tämän kirjallisuustutkielman tarkoituksena on tuoda esille niitä vaikeuksia joihin yläkoulun oppilaat saattavat törmätä opiskellessaan geometriaa. Tutkielman tarkoituksena ei ole pelkästään esitellä näitä vaikeuksia vaan myös pureutua siihen, mistä nämä vaikeudet johtuvat ja miten näiden vaikeuksien syntymistä voitaisiin ehkäistä. Koska geometriassa ilmeneviä vaikeuksia on lukuisia, on tutkielma rajattu käsittelemään geometrian vaikeuksia kognitiivisesta näkökulmasta. Näistä kognitiivisista näkökulmista tutkielmassa käsitellään visuaalista havainnointia, luetunymmärtämistä ja van Hielen mallia.

Visuaalisen havainnoinnin kautta syntyviä vaikeuksia tarkastellaan tutkielmassa bottom-up - & top-down -prosessien, oppilaan käsityksiin perustuvan tiedon, mielikuvien ja kuvien hierarkkisen rakenteen sekä Gestaltin periaatteiden avulla. Päälähteenä tässä tarkastelussa on käytetty Gal & Linchevskin (2010) julkaisua To see or not see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Luetunymmärtämisen kautta tapahtuvassa geometrian vaikeuksien tarkastelussa on käytetty Kai-Lin Yangin (2011) tutkimusta. Viimeisenä tutkielmassa on tarkasteltu van Hielen viisiosaista mallia geometrisen ajattelun kehittymisestä (Fuys, Geddes & Tischler, 1988).

Sisältö

0.1 Johdanto

Matematiikka on tähtitieteen ja historian ohella yksi vanhimmista tieteenaloista. Sen ensimmäisten kehitysvaiheiden tarkka selvittäminen on mahdotonta, sillä ihmiset oppivat laskemaan ennen kirjoitustaidon syntymistä. Tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että geometria on yksi matematiikan vanhimmista aloista. Geometrian sanotaankin olevan muinaisten egyptiläisten ja kreikkalaisten kehittämä apuväline maanmittaukseen. Vaikka geometrialla oli aikaisemmin merkittävämpi rooli koulujärjestelmässä kuin nykyään, on geometria silti matematiikan alana kehittynyt vuosien varrella. Esimerkiksi Renè Descartes ja Pierre de Fermat kehittivät 1600-luvulla analyyttisen geometrian, kun taas 1800-luvun alussa venäläinen matemaatikko Nikolai Lobatsevski kehitti epäeuklidisen geometrian.

Nykyään geometriaa opetetaan koulussa vähemmän kuin aikaisemmin. Tämä johtuu osittain siitä, että matematiikka on tieteenä kehittynyt ja opetettavaa asiaa on siten enemmän. Toisaalta osa syynä voidaan nähdä myös muiden tieteiden kehittyminen ja siitä seurannut opetettavien oppiaineiden määrän lisääntyminen koulussa, minkä seurauksena matematiikkaa voidaan viikossa opettaa vähemmän kuin aikaisemmin. Oppilaille ei siis opeteta muutamaa asiaa syvällisesti kuten ennen, vaan heiltä vaaditaan yhä useamman aihekokonaisuuden hallintaa. Tällöin opetustahti on nopeampi ja vaikeuksia asian ymmärtämisessä saattaa ilmetä.

Tutkielmassa on tarkasteltu geometriassa ilmeneviä vaikeuksia kognitiivisesta näkökulmasta. Toisin sanoen siinä tarkastellaan miten oppilas käyttää aikaisemmin muodostuneita tiedonrakenteitaan geometrian tehtävien tulkitsemiseen ja muokkaamiseen. Kognitiivista oppimista on esitelty tarkemmin ensimmäisessä luvussa. Tutkielma on niin sanottu kirjallisuustutkielma ja sen tarkoituksena on paitsi esitellä niitä vaikeuksia joihin oppilaat saattavat törmätä geometriaa opiskellessaan, myös niitä keinoja joilla näiden vaikeuksien syntymistä voitaisiin ehkäistä. Tämän lisäksi tutkielmassa esitellään teorioita, joiden avulla vaikeuksien syntymistä geometriassa voidaan selittää.

Toisessa luvussa tarkastellaan geometrian vaikeuksia visuaalisesta näkökulmasta. Tämän luvun tarkoituksena on esitellä niitä vaikeuksia joita oppilaille syntyy näköhavainnoin välityksellä. Esimerkiksi bottom-up - ja top-down -prosessien avulla oppilas saattaa helposti tunnistaa suorakulmaisen kolmion suorakulmaiseksi mikäli kolmion yksi sivu on horisontaalisesti ja toinen vertikaalisesti. Bottom-up -prosessissa oppilas kerää ensin kaiken mahdollisen tiedon kuviosta ja sen jälkeen yhdistää saamansa tiedot yhdeksi kokonaisuudeksi. Tällöin aikaisempien kokemuksiensa perusteella oppilas havaitsee sivujen asettelun perusteella kolmion olevan suorakulmainen. Top-down -prosessissa oppilas puolestaan lähtee liikkeelle kokonaisuudesta, jota purkaa sitten pienempiin osiin. Tällöin kolmio tunnistetaan suorakulmaiseksi vain jos kolmiosta löytyy suorakulmaisuuden osoittava symboli.

Top-down - ja bottom-up -prosessien käyttäminen saattaa auttaa oppilasta geometrian tehtävien ratkaisemisessa, mutta vain niissä tapauksissa että kuvioista löytyy tarvittavat symbolit ja kuviot on aseteltu oikealla tavalla. Vaikeuksia syntyy mikäli symbolit poistetaan ja kuviota käännetään normaalista eriävään asentoon. Näin syntyviä vaikeuksia voidaan kuitenkin helposti ehkäistä mikäli opettajat saataisiin käyttämään opetuksessaan muitakin kuin yhdellä tavalla piirrettyjä esimerkkikuvia.

Bottom-up - ja top-down -prosessien lisäksi toisessa luvussa tarkastellaan myös näköhavainnon kautta syntyviä vaikeuksia oppilaan aikaisempiin käsityksiin perustuvan tiedon, mielikuvien ja kuvien hierarkkisen rakenteen sekä Gestaltin periaatteiden avulla. Näistä Gestaltin periaatteita on esitelty pääasiassa Desolneux'n, Moisan ja Morelin (2008) tieteellisen julkaisun From Gestalt Theory to Image Analysis pohjalta. Toisena merkittävänä lähteenä luvussa on käytetty Gal & Linchevskin (2010) julkaisua To see or not see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Tästä Gal & Linchevskin (2010) artikkelista löytyy myös katkelmia heidän tekemästään tutkimuksesta, joka käsittelee hyvin paljon samoja aiheita kuin mitä tutkielman ensimmäisessä luvussa on esitelty.

Kolmas luku käsittelee luetunymmärtämistä. Luvussa tarkastellaan pääasiassa Kai-Lin Yangin (2011) tutkimustuloksia apuna käyttäen miten oppilaiden kognitiiviset ja metakognitiiviset lukustrategiat vaikuttavat vaikeuksien syntymiseen geometriassa. Metakognitiivisuudella tarkoitetaan tietoisuutta sekä omasta että muiden ihmisten oppimisesta, ajattelusta, tietämisestä ja kognitiivisista taidoista. Tutkimuksessa todetaankin, että niillä oppilailla, joilla metakognitiiviset ja kognitiiviset lukustrategiat eivät ole harjaantuneet, on selvästi heikommat mahdollisuudet saada haluttu geometrinen todistus rakennettua kuin niillä, joilla kyseiset lukustrategiat ovat hyvin hallussa.

Tutkielman neljännessä luvussa esitellään niin sanottu van Hielen malli, joka pohjautuu suurilta osin Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldolfin tutkimuksiin. He julkaisivatkin vuonna 1957 väitöskirjansa, josta van Hiele-Geldolfin osuus käsitteli didaktista kokeilua, jonka tarkoituksena oli edistää oppilaiden ajatteluntasoa (Fuys, Geddes & Tischler). Van Hiele puolestaan muotoili geometrisen ajattelun tasojen rakenteet. Tutkielmassa esitelläänkin van Hielen viisi ajattelun tasoa, jotka ovat tunnistamisen taso, analysoinnin taso, järjestämisen taso, päättelyn taso ja aksioomasysteemin ymmärtämisen taso. Van Hielen mukaan oppilas ei pysty etenemään seuraavalle ajattelun tasolle ennen kuin aikaisemman tason vaatimukset on täytetty. Tämä onkin juuri yksi niistä asioista, joiden huomioon ottaminen opetuksessa on opettajille haaste. Opettajan tulisi kussakin luokassa pystyä hahmottamaan luokan oppilaiden ajattelun taso, jotta hän pystyisi opettamaan oppilaita kielellä, jota he ymmärtävät.

Luku 1

Kognitiivinen oppiminen

Ajatellaan tilannetta, jossa oppilaille opetetaan Word-ohjelmiston käyttöä tietokoneella aineenkirjoituksen yhteydessä. Osalle oppilaista ohjelmiston käyttäminen on jo osittain entuudestaan tuttua, kun taas osalle ohjelmiston käyttäminen on täysin uusi asia. Tunnin jälkeen oppilaat saattavat hyvinkin muistaa samat yksittäiset asiat opetetusta sisällöstä, vaikkakin oppilaiden muodostamat käsitykset asiakokonaisuudesta saattavat olla hyvinkin erilaisia (Lehtinen, Kuusinen Vauras 2007,74-75). Tähän vaikuttavat osaltaan oppilaiden aikaisemmat kokemukset opetettavaan asiaan liittyen. Monimutkaisempien asioiden ymmärrys opetettavasta asiasta mahdollistuu, kun oppilaalla on jo aikaisempaa tietoa ja kokemusta asiaan liittyen. Tällöin ei enää tarvitse keskittyä niin kutsuttujen perustietojen ymmärtämiseen, vaan oppilas voi syventää tietojaan pystyessään keskittymään muihin asioihin. Mistä sitten johtuu, että vaikka kahdella oppilaalla olisi samat lähtökohdat opetettavaan asiaan niin tunnin jälkeen oppilailla saattaa olla hyvinkin erilaiset käsitykset opetetusta asiasta? Muun muassa tähän kysymykseen vastauksia etsii kognitiivinen tutkimus.

Sanalla kognitio tarkoitetaan tajunnan sisältöä ja näihin sisältöihin liittyviä tapahtumia kutsutaan kognitiivisiksi prosesseiksi. Tällaisia prosesseja ovat muun muassa tiedon hankinta ja tallentaminen sekä tiedon käyttäminen. Edellä kuvatut prosessit voidaan helposti yhdistää kognitiiviseen tutkimukseen, jonka kohteita ovat esimerkiksi tarkkaavaisuuden suuntautuminen, oppimisen laadulliset erilaiset strategiat, ongelmanratkaisuprosessit sekä muistin rakenne ja toiminta (Lehtinen ym. 2007, 76). Kognitiivinen tutkimus onkin siitä erikoinen tutkimuksen osa-alue, että se tutkii myös sellaisia asioita joita emme voi suoraan havaita, esimerkiksi juuri ongelmanratkaisuprosessia. Mikäli seuraamme vierestä oppilaan ongelmanratkaisua, saatamme hyvinkin havaita, paljonko tehtäviin tutustumiseen ja vastaamiseen käytetään aikaa, mutta todellisuudessa tällainen käyttäytyminen ei anna meille minkäänlaista kuvaa siitä, mitä oppilaan mielessä tapahtuu. Tämän takia kognitiivisissa tutkimuksissa onkin jouduttu tekemään paljon oletuksia, minkä seurauksena muun muassa oppimisen tutkimuksissa ei voida nähdä vain yhtä hyväksyttyä ajattelutapaa vaan samalle asialle voi hyvinkin olla useampi rinnakkainen ajattelumalli.

Kognitiivisen oppimisen voidaan käsittää olevan toimintaa, jossa yksilö käyttää aikaisemmin muodostuneita tiedon rakenteitaan eli skeemojaan ympäristön tulkintaan ja muokkaamiseen (Rinne, Kivirauma & Lehtinen 2005, 177). Toisin sanoen oppija pystyy yhdistämään opetettavan asian aikaisemmin oppimiinsa asioihin ja näin ollen pystyy vahvistamaan tai muokkaamaan aikaisempia tietojaan asiaan liittyen. Tällöin voidaankin sanoa, että oppijalla jo valmiiksi olevat skeemat ikään kuin ohjaavat sitä, mitä oppija voi havaita. Tämän havainnoin seurauksena saatavat tiedot puolestaan muokkaavat alkuperäisiä skeemoja ja näin muodostuneet skeemat toimivat taas pohjana uusien havaintojen muodostumiselle. Kognitiiviseen oppimiseen vaikuttavat siis selvästi myös ympäristötekijät, kuten oppijan asuinympäristö, kieli ja kulttuuri, sillä niiden avulla oppija pystyy rakentamaan ja muokkaamaan tiedonrakenteitaan. Lehtinen ym. (2007, 80) toteavatkin, että kognitiivisessa oppisessa korostuu myös, se että samalla kun oppija kehittää tiedonrakenteitaan, hän kehittää myös oppimisen taitojaan.

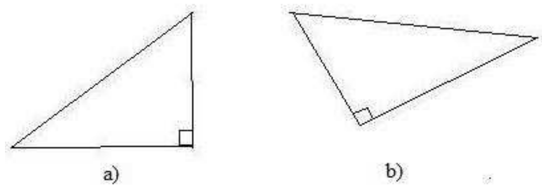
Olemme edellä tarkastelleet, mitä kognitiivinen oppiminen käsitteenä tarkoittaa ja mitkä tekijät tämän tyyppiseen oppimiseen vaikuttavat, mutta vastausta siihen minkälaisia kognitiivisia oppimistapoja on olemassa emme ole vielä saaneet. Tämä kysymys on aiheuttanut myös tutkijoille päänvaivaa, sillä yhtä ainutta keinoa luokitella näitä oppimistapoja ei ole löydetty, vaan tapoja on monia eikä mitään voi sanoa ainoaksi oikeaksi. Pitta-Pantazi & Christou (2008) esittelevät julkaisussaan tällaisia luokittelutapoja, joita ovat muun muassa ympäristöstä riippuvainen ja ympäristöstä riippumaton tapa (Witkin, 1962) sekä verbaalinen ja visuaalinen tapa (Paivio, 1971). Suurin osa näistä oppimistavoista voidaan kuitenkin ryhmitellä kuuluvaksi joko verbaalis-visuaaliseen luokkaan tai kokonais-analyyttiseen luokkaan. Näistä verbaalis-visuaaliset kiinnittävät enemmän huomiota tapaan, jolla esittävät tietoa ajatellessaan kuin sanoihin ja mielikuviin, kun taas kokonais-analyyttiset kiinnittävät huomiota siihen, miten näkevät asiat; kokonaisuuksina vai pienempinä osina (Pitta-Pantazi & Christou 2008). On myös mahdollista ettei oppija osoita mieltymystä kumpaankaan tyyliin, ei verbaaliseen eikä visuaaliseen. Tällaista oppijaa kutsutaan bimodaaliseksi ajattelijaksi.

Luku 2

Visuaalinen havainnointi

2.1 Bottom-up - ja top-down -prosessit

Opiskellessaan matematiikassa geometriaa jokainen oppilas törmää väistämättä geometrisiin muotoihin ja kappaleisiin. Oppilas saattaa helposti tunnistaa ympyrän, pallon ja kolmion, mutta kun kuviosta pitäisi hahmottaa jotain enemmän se ei välttämättä ole niin yksinkertaista. Otetaan esimerkiksi suorakulmaisen kolmion tunnistaminen. Oletetaan, että oppilas tietää mikä on kolmio ja mikä on suorakulma. Lisäksi opettaja on piirtänyt taululle mallin suorakulmaisesta kolmiosta, joka on kuvan 2.1 mukainen.



Kuva 2.1: suorakulmaiset kolmiot

Suorankulman tunnistaminen taulun mallista voi olla tuloksena niin sanotuista "bottom-up" - ja "top-down" -prosesseista (Gal & Linchevski 2010). Bottom-up -prosessissa pyritään aluksi keräämään tutkittavasta asiasta mahdollisimman paljon tietoa. Tämän jälkeen hankituista tiedoista pyritään muodostamaan isompia asiakokonaisuuksia ja näistä edelleen yksi isompi kokonaisuus. Tällaista ajattelumallia edustavat empiristiset teoriat, sillä empiristisen ajattelun mukaan tietämisen ja ajattelun perustana on aina havainto. Näiden havaintojen pohjalta mieleen syntyy ideoita, jotka edustavat havaittuja ulkoisen maailman ilmiöitä (Lehtinen, Kuusinen & Vauras 2007,43). Empiristit näkevätkin kokonaisuuden muodostuvan vähitellen summana pienemmistä palasista juuri niin kuin bottom-up prosessissa tapahtuu. Top-down -prosessi puolestaan toimii ikään kuin käänteisenä versiona bottom-up prosessille. Siinä lähdetään liikkeelle yhdestä suuremmasta asikokonaisuudesta, joka prosessin aikana pilkkoutuu pienempiin kokonaisuuksiin ja asioihin. Tällaista ajattelua edustavat muun muassa hahmopsykologit, jotka tulkitsevat havainnon aktiiviseksi tapahtumaksi, jossa aivot organisoivat havainnon kokonaishahmoksi (Lehtinen ym. 2007, 81). Kokonaisuuden voidaankin hahmopsykologiassa sanoa olevan enemmän kuin osiensa summa.

Kuvan 2.1*a*) tapauksessa suorakulmaisen kolmion tunnistamiseksi käytetään bottom-up -prosessia. Gal & Linchevski (2010) esittävätkin, että tämän kaltainen prosessi on ärsykkeen ohjaamaa tiedonkäsittelyä. Tällöin siis havaitaan horisontaalinen ja vertikaalinen sivu osana suorakulmaisen kolmion yleistä esitysmuotoa, joka on havainnollistettuna kuvassa 2.1*a*). Kolmio siis havaitaan suorakulmaiseksi vain koska sen yksi sivu on vertikaalinen ja yksi on horisontaalinen. Näin ollen, kun kolmiota käännetään kuvan 2.1*a*) asennosta kuvan 2.1*b*) asentoon, suorakulmaisen kolmion tunnistamisesta tulee vaikeampaa. Tällöin tunnistamisen apuna voidaan käyttää niin kutsuttua kontrolloitua prosessia, joka vaatii huomion kiinnittämistä asiaan sekä tietoista ohjausta, jotta suorakulmainen kolmio voidaan tunnistaa. Yleisesti voidaankin sanoa, että suorankulman tunnistaminen kolmiosta on helpompaa mikäli yksi sivu on vertikaalinen ja yksi horisontaalinen.

Top-down -prosessi puolestaan tulee käyttökelpoiseksi, kun kolmioon liitetään suorakulman symboli. Tällöin suorakulmaisen kolmion tunnistaminen tapahtuu top-down -prosessin avulla. Kolmioon on liitetty suorakulman symboli täydentämään tietoja kolmiosta. Tällöin oppilaiden on helpompaa tunnistaa suorakulmainen kolmio, olipa se missä asennossa vaan, kunhan he vain tunnistavat symbolin. Gal & Linchevski (2010) mukaan tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että oppilaat keskittyisivät kulmaan itseensä, huomaten sen suuruudeen. Symboli saattaa siis aiheuttaa ”keinotekoisen” suorakulmaisen kolmion tunnistamisen; tunnistamme kolmion suorakulmaiseksi symbolista, emmekä kuitenkaan ymmärrä mitä tämä symboli meille todellisuudessa kertoo. Top-down -prosessia voitaisiinkin luonnehtia käsitteellisesti ohjautuvaksi prosessiksi.

Geometrisen kuvion tunnistamisen kannalta on myös ratkaisevaa se, missä yhteydessä kuvio havaitaan. Tällaisia tilanteita on tarkasteltu paremmin Raymond Duvalin (1998) artikkelissa Geometry from a cognitive point of view. Duval (1998) esittääkin, että bottom-up - ja top-down -prosessien käyttäminen kuvion tai sen ominaisuuden tunnistamisessa ei aina onnistu. Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, jossa geometrinen kuvio on jaettu useampaan osaan. Ajatellaan, että kuviosta halutaan todistaa jokin tietty ominaisuus. Tällöin pelkän bottom-up -prosessin käyttäminen ei välttämättä riitä, sillä geometrisesta kuviosta on mahdollista havaita useita osakuvioita. Ominaisuuden todistaakseen oppilaan tulee tällöin muodostaa osakuvioista sellaisia kokonaisuuksia, että hän pystyy niiden avulla ratkaisemaan annetun tehtävän. Voikin olla, että tehtävä jota oppilas aluksi lähtee ratkaisemaan bottom-up prosessilla ratkeaakin lopulta top-down -prosessin avulla.

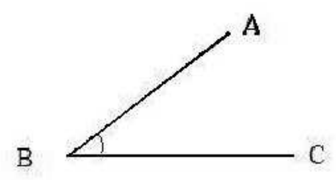
Joskus oppilailla on vaikeuksia tunnistaa, mitä tehtävässä kysytyään ja mitä tietoja tehtävässä on valmiiksi annettuna. Gal & Linchevski (2010) esittävät, että top-down -prosessilla voidaan selittää, kuinka vaikeudet tunnistaa lähtökohtana saatua tietoa voidaan poistaa. Aluksi oppilaan tulee lukea tehtävänanto, joka johtaa hänet top-down -prosessiin. Tämä sen takia, että lukiessaan oppilas tulee tietoiseksi käsiteltävistä aiheista ja saattaa samalla pystyä purkamaan käsiteltävää asiaa pienempiin osiin, johon ei aikaisemmin olisi pystynyt. Geometrisia tehtäviä käsitellessä kannattaa aina pyrkiä piirtämään kuva tehtävän tilanteesta mikäli se on mahdollista. Tämän jälkeen kuviota voi myös värittää siten, että samanlaiset osat on väritetty samalla värillä. Kuvio voi olla myös valmiiksi piirrettynä ja väritettynä, jolloin oppilas pääsee värien kautta muistelemaan samalla värillä väritettyjen osien ominaisuuksia ja pystyy näin ollen purkamaan isompaa kokonaisuutta pienempiin osiin. Värien käyttämisen on koettu olevan erittäin hyödyllistä geometrian kuvioiden ominaisuuksien opettelemisessa.

Kuten suorakulmaisen kolmion esimerkistä käy hyvin ilmi top-down - ja bottom-up -prosessien avulla voidaan tietyissä tapauksissa hyvinkin helposti tunnistaa haluttu geometrinen ominaisuus, joka tässä tapauksessa on suorakulma. Toisaalta taas se, että tunnistaa suorakulman ei välttämättä kerro mitään siitä onko todella ymmärtänyt suorakulma käsitteen vai pelkästään symbolin, tai tunnistaako suorankulman vain silloin kun toinen sivu on horisontaalisesti ja toinen vertikaalisesti. Ilmaan jääkin kysymys siitä, miten näiden ongelmien syntymistä voitaisiin estää.

2.2 Oppilaan käsityksiin perustuva tieto

Aivojemme päätehtävänä on käsitellä aistien välityksellä saatua informaatiota siten, että toimintakykymme elinympäristössämme säilyy. Aivoista on mahdollista erotella yksiköitä, jotka ovat eri kokoisia ja joista jokaisella on oma tehtävänsä. Esimerkiksi kuvallisen materiaalin muisti on laajempi verrattuna verbaalisen materiaalin muistiin. Tämä onkin seurausta siitä, että osa visuaalisesta informaatiosta säilytetään avaruudellisessa muodossaan, esimerkiksi geometriset kuviot, kun taas sanat säilytetään lineaarisessa järjestyksessä. Gal & Linchevski (2010) ovat esittäneet, että geometriassa ongelmia saattaa syntyä juuri sen takia, että säilytämme verbaalista ja visuaalista tietoa niin erilaisessa muodossa. Tällaisia ongelmia voivat esimerkiksi olla vaikeudet kirjoittaa tietoa, vaikeudet lukea tietoa sekä kommunikointi oppilaan ja opettajan välillä. Jos esimerkiksi tarkastelemme suunnikasta ja merkitsemme sen nurkkia A:lla,B:llä,C:llä ja D:llä siten, että kirjaimet kiertävät suunnikkaan nurkat aakkosjärjestyksessä myötäpäivään, on todennäköisintä, että suunnikasta luetaan sen avaruudellisen esityksen mukaan, eikä oteta huomioon kirjaimien verbaalista luonnetta tai niiden lineaarista esitystä. Toisin sanoen monet muodolliset tavat nimetä geometrisia kuvioita jättävät huomioimatta erilaiset prosessit koskien kuvallista ja verbaalista tiedon esittämistä.

Aikaisemmin mainitussa suunnikasesimerkissä suunnikas oli nimetty siten, että kirjaimet kiersivät suunnikkaan nurkat aakkosjärjestyksessä myötäpäivään. Tällöin suunnikas nimetään ABCD:ksi. Osalle oppilaista nimeäminen ei kuitenkaan ole näin yksinkertaista. Väärin nimeämistä ilmenee usein juuri siitä syystä, että oppilaat kiinnittävät huomion suunnikkaan verbaalisen informaation lineaariseen esitysmuotoon ja nimeävät suunnikkaan näin ollen suunnikkaaksi ABDC. Tämä tarkoittaa siis sitä, että suunnikas nimetään käyttäen vastakkaisia sivuja hyväksi. Tämä tapahtuu siten, että aluksi nimetään toinen sivuista AB jonka jälkeen vastakkainen sivu nimetään samalla tavalla lähtien oikealla puolella olevasta pisteestä D päätyen vasemman puoleiseen pisteeseen C. Saadaan siis sivuksi DC, jolloin suunnikkaaksi saadaan ABDC. Tällainen väärin nimeäminen saattaa usein johtaa geometristen kuvioiden väärin ymmärtämiseen ja ennen kaikkea siitä voi olla haittaa asioiden tunnistamisessa.



Kuva 2.2: Kulman nimeäminen

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 2.2 mukaista tilannetta, jossa on kuvattuna kulma $\angle ABC$. Gal (2005) toteaa, että monille oppilaille kulman kolmikirjaiminen nimeäminen tuottaa huomattavasti ongelmia. Useimmin esiintyvä virhe nimeämisessä on kulman nimeämisen aloittaminen pisteestä jonka välittömässä läheisyydessä kulma sijaitsee. Kuvan 2.2 kulman tapauksessa tämän kaltainen virheellinen nimeäminen antaisi kulman $\angle BAC$. Mistä tällainen virheellinen nimeäminen sitten voisi johtua? Gal & Linchevski ovat esittäneet yhtenä mahdollisuutena ajatuksen siitä, että oppilaat ajattelevat kirjaimien kuljettavan verbaalista informaatioita, jolloin he lukevat kirjaimet vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Tällöin syntyisi juuri edellä mainittu virheellisesti nimetty kulma $\angle BAC$. Tällaiseen ongelmaan on kuitenkin havaittu helppo ratkaisu. Oppilaat nimittäin tuntuvat nimeävän kulman helpommin kun se aukeaa oikealle päin. Toisin sanoen, mikäli kuvaa 2.2 käännettäisiin 180^0:tta, jolloin kulma aukeaisi oikealle päin, oppilaille ei Gal & Linchevskin (2010) mukaan synny minkäänlaista konfliktia informaation verbaalisen ja visuaalisen esityksen välille, vaan haluttu kulma merkittäisiin oikein.

Toisaalta oppilas voi myös virheellisesti tulkita kulman kärkipisteen merkityksellisemmäksi kuin muut pisteet, jolloin hän aloittaa nimeämisen siitä. Lisäksi osa oppilaista saattaa takertua kirjaimien aakkosjärjestykseen. Tällä tarkoitetaan sitä, että kulman nimeämiseen tarvittavat kolme kirjainta pyritään järjestämään aakkosjärjestykseen huolimatta siitä, miten ne sijaitsevat. Kuvan 2.2 tapauksessa tällainen nimeäminen tuottaisi oikean kulman, mutta on hyvä muistaa että näin ei suinkaan aina ole. Usein opettajat merkitsevät kulman nimeämiseen tarvittavia kolmea pistettä kirjaimilla A, B ja C. Aluksi oppimisen kannalta on varmasti tehokasta, että käytetään samoja kirjaimia jolloin oppilaille rakentuu kuva opiskeltavasta asiasta. Olisi kuitenkin hyvä muistaa tehdä selväksi, että myös muiden kirjaimien käyttäminen on hyväksyttävää ja, että nimeäminen tapahtuu näiden kirjaimien kohdalla samalla tavalla. Osalle oppilaista nimeäminen on nimittäin helppoa, kun kirjaimina ovat juuri nämä opettajien suosimat A, B ja C, mutta kun vaihdamme kirjaimet toisiin kulman nimeäminen saattaa tuntua hyvinkin vaikealta.

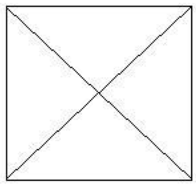
Silfverbergin (1999) mukaan kunkin oppilaan käsitykset rakentuvat oppilaalle muodostuneista geometristen käsitteiden merkityksistä sekä näiden käsitteiden välisistä yhteyksistä. Toisin sanoen oppilaan käsityksiin perustuvalla tiedolla tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, miten oppilas ymmärtää geometrisen kuvion ja millaisia ominaisuuksia näillä geometrisilla kuvioilla hänen mielestään on. Merkittävässä asemassa on tällöin myös se, miten oppilas pystyy linkittämään geometrisia ominaisuuksia toisiinsa. Kun oppilasta pyydetään piirtämään jokin tietty geometrinen kuvio, hän piirtää sen yleensä rutiinimaisesti siihen asentoon jossa kuvio on hänen mielessään. Kuvion ominaisuuksien tunteminen helpottaa sen piirtämistä. Tämän takia oudomman kuvion piirtämisessä ominaisuuksien tarkempi tunteminen on erittäin hyödyllistä.

Tarkastellaan vielä lopuksi kohtisuoruuden merkitsemistä ja sen aiheuttamia vaikeuksia geometrian opiskelussa. Galin (2005) havaintojen mukaan merkinnän $a \perp b$ oikeaoppinen lausuminen tuottaa osalle oppilaista vaikeuksia, vaikka kohtisuoruutta käsitellessä merkintä otettaisiinkin esiin. Osa oppilaista jättää merkin $\perp$ kokonaan huomioitta, kun taas toiset lukevat merkinnän $a \perp b$ olevan $a, b, kohtisuoruus$. Samalla tavalla käy kun käsitellään merkintää $a \parallel b$, jossa siis a on yhdensuuntainen b:n kanssa. Selityksiä näiden merkintöjen tulkitsemisen vaikeuteen tarjoavat oppilaiden aikaisemmat käsitykset asiasta. Gal & Linchevski (2010) kertovat, että merkinnässä $a \perp b$ yhdistyy sekä verbaalinen (a, b) informaatio, että kuvallinen informaatio $(\perp)$. Näillä kummallakin informaation muodolla puolestaan on jo aikaisemmin mainitut omat esitysmuodot, joita ovat lineaarinen ja avaruudellinen esitysmuoto. Kun kirjoitamme $a \perp b$ tarkoitamme sen luettavaksi niin kuin kaikki siinä olisi verbaalista tietoa. Toisaalta oppilas joka näkee symbolin $\perp$ geometrisena objektina ei välttämättä pysty lukemaan merkkiä siten, että se tulisi a:n ja b:n väliin vaan jättää merkin huomiotta tai lisää sen loppuun, luettuaan ensin a:n ja b:n. Tilanteissa, joissa matemaattisen merkin merkitseminen symbolilla ei ole välttämätöntä, olisikin siis järkevämpää käyttää sanoja väärin ymmärrysten välttämiseksi.

2.3 Mielikuvat ja kuvien hierarkkinen rakenne

Gal & Linchevski (2010) toteavat useiden geometrian vaikeuksien johtuvan siitä, että ihmisillä on valmiiksi rakentuneita kuvia asioista mielessään, eikä näiden kuvien muokkaaminen tarvetta vastaavaksi onnistu aina niin helposti. Tämä käy ilmi esimerkiksi silloin kun haluamme kääntää tiettyä kuviota 180^0. Tällöin monet oppilaat kääntävät ensin kuvaa mielessään 90^0 ja vasta sen jälkeen päätyvät tilaan, jossa kuvaa on käännetty haluttu 180^0. Voidaan sanoa, että päästäkseen haluttuun lopputilaan oppilas etenee yhden tai useamman niin sanotun välitilan kautta. Mitä isompi muutos on kyseessä verrattuna oppilaan mielessä olevaan kuvaan, sitä kauemmin haluttuun lopputulokseen pääseminen kestää. Voidaan ajatella myös, että mitä samanlaisemmat kuvat ovat tarkastelun alla, sitä vaikeampaa on huomata niiden eroavaisuuksia. Jos kuvat eroavat vain hieman kokonsa suhteen, oppilas ei välttämättä miellä tätä eroavaisuudeksi mikäli kuviot ovat muuten samanmuotoiset. Gal & Linchevski (2010) havaitsivat myös tutkimuksessaan, että kaksi kuviota on helpompaa todeta yhteneväisiksi mikäli ne saadaan toisistaan peilaamalla kuin jos kappaleiden saattamiseen samanlaiseen asentoon tarvitaan sekä peilausta että kuvion kääntämistä. Tällöin ei myöskään synny virheitä niin paljon, kun tarvitaan vähemmän mielessä tehtäviä vaiheita.

Monimutkaisemmat kuviot puolestaan rakentuvat mielessämme olevista hierarkkisista yksiköistä, jotka ovat osia kononaisuudesta. Tämä siis tarkoittaa sitä, että mielessämme oleva kuva, esimerkiksi tarkasteltavasta geometrisesta kappaleesta, muodostuu useasta pienemmästä osasta. Mikä tarkoittaa sitä, että pystymme mielessämme hajoittamaan kuvan pienempiin alayksikköihin. Ajatusta hierarkkisten yksiköiden muodostamista kuvista ja erityisesti suuremman kokonaisuuden hajoittamista pienempiin palasiin edustaa myös luvussa 2.1 esittelemäni top-down prosessi. Silfverbergin (1999) mukaan liiallinen kuvaan takertuminen saattaa kuitenkin estää oppilasta huomaamasta muita lähestymistapoja tarkasteltavaan tehtävään. Lisäksi mielikuviin tukeutumisesta saattaa olla haittaa matemaattiselle käsitteenmuodostukselle. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä tällaisesta kuvien hierarkkisesta rakenteesta käyttäen apuna myös Galin & Linchevskin (2010) tutkimuksesta löytyvää kuvaa neliöstä ja sen lävistäjistä. Tämä kuva on esitettynä kuvassa 2.3.



Kuva 2.3: Neliön lävistäjien kohtisuoruuden hahmottaminen

Kun tarkastellaan neliötä ja sen lävistäjiä tarkemmin, huomataan että lävistäjien avulla on mahdollista muodostaa erilaisia mielikuvia siitä mitä kuvassa todella on. Osa näkee kuvassa neliön, jonka sisälle on laitettu rasti. Toisille taas kuvassa on neljä saman kokoista kolmiota, jotka yhdessä muodostavat neliön. Jotkut puolestaan saattavat nähdä kuvassa vain kaksi isompaa kolmiota, jotka edelleen muodostavat yhdessä halutun neliön ja joilla on yhteisenä sivuna neliön toinen lävistäjistä. Tällainen mielikuva, jossa kaksi suurempaa kolmiota muodostavat neliön tekee oppilaille lähes mahdottomaksi huomata neliön voivan muodostua myös neljästä pienemmästä kolmiosta. Tällaisella hierarkkialla oppilaiden on mahdotonta huomata neliön lävistäjien leikkauspisteeseen syntyviä suorakulmia, sillä oppilas ei ole hahmottanut mieleensä syntyneessä kuvassa kuin toisen lävistäjän.

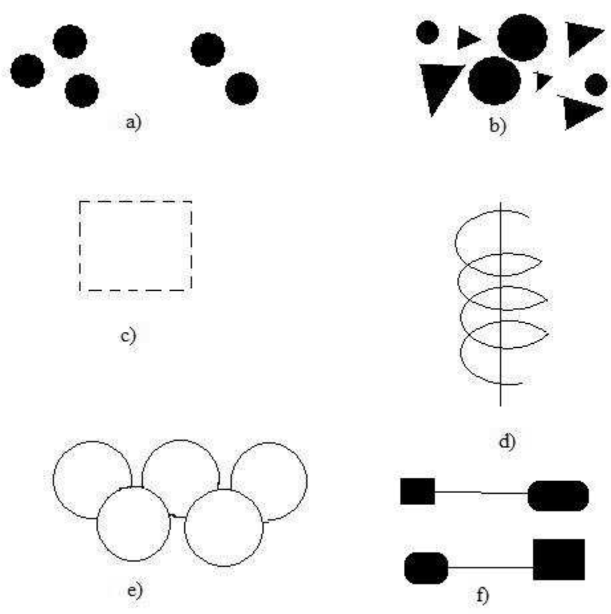
Tarkastellaan vielä hieman kuvaa 2.3, mutta keskitytään nyt lävistäjien leikkauspisteeseen, joka samalla kertoo meille myös lävistäjien kohtisuoruuden. Kiinnitetään nyt huomiota erityisesti siihen, minkälaisia vaikeuksia oppilailla voi olla liittyen kohtisuoruuden tunnistamiseen. Gal & Linchevski (2010) ovat esittäneet viisi erilaista näkökulmaa näiden vaikeuksien syntymiselle. Yhtenä ongelmana voidaan ajatella sitä, että jotkut oppilaat eivät tunnista mihin suorakulmia syntyy, kun puhutaan kohtisuoruudesta. He saattavat vain osoittaa sormellaan kohtaa jossa lävistäjät leikkaavat, sen kummemmin tunnistamatta kulmaa. Näin syntynyttä ongelmaa tunnistaa kohtisuoruuteen liittyvää suorakulmaa voidaan selittää Gestaltin periaatteilla, joita esitellään paremmin luvussa 2.4. Näistä periaatteista ongelmaa parhaiten selittää jatkavuuden periaate, jonka mukaan oppilas pystyy havaitsemaan kaksi lävistäjää, mutta ei pysty lävistäjien leikkauspisteessä kääntymään toisen lävistäjän suuntaan, kun on aluksi edennyt toista lävistäjää pitkin leikkauspisteeseen asti. Toinen mahdollinen ongelma liittyy oppilaan aikaisempiin kokemuksiin suorankulmaan liittyen. Mikäli oppilas on aikaisemmin tottunut siihen, että suorakulma on aina horisontaalisen ja vertikaalisen sivun muodostamassa kulmassa, on hänen erittäin vaikeaa huomata lävistäjien leikkauspisteeseen syntyviä suorakulmia. Oppilas saattaa siis hyvinkin hahmoittaa neliön jokaiseen kulmaan muodostuvan suorankulman, sillä nämä sopivat hänen aikaisemmin hahmottamiensa suorakulmien kanssa hyvin yhteen, mutta ei lävistäjien kohtisuoruutta osoittavia suorakulmia. Tämän tapainen tunnistaminen on luvussa 2.1 esiteltyä bottom-up -prosessointia, joka perustuu oppilaan aikaisempiin tietoihin. Kolmantena voimme tarkastella tilannetta, jossa oppilas aluksi havaitsee kaksi suoraakulmaa neliön kulmista. Kun oppilaalle kerrotaan, että hän on kyllä tunnistanut oikein suorankulman, mutta nämä kulmat eivät kerro mitään lävistäjien kohtisuoruudesta, oppilas ryhtyy vertaamaan löytämiään suorakulmia mielessään oleviin kuviin suorakulmista. Tällöin oppilas saattaa löytää, ensin löytämiään suorakulmia mielessään kääntelemällä, uudet suorakulmat neliön kahdesta muusta kulmasta. Tässä tapauksessa oppilaan omat käsitykset siitä mihin ja miten suorakulma syntyy eivät mahdollista tilannetta, jossa oppilas huomaisi kahden lävistäjän kohtisuoruuteen liittyvät suorakulmat. Neljäntenä asiana on mahdollista ajatella tilannetta, jossa oppilas saattaa säilyttää muistissaan useita erilaisia malleja suorakulmasta. Näistä malleista osa voi olla helposti mieleen palautettavissa, mutta osan mieleen palauttaminen vaatii pitkäaikaismuistin aktivointia $(Gal\&Linchevski(2010))$. Viidentänä näkökulmana Gal & Linchevski esittävät tilanteen, jossa oppilas hajoittaa neliön kahteen kolmioon visuaalisen informaation prosessoinnin aikana. Neliön jakaminen kolmioihin vaikeuttaa kohtisuoruuden tunnistamista, koska sama kulma ei sisälly kumpaankin kuvioon ja oppilas saattaa toisaalta kiinnittää nyt huomionsa pelkästään muodostuneeseen suorakulmaiseen kolmioon.

On myös mahdollista, että eräs syy siihen, miksi oppilailla on vaikeuksia geometrian oppimisen kanssa liittyy siihen, missä järjestyksessä ja millaisen kuvituksen kera asioita on hänelle esitetty. Jos opettaja esittää esimerkiksi suorakulmaisen kolmion aina kuvan $2.1a)$ mukaisesti, tämä kuva jää oppilaan mieleen ja pahimmassa tapauksessa hän tunnistaa jatkossa vain tämän mallin mukaiset kolmiot suorakulmaiseksi. On siis tärkeää, että ennen jokaista tuntiaan opettaja miettii voisiko asian ilmaista jollakin toisella tavalla tai voisiko jonkun tunnin esimerkkikuvista piirtää toisella tavalla. Nykypäivänä opettajille tarjotaan myös paljon niin sanottua valmista materiaalia opetuksen tueksi. On olemassa muun muassa niin sanottuja opettajan oppaita lähes jokaiseen yläkoulun kurssikirjaan. Näissä oppaissa on lähes täydellisesti kuvattuna tunnin kulku ja joissakin kirjoissa on jopa kuva, siitä mitä taululle tulisi kirjoittaa. Opettaja voi päästä parhaimmillaan hyvin helpolla, mikäli luottaa sokeasti siihen, mitä näissä oppaissa sanotaan. On kuitenkin syytä nostaa esille kysymys siitä, onko näissä kirjoissa esitetty asioiden opettamisjärjestys välttämättä se oikea ja esiintyykö kirjoissa kaikki sellaiset asiat, jotka ovat jatkon kannalta oleellisia.

2.4 Gestaltin periaatteet

1890−luvulla syntyi Saksassa ja Itävallassa niin kutsuttu Gestalt-teoria, joka toimi ikään kuin vastalauseena atomismille. Max Wertheimer ja hänen kollegansa tulkitsivat havainnon aktiiviseksi tapahtumaksi, jossa aivot järjestelevät havainnon kokonaishahmoksi. He loivat pohjan niin sanotulle hahmopsykologialle, jonka edustajat johtivat niin sanotut Gestaltin periaatteet, joista käytetään myös nimitystä hahmolait. Näiden lakien tarkoituksena oli selittää sitä millä perusteella aivomme järjestelevät yksityiskohdista kokonaisuuksia. Yleensä Gestaltin periaatteita on käytetty selittämään näköhavainnoinnin kautta tapahtuvaa oppimista, mutta yhtä hyvin periaatteita voitaisiin soveltaa kuullunymmärtämisen kautta tapahtuvan oppimisen selittämisessä.

Desolneux, Moisan ja Morel (2008) esittelevät teoksessaan From Gestalt Theory to Image Analysis kaiken kaikkiaan yhdeksän erilaista Gestaltin luokitteluperiaatetta, jotka ovat läheisyys, samanlaisuus, valiomuotoisuus, jatkuvuus, sulkeutuminen, yhteenliittyminen, taipuvuus kaareutua, symmetria, yhteinen liike ja aikaisemmat kokemukset. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkien kanssa, mitä kukin periaate todella tarkkoittaa. Aloitetaan läheisyyden laista, jossa lähekkäin sijaitsevat kuviot mielletään yhteenkuuluviksi. Tästä voisimme ottaa esimerkkinä kuvan 2.4*a*), jossa on piirrettynä viisi ympyrää.



Kuva 2.4: Gestaltin periaatteet

Gestaltin läheisyyden periaatteen mukaan, kuvan ympyrät jaetaan nyt kahteen ryhmään sen perusteella kuinka lähekkäin ne toisiinsa nähden sijaitsevat. Mitä tiiviimiinnin kuviot toisiinsa nähden sijaitsevat, sen vahvemmin ne koetaaan yhteenkuuluviksi. Tällaisen ryhmittelyn perusteena ei siis ole kuvioiden samankokoisuus tai edes samanmuotoisuus, kunhan kuviot vain sijaitsevat lähellä toisiaan.

Samanlaisuuden periaate toimii siten, että ominaisuuksiltaan samankaltaiset kuviot mielletään yhteenkuuluviksi. Visuaalisen havainnoinnin kannalta tällaisia ominaisuuksia voivat olla esimerkiksi väri, muoto, koko ja tummuus. Tarkastellaan esimerkkinä kuvaa 2.4*b*), jossa on kuvattuna kolmioita ja ympyröitä. Kiinnititkö kuvaan katsoessasi huomiota ensin siihen, että kuvassa on kolmioita ja ympyröitä vai siihen minkä kokoisia kuviot ovat? Tämän lain noudattaminen korostuukin, kun halutaan korostaa visuaalisen tiedon merkitystä. Esimerkiksi mainoksissa ja varsinkin liikennemerkeissä muodolla ja värillä on hyvinkin suuri merkitys.

Valiomuotoisuuden lailla tarkoitetaan sitä, että ihminen pyrkii aina hahmottamaan näkemänsä symmetrisempänä ja yksinkertaisempana mikäli se on mahdollista. Tästä johtuen oppilaat tunnistavat opettajan vapaalla kädellä piirtämän ympyrän ympyräksi, vaikka se ei joka kohdasta olisikaan säteeltään täsmälleen sama. Samoin voimme ajatella kuvan 2.4*c*)-kohdan esittävän neliötä, vaikka sillä ei varsinaisesti olekaan neljää kokonaisesta viivasta muodostuvaa sivua.

Neljäntenä tarkastelemme jatkuvuuden periaatetta. Tämän lain mukaan yhtenäinen viiva koetaan kuvioksi, vaikka sen leikkaisikin jokin toinen kappale tai suora. Tällöin havainnoitsija nimittäin jakaa kuvion selkeästi jatkuviin osiin. Esimerkkinä tällaisesta tilanteesta voimme pitää kuvan 2.4*d*)-kohdan tilannetta, missä voimme ajatella suoran useampaan otteeseen leikkautuvan spiraalilla tai spiraalin leikkautuvan useaan otteeseen suoralla. Joka tapauksessa havaitsemme kummankin kuvion täysin erillisinä jatkuvina tapauksina.

Sulkeutumisen periaatteen mukaan suljettu viiva muodostaa kuvion. Myös lähes suljettu viiva toteuttaa sulkeutumisen periaatteen. Tämän on Gestaltin periaatteista yleisimmin käytettyjä. Kuvan 2.4*e*)-kohdassa näemme kuvan etualalla olevat kaksi palloa. Tämän lisäksi voimme hahmottaa myös kolme taakse jäävää vaillinaista ympyrää palloksi. Tämä johtuu siitä, että ajattelemme takana olevien pallojen vain jäävän etumaisten pallojen taakse, jolloin näemme niistä vain osan. Tällaisia tilanteita, jossa mielemme ikään kuin täydentää näkemäämme, tulee vastaan joka päivä. Ajatellaan esimerkiksi tilannetta, jossa valkoisen aidan takaa näkyy neljä tassua ja aidan yläreunasta vilkkuu häntä. Vaikka tassujen jälkeen hahmon kuva katkeaakin aitaan, se jatkuu edelleen aidan päältä paljastaen hännän. Tällöin mielessäsi muodostuu kuva siitä, että näkemäsi hahmo aidan toisella puolella on koira, vaikka et hahmoa kokonaan näkisikään. Sulkeutumisen periaatetta ei kuitenkaan noudata tilanne, jossa C-kirjaimen kuviteltaisiin olevan ympyrä.

Tämä johtuu juurikin siitä, että C-kirjaimen päät eivät sulkeudu eivätkä ne jää minkään toisen kuvion taakse.

Yhteenliittyvyyden periaate puolestaan sanoo, että toisiinsa liitetyt kappaleet kuuluvat yhteen ryhmään. Tämä tarkoittaa sitä, että kappaleet voivat olla hyvinkin erilaisia, mutta kuuluvat yhteen sillä ne on yhdistetty toisiinsa esimerkiksi viivalla, kuten kuvassa $2.4f$). Tämä Gestaltin periaate on siinä mielessä hyvinkin ristiriitainen, että se löytyy vain osasta kirjallisuudesta jossa käsitellään Gestaltin periaatteita. Kuitenkin niissä teoksissa, joissa mainita tästä laista on, kerrotaan tämän periaatteen olevan niin sanotusti vahvempi kuin yksikään muu periaate.

Kuten aikaisemmin jo todettiin Desolneux, Moisan ja Morel (2008) ovat määritelleet yhdeksi Gestaltin periaatteksi taipuvuuden kaareutua. Tätä periaatetta ei kuitenkaan tarkastella heidän julkaisussaan juuri ollenkaan. He toteavat vain periaatteen liittyvän hyvin läheisesti sulkeutuvuuden periaatteeseen sekä jatkuvuuden periaatteeseen. Tämän lain perusteella pystymme siis ainakin karkeasti jaottelemaan pyöreitä muotoja sisältävät objektit erilleen teräviäkulmia sisältävistä objekteista.

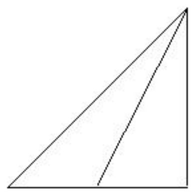
Kolmanneksi viimeisenä tarkastelemme symmetriaa. Tämän periaatteet tarkoituksena on luokitella asioita sen perusteella kuinka symmetrisiä ne ovat. Joskus symmetrinen kappale saattaa muodostua useammasta pienemmästä kappaleesta. Tällaiseen luokitteluun ei vaikuta kappaleen koko tai väri, vaan pelkästään se onko tarkasteltava kappale symmetrinen. Mikäli siis ryhmittelemme esimerkiksi geometrisia kuvioita tämän lain mukaan, voimme hyvinkin päätyä tilanteeseen jossa neliöt ja tasasivuiset kolmiot kuuluvat samaan ryhmään. Onneksi voimme muiden Gestaltin periaatteiden avulla jakaa näin syntyineitä ryhmiä pienempiin osiin.

Tarkastellaan seuraavaksi yhteisen liikkeen periaatetta. Tällä periaattella muodostettuun ryhmään kuuluvat ne objektit, jotka näyttävät liikkuvan samaan suuntaan samalla nopeudella. Tällainen tilanne on periaatteessa mahdollista esimerkiksi liikenteessä. Ajatellaan tilannetta, jossa kymmenen autoilijaa ajaa peräkkäin samalla tiellä nopeusrajoitusten määräämällä nopeudella. Tällöin kullakin autolla on sama nopeus ja sama suunta, eikä minkään auton voida sanoa poikkeavan muista. Poikkeavuutta voi kyllä olla muissa ominaisuuksissa, kuten auton värissä tai koossa, mutta ei liikkeen suunnassa tai nopeudessa.

Viimeisenä tarkastelemme vielä aikaisempiin kokemuksiin pohjautuvaa periaatetta. Tätäkin periaatetta on esitelty vain hyvin vähän Desolneux'n, Moisan ja Morel'n (2008) julkaisussa. Tämän periaatteen avulla objektit voidaan luokitella aikaisempiin kokemuksiin perustuen. Tällainen ryhmitteleminen ei kuitenkaan välttämättä tarkoita sitä, että ryhmittelijä tietäisi, miksi laittaa juuri tietyt objektit samaan ryhmään. Hän on vain saattanut nähdä jonkun toisen tekevän niin ja oppinut mallin sieltä.

Olemme nyt saaneet tarkasteltua Desolneux'n, Moisan ja Morel'n (2008) määrittelemät yhdeksän Gestaltin periaatetta. Näitä periaatteita on löydettävissä hieman eri määriä eri lähteistä, riippuen siitä kenen/keiden julkaisuja tarkastelee. Suurimmassa osassa tarkastelemistani artikkeleista, kuten Gal & Linchevskin (2010) artikkelissa To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception, esitellään ainoastaan viisi Gestaltin periaatetta, joita ovat läheisyys, samanlaisuus, jatkuvuus, sulkeutuminen sekä kohde ja tausta. Näistä periaatteista neljän ensimmäisen merkitystä on tarkastelu edellä, joten tarkastellaan vielä kohde ja tausta -periaatteen toimivuutta.

Kohde ja tausta -periaatteen mukaan ihminen havainnoi rajatun alueen sisäpuolella olevan kuvion kohteeksi ja kaiken muun alueen sisäpuolella olevan taustaksi. Voimme ajatella tauluissa olevien raamien rajaavan taulun. Tällöin vahvimmin kuvasta esiin nousevasta objektista tulee kohde ja kaikki muu ajatellaan taustaksi. Tätä periaatetta voi käyttää hyväkseen eri median aloilla, jossa informaation sekaan on mahdollista piillottaa mainoksia.



Kuva 2.5: Yhteisten osien tunnistaminen

Miten Gestaltin periaatteilla voidaan siis selittää niitä vaikeuksia, joita oppilailla on liittyen geometristen kuvioiden visuaaliseen hahmottamiseen? Tarkastellaan tähän liittyen Gal & Linchevskin (2010) julkaisusta löytyvää tilannetta, jossa tutkitaan, mitä yhteisiä osia kuvan 2.5 kolmioilla on. Tutkimuksessa kävi ilmi, että oppilaat eivät osanneet tunnistaa oikeita yhteisiä osia. Useimmin havaittu virhe oli tulkita kummankin kolmion pohjana toimiva sivu yhteiseksi sivuksi tai kolmioiden yläosassa sijaitsevien kulmien summa yhteiseksi kulmaksi. Jotta oppilas löytäisi oikean vastauksen tähän kysymykseen tulee hänen erottaa kolmiot kahdeksi erilliseksi kolmioksi. Tällöin hänen on helpompaa tarkastella niitä kolmion osia, jotka löytyvät sekä kuvasta 2.5, että kahdesta erotetusta kolmiosta. Kuitenkin tällainen kolmioiden erottaminen sotii hyvin vahvasti sulkeutumisen periaatetta vastaan. Tämä sen takia, että kuvassa 2.5 on havaittavissa yksi suurempi kolmio jonka rajoja oltaisiin nyt rikkomassa. Mikäli erottaisimme kolmiot toisistaan rikkoisimme samalla myös läheisyyden periaatetta, jonka nojalla kaksi kolmiota kuuluvat yhteen mikäli ne ovat riittävän lähellä toisiaan. Tällaisia tilanteita, joissa oppilas ei kykene jakamaan kuvaa pienempiin osiin, tulee vastaan opettajan työssä usein. Tällöin opettaja voi kyselemällä tiedustella mitä oppilas näkee kuvassa ja yrittää näin hahmottaa, missä kohtaa ongelmanratkaisua vaikeuksia syntyy. Opettaja voi tämän jälkeen helpommin auttaa oppilasta hahmottamaan kuviota, esimerkiksi täydentävien lisäkysymysten avulla.

Geometristen kuvioiden tulkitseminen halutulla tavalla ei siis aina ole helppoa. Etenkin, jos halutun asian tunnistaminen kuviosta vaatii Gestaltin periaatteiden rikkomista. Tämä on tietenkin vain yksi tapa selittää vaikeuksia, joita oppilaille syntyy geometrisia kuvioita tarkasteltaessa. Otetaan vielä lopuksi esimerkki, jossa tarkastelemme vieruskulmien syntymistä. Ajatellaan tilannetta, jossa kaksi eri suoraan leikkaavat. Tällöin oppilaan tulisi rikkoa jatkuvuuden periaatetta tunnistaakseen vieruskulmat. Hänen täytyisi siis ajatella toisen suorista katkeavan leikkauspisteen jälkeen, jolloin hän saisi vieruskulmat muodostettua. On kuitenkin huomattava, että eteen tulevat ongelmat Gestaltin periaatteiden suhteen on mahdollista välttää käyttämällä samanlaisuuden periaatetta luomaan uudenlainen ryhmittely asioille. Tämän voi tehdä esimerkiksi värittämällä tärkeitä osia samalla värillä tai vahvistamalla haluttuja osia tummemmaksi kuin muita. Kuten aikaisemmin on todettiin Gestaltin periaate tarjoaa sekä selityksen geometristen ongelmien muodostumiselle visuaalisesta näkökulmasta, että yhden mahdollisen ratkaisutavan syntyneisiin ongelmiin.

Luku 3

Luetun ymmärtäminen

Luvussa 2 tarkasteltiin niitä geometrian vaikeuksia, joita oppilaille syntyy näköhavainnoin yhteydessä. Saimme myös muutamia ideoita siihen, miten tällaisten vaikeuksien syntymistä voitaisiin estää. Kaikki geometrian oppimisen vaikeudet eivät suinkaan johdu vain siitä, miten havainnoimme asioita vaan osa saattaa johtua siitä, miten luemme ja tulkitsemme niitä. Tarkastellaan seuraavaksi tähän liittyen luetun ymmärtämisen kautta muodostuvia vaikeuksia geometrian oppimisessa.

Kai-Lin Yang (2011) on tarkastellut julkaisussaan oppilaiden vaikeuksia ymmärtää geometrisia todistuksia. Osa näistä vaikeuksista on sidoksissa luetun ymmärtämiseen. Kai-Lin Yang (2011) kertoo tutkijoiden havainneen, että koulussa menestyksekkäämmät oppilaat eroavat vähemmän menestyksellisemmistä oppilaista sekä määrällisesti että laadullisesti kogniitiivisten ja metakognitiivisten lukustrategioiden käytössä. Tällä tavalla lukemaan oppimisesta on hyötyä paitsi akateemisessa oppimisessa kaikissa oppiaineissa myös elinikäisessä oppimisessa.

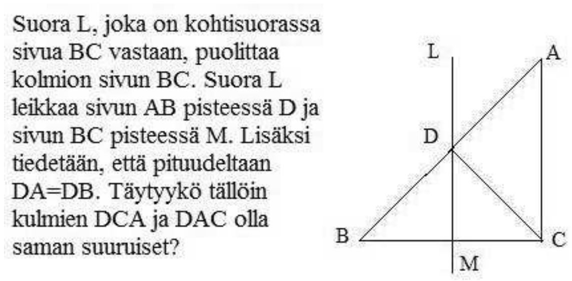
Todistusten luetun ymmärtämisellä tarkoitetaan todistusten keskeisten osien ymmärtämistä ja tietoa siitä miten todistus toimii sekä miksi se on oikein. Jotta tietäisimme todistuksen olevan oikein, on myös tiedettävä, mitä todistuksella voidaan todistaa. Todistuksien lukemisen sekä sen seurausten ymmärtämisen prosessia on hyvin vaikeata havaita, sillä kaikki siitä ei tapahdu tietoisesti vaan ymmärtämistä tapahtuu myös alitajuntaisesti. Tämän takia Lin & Yang (2007) loivat yhdeksäsluokkalaisten oppimistavoitteiden pohjalta viisiosaisen määrittelyn, jonka osia ovat perustiedot, looginen tila, sopeutuminen tai yhteenvetäminen, yleispätevyys ja soveltaminen. Näistä perustietojen näkökulma vaatii oppilasta ymmärtämään matemaattisten termien, kuvioiden ja symboleiden esittämistä sekä lauseiden todistamista. Loogisen tilan näkökulma taas vaatii oppilasta tunnistamaan oikein väitteiden aseman, joka saattaa olla jokin tila, päätelmä tai sovellettu ominaisuus todistuksessa. Yhteenvetämisen näkökulmasta katsottuna oppilaan pitäisi pystyä tunnistamaan todistuksen ydinkohdat tai esittämään kriittinen idea todistuksesta. Toisaalta yleispätevyyden näkökulmasta oppilaan tulisi pystyä arvioimaan todistus ehdotuksen paikkaansa pitävyyttä sekä arvioida, mikä on todistuksen kannalta oleellista. Soveltamisen näkökulma puolestaan edellyttää, että oppilas osaa soveltaa näkemäänsä esitystä matemaattisesta todistuksesta myös toisessa tilanteessa. Kai-Lin Yangin tutkimus kognitiivisten ja metakognitiivisten lukustrategioiden vaikutuksesta geometristen todistusten luetun ymmärtämiseen pohjautuu osittain juuri tälle jaottelulle.

Metakognitiivisuudella tarkoitetaan tietoisuutta omista ja muiden ihmisten oppimisesta, tietämisestä, ajattelusta ja kognitiivisista taidoista. Mikäli haluaa menestyä eivät kognitiiviset perustaidot enää riitä, vaan täytyy omaksua oppimaan oppimisen taito. Tällöin heikommankin oppijan metakognitiivisia taitoja pystytään kehittämään ja samalla pystytään edistämään hänen oppimistaan. Metakognitiiviset oppimisstrategiat puolestaan edellyttävät oppilaalta tarkkaavaista lukemista, huolellista seuraamista ja asioiden hallintaa. Kai-Lin Yangin (2011) mukaan tällaiset strategiat vaativat, että todistuksen päämäärä on tiedossa ja että pystyy tunnistamaan sen keskeiset osat. On myös tärkeää, että oppilas pystyy havaitsemaan kahden tai useamman peräkkäisen välivaiheen välisiä yhteyksiä todistuksessa. Lisäksi olisi hyvä pystyä seuraamaan omaa ymmärrystään ja näin ollen havaitsemaan myös niitä kohtia, joissa on saattanut syntyä väärinkäsityksiä. Kognitiiviset oppimisstrategiat puolestaan sisältävät ajatuksen siitä, että ensin tulisi lukea väite, minkä jälkeen voisi siirtyä alleviivaamaan, keskittymään oheiseen kuvioon ja asioiden erottamiseen sekä numeroimaan todistuksen vaiheita. Osa tutkijoista on ajatellut, että lukemiseen vaikuttavat sekä metakogniiviset tekijät että kognitiiviset tekijät. Osa taas on sitä mieltä, että metakognitiiviset tekijät vaikuttavat kognitiivisiin tekijöihin jotka puolestaan vaikuttavat lukemiseen. Yhtä selkeää linjausta siihen kumpi malleista on oikeampi ei ole olemassa.

Kai-Lin Yang (2011) havaitsi tutkiessaan 533:n taipeilaisten yhdeksäsluokkalaisten metakognitiivisten ja kognitiivisten lukustrategioidin käyttöä geometristen todistuksien luetun ymmärtämisessä, että oppilaat oli mahdollista jakaa kolmeen ryhmään sen perusteella, miten he geometrian todistuksen osasivat tehdä. Jaottelun kolme ryhmää olivat hyvän suorituskyvyn omaavat oppilaat, kohtalaisen suorituskyvyn omaavat oppilaat sekä kehnon suorituskyvyn omaavat oppilaat. Suurin osa hyvän suorituskyvyn omaavista oppilaista pystyi vastaamaan oikein tutkimuksessa olleisiin 16:een kysymykseen, kun taas kehnon suorituskyvyn omaavat oppilaat eivät pystyneet yhteenvetämään asioita eivätkä myöskään yleispätevöittämään ja soveltamaan niitä. Kohtalaisen suorituskyvyn omaavat oppilaat puolestaan pystyivät hieman paremmin yhteenvetämään asioita, kuin kehnon suorituskyvyn omaavat.

Yleisesti tutkimuksessa havaittiin hyvän suorituskyvyn omaavien oppilaiden pärjäävän sekä metakognitiivisten että kognitiivisten lukustrategioiden avulla todistamisessa paremmin, kuin kehnon suorituskyvyn omaavien oppilaiden. Hyvän suorituskyvyn omaavien oppilaiden havaittiin käyttävän geometrian todistuksien ratkaisemisessa lähes yhtä hyvin hyväkseen niin luetun ymmärtämisen taitoa kuin kognitiivista lukustrategiaa todistusten luomiseen, sekä metakogniitiivista lukustrategiaa suunnittelun ymmärtämiseen. Hieman vähemmän he käyttivät hyväkseen metakognitiivisia lukustrategioita seuraamusten ja hallinnan ymmärtämisessä. Kehnon ja kohtalaisen suorituskyvyn omaavien oppilaiden tulokset olivat samanlaiset, mutta kohtalaisen suorituskyvyn omaavat jäivät jokaisessa ominaisuudessa reilusti hyvän suorituskyvyn omaavista ja kehnon suorituskyvyn omaavat puolestaan hieman kohtalaisen suoristuskyvyn omaavista.

Tutkimustuloksista käy ilmi, että oppilailla, joilla kognitiiviset ja metakognitiiviset lukustrategiat eivät ole niin hyvin harjaantuneet, on selvästi heikommat edellytykset saada todistus rakennettua, kuin niillä joilla kyseiset lukustrategiat ovat hyvin hallussa. Ajatellaan esimerkkinä Kai-Lin Yangin (2011) tutkimuksessa esitettyä ongelmaa, joka on esitettynä kuvassa 3.1.



Kuva 3.1: Geometrinen ongelma

Sekä hyvän että kehnon suorituskyvyn omaavat oppilaat saattavat hyvinkin molemmat hahmottaa kuvasta alkuperäisen suuren kolmion, sekä kolmion sisälle muodostuneet kolme pienempää kolmiota. Mikäli oppilaille olisi tehtävässä annettu vain tehtävänanto olisi suurin osa oppilaista osannut itse muodostaa kyseisen kuvion lukemalla tehtävänannon läpi. Sekä tehtävänannosta että kuvasta on nähtävillä sivujen BD ja AD olevan samanpituisia. Tehtävässä on myös annettu tieto siitä, että suora L puolittaa sivun BC pisteessä M, jolloin myös BM on samanpituinen MC:n kanssa. Hyvän suorituskyvyn omaava oppilas pystyy vielä tarkastamaan edellisen väitteen yhtäpitävyyden toteamalla kulman $\angle BMC$ olevan yhtäsuuri kulman $\angle CMD$ kanssa. Tämän tyyppiseen asioiden oikeellisuuden tarkastamiseen ja aikaisempien tietojen hyödyntämiseen eivät kehnon suorituskyvyn omaavat oppilaat pysty, mutta tilannetta voidaan yrittää parantaa kehittämällä oppilaiden metakognitiivisia taitoja. Seuraavassa todistamisen vaiheessa paremman suorituskyvyn omaavat oppilaat havaitsevat kolmioiden BMD ja CMD olevan (sks) yhteneviä, missä (sks) on lyhenne sanasta sivu-kulma-sivu. Kolmioista on siis mahdollista erottaa yksi yhteinen sivu, joka on MD ja se on kummallekin kolmiolle yhtäpitkä. Lisäksi löydetään yhtäpitkät sivut BM ja MC sekä saman suuruiset kulmat $\angle BMC$ ja $\angle CMD$. Tästä puolestaan hyvän suorituskyvyn omaava oppilas pystyy saamaan irti tiedon siitä, että nyt sivut BD ja CD ovat yhtäpitkät. Tästä taas seuraa, että sivut CD ja AD ovat yhtäpitkät ja että kulmat $\angle DCA$ ja $\angle DAC$ ovat samansuuruiset. Edellisistä jälkimmäinen väite antaa myös tehtävässä halutun ratkaisun. Kuten aikaisemmin on jo todettu kaikki geometriaan liittyvät ongelmat eivät johdu visuaalisista vaikeuksista hahmottaa asioita, vaan joskus myös sillä miten lukee asioita ja mihin kiinnittää huomiota tehtävää tarkastellessaan on merkitystä. Hyvän suorituskyvyn omaavat oppilaat pystyvät melko vaivatta etenemään todistuksessa lukemalla huolellisesti tehtävänannon ja miettimällä mitä tietoja on annettu, mihin tulisi päästä ja mitä keinoja haluttuun lopputulokseen pääsemiseen voisi käyttää. Kehnomman suorituskyvyn omaavia oppilaita täytyy enemmän ohjata ratkaisuun pääsemiseksi, mutta heidänkin taitojaan on mahdollista harjaannuttaa metakognitiivisia taitoja kehittämällä.

Luku 4

Van Hielen malli

Fuys, Geddes & Tischler (1988) ovat erillisteoksessaan [3], käsitelleet Van Hielen ajattelumallia geometriasta nuorten keskuudessa. Pierre M van Hiele oli erityisen kiinnostunut juuri siitä, millaisiin vaikeuksiin yläkoulussa opiskelevat nuoret törmäävät geometrian opiskelussa. Hän uskoi, että yläkoulun geometriaan liittyy ajattelua suhteellisen korkealla tasolla, mutta oppilaat eivät ole vielä saaneet riittävästi kokemuksia ajattelun alemmilla tasoilla, jolloin vaikeuksien syntyminen geometriassa mahdollistuu (Fuys, Geddes & Tischler,1988). Van Hielen mallin mukaan oppilas käy läpi viisi ajattelun tasoa, joissa oppilas ei pysty etenemään seuraavalle tasolle ennen kuin on käynyt läpi edellisen. Tämä malli on kehittynyt seurauksena Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldolfin tutkimuksista, joihin he saivat idean opetustyössään huomaamistaan havainnoista geometrian oppimisen edistymisestä. Vuonna 1957 Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof julkaisivat väitöskirjansa, joista van Hiele-Geldofin osuudessa käsiteltiin didaktista kokeilua, jonka tarkoituksena oli edistää oppilaiden ajattelun tasoa (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Van Hiele sen sijaan muotoili geometrisen ajattelun tasojen rakenteet ja esitti ajatuksen siitä, miten oppilas pystyisi edesauttamaan omaa geometrian ymmärtämistään. Seuraavassa kappaleessa esitellään van Hielen mallin mukaiset viisi ajattelun tasoa, minkä jälkeen jokainen taso esitellään vielä yksityiskohtaisemmmin.

Nollatasolla,jota voidaan myös nimittää tunnistamisen tasoksi, oppilas kykenee tunnistamaan, nimeämään ja vertailemaan geometrisia kuvioita, kuten kolmiota, kulmia ja kohtisuoruutta. Kuvion tunnistaminen ja vertaileminen perustuu sen visuaaliseen hahmoon ominaisuuksien sijaan. Van Hielen nollatasolla onkin hyvin paljon samoja piirteitä kuin Kai-Lin Yangin (2011) perustietojen näkökulmassa, jossa myös oppilaan tulisi ymmärtää symbolien, kuvioiden ja matemaattisten termien esittämistä. Erona näillä kahdella on kuitenkin se, että Kai-Lin Yangin (2011) perustietojen näkökulmassa oppilaalta vaaditaan tunnistamisen lisäksi kuvioiden todistamisen ymmärtämistä. Tasolla yksi, jota kutsutaan myös analysoinnin tasoksi, oppilas pystyy analysoimaan kuvia ja niihin liittyviä osia. Lisäksi hän pystyy myös kokemusperäisesti huomaamaan minkä kuvioiden tai osien välillä on yhteyksiä. Tämä taso vastaa puolestaan Kai-Lin Yangin (2011) loogisentilan näkökulmaa, missä myös painotetaan kuvien ja niihin liittyvien asioiden tarkempaa ymmärrystä. Eroavaisuuksia syntyy vain siltä osin, että Kai-Lin Yangin (2011) tutkimus kohdistui pelkästään geometristen todistuksien luetun ymmärtämiseen. Tasolla kaksi eli järjestämisen tasolla oppilas pystyy ottamaan huomioon aikaisemmin löytämänsä ominaisuudet esimerkiksi seuraamalla informatiivisia argumentteja. Kolmannella tasolla eli päättelyn tasolla opiskelija todistaa lauseita deduktiivisesti ja pystyy luomaan lauseiden välisiä verkostoja. Tällaisella verkostojen luomisella tarkoitetaan sitä, että oppilas kykenee yhdistämään lauseita toisiinsa mikäli niillä on jotain yhteistä. Tällä tasolla on hyvin paljon samanlaisia piirteitä Kai-Lin Yangin (2011) soveltamisen näkökulman kanssa, jossa edellytetään oppilaan osaavan soveltaa aikaisemmin esitettyjä matemaattisia todistuksia myös muissa todistuksissa. Neljännelle tasolle (Aksioomasysteemin ymmärtämisen taso) päästäkseen oppilaan tulisi pystyä luokittelemaan lauseita erilaisiin postulaattijärjestelmiin ja lisäksi hänen tulisi myös pystyä analysoimaan näitä järjestelmiä.

Tarkastellaan seuraavaksi hieman tarkemmin edellä lyhyesti esiteltyjä viittä ajattelun tasoa, jotka oppilas käy läpi. Tunnistamisen tasolla oppilas tunnistaa suorakulmion sen muodosta ja ajattelee suorakulmion eroavan neliöstä. Geometrisia kuviota käsitelläänkin tällä tasolla kokonaisuutena eikä niin sanotusti osiensa summana. Fuys, Geddes & Tischler (1988) kertovat kolmannessa erillisteoksessaan oppilailla ilmenevien geometrian vaikeuksien olevan puhtaasti visuaalisia. Erillisteoksessa kerrotaan oppilaiden täyttävän nollatason vaatimukset lukemalla tarkoin heille tehtävässä annettut ohjeet ja mahdolliset vihjeet. Tässä vaiheessa luetun ymmärtämisellä on suuri merkitys juuri sen takia, että hyvä luetun ymmärtämisen taito mahdollistaa siirtymisen seuraavalle ajattelun tasolle, vaikka visuaalinen ymmärtäminen ei yksinään olisikaan vaaditulla tasolla.

Analysoinnin tasolla kuviot nähdään ikään kuin ominaisuuksiensa omistajina. Esimerkiksi se, että kuvio on suorakulmio merkitsee sitä, että kuviossa on neljä suorakulmaa, lävistäjät ovat yhtä pitkät ja vastakkaiset sivut ovat pituudeltaan samat. Kuviota on myös mahdollista tunnistaa pelkästään sen ominaisuuksien perusteella. Voidaankin sanoa, että tällä tasolla konkreettisilla objekteilla operointi muuttuu hiljalleen geometristen symboleiden avulla tapahtuvaksi operoinniksi. Oppilas pystyy myös lajittelemaan kuvioita niiden ominaisuuksien perusteella ja vertailemaan eri kuvioita toisiinsa. Tällä tasolla oppilaalta jää kuitenkin vielä tiedostamatta kuvioiden keskinäiset suhteet, eikä oppilas näin ollen pysty selittämään miten hänen samaan ryhmään lajittelemiensa kuvioiden ominaisuudet riippuvat toisistaan.

Tasolta yksi tasolle kaksi siitynyt oppilas pystyy järjestelemään geometristen kuvioiden ominaisuuksia. Nämä ominaisuudet ovat yleensä hyvin selvästi yhteydessä toisiinsa. Saattaa olla, että toinen ominaisuus seuraa toisesta ominaisuudesta tai jokin ominaisuus voi edeltää jotain toista ominaisuutta (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Tällä tasolla oleva oppilas kykenee myös itse muodostamaan ja käyttämään geometrisia määritelmiä. Lisäksi hän pystyy tunnistamaan kuvioista ne osat, joita hän jatkossa tarvitsee, kiinnittämättä muihin osiin tarkemmin huomiota. Suurimpana muutoksena edelliseen tasoon verrattuna, oppilas pystyy järjestämisen tasolla ymmärtämään ominaisuuksien välisiä suhteita. Oppilas ei kuitenkaan hallitse laajempia teoreemajoukkojen välisiä yhteyksiä ja geometrian ymmärtäminen aksiomaattisena tieteenä jää vaille ymmärrystä.

Oppilas pystyy päättelyn tasolla todistamaan lauseita ja väitteitä deduktiivisesti, kuten jo luvun alussa totesimme. Lisäksi hän kykenee havaitsemaan teoreemajoukkojen välisiä yhteyksiä. Tällä tasolla oppilas oppii ymmärtämään eroavaisuudeet lauseen, määritelmän ja aksiooman välillä. Myös ymmärtäminen lisääntyy, sillä päättelyn tasolla oppilas tunnistaa mitä tehtävässä on annettu ja mitä tehtävässä halutaan. Kolmannella tasolla olisi myös mahdollista kehittää aksiomaattinen järjestelmä, mutta itse aksioomat kuuluvat neljännelle tasolle.

Aksioomasysteemin ymmärtämisen tasolle on ominaista abstraktien systeemien esittäminen ja näiden mallien avulla eri ilmiöiden kuvaileminen. Kuten edellisessä kappaleessa jo hieman vihjattiinkin, tällä tasolla oppilas ymmärtää aksioomien mahdollisuudet ja rajoitukset. Lisäksi hän pystyy sujuvasti vertailemaan aksiomaattisia systeemejä keskenään. Korkeammilla van Hielen tasoilla olevat oppilaat pystyvät auttamaan alemmilla tasoilla olevia oppilaita eteenpäin.

Kuten alussa jo todettiin van Hielen mallin mukaan oppilas käy läpi edellä esitetyt viisi tasoa. Herääkin kysymys siitä, miten tällaiset viisi tasoa on voitu havaita. Fuys, Geddes & Tischler (1988) esittävät, että P.M. van Hiele ja D. van Hiele-Geldof havaitsivat geometrisen ajattelun kehittymisen olevan prosessi, joka välillä pysähtyy kunnes taas jatkuu. Tällöin ajattelun kehityskaaressa on mahdollista huomata hyppäyksiä, jotka kertovat van Hielen tasojen olemassaolosta. Mikäli oppimisprosessi on syystä tai toisesta pysähtynyt ja se ei jatkukkaan, voidaan Fuys'n, Geddesin & Tischlerin (1988) mukaan sanoa opettajan epäonnistuneen uuden asian opettamisessa. Tällöin on tapahtunut ilmiö, jossa opettaja puhuu sellaisen tason kieltä oppilaille, mitä he eivät ole vielä saavuttaneet. Oppilaat saattavat hyvinkin hyväksyä opettajan antaman selityksen asiaan, mutta asia ei painu heidän mieleensä ennen seuraavalle tasolle pääsemistä. Geometrian opiskelussa onkin siis tärkeää, että opettaja tietää luokkansa sen hetkisen tason, jotta hän pystyy käyttämään sellaista matemaattista kieltä jota oppilaiden sen hetkinen taso edellyttää.

Luku 5

Johtopäätökset

Tutkielman tarkoituksena oli tarkastella niitä vaikeuksia, joihin yläkoulun oppilaat saattavat törmätä geometriaa opiskellessaan. Aiheen laajuuden vuoksi tutkimusta rajattiin siten, että se tarkastee geometrian vaikeuksia kognitiivisesta näkökulmasta. Edellä olleissa luvuissa tarkasteltiin näitä vaikeuksia muun muassa visuaalisesta näkökulmasta katsottuna. Vaikka näiden vaikeuksien syntymistä tarkasteliin useasta eri näkökulmasta ja muutaman teorian avulla emme siltikään voi sanoa yhtä ainutta syytä siihen, miksi vaikeuksia ilmenee geometrian oppimisessa. Sen sijaan syntyneet vaikeudet pystytään lajittelemaan sen perusteella mitkä vaikeudet johtuvat opettajasta ja mitkä oppilaasta itsestään.

Van Hielen mallin mukaan opettaja saattaa tahtomattaan aiheuttaa oppilaille vaikeuksia geometrian oppimisessa, jos hän käyttää sellaista matemaattista kieltä opetuksessaan jota oppilaiden sen hetkinen ajattelun taso ei tue. Oppilaiden ajattelun tason tunnistaminen onkin opettajalle hankalaa tai ainakin se vaatii luokan parempaa tuntemista. Lisähaasteensa opettajalle tuo myös se, että oppilaat eivät suinkaan kaikki välttämättä ole samalla ajattelun tasolla vaan toiset saattavat edetä tasolta toiselle huomattavasti nopeammin kuin toiset. Näin syntyneisiin vaikeuksiin on kuitenkin helppoa puuttua, kunhan opettaja vaan nopeasti havaitsee milloin oppilas putoaa kärryiltä opettajan käyttämän matemaattisen termistön takia.

Bottom-up - ja top-down -prosessit osottautuivat hyvin käytännöllisiksi tavoiksi tunnistaa esimerkiksi haluttu geometrinen ominaisuus. Näiden prosessien käytössä on kuitenkin se ongelma, että niiden käyttäminen vaatii sen että oppilas on jo aikaisemmin tullut tutuksi tehtävässä kysytyn ominaisuuden kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilas voi prosessien avulla tunnistaa kuviosta ominaisuuden, mikäli se on esitetty samalla tavalla kuin hänen aikaisemmin näkemässään tehtävässä. Vaikeuksia syntyykin kun kuviota käännetään oppilaan aikaisemmin näkemästä asennosta eriävään asentoon ja myös silloin kun geometrisen kuvion ominaisuutta osoittava symboli poistetaan. Syyksi tällä tavoin syntyviin vaikeuksiin geometriassa voidaan ajatella opettajien käyttämien geometristen kuvioiden samanlaisen esitystavan. Mikäli opettaja piirtää kuvion aina samaan asentoon tai merkitsee aina ominaisuutta osoittavan symbolin näkyviin, ei oppilas opi ajattelemaan mitä geometrinen kuvio tai ominaisuus todella tarkoittaa. Näin ollen oppilas ei siis pysty tunnistamaan kuviota, kun sitä käännetään tai symboli poistetaan. Ratkaisuksi tähän ongelmaan Gal & Linchevski (2010) tarjoavat ajatusta siitä, että opettajien tulisi esittää oppilaille geometrisia kuvioita eri asennoissa ja opettaa miten geometrinen kuvio voidaan tunnistaa sen ominaisuuksien perusteella ilman symbolin käyttöä. Luvussa 2.2 on myös todettu, että oppilaat eivät usein pysty ymmärtämään merkintöjä, joissa on sekä verbaalista että visuaalista informaatiota esimerkiksi $a \perp b$. Tämänkin takia on suotavaa, että matemaattisten symbolien käyttämistä harkitaan aina kun se on mahdollista.

Luvussa 2.4 on esitelty Gestaltin periaatteet, joiden avulla voidaan selittää niitä vaikeuksia joita oppilailla on liittyen geometristen kuvioiden visuaaliseen hahmottamiseen. Gastaltin periaatteet itsessään ovat ikään kuin selitysmalleja sille millä perusteella aivomme järjestelevät yksityiskohdista kokonaisuuksia. Desolneux, Moisan ja Morel (2008) esittelevät kaiken kaikkiaan yhdeksän erilaista Gestaltin luokitteluperiaatetta. Näistä esimerkkinä voidaan mainita samanlaisuuden ja jatkuvuuden periaatteet. Näiden periaatteiden avulla ei kuitenkaan ole aina mahdollista tulkita geometrisia kuvioita halutulla tavalla, mikä aiheuttaa vaikeuksia oppilaille. Tällaisia vaikeuksia syntyy varsinkin silloin, kun halutun asian tunnistaminen geometrisesta kuviosta vaatii Gestaltin periaatteiden rikkomista. Esimerkiksi kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuneet vieruskulmat voi olla vaikea tunnistaa, sillä se vaatisi jatkuvuuden periaatteen rikkomista. Ongelma voidaan kuitenkin ratkaista esimerkiksi luomalla uudenlaisia ryhmittelyjä tai värittämällä geometrisesta kuviosta tiettyjä osia eri väreillä. Gestaltin periaate tarjoaa siis sekä selityksen että ratkaisun oppilailla ilmenneisiin vaikeuksiin geometriassa, tosin visuaalisesta näkökulmasta katsottuna.

Miten oppilaat itse sitten pystyvät vaikuttamaan omaan oppimiseensa geometriassa siten, että vaikeuksia ei muodostuisi? Eräs vaihtoehto on Kai-Lin Yangin (2011) mukaan metakognitiivisten ja kognitiivisten lukustrategioiden kehittäminen. Kai-Lin Yangin (2011) tekemässä tutkimuksessa tarkasteltiin taipeilaisten yhdeksäsluokkalaisten metakognitiivisten ja kognitiivisten lukustrategioiden käyttöä geometristen todistuksien luetunymmärtämisessä. Tutkimuksen perusteella oppilaat oli mahdollista jakaa kolmeen ryhmään sen perusteella miten he osasivat tehdä geometrisen todistuksen. Tämä jaottelu on esitelty tarkemmin luvussa kolme. Jaottelun perusteella voidaan sanoa että niillä oppilailla, jotka saivat todistuksen tehtyä, oli paremmat metakognitiiviset ja kognitiiviset lukustrategia taidot kuin toisilla oppilailla. Näitä taitoja on kuitenkin mahdollista harjoittaa, jolloin myös geometristen todistuksien yhteydessä ilmenevät vaikeudet vähenevät.

Toisille geometria on se helpoin aihe matematiikassa, toisille se taas on vaikein. Tutkielmani pohjalta on kuitenkin mahdollista ajatella, että niilläkin oppilailla joille geometria tuottaa päänvaivaa, on mahdollisuus päästä etenemään geometrian opiskeluissaan. Tämä vaatii kuitenkin sen, että oppilas itse on valmis tekemään asioita oppimisen eteen. Omatoiminen opiskelu ja kavereiden kanssa asioiden pohtiminen ovat oiva tapa oppia geometriaa. Myös opettajalta avun pyytäminen on kannattavaa, sillä silloin myös opettaja saattaa havahtua huomaamaan että hänen olisi syytä muuttaa opetusmetodejaan.

Lähdeluettelo

[1] Desolneux,A., Moisan,L. & Morel,J.-M. 2008. From Gestalt Theory to Image Analysis.

[2] Duval,R. 1998. Geometry from a cognitive point of view. Mammana,C & Villani,V, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, 37-52.

[3] Fuys,D.,Geddes,D. & Tischler,R. 1988. The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.

[4] Gal,H. 2005. Identifying problematic learning situations in geometry instruction, and handling them within the framework of teacher training.

[5] Gal,H., & Linchevski, L. 2010. To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Educational Studies in Mathematics, 74, 163-183

[6] Lehtinen,E., Kuusinen,J. & Vauras,M. 2007. Kasvatuspsykologia.

[7] Lehtinen,M. 2000. Matematiikan historia.

[8] Lin,F.L., & Yang K.L. 2007. The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. International Journal of Science and Mathematics Education, 5, 729-754.

[9] Pitta-Pantazi,D. & Christou,C. 2008. Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. Educational Studies in Mathematics, 70, 5-26.

[10] Rinne,R., Kivirauma,J. & Lehtinen,E. 2005. Johdatus kasvatustieteisiin.

[11] Silfverberg,H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto.

[12] Yang,K.-L. 2011. Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. Educational Studies in Mathematics ,80, 307-326.