Todistaminen ja heuristiikat

Pro gradu -tutkielma

Antti Haapakoski

2.2.2014

Oulun yliopisto

Matematiikka

Sisällysluettelo

Johdanto

Matematiikka eroaa rakenteellisesti muista tieteenaloista. Matematiikka on ainoana tieteellisenä järjestelmänä täydellisen aksiomaattinen. Aksiomaattinen järjestelmä perustuu asioihin, aksioomiin, joiden oletetaan olevan totta, ja niistä johdettuihin absoluuttisiin seurauksiin. Aksioomat eivät siis ole todistettavissa olevia asioita, vaan ne oletetaan lähtökohtaisesti todeksi. Näistä oletetuista asioista voidaan johtaa seurauksia, jotka ovat absoluuttisesti tosia oletetuille aksioomille. Todistaminen niin tuottaa näitä seurauksia, kuin osoittaa ne todeksi. Todistaminen on matematiikan tekemisen ja tietämisen ytimessä. Useissa maissa matematiikan didaktiikan alalla kiinnostus matemaattista todistamista kohtaan on ollut kasvussa jo useita vuosia (Recio & Godino, 2001).

Matemaattisen todistamisen opettamista ei ole kaikkialla tehty kunnolla. Sitä on joko laiminlyöty tai opetus on ollut suorastaan virheellistä (Gila & de Villiers, 2009). Ongelmia todistamisessa on ollut esimerkiksi niin Yhdysvalloissa, Englannissa, Hollannissa kuin Kiinassakin. Suomessa todistamisen opettamiseen liittyvä tutkimus on ollut vähäistä, mutta muutamia tutkimuksia löytyy, kuten Anna-Kaisa Viertolan pro gradu -tutkielma *Todistaminen lukion pitkässä matematiikassa*. Matemaattinen todistamisen opettaminen vaatii siis lisätutkimusta, sekä sitä kautta muutoksia, jotta laiminlyönnit ja virheet voitaisiin korjata.

George Polya esittelee kirjassaan *How to Solve It* matemaattisen ongelmanratkaisun opettamiseen käytettävän heuristiikkakokonaisuuden. Näitä heuristiikkoja on käytetty matematiikassa jo satoja ellei tuhansia vuosia. Ne ovat esiintyneet tiedostettuina tai tiedostamattomina osina tai kokonaisuuksina useiden matemaatikkojen tavoissa ratkaista ongelmia. Polya muokkasi näistä heuristiikoista tiedostetun kokonaisuuden ja toi matematiikan opetukseen heuristiikkojen tietoisen opettamisen mahdollisuudet. Polya jakoi heuristiikat neljään eri ongelmanratkaisun vaiheeseen. Heuristiikat ovat kysymyksiä tai ajatuksia, joiden hyödyntämisestä voi olla apua kussakin ongelman osassa. Niistä muodostuu toisiaan tukeva verkosto, jonka avulla ongelman eri kohtia voidaan tarkastella. Polyan heuristiikkakokonaisuus täytti vaatimukset eheydestä ja toimivuudesta matematiikassa. Ja osia heuristiikoista olikin jo sovellettu matemaattisen todistamisen opettamisessa.

Pro gradu -tutkielmani on kirjallisuuskatsaus, jonka tutkimuskysymyksiä ovat: Miten Polyan heuristiikkoja on käytetty matemaattisen todistamisen opettamisessa? Mitä etuja ja haittoja Polyan heuristiikkojen käytöllä on matemaattisen todistuksen opettamisessa? Tulisiko Polyan heuristiikkoja sisällyttää matemaattisen todistamisen opettamiseen ja jos tulisi, niin missä määrin?

Kävin kokonaisuudessaan läpi aikakausjulkaisut *Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education* ja *Journal for Mathematics Teacher's Education* sekä International Commission on Mathematical Instructions -organisaation vuonna 2009 toteuttaman seminaarin pöytäkirjan, väitöskirjoja sekä pro gradu-tutkielmia. Ensimmäisessä vaiheessa selasin läpi kaikki *Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education* ja *Journal for Mathematics Teacher's Education* julkaisut sekä Google Scholar -hakukoneella löydetyt väitöskirjat ja pro gradu-tutkielmat. Poimin niistä kaikki matemaattista todistamista käsittelevät artikkelit. Tosin Google Scholar -hakukoneella rajoitin etsintäni jo valmiiksi todistamista käsitteleviin artikkeleihin. Tämän jälkeen etsin todistamista käsittelevistä artikkeleista julkaisut, joissa käsiteltiin todistamisen opettamista. Otin myös mukaan pari artikkelia, jotka käsittelivät tapaa, jolla matemaatikot lukevat todistuksia. Näen tämän oleelliseksi osaksi tutkimustani, koska tapa, jolla matemaatikot lukevat todistuksia, tulisi olla tavoiteltava malli opiskelijalle käsitellä todistuksia. Matemaattisen todistuksen opettamista käsittelevistä artikkeleista valikoin ne, jotka sisälsivät Polyan heuristiikoita. Tämän jälkeen tutkin miten nämä heuristiikat esiintyivät artikkeleissa, ja mitä vaikutuksia niillä oli.

Tutkielmani keskittyy ensimmäisessä osassa lähtöasetelman kuvaamiseen. Käsittelen todistamista, sen merkitystä ja sen opettamista. Samassa osassa käyn läpi Polyan heuristiikkoja ja niiden käyttöä. Toisessa osassa keskityn todistustilanteen alkuvaiheeseen. Osio käsittelee todistuksen alkuehtojen ja määränpään käsittelyä. Kolmannessa osassa keskityn todistuksen rakenteeseen ja todistuksen tarkistamiseen. Neljännessä osassa käsittelen lyhyesti heuristiikkakokonaisuuksia sekä yhteenvedossa analysoin heuristiikkojen vaikutuksia todistamisen opettamiseen yleisesti. Käyn läpi mahdollisia parannusehdotuksia, ja niiden heikkouksia.

Lähtöasetelma

Todistaminen ja sen merkitys

Matemaattinen todistus on linkki aksiomaattisessa järjestelmässä. Se on looginen ketju deduktiivisia askelia (Pedemonte, 2007). Todistus voi olla suora todistus, käänteinen todistus, epäsuora todistus tai induktiotodistus. Kun jokin asia on todistettu, se on absoluuttisesti totta. Todistus tekee matematiikan alhaalta ylöspäin -rakenteen mahdolliseksi. Kaikki matemaattinen tieto on palautettavissa aksioomiin, ja kaikki matemaattinen tieto on johdettava aksioomista. Todistus lähtee liikkeelle oletuksesta, joka oletetaan todeksi, oli se sitä tai ei (Viertola, 2011). Oletuksen pohjalta jonkin edellä mainittujen todistustyyppien avulla väite pyritään osoittamaan joko oikeaksi tai vääräksi. Tosin on olemassa tilanteita, joissa väitteen totuusarvoa ei voida määrittää. Tuotettu esitys ymmärretään matemaattiseksi todistukseksi, kun matemaattinen yhteisö sen hyväksyy sellaiseksi. Ei ole välttämättä heti selvää täyttääkö yksittäinen ketju matemaattisen todistuksen määritelmän. Matemaatikoillakaan ei aina ole selkeää käsitystä siitä, mikä lasketaan todistukseksi (Weber 2008). Tosin nämä epäselvät tapaukset koskevat vain hyvin pientä osaa todistuksista, eikä yksikään näistä epäselvistä tuloksista esiinny Suomen peruskoulun tai 2. asteen koulutuksen opetussuunnitelmassa.

Matemaattista todistamista, eli deduktiivisia askelia, ei tule sekoittaa induktiiviseen päätelmään, jonka mukaan väitteen oikeellisuus tai vääryys pitää paikkansa vain tietyllä todennäköisyydellä. Perustelu ei myöskään ole matemaattinen todistus, sillä vääräävkin vastausta tukemaan voi löytyä useitakin perusteluita (Viertola, 2011). Yksittäistä tai edes esimerkkien otantajoukkoa ei tule pitää todistuksena. Esimerkit voi luoda todistuksen ainoastaan, jos ne täyttävät uuvutusmenetelmän eli siis käyvät läpi kaikki väitteessä vaaditut mahdollisuudet. Tietokoneiden avulla tehdyt approksimaatiot ovat kuitenkin hälventäneet matemaattisen todistuksen ja empiirisen todistuksen rajaa käymällä läpi valtavia otantoja oletuksen tuottamista tuloksista. Toistaiseksi näitä otantoja käyviä ja approksimaatioita tekeviä ohjelmia käytetään vain uuden tiedon tutkimisessa, eikä niinkään matemaattisen tiedon todistamisessa (Gila & de Villiers, 2009).

Todistamisen käyttötarkoituksista on helppo nähdä miksi sitä pidetään keskeisenä osana matematiikan harjoittamista. Todistaminen varmentaa ja antaa oikeuden käyttää tuloksia sekä samalla kumoaa vääriä väitteitä. Se selittää matematiikkaa ja luo läpinäkyvyyttä matemaattiseen yhteisöön. Todistukset niin järjestävät matemaattista tietoa kuin välittävät sitä. Todistamisella on myös keskeinen rooli uuden tiedon tuottamisessa. Todistaminen liittyy aina kiinteästi argumentaatioon.

Matemaattisen todistamisen juuret juontavat aina antiikin Kreikkaan saakka. Perimätiedon mukaan jo ensimmäisen tunnetun matemaatikon, kreikkalaisen Thalesin (n.624 - n.547 eaa.), sanotaan todistaneen, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, ja että puoliympyrän kehäkulma on suora. Matemaattisia todistuksia on esitetty myös Eukleidein (n.365 - n.300 eaa.) kuuluisimmassa teoksessa *Stoikheia* eli *Alkeet* (Viertola, 2011). Matemaattinen tieto on nykyään tallennettu matemaattisiin julkaisuihin. Näistä julkaisuista ei yleensä löydy täsmällisiä todistuksia ennen 1850-lukua. Annetuissa todistuksissa oletukset ovat puutteellisia, eikä määritelmiä käytetä täsmällisesti. Väitteet ovat usein oikeita, mutta niihin liittyvät todistukset ovat valjuja (Uhlig, 2002). Tämä on seurausta siitä, että vasta 1800-luvulla analyysissä herättiin tarkastelemaan väitteitä kriittisemmin ja täsmällisemmin. Myös algebran kehitys otti huomioon todistamisen vasta 1800-luvulla. Aikaisemmin todistamisen oli ymmärretty kuuluvan lähinnä geometriaan. Sana todistaminen löysi tiensä Yhdysvalloissa opetussuunnitelmaan 1800-luvun lopussa seuraavassa muodossa :

> "... learning the art of proving." (Herbst, 2002).

1900-luvun alussa syntynyt perusteiden kriisi, jonka ajatuksina olivat intuition välttäminen ja perusteisiin syventyminen, vei matematiikkaa kohti formaalisia täsmällisyysvaatimuksia. Vaatimukset painottivat joukko-oppia, koska perusteisiin meneminen nähtiin tärkeänä. Nämä vaatimukset muokkasivat matematiikan opetusta synnyttäen New Math -uudistuksen. New Math -uudistuksessa matematiikan opetuksen katsottiin voivan olla paljon entistä syvempää ja abstraktimpaa. Tämä toi esimerkiksi joukko-opin jo alakoululaisten opetukseen. Uudistuksen käyttökelvottomuuden vuoksi sen käyttö loppui jo 1970-luvun alussa (Viertola, 2011). Matemaattisen todistamisen saattaminen nykyiseen muotoonsa vei useilta huomattavilta matemaatikoilta yli vuosisadan (Uhlig, 2002). Suomen opetussuunnitelman perusteissa todistaminen mainitaan jo vuosiluokkien 1-2 kohdalla seuraavalla tavalla:

> "Oppilas oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, kirjallisesti ja suullisesti..."

Vuosiluokille 6-9 opetussuunnitelman perusteet jatkaa:

> "Oppilas oppii ilmaisemaan ajatuksensa yksiselitteisesti ja perustelemaan toimintaansa ja päätelmiään."

Todistaminen on kasvanut kiinteäksi osaksi matematiikkaa. Sen hyödyt niin matematiikassa kuin muissakin tieteissä puhuvat selkeää kieltä todistamisen opettamisen puolesta. Todistaminen on kuitenkin selkeästi ongelma opiskelijoille (Hemmi, 2010). Syitä tähän on etsitty useissa tutkimuksissa (Thompson, Senk & Johnson, 2012). Opiskelijat pelkäävät todistamista, ja vain pieni osa on kiinnostunut siitä (Hemmi, 2010). Yleisesti ottaen oppilaat tunnistavat todistuksen varmennusvaikutukset, mutta eivät sen selittävää vaikutusta (Bayazit, 2009). Itse asiassa Nermin Bayazit esittelee väitöskirjassaan Englannissa vuonna 2000 toteutettua tutkimusta, jonka mukaan vain 1 % oppilaista oli sitä mieltä, että todistukset voivat tuottaa uutta tietoa. Ei siis ole ihmeellistä, että Mathew Inglis ja Lara Alcock toteavat tutkimuksessaan, että oppilaat eivät tiedä mikä lasketaan matemaattiseksi todistukseksi. Joka tapauksessa todistaminen on monimutkainen prosessi varsinkin, kun oppilasta pyydetään tuottamaan todistus, eikä muistamaan sitä ulkoa (Gila & de Villiers, 2009).

Todistamisen on nähty tulevan kouluopetukseen niin myöhään, että opiskelijoiden kokemukset siitä tuntuvat ennemmin ulkopuoliselta kuin luonnolliselta jatkeelta matematiikkaan (Stylianides, 2009). Tavallisesti oppilaiden ainoat todistamiskokemukset tulevat Euklidisen geometrian kursseilla (Stylianides, 2007[b]). On siis selvää, ettei todistaminen kuulu oppilaiden matemaattiseen arkikokemukseen.

Todistamisen keskeistä ja arkista roolia matematiikassa ei käy kiistäminen. Sen edut ja kehityskulku puhuvat selkeää kieltä todistamisen tarpeellisuudesta matematiikassa. Todistamista ei kuitenkaan käsitellä kouluopetuksessa sen vaatimalla tasolla, vaan pikemminkin laiminlyöden. Tämä havaitaan oppilaiden vääristyneissä todistuskäsityksissä. Siten on selvää, että tilannetta tulisi parantaa.

Polyan heuristiikat

George Polya julkaisi vuonna 1945 kirjan *How to Solve It*. Tässä kirjassa hän esitteli heuristiikkoja, ajatusmalleja, matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi, ja sitä miten ne voitaisiin ottaa käyttöön matematiikan opetuksessa. Hän jakoi ongelmanratkaisutehtävän neljään osaan. Ensimmäinen osa käsittelee ongelman ymmärtämistä, ja se sisältää kysymyksiä kuten: Mikä on tuntematon? Mitä tietoa meillä on käytettävissä? Toisessa vaiheessa pyritään etsimään yhteyttä annetun tiedon ja tuntemattoman välille. Kysymykset ovat luonteeltaan seuraavanlaisia: Oletko nähnyt tämän ongelman ennen? Oletko nähnyt samankaltaista ongelmaa tai samaa tuntematonta ennen? Kolmas osio keskittyy luodun suunnitelman toteuttamiseen, ja siinä vaiheessa pyritään vastamaan seuraaviin kysymyksiin: Onko jokainen ratkaisun vaihe oikein? Voitko todistaa, että jokainen vaihe on oikein? Viimeisessä eli neljännessä osiossa tarkastellaan saatua vastausta kysymyksillä: Voitko tarkistaa tuloksen? Voitko kehittää toisenlaisen ratkaisun? Polyan heuristiikat eivät ole kiveen hakattu polku, missä suuntaa ei voi muuttaa eikä takaisin voi palata. Onkin itse asiassa hyvin tyypillistä saada uusia ajatuksia esimerkiksi ongelman kolmannessa vaiheessa, mikä saa ratkaisijan palamaan aikaisempien vaiheiden heuristiikkoihin.

Polyan heuristiikat olivat hänen tapansa matematiikan ammattilaisena ratkaista matemaattisia ongelmia. Nämä heuristiikat ovat olleet läsnä niin matemaatikkojen kuin muiden tiedemiesten ajattelussa jo tuhansia vuosia. Niistä on voitu käyttää vain osia tai niihin on lisätty uusia ajatuksia. Polya järjesti nämä käytetyt heuristiikat kokonaisuudeksi ja toi ne opetuksen piiriin. Polyan eräänä ajatuksena oli opettaa matematiikkaa ongelmien kautta, ongelmakeskeisesti. Tämän ongelmakeskeisen opetuksen osana hän opetti näitä heuristiikkoja. Ongelmanratkaisun käyttöön pohjautuva opetus on havaittu myös ymmärtämisen kannalta tehokkaammaksi opetukseksi kuin traditionaalinen opetus (Haapakoski, Heikkuri & Kangas, 2011).

Miten Polyan heuristiikat sopivat todistamisen opettamiseen? Todistamisen opettamiseen liittyvistä artikkeleista suurimmassa osassa on jo Polyan esittelemiä heuristiikoita. Syynä runsaaseen esiintymistiheyteen voidaan pitää Polyan heuristiikkojen yleisyyttä. Nämä esitetyt heuristiikat esiintyvät yleensä vailla suurempaa strategiaa. Ne esitetään joko yksittäisinä reunahuomautuksina tai suurina ideoina. Olisi perusteltua tarkastella mitä tapahtuisi, jos nämä yksittäiset heuristiikat voitaisiin sitoa osaksi isompaa kokonaisuutta.

Kaaviomaisen ajattelun on todettu mahdollistavan merkkiopillisten resurssien kehittymistä, ja sitä kuinka se liittyy teoreettiseen kontrolliin (Arzazello & Sabena, 2011). Merkkiopillisten resurssien kehittymisellä tarkoitetaan matemaattisten symbolien ja niiden välisien relaatioiden hallintaa. Teoreettinen kontrolli taas käsittelee tilanteiden, joissa käytettään teorioita tai niiden osia, hallintaa. Tällä heuristiikkakokonaisuudella on potentiaalia parantaa matemaattisen todistamisen opettamista.

Polyan heuristiikat ovat matematiikan ammattilaisen käyttämä kaaviomainen ajatuskokoelma, jolla voidaan ratkaista matemaattisia ongelmia. Polyan heuristiikat voivat siis toimia eräänlaisena päämääränä, johon oppilaan tulisi pyrkiä. Mikäli haluamme oppilaan käytöksen lähentyvän matematiikon käytöstä, meidän tulee opettaa heille matemaatikkojen tapoja käyttäytyä (Weber, 2001). Matemaattisen todistuksen rakentaminen on myös samaistettu ongelmanratkaisutehtävään (Weber, 2001).

Mitä todistetaan?

Tunnetut ja tuntemattomat

Polyan heuristiikoista ensimmäiseen osaan kuuluvat keskittyvät ongelman ymmärtämiseen. Mikä on tuntematon, mitä tietoa meille annetaan, mitä meidän tarvitsee tietää ja millä ehdoilla voimme käyttää annettua tietoa ongelman ratkaisemiseen? Ensimmäiseksi etsitään ongelmaa. Ongelmanratkaisijan on löydettävä kysymys, mihin tarvitsee vastauksen ja mitä kohti hän sitä kautta ponnistelunsa ohjaa. Tämän jälkeen ongelmanratkaisijan tulee selkeästi erotella ja kaivaa esille faktat, joita hän voi soveltaa tilanteeseen. Kun tavoite ja käytettävissä olevat faktat ovat selvillä, tilanne laitetaan kehykseen, jonka sisällä faktoja voidaan sitten soveltaa.

Samanlaista ajattelua löytyy yleisesti käytetystä Toulmin mallista. Toulmin malli koostuu kolmesta vaiheesta, jotka ovat: datan käsittely, lupa ja väite. Ensimmäiseksi tarkastellaan annettua dataa. Tämän jälkeen käytetään lupa-vaihetta, jonka avulla dataa voidaan käyttää väitteen todistamiseen (Pedemonte, 2007). Toulmin malli on yksinkertainen työkalu, jolla saadaan kolme selkeää kohtaa todistukseen. Sen avulla oppilaan kokemia vaikeuksia voidaan eritellä koskemaan tiettyä vaihetta, mikä tekee virheen korjaamisesta helpompaa. Malli myös korostaa annetun datan käsittelyä, mikä kuuluu isona osana Polyan heuristiikkoihin. Toulmin mallia ei tosin opetettu oppilaille, vaan sitä käytettiin lähinnä oppilaiden käytöksen analysoinnissa, ei niinkään oppilaille opettavana metodina (Gila & de Villiers, 2009).

Timothy Patrick Fukawa-Connellyn (2012) tekemässä tutkimuksessa tarkasteltiin etupäässä 3. vuosikurssin yliopisto-opiskelijoille järjestettyä todistuspohjaista kurssia. Kurssin pitäjän tohtori Tripp'in (nimi pseudonyymi) jatkuvaan toimintaan kuului annetun datan ja tuntemattoman läpikäyminen jokaisen tehtävän alussa. Hän myös oletti opiskelijoiden osallistuvan tähän toimintaan kysymällä jatkuvasti kysymyksiä. Kysymykset myös helpottuivat asteittain. Tosin saman aiheen viimeiset kysymykset olivat helpottuneet jo niin paljon, ettei opiskelijoiden tarvinnut ymmärtää matemaattista sisältöä. Opettaja tarkastelee tehtävänantoa seuraavasti:

> " Dr. Tripp: Let`s see why the thing called K, which has a name, it`s the kernel, is an ideal all the time. So, we need to get back to this ring homomorphism."

Tohtori Tripp kävi selkeästi läpi jokaisen tehtävän kohdalla sen, mitä heidän tulisi todistaa.

> "... She modeled the types of questions that a mathematician should ask while writing proofs, such as, "What does that mean?", "What comes next?", and "What do I still need to do?""

Kysymykset ovat samoja kuin Polyan heuristiikat, ja niitä kysyttiin toistuvasti. Myös Fukawa-Connellyn mielestä matemaatikon ajattelun tulisi sisältää ainakin osia heuristiikoista. Tohtori Tripp´in ongelmaksi muodostui opiskelijoiden vastausten puuttuminen. Mitä vaikeampi kysymys oli, sitä harvemmin opiskelija tuotti siihen vastauksen. Tohtori Tripp vastasi useisiin omiin kysymyksiinsä odottamatta vastausta opiskelijoilta. Ja vaikkakin luennoitsijan työskentely oli matemaatikkona esimerkillistä, tutkimuksesta ei käy ilmi jäivätkö opettajan käyttämät kysymykset ja ajatusmallit myös opiskelijoiden repertuaariin.

Liping Ding & Keith Jones käsittelevät IMCI 19 Proof and proving in mathematics -seminaarissa kahta Polyan ideaa: työskentely paremman ymmärryksen saavuttamiseksi ja hyödyllisen idean metsästäminen (Gila & de Villiers, 2009). Nämä ideat sisältävät suoraan Polyan heuristiikkoja. Tätä ongelmaratkaisukehystä käytettiin analysoimaan Lily-nimisen opettajan toimintaa. Lily esiintyy Kiinassa vuonna 2007 tehdyssä tutkimuksessa, jossa tutkittiin 13 - 14 -vuotiaiden työskentelyä geometristen ongelmien parissa. Opetusprosessit alkoivat aina selkeästi siitä, että luokka etsi asiaa, joka tulisi löytää. Lily esitti erilaisia tapoja tuoda annettua dataa esille mm. staattisena kuvana. Opettaja myös pyysi opiskelijoita vertaamaan annettua dataa aikaisempien tehtävien dataan. Tällainen strategian käyttö saa oppilaan käyttämään aikaisempaa teoreettista geometrista tietämystään mittaamisen sijasta. Tutkimuksen mukaan tällainen strategian opettaminen lisää oppilaiden kykyä rakentaa todistuksia. Tutkijat myös toteavat, että heidän avaintehtävänä on nyt tutkia pedagogisia tilanteita, joihin yhtenäiset mentaaliset todistusongelmaprosessit voisivat liittyä.

Nermin Bayazit (2009) on koonnut väitöskirjaansa oppilaiden keskeisiä ongelmia todistuksen tuottamisessa. Yliopisto-opiskelijoilla eräs keskeinen ongelma oli todistuksen aloittaminen. Peruskoulun oppilailla taas yleisiä ongelmia olivat : saman symbolin käyttäminen monelle muuttujalle, informaation väärinkäyttö kontekstin ulkopuolella, väitteen heikentäminen lisäämällä uusia oletuksia, lauseiden väärinkäyttö, väitteeseen pohjautuvia perusteluita jne. Nämä ongelmat ovat juuri sellaisia, jotka liittyvät puutteelliseen datan ja väitteen käsittelyyn.

Todistuksen määränpään ja annettujen alkuehtojen tarkasteleminen olivat harvoin käytettyjä heuristiikkoja. Niitä kuitenkin esiintyi kaikilla kouluasteilla alakoulua lukuun ottamatta. Aineiston vähyydestä johtuen mitään suoria hyötyvaikutuksia ei voitu määränpään ja alkuehtojen tarkastelemisesta havaita.

Oppilaiden esiintyneet ongelmat olivat kuitenkin sellaisia, jotka viittaavat puutteelliseen tehtävän ja alkuehtojen analysointiin. Tällä perusteella määränpään ja alkuehtojen tarkastelemiseen tulisi käyttää enemmän aikaa.

Kuvan piirtäminen

Visualisaation rooli matematiikan opetuksessa on merkittävä. Se tarjoaa mahdollisuudet selkeään, nopeaan ja vaihtoehtoiseen tapaan käsitellä matemaattisia käsitteitä. Mutta vaikkakin visualisaation roolia matematiikan opetuksessa pidetään merkittävä, sen sisältöä ei kaikissa tapauksissa rajata. Tämä herättää kysymyksiä, kuten voivatko visuaaliset esitykset olla todistuksia itsessään vai tulisiko niitä pitää vain todistusten liitteinä (Gila & de Villiers, 2009)?

Polyan heuristiikoissa kuvan piirtäminen on sidoksissa annettuihin tietoihin ja tilanteisiin. Kuvan piirtäminen on sijoitettu ensimmäiseen vaiheeseen ratkaisua, mutta kuvan piirtämiseen voi palata muissakin vaiheissa. Kuvan on joka tapauksessa täytettävä oletuksessa annettuja faktoja ja siten mallinnettava väitteen tuottamaa tilannetta. Kuvaa piirrettäessä ongelmanratkaisijan on oltava hyvin tietoinen siitä, mihin hän kuvansa pohjaa. Ja kun kuvan alkuehdot ovat tiedossa, voi metodia käyttävä henkilö turvallisesti poimia asiat, joita kuva paljastaa ja joita se ei paljasta. Toki kuvia voi piirtää pelkästään jäsentääkseen omia ajatuksiaan.

Oppilaat yleisesti ottaen luottavat visuaalisuuteen hyvin vahvasti. Esimerkkinä yliopisto-opiskelija Emilyn tapaus, jossa hän toteaa seuraavaa:

> " I am a visual person... Making them (definitions) connect to examples or pictures would definitely help." (Bayazit, 2009).

Kuvien käyttöön pyrkiminen ei ole tyypillistä ainoastaan opiskelijoille, vaan myös opettajille, kuten eräs matemaatikko toteaa kurssista Johdanto matemaattiseen päättelyyn:

> "It`s a domain in which you can actually draw nice pictures, and the pictures have a direct correspondence with the proofs you`re writing." (Gila & de Villiers, 2009).

Ja kuten Andreas Stylianides havainnoi vuonna 2007 julkaistussa tutkimuksessaan, opettaja voi aivan hyvin käyttää kuvia havainnollistamaan opiskelijoiden kysymyksiä. Opiskelijoiden visuaalisuuden käyttö ei rajoitu ainoastaan kuvien piirtämiseen, vaan he saattavat myös käyttää erilaisia semioottisia resursseja, kuten merkkejä, kuvauksia ja eleitä (Gila & de Villiers, 2009).

Opiskelijoiden vaatimus visuaalisuuteen aiheuttaa niin sanottua kuvien ylikäyttöä. Tällöin kuvia ylitulkitaan ja niistä tehdään johtopäätöksiä, jotka eivät välttämättä pidä paikkaansa tai ovat puutteellisesti perusteltuja. Eräässä tutkimuksessa 91 matematiikan opettajasta, joilla oli opetuskokemusta vuodesta useampaan, 25 hyväksyi pelkän visuaalisen esityksen todistuksena (Gila & de Villiers, 2009).

Erik J. Knuthin (2002) toteuttamassa tutkimuksessa tutkittiin 16 yhdysvaltalaista 2. asteen opettajaa. Tämä tarkoittaa, että opettajat opettivat 14 - 17 -vuotiaita opiskelijoita. Tutkimuksessa opettajien tehtävänä oli arvioida annettuja todistuksia. Opettaja vakuuttuivat eniten todistuksista, joissa oli konkreettisia elementtejä. Opettajista 12 piti todistuksia, joissa oli visuaalisia viittauksia, vakuuttavimpina (Knuth, 2002). Tutkimuksessa sen jälkeen, kun opettajat olivat todistaneet erään yleisen ominaisuuden kolmioille, Knuth piirsi yhden todella tylpän kolmion. Tämän jälkeen hän kysyi opettajilta päteekö todistettu väite myös tälle kolmiolle. Viisi opettajaa piirsi vielä lisäkuvioita ennen kuin antoi vastauksensa. Eräs opettaja toimi tilanteessa seuraavasti:

> "I´m thinking I want to see it a little more dramatically than you´ve drawn it, so I can make that decision. (After drawing her own triangle:) Yes, I think it will be true."

Opiskelijoilla esiintyy visuaalisuuden ylikäyttöä myös siinä suhteessa, etteivät he hyväksy kuin ulkomuodoltaan tietyn tyyppisiä todistuksia. He siis eivät hyväksy päteviä todistuksia, koska ne eivät esimerkiksi ole muodoltaan geometrian kaksisarakkeista todistuksia. Geometrian kaksisarakkeinen todistus koostuu, kuten nimikin vihjaa, kahdesta sarakkeesta. Vasemman puoleiseen sarakkeeseen kirjataan matemaattinen operaatio ja oikeaan sarakkeeseen vastaavalle kohdalle syy, miksi kyseistä operaatiota voidaan soveltaa. Muutoinkin opiskelijat keskittyvät todistuksia lukiessaan liikaa pintaelementteihin (Gila & de Villiers, 2009). Tällaisen tiukan todistusformaatin korostaminen vahingoittaa opiskelijoiden kykyä rakentaa ja varmentaa todistuksia. Korostaminen aiheuttaa auktoritäärisen todistusskeeman kehittymisen oppilaille. Oppilaat, jotka käyttävät auktoritääristä todistusskeemaa, uskovat asioita todeksi jo pelkästään siitä syystä, koska opettaja tai kirja sanoo niin. Tietyn todistusformaatin vaatimisesta muodostuu este laadittaessa muiden matematiikan osa-alueiden todistuksia.

Syitä visuaalisuuden ylikäyttöön on useita. Suurin osa amerikkalaisten opiskelijoiden todistuskokemuksista tulee euklidisesta geometriasta (Andreas Stylianides*, Journal for Research in Mathematics Education*, 2007). Tässä osa-alueessa kuvat ovat ensiarvoisen tärkeitä. Tehtävissä käytetyn visuaalisuuden tärkeys siirtyy muihin matematiikan osa-alueisiin, vaikka kuvia ei voisikaan käyttää samoin. Myös oppikirjoissa ensimmäiset perustelut ovat visuaalisia (Gila & de Villiers, 2009). Oppilaille visuaalisuudesta muodostuu siis alusta alkaen tuttu metodi tehtävän kuin tehtävän ratkaisemiseen.

Kuvien ja muiden semioottisten resurssien rooli on kokonaisuudessaan ylikorostunut oppilailla. Havaituissa ongelmissa oppilaat eivät tiedosta mihin heidän kuvansa tai saatu kuva perustuu. Kuvitellaan tilannetta, jossa tarkastellaan kuvaa, josta ei tiedetä mikä kuvasta on annettujen faktojen mukaista ja mikä ei. Mitä johtopäätöksiä kyseisestä kuvasta voitaisiin tehdä? Näille ongelmatilanteille on tyypillistä myös se, etteivät oppilaat ymmärrä piirretyn kuvan olevan yksi ainoa erikoistapaus, esimerkki. Oppilaiden havaittu toiminta herättää myös kysymyksen, eivätkö oppilaat ymmärrä tai luota matemaattiseen merkkikieleen, koska he turvautuvat niin voimakkaasti arkipäivän visuaalisuuteen.

Visualisaatio on merkittävä osa matematiikan opetusta. Kuvien piirtäminen ja tulkitseminen on arkipäiväistä toimintaa ihmisille jo lapsesta lähtien. Ei siis ole ihme, että visuaalisuus on esimerkkien ohella eniten käytetty Polyan heuristiikoista.

Kuvien piirtämisellä saavutetaan paljon hyödyllisiä tuloksia oppimisessa. Sen havainnollistava vaikutus on merkittävä. On kuitenkin myös tilanteita, joissa kuviin luotetaan liikaa. Niitä ylitulkitaan tai niiden annetaan asettaa tehtävään kuulumattomia rajoituksia.

Esimerkit eli erikoistapaukset

Polya ei mainitse *How to Solve It* -teoksessaan suoraan numeerisen esimerkin käyttöä heuristiikkana. Heuristiikkoihin kuuluu kuitenkin kohta, jossa ongelmanratkaisijaa kehotetaan tarkastelemaan erikoistapausta annetusta ongelmasta. Numeerinen esimerkki kuuluu tähän kategoriaan.

Rajatun tilanteen tarkastelemisen tarkoituksena on tutkia annettujen väitteiden mekaniikkaa. Rajattu tilanne vapauttaa keskittymään eri osiin ongelmaa. Kuten Mathew Inglisin ja Lara Alcockin (2012) tutkimuksessa saatiin selville, matemaatikot käyttävät esimerkkejä saadakseen nopeasti selville, miten todistusten rakenteet toimivat. Polyan heuristiikoissa erikoistapauksen tutkija ymmärtää tuottamansa tilanteen rajoitukset. Hän tiedostaa, ettei erikoistapaus todista kuin vain sen, että kyseinen erikoistapaus on totta, ja että jos hän haluaa erikoistapausten tarkastelulla varmentaa yleisen tilanteen, on hänen käytävä kaikki mahdolliset erikoistapaukset yksitellen läpi.

Andreas J. ja Gabriel J. Stylianides (2007) jakavat empiiriset argumentit kahteen tyyppiin: naiiviin empirismiin ja keskeiseen kokeeseen. Keskeinen koe on väitteen tutkimista ymmärtäen käytettyjen esimerkkien rajoitukset. Keskeisessä kokeessa yritetään etsiä yleistä ideaa väitteen tavasta toimia. Keskeisen kokeen suorittaja ymmärtää, ettei todistus voi olla valmis ilman yleisen tapauksen tutkimista. Keskeinen koe sisältää siis suuremman älyllisen rakenteen kuin naiivi empirismi. Keskeinen koe voidaan ymmärtää Polyan heuristiikaksi. Naiiviin empirismiin turvautuva uskoo, että todistus on rakennettavissa pelkästään valikoitujen esimerkkien avulla. Naiivi empirismi on tilanteeseen nähden liian yksinkertainen vaihtoehto. Yhdysvalloissa toteutettiin asiaan liittyen neljässä vuodessa viisi tutkimussykliä (Stylianides & Stylianides, 2009). Tutkimuksen perusoletuksena oli, että suurin osa opiskelijoiden esimerkkien käytöstä on naiivia empirismiä ja pieni osa keskeisen kokeen ajattelua. Eräässä näistä tutkimussykleistä esiintyi klassinen tehtävä, joka paljastaa naiivin empirismin heikkouden. Tehtävä kuului seuraavasti: Aseta ympyrän kehälle pisteitä ja yhdistä jokainen piste toiseen viivalla. Tutki nyt mahdollista relaatiota pisteiden ja muodostuvien ei-päällekkäisten alueiden välillä. Kokeilu toimii naiivin empirismin mukaan vielä viidenteen pisteeseen asti antaen mukavan ja helpon yhtälön pisteiden ja syntyvien alueiden välille. Kuudennen pisteen kohdalla alueiden määrää ei saadakaan enää tästä yksinkertaisesta kaavasta. Tämä tuotettu konflikti sai opiskelijat tutkimaan toistuvuuksia laajemmin. Jotkin opiskelijat ehdottivat vielä tarkemmin valittuja esimerkkejä, mutta huomasivat pian, että saavutettu kaava voi lakata pitämästä paikkaansa kokeilemisen määrästä huolimatta. Opiskelijat ymmärsivät myös, että ainoa keino todistaa jotain esimerkeillä, on tutkia kaikki mahdolliset esimerkit (Stylianides & Stylianides, 2009).

Esimerkkien käytössä on siis samansuuntaisia ongelmia kuin visuaalisuuden käytössä. On tilanteita missä esimerkeistä tehdään liian pitkälle meneviä johtopäätöksiä, kuten se että uskotaan muutaman hyvin valitun esimerkin olevan todistus. Tämä havaittiin Japanissa 2005, kun siellä tehdyssä tutkimuksessa huomattiin, että 80% yläkoulua käyvistä oppilaista uskoi empiirisen kokeilun tuottavan todistuksen (Gila & de Villiers, 2009). Nämä 418 oppilasta kuitenkin ymmärsivät matemaattisten lauseiden aina vaativan todistuksen. Annettaessa opiskelijoiden keskustella opettajan ohjauksesta saamistaan empiirisistä kokeistaan ja niiden epätarkkuudesta 40 % oppilaista käsitti, ettei empiirinen argumentti ole todistus. Vaikka väärinymmärrystä korjattiin, siltikin iso osa oppilaista uskoi yhä empiirisen argumentin riittävän todistukseksi. Vuonna 1990 julkaistussa tutkimuksessa 14 - 17 -vuotiaista yhdysvaltalaisista opiskelijoista 85% hyväksyi empiirispohjaiset todistukset (Gila & de Villiers, 2009). Andreas J. Stylianides ja Gabriel J. Stylianides tarkastelivat tutkimusta, jossa yli puolet 101 tulevasta alakoulun opettajasta uskoi empiirisen argumentin toimivan todistuksena (Stylianides & Stylianides, 2009). Ferdinando Arzarellon ja Cristina Sabenan vuonna 2011 tekemässä tutkimuksessa havaittiin opiskelijoiden käyttävän enemmän esimerkkejä kuin teorian varmentamiseen olisi välttämätöntä.

Empiirinen esimerkki tai esimerkit eivät voi olla matemaattinen todistus, elleivät ne käy läpi kaikkia väitteen mahdollistamia tilanteita. Tämä toteamus on hyvin yksinkertainen ja suoraviivainen. Miksi esimerkit esiintyvät näin usein niin huonosti käytettyinä? Miksi oppilaat luottavat liikaa esimerkkeihin?

Syitä siihen miksi Andreas J. ja Gabriel J. Stylianidesin esittelemää naiivia empirismiä löytyy niin paljon on useita. Lainaus eräältä opiskelijalta, kun hän perusteli omaa ratkaisuaan:

> "... you are using numbers, which are easier to deal with..." (Gila & de Villiers, 2009).

Numerot ovat helppoja. Ne ovat ensimmäinen asia mitä opitaan, ja siten niitä on käsitelty paljon. Oppilaiden ensimmäiset todistusyritykset ovat empiirisiä (Gila & de Villiers, 2009). Kokeelliset argumentit ovat myös tavallisia, esimerkiksi calculuksen kirjoissa (Dreyfus, 1999). Kokeellinen argumentti on miellyttävä siinäkin mielessä, että usein se antaa vastaukseksi myös yhtä konkreettisen luvun. Ja toisaalta opettajille on tyypillistä kannustaa oppilasta yrittämään edes jotain. Pystyvätkö oppilaat käsittelemään abstraktimpia asioita vai onko meidän pidättäydyttävä esimerkeissä?

Andreas J. Stylianides (2007[a]) esittelee älyllisyys-rehellisyys -periaatteen. Tämän periaatteen mukaan todistus koulumatematiikassa pitäisi olla käsitteellistetty niin, että se on matemaattisessa mielessä totta, ja samalla se ottaa huomioon vastaanottavan oppilaan tiedollisen tason. Empiirinen argumentti rikkoo molempia osia periaatteesta. Ensinnäkään se ei pidä paikkaansa, ja toiseksi oppilaiden on havaittu olevan kykeneviä ymmärtämään abstraktimpiakin asioita (Andreas Stylianides, 2007[b]). Taiwanissa toteutettiin tutkimus, johon osallistui 1059 14 - 15 -vuotiasta opiskelijaa. Opiskelijoille annettiin arvioitavaksi erilaisia väitettä todistavia argumentteja. Kysyttäessä mistä argumentista opiskelija kuvittelisi saavan parhaat pisteet, vain 7 % valitsi empiirisen argumentin (Gila & de Villiers, 2009). Opiskelijat tuntuvat tietyllä tasolla ymmärtävän esimerkkien rajallisuuden. Tämä kenties johtuu siitä, että opiskelijat ovat tietoisia, ettei esimerkkejä esiinny valmiissa teorioissa tai lauseissa. Siten he pyrkivät valitsemaan vastaavanlaiset, esimerkittömät vastaukset parhaiksi vastauksiksi.

Osa tutkimuksissa esiintyvästä ylikäytöstä ei johdu siitä, etteivätkö oppilaat tietäisi omien vastaustensa olevan puutteellisia, vaan siitä, etteivät he voi muuhun turvautua kuin esimerkkeihin. Tämän osuuden tarkkaa määrää on turhaa arvailla ilman tarkempaa aineistoa.

Toisaalta yliopisto-opiskelijat välttelevät kokeilemista (Gila & de Villiers, 2009). Syyt yliopisto-opiskelijoilla lienevät samansuuntaisia kuin alempien tasojen oppilailla eli opiskelijat ovat tietoisia, ettei valmiiseen teoriaan kuulu esimerkkejä. Tämä ilmiön vuoksi Lara Alcockin (2009) viiden matemaatikon haastattelututkimuksesta löytyi seuraavanlainen toteamus matemaatikolta:

> " I also tell them things like, before you try to prove a statement, let's say it's "For all…something," then you should, look, illustrate. […] Pick some examples, just so you can see how…how this theorem works. So maybe you don't see exactly how it's going to help you do what you have to do, but trust me, it will. You have to just get into the habit of understanding it. And they just refuse to do this."(Gila & de Villiers, 2009)

Erikoistapauksen käyttöä heuristiikkana on tehty onnistuneesti. Andreas J. Stylianides käsitteli Yhdysvalloissa 22:lle kolmannen luokan oppilaalle tehtyä tutkimusta. Eräässä kohdassa tutkimusta näille kahdeksan vuotta vanhoille oppilaille esitettiin väite, että kahden parittoman luvun summa on parillinen. Heidän tuli todistaa kyseinen väite. Oppilaat havainnollistivat tilannetta numeerisilla esimerkeillä sekä piirtämällä näistä numeerisista esimerkeistä kuvia. Opettaja kysyy opiskelijoilta, onko todistus valmis ja saa seuraavan vastauksen:

> "Mei: I don't think so, because you don't know about like in the thousands, and you don't know the numbers, like, you don't even know how you pronounce it, or how you say it."

Tässä oppilas Mei huomaa naiivin empirismin ja keskeisen kokeen eron.

Tutkituista tilanteista huomataan esimerkin roolin ylikorostuminen. Tämä johtuu kenties esimerkkien laatimisen helppoudesta verrattuna yleisen tapauksen konstruointiin. On myös mahdollista, että numerot ovat abstrakteja muuttujia tutumpia, ja sitä kautta helpommin käsiteltävissä. Tutkittaessa 20:tä 14 - 17 -vuotiaille suunnattua matematiikan oppikirjaa havaittiin että 60%:a kirjoissa esitetyistä väitteistä tai väitteiden ominaisuuksista oli havainnollistettu esimerkeillä. Tämä tapahtui riippumatta siitä, oliko väite todistettu vai ei. Samassa tutkimuksessa todettiin opiskelijoille suunnatuista harjoituksista ainoastaan 6% sisältävän todistusjärkeilyä (Thompson & al. 2012). Tästä voidaan olettaa suurimman osan tehtävistä olevan määritelmän mukaisesti erikoistapauksia. Ja jos opiskelijoiden kokemukset harjoitustehtävien pohjalta eivät sisällä laajempia tapauksia, on todennäköistä, etteivät opiskelijat opi näkemään todistamisessa käytettyjä esimerkkejä laajemmassa perspektiivissä.

Esimerkkien käytön vaikeudet eivät juurikaan poikkea kuvien käytön ongelmista. Verrattaessa käyttötarkoitusta ja käytön rajoituksia, tämä samankaltaisuus ei juuri yllätä. Ongelmat ovat systemaattisia ja samankaltaisia niin Taiwanissa kuin Yhdysvalloissakin.

Esimerkkien käytöllä on havaittu positiivisia vaikutuksia, esimerkkinä mallintamisen nopeus ja helppous. Heuristiikan määritelmän mukaisesta käytöstä on ollut hyötyä. Myös esimerkkien käytön ylilyönnit ja käytön yleisyys vaativat esimerkkien roolin tarkistamista. Polyan heuristiikkojen tarjoama kehys asettaisi esimerkkien käytön parempaan kontekstiin.

Todistuksen rakentaminen

Samankaltaiset todistukset ja todistuksen osittaminen

Etsittäessä yhteyttä tunnettujen ja tuntemattomien välille Polya esittää kysymyksiä, kuten: Oletko nähnyt tätä ongelmaa ennen? Oletko nähnyt saman ongelman hieman eri tavalla esitettynä? Oletko ratkaissut samankaltaista ongelmaa ennen? Samankaltaisten ongelmien löytäminen tuottaa ongelmanratkaisijalle mahdollisia rakenteita, joita soveltaa omaan ongelmaan. Ongelma voidaan myös jakaa osiin, ja luoda siten osatavoitteita lopullista määränpäätä kohti.

Keith Weber suoritti vuonna 2001 tutkimuksen, jossa kävi ilmi, miten selvästi kokemus aikaisemmista ongelmista vaikuttaa todistustaitoihin. Tutkimukseen osallistui neljä yliopisto-tohtorikoulutettavaa, sekä neljä opiskelijaa, joista kaksi luki pääaineena matematiikkaa ja kaksi tietojenkäsittelytiedettä. Tutkimuksessa henkilöille esitettiin seitsemän todistusongelmaa liittyen algebraan. Tohtorikoulutettavat pärjäsivät selkeästi opiskelijoita paremmin näissä todistus-tehtävissä. Eräässä tehtävässä tohtorikoulutettava aloitti tehtävän suoraan erään ryhmän ominaisuuden todistamisella. Häneltä asiaa tiedusteltaessa hän vastasi seuraavaa:

> "A: Because this is such a fundamental and crucial fact that it`s one of the first things you turn to."

Tohtorikoulutettava luotti selkeästi aikaisempiin ja samankaltaisiin ongelmanratkaisu-kokemuksiinsa. Hän aloitti todistustehtävän heti tietyn ominaisuuden tutkimisella, koska hänen aikaisempien kokemuksien pohjalta sen tutkiminen kuuluu kyseiseen tehtävätyyppiin. Nämä tehtävätyypit ovat siis samankaltaisia tietyiltä osin. Weber eritteli tutkimuksessaan neljä pääsyytä, miksi tohtorikoulutettavat olivat parempia kuin opiskelijat. Yksi näistä pääsyistä oli tieto siitä, mitkä teoriat olivat tärkeitä ja milloin ne ovat hyödyllisiä. Alan asiantuntijat tietävät mistä palasista saadaan johdettua paljon hyödyllistä tietoa (Weber, 2001). Tämä osoittaa selvästi, että etsimällä samankaltaisia ongelmia, ja niiden ratkaisuja, parannetaan ratkaisijan mahdollisuuksia onnistua todistuksen rakentamisessa.

Nermin Bayazit tarkasteli neljän matematiikan opiskelijan suoriutumista todistustehtävistä. Eräs opiskelija, Brad, kertoi palanneensa usein määritelmien ominaisuuksiin tehdessään todistuksia. Bayazit toteaa myös Bradista seuraavaa:

> "Most of the time, he (Brad) was using an external source such as a similar proof that he saw in class to infer a procedure." (Bayazit, 2009)

Polyan heuristiikkoja on käytetty tietoisesti todistamisen opetuksessa. Kiinassa vuonna 2007 tehdyssä tutkimuksessa Lily-nimisellä opettajalla oli usein tapana aloittaa todistusongelmat kehottamalla oppilaita vertaamaan annettua ongelmaa aikaisempaan ongelmaan (Gila & de Villiers, 2009). Opettajalla oli myös taipumus kysyä opiskelijoilta, olivatko he nähneet tämänkaltaista ongelmaa ennen. Opettaja käytti esimerkiksi tällaisia fraaseja:

> "Is it familiar to you? Have you seen it before? ... DC=BF? This is already given. Except this, what else is not changed?".

Tällainen opetus paransi oppilaiden kykyä ratkaista todistustehtäviä.

Toisaalta aikaisempaan tietoon vertaaminen on myös kulttuurillinen asia. Kiinassa kungfutselaisuuden perintöä on aiemman tiedon tutkaileminen (Gila & de Villiers, 2009). Tämä heijastuu tapaan, jolla opettajat opettavat euklidisen geometrian todistuksia.

Ivy Kidron ja Tommy Dreyfus esittelivät IMCI seminaarissa RBC-mallin. Mallin nimi tulee sanoista Recognizing, Building ja Constructing. Tälle mallille on keskeistä, että ensimmäisessä osassa mallia käyttävä huomaa, miten oleellista aikaisempi tietorakenne on nykyisessä ongelmassa. Rakennus vaiheessa mallin käyttäjä rakentaa aikaisemmista rakenteista ratkaisun luomatta uutta matematiikkaa. Lopulta kasausvaiheessa luodaan aiemmasta vertikaalisesti uutta matematiikkaa (Gila & de Villiers, 2009).

Keith Weber ja Juan Pablo Mejia-Ramos ovat tulkinneet Mathew Inglisin ja Lara Alcockin tuottamaa dataa matemaatikkojen tavasta lukea todistuksia. Weberin ja Mejia-Ramosin mukaan matemaatikot keskittyvät todistuksia lukiessaan enemmän todistusten yksittäisten vaiheiden sijasta yleisiin ideoihin. Matemaatikot tarkastavat siis todistusten yleisen rakenteen yksittäisen välivaiheen sijasta (Weber & Mejia-Ramos, 2011). Sisältääkö todistus suoria vai epäsuoria vaiheita tai onko kyseessä tietyltä osin induktiotodistus. Jokainen todistustyyppi asettaa erilaisia vaatimuksia ja tuottaa erilaisia tuloksia. Ja kun todistustyyppi on havaittu samankaltaiseksi kuin tunnettu todistus, sen tarkastelu on helpompaa.

Andreas J. Stylianides (2007) tutki yhdysvaltalaisten 3. luokkalaisten matematiikan oppitunteja. Näistä videoiduista ja äänitetyistä tunneista löytyy seuraavanlainen tilanne. Opettaja Deborah Ball antoi oppilaille seuraavan tehtävän: Minulla on pennin, viiden pennin ja 10 pennin kolikoita taskussani. Jos otan taskusta kaksi kolikkoa, millaisia rahasummia voin saada? Opiskelijat tuottivat kokeilemalla kaikki mahdolliset yhdistelmät. Opettaja kuitenkin muutti tehtävän todistustehtäväksi vaatimalla opiskelijoita varmentamaan, ettei heiltä jäänyt yhtään vaihtoehtoa kokeilematta. Opiskelijat eivät sinä päivänä kyenneet todistamaan sitä, että olivat saaneet kaikki vaihtoehdot. Seuraavana päivänä opettaja Ball totesi seuraavaa:

> "... Today we are going to do a couple of problems to help us think a little bit more about telling when you have all the answers. And the problems are a little bit different than the ones we worked on yesterday..."

Eräs näistä ongelmista oli muotoa: Tänään on 12.9. Ota numerot 1, 2 ja 9 ja tee nistä niin monta erilaista lukua kuin voit (Stylianides, 2007). Opettaja luo tässä selkeästi sillan näiden kahden ongelman välille. Tämä opettaa opiskelijoita huomaamaan, miten he voivat aina palata opittuun taulukointimenetelmään, kun he kohtaavat vastaavan ongelman. Tosin, kuten Stylianides toteaa, Ball ei ole tyypillinen opettaja.

Keith Weber (2008) tutki kahdeksan matemaatikon tapaa varmentaa todistuksia. Erästä professoria haastateltaessa haastattelija kysyy, lukeeko professori oman alansa todistuksia samoin kuin, miten hän lukee annettuja muiden matematiikan alueiden todistuksia. Haastattelija saa seuraavan vastauksen:

> "No, I know a lot about analysis so I have a good sense what types of things are going to work and what are not. I have a big bag of examples and counter-examples... number theory... I didn`t trust my intuition in these cases." (Weber, 2008).

Annettujen tehtävien vertaaminen aikaisempiin samankaltaisiin tehtäviin on tehokas todistusten varmennusmuoto. Tälläinen ajattelu on tehokas työväline suunnitelmaa laadittaessa.

Todistuksen opetuksessa todistusta harvoin ositetaan välivaiheisiin. On toki totta, että harvat todistukset peruskoulussa tai lukiossakaan vaativat tai ovat ylipäänsä jaettavissa osiin. Joitakin poikkeuksia löytyy. Esimerkiksi Nermin Bayazitin haastattelututkimus, jossa käytiin läpi neljän tulevan opettajan todistamistapoja. Tuleva opettaja Emily suosi geometrisessa todistuksessa tehtävän jakamista osiin. Hän ositti tehtävän ja piirsi apukuvioita (Bayazit, 2009). Geometriassa osittelun avulla voidaan visuaalisesti keskittyä todistamista vaativiin osiin tehokkaasti. Kunpa sama voitaisiin siirtää myös ei-visuaalisiin välivaiheisiin muissa matematiikan osa-alueissa.

Ying-Hao Cheng ja Fou-Lai Lin esittelevät askel askeleelta avatun strategian, joka auttoi heidän tutkimuksessa yhdeksää opiskelijaa 11. Strategiaa kutsutaan SU-strategiaksi. Opiskelijoille annetaan ensimmäinen tehtävän ehto ja kysytään mitä tästä ehdosta seuraa. Kun ensimmäinen ehdon kaikki seuraukset on käyty läpi, annetaan opiskelijoille seuraava ehto, jonka seuraukset pyritään ensimmäisen ehdon tavoin käymään läpi. Tämän jälkeen katsotaan, mitä ensimmäinen ja toinen ehto saavat yhdessä aikaan. Tätä jatketaan kaikkien ehtojen kohdalla, kunnes tieto on ehtynyt tai sopiva lopputulos on saavutettu. Tämä avoin strategia pilkkoo todistusta vähentäen siten monimutkaisten kysymysten taakkaa. Avoin strategia jättää askelten määränpään avoimeksi. Tämä mahdollistaa opiskelijoiden vapaan etenemisen askelten suuntaan (Gila & de Villiers, 2009). SU-strategia on kuitenkin tehoton sanallisissa todistustehtävissä. Keskeinen ongelma sanallisissa tehtävissä on miten kirjoittaa ajatteluprosessi.

Samankaltaisen ongelman löytäminen osoittautui tehokkaaksi heuristiikaksi. Tämä heuristiikka nopeuttaa ja antaa varmuutta ongelmanratkaisuprosessiin. Suurin ongelma onkin samankaltaisen ongelman löytäminen tai muistaminen. Keith Weberin vuonna 2001 toteuttamassa tutkimuksessa tohtorikoulutettavilla oli selkeästi tietoa samankaltaisista todistuksista, kuin mitä heille annettiin tehtäväksi. On kuitenkin huomattava, että tohtorikoulutettavien samankaltaisen todistusten työkalupakin rakentamiseen on pitänyt käydä läpi huomattava määrä aiheeseen liittyviä ongelmia ja todistuksia. Tohtorikoulutettavien paremman menestyksen on voinut mahdollistaan pelkästään yksinkertaisesti harjoittelun määrä. Tämä ei tosin ole koko totuus. Tohtorikoulutettava nimittäin sanoi tekevänsä tietyn välivaiheen aina tämän tyylisessä tilanteessa. Hänen intuitionsa samankaltaisuuksien hakemisessa menee pitemmälle kuin suora tehtävien välivaiheiden vertaaminen. Hän on oppinut näkemään samankaltaisen toimenpiteen jokaisessa samankaltaisessa tilanteessa. Ja niin hänen ei tarvinnut tunnistaa tehtävää kovin samanlaiseksi kuin muut aiemmin ratkaisemansa, koska hän näkee samankaltaisuudet suuremmassa mittakaavassa.

Todistusten pilkkomista ja samankaltaisen todistusrakenteen käyttämistä esiintyi niin peruskoulussa kuin ylemmilläkin kouluasteilla. Huomioitavaan on se, että verrattuna esimerkkien käyttöön tai visuaalisuuteen, näiden heuristiikkojen käyttö oli opettajajohtoista. Oppilailla ei esiintynyt oma-aloitteisuutta kyseissä heuristiikoissa.

Todistusten pilkkominen luo turvallisuutta. Se antaa oppilaalle mahdollisuuden keskittyä pieniin asioihin kerrallaan. Välivaiheista löytää helpommin tuttuja kohtia, joiden käsittelyyn on ehtinyt kertyä varmuutta. Todistuksen pilkkomisen negatiivisena puolena voidaan pitää päämäärän hämärtymistä.

Opiskelijoiden kritiikittömyys aiheuttaa ongelmia samankaltaisen todistuksen käytössä. Opiskelijoilla on tapana etsiä ratkaisua samankaltaisesta todistuksesta ilman tarvittavaa harkintaa. Kun todistusten oleellisia eroja ei huomata, vastauksen etsimiseen käytettyä heuristiikkaa sovelletaan virheellisesti.

Tarkistaminen

Polyan kolmannen ja neljännen vaiheen heuristiikat ovat kietoutuneet yhteen tiiviimmin kuin muissa vaiheissa. Kolmannen osan heuristiikat keskittyvät suunnitelman toteuttamiseen. Tässä vaiheessa heuristiikat ovat esimerkiksi seuraavia: Toteuta suunnitelma; tarkista jokainen askel. Osaatko todistaa, että päättely on pätevä? Neljännen osan heuristiikat ovat kysymyksiä, kuten: Pystytkö tarkistamaan, onko lopputulos oikein? Voitko tarkistaa päättelyn? Molemmat vaiheet sisältävät tarkistamiseen liittyviä heuristiikkoja. Tarkistamisen tehtävänä on vähentää virheiden määrää, ja se kuuluu oleellisena osana tehtävän ratkaisemiseen. Tarkistaminen itse asiassa muuttaa jokaisen tehtävän todistukseksi tai ainakin todistusten lukemistehtäväksi.

Tämän päivän opiskelijat tulevat elämään yhä informaatiorikkaammassa maailmassa. Tiedon arviointikyky ei kuitenkaan ole kasvanut yhtä matkaa tarjolla olevan informaatiotulvan mukana. Opiskelijoille on opetettava arviointikykyä (Gila & de Villiers, 2009). Niin omien kuin muidenkin todistusten lukeminen lisää arviointikykyä (Inglis & Alcock, 2012).

Kuten jo aiemmin on todettu, opiskelijoilla ei ole käsitystä siitä, miten käyttää esimerkkejä. Täydelliseen tarkistamiseen pelkkien esimerkkien käyttö ei riitä, mutta esimerkeillä voidaan nopeasti saada ylimääräistä varmennusta. Esimerkiksi Lara Alcockin viiden matemaatikon haastattelututkimuksessa eräs matematiikko sanoo seuraavaa:

> " ... You can scribble out numbers to test out the proof ideas".

Hän käytti esimerkkejä tarkistamaan argumentteja ja harmitteli tämän tavan puuttumista opiskelijoilta. Toinen haasteltavista matemaatikoista sanoi olettavansa opiskelijoiden tarkastavan väitteensä esimerkeillä. Saman matemaatikon mielestä opiskelijoilta puuttuu taito ajatella kriittisesti (Gila & de Villiers, 2009). Tutkimuksesta löytyy vielä eräs mielenkiintoinen lainaus:

> "... when I put moderately challenging problems, what I always find is that the main obstacle is not that they don't know what to do, the main obstacle is that they will do anything, and don't seem to think it needs justification."

Sama professori jatkaa vielä opiskelijoista:

> " They definitely don't have the habit of approaching statements critically, asking themselves "Is this really true? Let me see. Let me try some examples and I will check"".

Nadia Douekin tutkimuksessa luokalle annettiin tehtäväksi tutkia Pythagoraan lauseeseen valmistavaa tehtävää seuraavasti:

> " Task1: Consider the statement: "In a triangle of sides a, b and c, a+b is always smaller than c". Is it true? Always? Why? Prepare yourself to explain how you checked it and why you think it is true, or it is not, or what makes you doubt."

Tosin tarkistamiseen opettaja kelpuutti joitakin piirrettyjä kolmioita. Tällainen tehtävänanto on harvinainen. Vaatimusta tarkistuksen selkeään esille tuomiseen esiintyy harvoin. Tosin tämän tehtävän tarkoituksena oli pohjustaa Pythagoraan lauseen todistusta, joten lisävarmistus saaduille argumenteille oli paikallaan.

Mathew Inglisin ja Lara Alcockin (2012) tutkimuksessa vertailtiin asiantuntijoiden ja aloittelijoiden välisiä eroja todistusten lukemisessa. Tutkimuksen mukaan aloittelijat eivät luotettavasti erottaneet oikeita tuloksia vääristä. Aloittelijoilta siis puuttuu kyky lukea todistuksia kriittisesti.

Tarkistamisen korostamista ilmeni aineistossa hyvin vähän, vaikkakin jokainen tarkistusprosessi muuttaa jokaisen tehtävän todistuksen lukemistehtäväksi. Opiskelijoilta tuntui selkeästi puuttuvan halu tarkastella omaa toimintaansa kriittisesti. Ovatko syynä ainoastaan tarkistusta vaatien tehtävien tai todistusten lukemista vaativien vähyys? Vai onko oppilaiden niin helppo verrata omia saatuja tuloksiaan oppikirjoissa oleviin vastauksiin, ettei heidän tarvitse tarkastella omaa vastaustaan. Toisaalta, mikäli oppilaat eivät tiedä mikä todistus on, on todennäköistä, että heillä on puutteita taidoissa perustella. Tarkistaminen on arkipäiväinen tapahtuma matemaatikolle. Tarkistaminen parantaa kykyä ajatella kriittisesti, ja se jos mikä on tärkeää informaatiorikkaassa yhteiskunnassamme.

Heuristiikat kokonaisuutena

Polyan heuristiikat ovat Polyan itsensä käyttämiä ajatusmalleja, joita hän sovelsi kohdattuaan matemaattisia ongelmia. Ne ovat siis hänen oma tapansa ratkaista ongelmia. Ongelman määritelmäksi valitaan tässä seuraavaa:

> " Ongelma syntyy kun elävällä olennolla on tavoite, muttei tietoa miten saavuttaa tavoitteensa." (Haapakoski & al. 2011).

Todistamisen hallitseminen on opiskelijalle haluttava tavoite, ja hänellä ei ole tietoa saavuttaa tavoitetta. Todistustilanne vastaa siis opiskelijan ongelmatilannetta. Weberin itsensä mielestä todistuksen rakentaminen on ongelmatehtävä (Weber, 2001). Ja heuristiikat on suunniteltu ongelmatilanteita varten.

Usein oppilaat ovat tietoisia siitä, että luokkahuoneessa tehdyt todistukset ovat jo moneen kertaan todistettuja asioita. Nämä todistukset ovat myös intuitiivisesti tuttuja. Tällaista tilannetta ehkäisemään on käytetty Mooren metodia (Knuth, 2002). Mooren metodi perustuu ajatukseen, jossa oppilaille annetaan aksioomia ja annetaan heidän itsenä tutkia, mitä niistä seuraa. Metodin avulla oppilaat saavat itse luoda todistuksia ja keskustella niistä. Metodi muistuttaa hyvin paljon ongelmakeskeistä luokkahuonetyöskentelyä.

Keith Weber (2001) tarkasteli tutkimusta, jossa havaittiin tohtorikoulutettavien omaavan opiskelijoita paremmat tiedot datan analyysin rajoista. Tämä strategia liittyy väistämättä jonkinlaiseen heuristiikkakokonaisuuteen. Onkin tärkeää selvittää mitä tähän strategiakokonaisuuteen kuuluu, ja miten se on rakentunut. Oleellista on kuitenkin, että tämä muodostunut strategia on kokonaisuus. Tutkimus on osoittanut, ettei kokemus takaa riittävää strategista tietoa. Mikäli opiskelijat jätetään ilman ohjausta, he eivät tule omaamaan riittävää strategista tietoa, jota todistusten rakentamiseen tarvitaan (Weber, 2001). Aikaisempi kokemus on osoittanut, että todistuskysymys vaatii aikaa strategian kehittämiseen (Gila & de Villiers, 2009).

Oppilaiden todistukset sisältävät paljon epäformaalia päättelyä, kuten kokeilutodistuksia tai vain erikoistapausten tutkimista (Gila & de Villiers, 2009). Näiden yksittäisten heuristiikkojen löytäminen ei siis ole ongelma opiskelijoille. Ongelmaksi muodostuu se, ettei suurin osa opiskelijoista pysty muodostamaan strategista kokonaisuutta käyttämistään heuristiikoista. Ilman kokonaisuutta heuristiikan hyöty jää vajavaiseksi, ja opiskelija ei tule huomaamaan käyttämänsä heuristiikan rajoituksia. Italiassa luokille 9 - 13 tehtiin tutkimus, jossa opiskelijoita pyydettiin kuvaamaan ja perustelemaan omaksuttuja strategioita, joiden tarkoituksena oli kasvattaa kognitiivista jatkumoa todistuksen tutkimisen ja todistuksen tuottamisvaiheen välillä. Opiskelijoiden ratkaisuissa paljastui tutkijoiden mielestä kiinnostava valikoima ongelmanratkaisustrategioita, joita pöytäkirjassa ei valitettavasti eritelty (Gila & de Villiers, 2009).

Anna-Kaisa Viertola (2011) on koonnut muutamia heuristiikkoja eri lähteistä helpottamaan todistusten kirjoittamista. Listaan niistä tähän heuristiikat, jotka esiintyvät myös Polyan esittelemissä heuristiikoissa:

1. Mieti, mitä saa olettaa ennalta tunnetuksi ja mitä on todistettava

2. Erota selkeästi oletus ja väite. Kirjaa ne ylös selvästi

3. Mieti, mitä osia väitteestä on tarpeen todistaa. Osaa väitteestä voi olla triviaalia tai ennestään todistettua. Kannattaako väite jakaa eri tapauksiin?

11. Muista, että "yksi kuva kertoo enemmän kuin tuhat sanaa".

14. Hyvä idea voi olla myös kirjoittaa todistuksen ensimmäinen ja viimeinen lause ja yrittää täyttää välissä oleva kuilu kulkemalla sitä edestakaisin. Näin päämäärä on näkyvissä ja pysyy mielessä.

16. Todistustehtävästä voi ensin muokata helpomman tehtävän perusperiaatteet säilyttäen (esim. kolmiulotteisesta kaksiulotteiseen) ja etsiä ensin todistuksen helpompaan versioon ja palata sitten alkuperäiseen.

Tässä esitetyt heuristiikat käsittelevät osaa Polyan heuristiikoista. Perusteita sille, miksi nämä heuristiikat ovat todistamisen kirjoittamista helpottavia, ei ole. Näiden heuristiikoiden valinta perustunee Viertolan omaan harkintaan tai hänen lähteiden tekemiin tutkimuksiin tai harkintaan. Näiden heuristiikkojen hyöty- ja haittavaikutuksista ei voida sanoa mitään.

Lopuksi

Todistaminen on ongelma oppilaille (Hemmi, 2010). Tämä on havaittu oppilaiden heikkoina suorituksina todistustehtävissä, sekä matemaatikkojen ja opiskelijoiden välisissä eroissa käsitellä todistuksia. Harvat opiskelijat tietävät, mikä matemaattinen todistus on (Weber, 2001). Todistusten keskeisyys matematiikassa on todettu selväksi. Todistamisen opettamisen muuttamiseen on siis olemassa selkeä tarve.

Katsoin mahdolliseksi, että Polyan heuristiikkojen käytöllä voisi olla positiivisia vaikutuksia. Ne muodostavat toisiaan tukevan ja eheän kokonaisuuden. Niistä on myös valtavasti hyviä käyttökokemuksia niin itse ongelmanratkaisussa kuin myös ongelmanratkaisun opettamisessa.

Tutkimuskysymykseni olivat: Miten Polyan heuristiikkoja on käytetty matemaattisen todistamisen opettamisessa? Mitä etuja ja haittoja Polyan heuristiikkojen käytöllä oli matemaattisen todistuksen opettamisessa? Tulisiko Polyan heuristiikoita sisällyttää matemaattisen todistamisen opettamiseen ja jos tulisi, niin missä määrin?

Polyan heuristiikkojen ensimmäistä osa eli datan ja tuntemattoman tutkiminen ei ollut yleisesti käytetty heuristiikka. Datan määrä kasvu vaatii selkeästi opiskelijoilta keinoja sen tehokkaaseen hallintaan. Dataa tuotiin esille erilaisilla tavoilla, kuten staattisella kuvalla. Oppilaiden yleisiä virheitä datan käytössä olivat esimerkiksi: saman symbolin käyttö monelle muuttujalle ja informaation väärinkäyttö kontekstin ulkopuolella (Bayazit, 2009). Näihin ongelmiin voitaisiin puuttua selkeällä datan analysoinnilla. Tehtävässä annetun datan vertaaminen aikaisempien tehtävien dataan sai oppilaat käyttämään aikaisempaa teoreettista tietämystään ennemmin kuin esimerkiksi mittaamista. Tuntemattoman etsiminen oli keskeisempää vaativammissa tehtävissä. Vaikkakin todistuksen määränpään tarkastelua ja annetun datan tutkimista pidettiin tutkimuksissa hyvänä (Fukawa-Connely, 2012), näiden heuristiikkojen käytön vaikutuksia ei julkaisuissa tullut ilmi.

Oppilaat altistuvat kuitenkin yhä suuremmalle ja suuremmalle määrälle informaatiota, joten heiltä tullaan vaatimaan yhä parempaa analysointitaitoa. Heidän tulee oppia erottamaan ongelmakohta ja etsimään sen poistamiseen tarvittavat määrät tietoa.

Visuaalisuuden käyttö heuristiikkana oli yleistä. Se oli myös tyypillistä kaikille koulutusasteille. Heuristiikkana visuaalisissa elementeissä esiintyi ylikäyttöä. Ylikäytöllä tarkoitetaan tilanteita, joissa visuaalisista elementeistä otettiin sellaista tietoa, jota siitä ei voitu luotettavasti saada. Tämä tilanne saatiin yleensä aikaan olettamalla kuvan sisältävän dataa, jota ei määritelmissä annettu. Tämä johti jopa tilanteisiin, missä opiskelijat uskoivat pelkän visuaalisuuden muodostavan todistuksen. Visuaalisiin elementti käyttö oli ainoa heuristiikka, jossa ei ollut niin sanottua alikäyttöä. Tällä tarkoitetaan siis tilanteita, missä visuaalisuutta olisi voinut käyttää, mutta sitä ei käytetty. Kuvan piirtämistä pidettiin hyvin havainnollistavana ja selittävänä. Ne ovat vaihtoehtoinen tapa ilmaista matematiikan symbolista kieltä.

Visuaalisuuden käytöllä heuristiikkana havaittiin haittavaikutuksia. Näitä olivat juurikin ylikäyttö, sekä visuaalisuuden muodostamat rajoitteet. Rajoitteilla tarkoitetaan tilanteita, joissa oppilaat vaativat todistukselta tiettyjä visuaalisia elementtejä, esimerkiksi geometrisessa todistuksessa kaksisarakkeisuutta, vaikka todistus olisi ollut riittävä ilmankin niitä. Tämä tiukan formaatin vaatiminen aiheuttaa oppilaissa auktoritäärisen todistusskeeman kehittymisen.

Visuaalisuutta käytetään jo nykyisellään paljon. Sen käyttöä heuristiikkana ei ole tarvetta lisätä, vaan pikemminkin vähentää ja ehdottomasti tarkentaa.

Esimerkkien käyttäminen heuristiikka on yleistä. Alemmilla asteilla esimerkkien käytössä esiintyy ylikäyttöä, kun taas ylemmillä asteilla käyttö on liian vähäistä. Esimerkkien käyttöä esiintyy paljon niin opetuksessa kuin myös oppikirjoissa. Esimerkit ovat hyödyllisiä, kun niitä käytetään keskeisen kokeen suorittamisessa. Tällä kokeella paljastetaan symmetrioita sekä saadaan käsitys siitä, miten väitteen rakenne toimii.

Esimerkit ovat myös yksi oppilaiden todistamisen kompastuskivistä. Yleensä niiden rooli nähdään liian suurena. Oppilaat uskovat esimerkkien olevan todistuksia (Gila & de Villiers, 2009). Tämä ei ole kummallista, kun otetaan huomioon, että samat väärinkäsitykset elävät myös potentiaalisilla opettajilla (Stylianides & Stylianides, 2009). Ylemmän koulutusasteen opiskelijat saattavat käyttää enemmän esimerkkejä kuin teorian varmentamiseen olisi välttämätöntä. Korkeakouluopiskelijoilla esiintyy myös esimerkkien alikäyttöä. He ovat haluttomia käyttämään esimerkkejä (Gila & de Villiers, 2009).

Esimerkkien käytön rooli heuristiikkana ei ole yksiselitteinen. Useat hyvät puolet puoltavat niiden lisäämistä ja tarkentamista. Esimerkkejä käytetään kuitenkin sellaisissa tilanteissa mihin ne eivät sovi. Kokonaisuutena esimerkkien mekaniikan selvittämiseen ja tarkistamiseen olisi tarvetta. Osa matemaattista todistamista opettelevista henkilöistä tulisi altistaa sellaisille tehtäville, joissa esimerkkien rajallisuus on havaittavissa. Tällainen tehtävä on edellä mainittu ympyrään muodostuvien alojen ja janojen leikkauspisteiden välisen relaation tutkiminen.

Annetun todistustehtävän vertaaminen aikaisempaan todistustehtävään oli heuristiikkana vähän käytetty, mutta sitä sovellettiin kaikilla asteilla. Käytöllä on ollut oppimisen kannalta positiivisia vaikutuksia (Weber, 2001; Bayazit, 2009; Gila & de Villiers, 2009). Vertaaminen auttaa oppilaita huomaamaan miten aikaisempi tietorakenne on hyödyllinen nykyisessä ongelmassa. Tämä nopeuttaa ja varmentaa todistusprosessia. Todistuksen pilkkomisella havaittiin myös hyödyllisiä vaikutuksia. Tämä selkeästi vähensi todistustaakkaa keskittymällä pieniin osiin todistusta.

Opiskelijoiden kritiikittömyys aiheutti ongelmia samankaltaisten ratkaisujen etsinnässä. Tämän vuoksi heuristiikkaa tulisi opettaa, jotta vaatimus kriittisyydelle tulisi selkeämmin esille. Todistuksen pilkkomisen heikkona puolena voidaan pitää todistuksen määränpään hämärtymistä.

Tarkistamista heuristiikkana opetuksessa käytettiin hyvin vähän. Matemaatikoilla tarkistamisen heuristiikka oli yleinen (Gila & de Villiers, 2009). Tarkistamisen taidon puuttumisella havaittiin olevan useita negatiivisia seurauksia. Oppilaat eivät luotettavasti erottaneet oikeita tuloksia vääristä (Inglis & Alcock, 2012). Opiskelijoilta puuttui halu tarkastella omia ratkaisujaan kriittisesti.

Näin informaatiorikkaissa olosuhteissa kriittiselle ajattelulle on tarvetta. Tämän vuoksi tarkistamisen heuristiikkaa ja tarkistamisen opettamisen lisäämistä tulisi ainakin kokeilla. Varsinkin kun positiivisille vaikutuksille on näin paljon potentiaalia ja havaittuja negatiivisia vaikutuksia ei ole.

Todistamiseen ja sen opettamiseen löytyi vain vähän varsinaisia heuristiikkakokonaisuuksia. Tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että strategisilla kokonaisuuksilla on tärkeä rooli todistamisen hallitsemisessa (Weber, 2001). Polyan heuristiikkakokonaisuuden opettamisesta todistamisessa ei ole tutkimustuloksia.

Polyan heuristiikoista tehtävän muuttamista ei esiintynyt ollenkaan. Ilmeisesti todistuksen yksinkertaistamista ei nähdä hyödyllisenä elementtinä. Tällä ei nyt tarkoiteta numeerisen esimerkin käyttöä, vaan yleisempiä tilanteita, jotka on kuitenkin rajattu yleisestä todistuksesta. Esimerkiksi siis jokin yleisen kolmion ominaisuuden todistaminen ensin suorakulmaiselle kolmiolle. Todistuksen yksinkertaistaminen auttaisi tunnistamaan tilanteita, joissa esimerkkiä on käytetty virheellisesti todistuksena, erottamalla esimerkin yleisen tapauksen yksinkertaistukseksi.

Todistuksiin ei myöskään puututtu sen jälkeen, kun ne olivat valmistuneet. Oppilaita ei kannustettu tarkastelemaan saatua tulosta, saati rakentamaan uudenlaisia todistuksia.

Kuten alussa todettiin, heuristiikoilla ja todistamisen opettamisella on potentiaalisia yhtymäkohtia. On selvää, että yksittäisiä heuristiikoita käytetään jo nykyisellään todistamisen opettamisessa. Visuaalisuuden käyttöä on liikaakin. Esimerkkejä käytetään osin liikaa ja osin liian vähän. Tarkistamiseen ja tehtävien jälkitarkasteluun ei käytetä juurikaan aikaa. Visuaalisuuden käyttöä on tutkittu jo laajemmin. Tehtävien tarkastamiseen taas ei ole tutkimuksissa juuri paneuduttu.

Tämän perusteella Polyan heuristiikkakokonaisuuden opettaminen todistamisen tueksi on mahdollinen ajatus. Ainakin sen tutkimiselle olisi perusteita. Miten muodostuva kokonaisuus puuttuisi edellä mainittuihin todistamisessa esiintyviin ongelmiin?

Muodostuva heuristiikkakokonaisuus tukee yksittäisiä heuristiikoita. Datan ja tehtävänannon huolellinen käsittely ehkäisi visuaalisuuden käytön ongelmia, kuten liiallisen datan lukemista kuvista. Tietoinen strategia asettaisi yksittäiset välivaiheet parempaan kontekstiin. Nämä muodostuvat raamit ehkäisisivät ylikäyttöä, mutta myös tarjoaisivat lisää vaihtoehtoja ongelmien syntyessä.

Heuristiikkojen opettamisessa on potentiaalisia ongelmia. Miten aikatehokasta heuristiikkojen opettaminen on? Heuristiikat tuovat joka tapauksessa yhden opittavan strategiakokonaisuuden lisää, joten todennäköisesti heuristiikkojen opettaminen kuluttaisi ainakin aluksi enemmän aikaa kuin traditionaalinen opetus. Tähän tämä tutkielma ei pysty vastaamaan.

Poistaisiko heuristiikkakokonaisuuden opettaminen jo havaittuja ongelmia heuristiikoissa? Poistuisivatko oppilaiden harhaluulot visuaalisuudesta ja esimerkkien käytöstä, jos opetusta tarkennettaisiin kyseiseltä osalta? Saataisiinko esiintyvät ongelmat kuriin ilman heuristiikkakokonaisuuden opettamista? Jälleen näihin kysymyksiin tutkielma ei tarjoa muuta vastausta kuin sen, että edellä mainitut kysymykset ovat pohtimisen arvoisia.

Kokonaisuutena tutkielma on eritellyt Polyan heuristiikkojen käyttöä ja sen vaikutuksia matemaattisen todistamisen opettamisessa. Tutkielma on osoittanut, että Polyan heuristiikkakokonaisuudella on potentiaalia toimia matemaattisen todistamisen opettamisessa. Se, että onko se parempi kuin nykyinen malli, selviää vain suoralla tutkimuksella. Tämä kirjallisuuskatsaus asettaa kyseisen tutkimusasettelun pohtimisen arvoiseksi.

Viitteet

Arzarello Ferdinando & Sabena Cristina (2011), Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities, Educational Studies in Mathematics, 77, 189-206

Bayazit Nermin (2009), Prospective mathematics teachers` use of mathematical definitions in doing proof

Dreifus Tommy (1999), Why Johnny can`t prove (with apologies to Morris Kline), Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109

Fukawa-Connelly Timothy Patrick (2012), A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves, Educational Studies in Mathematics , 81, 325–345

Gila Hanna & de Villiers Michael (2012), Proof and Proving in Mathematics Education

Haapakoski Antti, Heikkuri Arto & Kangas Jouni (2011), Ongelmanratkaisu matematiikan opetuksessa

Herbst Patricio G. (2002), Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher, Journal for Research in Mathematics Education , 33 (nro. 3, 176-203

Hemmi Kirsti (2010) Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof, Educational Studies in Mathematics, 75, 271–291

Inglis Mathew & Alcock Lara (2012), Expert and Novice Approaches to: Reading Mathematical Proofs, Journal for Research In Mathematics Education, 43 (nro. 4), SIVUNUMEROT!

Knuth Eric J. (2002), Secondary school teachers` conceptions of proof, Journal for Research in Mathematics Education, 33 (nro. 5), 379-405

Opetushallitus (2004), Opetussuunnitelman perusteet, http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus . Luettu 4.11.2013

Pedemonte Bettina (2007) How can the relationship between argumentation and proof be analysed, Educational Studies in Mathematics, 66, 23-41

Polya George.; How to Solve It, Expanded Princeton Science Library Edition, Princeton, 2004

Recio Angel M. & Godino Juan D. (2001), Instutional and personal meanings of mathematical proof, Educational Studies in Mathematics ,48: 82-99

Stylianides Andreas J. (2007), The notion of proof in the context of elementary school mathematics, Educational Studies in Mathematics, 65, 1-20 [a]

Stylianides Andreas J. (2007), Proof and proving in school mathematics, Journal for Research in Mathematics Education , 38 (nro. 3), 289-321 [b]

Stylianides Andreas J. & Stylianides Gabriel J. (2009), Proof constructions and evaluations Educational Studies in Mathematics, 72, 237-253

Thompson Denisse R., Senk Sharon L. & Johnson Gwendolyn J. (2012), Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks, Journal for Research in Mathematics Education, 43 (nro. 3), 253-295

Uhlig Frank (2002), The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra, Educational Studies in Mathematics, 50, 335-346

Viertola Anna-Kaisa (2011). Todistaminen lukion pitkässä matematiikassa, pro gradu tutkielma, Jyväskylä

Weber Keith (2008), How mathematicians determine if an argument is a valid proof, Journal for Research in Mathematics Education, 39 (nro. 4), 431-459

Weber Keith (2001), Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge, Educational Studies in Mathematics, 48, 101-119

Weber Keith & Mejia-Ramos Juan Pablo (2011), Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study, Educational Studies in Mathematics, 76, 329-344

Weber Keith & Pablo Mejia-Ramos Juan (2013), On mathematics proof skimming: Reply to Inglis and Alcock, Journal for Research in Mathematics Education, 44 (nro. 2), 464-474