Yleiset ketjumurtoluvut ja piin irrationaalisuus

Pro gradu -tutkielma
Jonna Luokkanen
2124052
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2014

Sisältö

Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan ketjumurtolukuja ja luvun pii irrationaalisuutta. Tutkielmassa edetään ketjumurtolukujen ominaisuuksien kautta yksinkertaisen ketjumurtoluvun ja toisen asteen algebrallisen luvun väliseen yhteyteen, sekä piin irrationaalisuuden todistamiseen.

Aluksi käydään läpi ketjumurtolukujen yleinen määritelmä lineaaristen muunnosten avulla. Yleisestä määritelmästä johdetaan yksinkertaisempi ketjumurtoluku, johon tutkielmassa keskitytään. Tälle ketjumurtoluvulle määritellään konvergentit ja häntä.

Tästä jatketaan ketjumurtolukujen erikoistapaukseen, yksinkertaisiin ketjumurtolukuihin. Näille ketjumurtoluvuille määritellään kokonaisosamäärä, sekä tutkitaan miten konvergentit arvioivat ja lähestyvät yksinkertaisen ketjumurtoluvun arvoa. Yhtenä esimerkkinä tutkitaan, kuinka kultaisesta leikkauksesta saadaan yksinkertainen ketjumurtoluku ja miten tämän ketjumurtoluvun avulla voidaan määrittää kaava Fibonaccin lukujonon jäsenille. Yksinkertaisiin ketjumurtolukuihin liittyen käsitellään toisen asteen algebrallisen luvun yksinkertaisen jaksollisen ketjumurtolukuesityksen määrittäminen.

Viimeisenä tutkielmassa on piin irrationaalisuuden todistaminen kahdella tavalla. Ensimmäisessä tavassa käytetään ketjumurtolukujen lisäksi hypergeometrisia sarjoja ja niiden ominaisuuksia. Toinen tapa ei liity ketjumurtolukuihin vaan siinä käytetään hyväksi piitä sisältäviä integraalilausekkeita.

Positiivisten kokonaislukujen joukolle käytetään tutkielmassa merkintää $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ ja luonnollisten lukujen joukolle merkintää $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää.

1 Johdatus ketjumurtolukuihin

Aloitetaan ketjumurtolukujen yleisestä määritelmästä ja yksinkertaistetaan se siihen muotoon, jota tutkielmassa myöhemmin käytetään. Yleisen ketjumurtoluvun ja sen konvergenttien määritelmä pohjautuvat lähteen [2] sivuihin 13-20.

Olkoot $r_p \in \mathbb{C}$ ja

$$\tau = \tau_p(w) = \frac{r_p w + s_p}{t_p w + u_p},\ t_p \neq 0,\ p = 0, 1, 2, \dots .$$

Määritellään muunnoksien tulo seuraavasti

$$\tau_0\tau_1(w) = \tau_0(\tau_1(w)),\ \tau_0\tau_1\tau_2(w) = \tau_0\tau_1(\tau_2(w)),$$
$$\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3(w) = \tau_0\tau_1\tau_2(\tau_3(w)), \cdots .$$

Lisätään ja vähennetään lausekkeen $\tau_p(w)$ osoittajaan $r_p u_p/t_p$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\tau_p(w) = \frac{r_p w + s_p}{t_p w + u_p} &= \frac{r_p w + s_p + r_p u_p/t_p - r_p u_p/t_p}{u_p + t_p w} \\
&= \frac{r_p(w + u_p/t_p) - (r_p u_p - s_p t_p)/t_p}{t_p(u_p/t_p + w)} \\
&= \frac{r_p(w + u_p/t_p)}{w + t_p(u_p/t_p)} - \frac{(r_p u_p - s_p t_p)/t_p}{t_p(u_p/t_p + w)} \\
&= \frac{r_p}{t_p} - \frac{(r_p u_p - s_p t_p)/t_p^2}{u_p/t_p + w} \\
&= \frac{r_p}{t_p} - \frac{\Delta_p/t_p^2}{u_p/t_p + w},
\end{aligned}$$

missä $\Delta_p = r_p u_p - s_p t_p$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3 \cdots \tau_n(w)$$

$$= \frac{r_0}{t_0} - \cfrac{\Delta_0/t_0^2}{u_0/t_0 + r_1/t_1 - \cfrac{\Delta_1/t_1^2}{u_1/t_1 + r_2/t_2 - \ddots - \cfrac{\Delta_{n-1}/t_{n-1}^2}{u_{n-1}/t_{n-1} + r_n/t_n - \cfrac{\Delta_n/t_n^2}{u_n/t_n + w}}}}.$$

Kun asetaan $w = \infty$ ja annetaan luvun n lähestyä ääretöntä, niin saatu ääretön esitys on *ketjumurtoluku*. Jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \tau_0\tau_1\tau_2\tau_3\cdots\tau_n(\infty) = v$$

on äärellisenä olemassa, niin ketjumurtoluvun sanotaan suppenevan ja sen arvo on luku v. Tässä oletetaan, että vain äärellinen määrä tuloista $\tau_0\tau_1\ldots\tau_n(\infty)$ ei ole määritelty äärellisenä.

Jotta saadaan yksinkertaistettua ketjumurtoluvun esitystä, korvataan muunnokset $\tau_p(w)$ muunnoksilla

$$t_0(w) = b_0 + w, t_p(w) = \frac{a_p}{b_p + w}, p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Huomataan, että

$$\lim_{n\to\infty} t_0t_1\ldots t_n(0) = \lim_{n\to\infty} t_0t_1\ldots t_{n+1}(\infty).$$

Tällöin saadaan ketjumurtoluku

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}} \tag{2}$$

Lukua a_p kutsutaan *p:nneksi osaosoittajaksi* ja lukua b_p *p:nneksi osanimittäjäksi*, sekä lukua a_p/b_p *p:nneksi osamääräksi*. Ketjumurtolukua

$$t_0t_1\ldots t_n(0) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

kutsutaan ketjumurtoluvun (2) *n:nneksi konvergentiksi* tai *approksimaatioksi*.

Lause 1.1. *Olkoon*

$$t_0t_1\ldots t_n(w) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \frac{a_n}{b_n + w}}}$$

ja määritellään nyt

$$\begin{aligned}
&A_{-1} = 1, B_{-1} = 0,\ A_0 = b_0, B_0 = 1 \\
&A_{p+1} = b_{p+1}A_p + a_{p+1}A_{p-1}, \qquad (3) \\
&B_{p+1} = b_{p+1}B_p + a_{p+1}B_{p-1}, \qquad (4) \\
&p = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$t_0t_1\ldots t_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Todistus. Todistetaan lause matemaattisella induktiolla indeksin n suhteen. Olkoon ensin $n = 0$. Tällöin

$$t_0 = \frac{A_{-1}w + A_0}{B_{-1}w + B_0} = w + b_0,$$

ja väite on tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi kun $n = k$. Nyt

$$\begin{aligned}
t_0t_1\ldots t_{k+1}(w) &\overset{(1)}{=} t_0t_1\ldots t_k\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+w}\right) \\
&\overset{I.O}{=} \frac{A_{k-1}\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+w}\right) + A_k}{B_{k-1}\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}+w}\right) + B_k} \\
&= \frac{A_kw + (b_{k+1}A_k + a_{k+1}A_{k-1})}{B_kw + (b_{k+1}B_k + a_{k+1}B_{k-1})} \\
&\overset{(3),(4)}{=} \frac{A_kw + A_{k+1}}{B_kw + B_{k+1}},
\end{aligned}$$

joten väite on tosi kun $n = k + 1$. Siis väite on tosi kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

□

Edellä esitetystä seuraa

$$t_0t_1\ldots t_n(0) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Tässä tutkielmassa käytetään ketjumurtoluvuille esitystä

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}. \tag{5}$$

Elementit a_p ja b_p ovat kompleksilukuja, ellei toisin mainita. Määritellään tämän ketjumurtoluvun konvergentit asettamalla

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \frac{a_n}{b_n}}} = \frac{A_n}{B_n} \tag{6}$$

lauseen 1.1 avulla lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0, B_0 = 1, A_1 = b_0 b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$ seuraavasti

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + a_{n+2}A_n \tag{7}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + a_{n+2}B_n \tag{8}$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Jos konvergenttien raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

on äärellisenä olemassa, niin ketjumurtoluku (5) suppenee. Jos raja-arvoa ei ole olemassa, niin ketjumurtoluku hajaantuu. Raja-arvo on ketjumurtoluvun arvo.

Ketjumurtoluvulle (5) käytetään myös merkintöjä

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots$$

ja

$$b_0 + \mathbb{K}_{p=1}^{\infty} \left(\frac{a_p}{b_p} \right).$$

1.1 Ketjumurtoluvun muunnos ja häntä

Tutkitaan ketjumurtolukujen ekvivalenssimuunnosta ja häntiä. Lauseet ja todistukset perustuvat lähteeseen [5]. Näitä lauseista on paljon hyötyä kappaleessa 4, kun tutkitaan piin irrationaalisuutta.

Lause 1.2. *Olkoon* $t_k \neq 0$ *kaikilla* $k = 1, 2, \ldots$. *Tällöin*

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}} \tag{9}$$

$$= b_0 + \cfrac{t_1 a_1}{t_1 b_1 + \cfrac{t_1 t_2 a_2}{t_2 b_2 + \cfrac{t_2 t_3 a_3}{t_3 b_3 + \ddots}}} \tag{10}$$

eli

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_k}{d_k}\right),$$

missä $d_0 = b_0$, $c_1 = t_1 a_1$, $d_1 = t_1 b_1$, $c_k = t_{k-1} t_k a_k$, *ja* $d_k = t_k b_k$ *kaikilla* $k = 2, 3, \ldots$.

Seuraava todistus ei perustu mihinkään lähteeseen.

Todistus. Olkoon (A_n/B_n) ja (C_n/D_n) ketjumurtojen (9) ja (10) konvergenttijonot. Alkuarvoilla $C_0 = d_0, D_0 = 1, C_1 = d_0 d_1 + c_1$ ja $D_1 = d_1$ rekursiokaavoista (7) ja (8) saadaan

$$C_{n+2} = d_{n+2} C_{n+1} + c_{n+2} C_n$$
$$D_{n+2} = d_{n+2} D_{n+1} + c_{n+2} D_n.$$

kaikilla k=0,1,....

Nyt $C_0 = d_0 = b_0 = A_0$ ja $D_0 = 1 = B_0$. Näytetään rekursiokaavojen ja induktion avulla, että

$$C_n = t_1 \cdots t_n A_n$$

ja

$$D_n = t_1 \cdots t_n B_n$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

Koska

$$\begin{aligned}C_1 &= d_0 d_1 + c_1\\ &= b_0(t_1 b_1) + t_1 a_1\\ &= t_1(b_0 b_1 + a_1)\\ &= t_1 A_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_2 &= d_2 C_1 + c_2 C_0\\ &= t_2 b_2 C_1 + t_1 t_2 a_2 C_0\\ &= t_2 b_2 (t_1 A_1) + t_1 t_2 a_2 A_0\\ &= t_1 t_2 (b_2 A_1 + a_2 A_0)\\ &= t_1 t_2 A_2,\end{aligned}$$

$$D_1 = d_1 = t_1 b_1 = t_1 B_1,$$

ja

$$\begin{aligned}D_2 &= d_2 D_1 + c_2 D_0\\ &= t_2 b_2 t_1 B_1 + t_1 t_2 a_2 B_0\\ &= t_1 t_2 (b_2 B_1 + a_2 B_0)\\ &= t_1 t_2 B_2.\end{aligned}$$

niin väite on tosi, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Oletetaan, että väite pätee kun $n = 1, 2, \ldots, m$, eli

$$C_m = t_1 \cdots t_m A_m$$

ja

$$D_m = t_1 \cdots t_m B_m.$$

Nyt

$$\begin{aligned}C_{m+1} &= d_{m+1}C_m + c_{m+1}C_{m-1}\\&= t_{m+1}b_{m+1}t_1\cdots t_m A_m + t_m t_{m+1}a_{m+1}t_1\cdots t_{m-1}A_{m-1}\\&= t_1\cdots t_{m+1}(b_{m+1}A_m + a_{m+1}A_{m-1})\\&= t_1\cdots t_{m+1}A_{m+1}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}D_{m+1} &= d_{m+1}D_m + c_{m+1}D_{m-1}\\&= t_{m+1}b_{m+1}t_1\cdots t_m B_m + t_m t_{m+1}a_{m+1}t_1\cdots t_{m-1}B_{m-1}\\&= t_1\cdots t_{m+1}(b_{m+1}B_m + a_{m+1}B_{m-1})\\&= t_1\cdots t_{m+1}B_{m+1},\end{aligned}$$

joten väite on tosi kun $n = m+1$. Siis induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

Saatiin, että

$$C_n = t_1\cdots t_n A_n$$

ja

$$D_n = t_1\cdots t_n B_n$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, jolloin

$$C_n/D_n = A_n/B_n.$$

Siispä ketjumurrot (9) ja (10) ovat samat. $\square$

Äskeisestä ekvivalenssimuunnoksia koskevasta lauseesta saadaan mielenkiintoinen muunnos kerjumurtoluvuille. Jos merkitään $c_n = b_n^{-1}$, niin saadaan kerjumurtoluku

$$b_0 + \cfrac{a_1'}{1 + \cfrac{a_2'}{1 + \cfrac{a_3'}{1 + \ddots}}},$$

missä $a_1' = a_1/b_1$ ja $a_j' = a_j/(b_j b_{j-1})$ kun $j \geq 2$. Lähde [1].

Määritelmä 1.3. Ketjumurron

$$\tau = \mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}$$

häntä on ketjumurto

$$\tau_k = \mathbb{K}_{n=k}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{a_k}{b_k + \cfrac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \ddots}}.$$

Hännät toteuttavat palautuskaavan

$$\tau_k = \frac{a_k}{b_k + \tau_{k+1}}. \tag{11}$$

Lause 1.4. *Olkoon* $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. *Jos*

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \textit{kaikilla} \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

niin

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \textit{kaikilla} \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Todistus. Valitaan positiivinen kokonaisluku n. Oletuksen nojalla

$$0 < \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1.$$

Määritellään

$$K_n = \frac{a_n}{b_n},\ K_k = \frac{a_k}{b_k + K_{k+1}},\ \text{kaikilla } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

missä $K_n < 1$ alkuoletukssen nojalla. Nyt

$$0 < |K_{n-1}| = \left|\frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + K_n}\right| < 1,$$

koska kolmioepäyhtälön mukaan

$$|b_{n-1} + K_n| \geq ||b_{n-1} - |K_n|| \geq |b_{n-1}| - |K_n| > |b_{n-1}| - 1 \geq |a_{n-1}|.$$

Samalla tavoin

$$0 < |K_{n-2}| < 1$$

ja kun tätä jatketaan, saadaan

$$0 < \left| \frac{a_k}{b_k + K_{k+1}} \right| < 1 \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

eli

$$0 < \left| \frac{a_1}{b_1 + K_2} \right| = \left| \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 + K_3} \right| = \ldots$$
$$\left| \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 + \ldots} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} +} \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{A_n}{B_n} \right| < 1.$$

Siis

$$|\tau| = \left| \lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} \right| \leq 1,$$

joten

$$|\tau_k| \leq 1 \; \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

□

Lause 1.5. *Olkoon* $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. *Jos*

$$0 < |\tau_k| < 1 \quad \textit{kaikilla} \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

niin

$$\tau = \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \notin \mathbb{Q}.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $\tau \in \mathbb{Q}$, jolloin myös $\tau_k \in \mathbb{Q}$. Voidaan siis kirjoittaa

$$\begin{aligned} \tau_k = r_k/s_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad s_k \in \mathbb{Z}^+, \quad s_k \perp r_k, \quad \text{ja} \\ 1 \leq |r_k| \leq s_k - 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \tag{12}$$

Palautuskaavaan (11) nojalla

$$r_k/s_k = \frac{a_k}{b_k + \frac{r_{k+1}}{s_{k+1}}},$$

eli

$$r_k r_{k+1} = s_{k+1}(s_k a_k - b_k r_k).$$

Nyt siis välttämättä

$$(s_k + 1)|r_k,$$

eli

$$s_{k+1} \leq |r_k| \ \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Yhtälön (12) ja äsken saadun mukaan

$$|r_{k+1}| \leq s_{k+1} - 1 \leq |r_k| - 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Näin saadaan ääretön aidosti vähenevä jono $|r_1| > |r_2| \ldots$ positiivisia kokonaislukuja, mikä ei ole mahdollista. Vastaoletus on siis väärä ja lause tosi. $\square$

1.2 Yksinkertainen ketjumurtoluku

Ketjumurtolukujen erikoistapaus on yksinkertaiset ketjumurtoluvut, sekä jaksolliset yksinkertaiset ketjumurtoluvut. Tässä kappaleessa käsitellään näiden ketjumurtolukujen ominaisuuksia. Määritelmät ja lauseet perustuvat lähteeseen [3].

Määritelmä 1.6. Olkoon $b_0 \in \mathbb{N}$ ja $b_k \in \mathbb{Z}^+$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Tällöin muotoa

$$\tau = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots}}$$

olevaa ketjumurtolukua kutsutaan *yksinkertaiseksi ketjumurtoluvuksi*. Sitä voidaan merkitä lyhyemmin

$$\tau = [b_0; b_1, b_2, \ldots].$$

Yksinkertaisilla ketjumurtoluvuilla rekursiokaavat (7) ja (8) yksinkertaistuvat alkuarvoilla $A_0 = b_0, B_0 = 1, A_1 = b_0 b_1 + 1$ ja $B_1 = b_1$ muotoon

$$A_{n+2} = b_{n+2} A_{n+1} + A_n \tag{13}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2} B_{n+1} + B_n. \tag{14}$$

Lisäksi huomataan, että luonnollisista luvuista koostuva jono $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ ja positiivisista kokonaisluvuista koostuva jono $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ ovat aidosti kasvavia.

Lause 1.7. *Yksinkertaisen ketjumurtoluvun konvergenteille pätee*

$$A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

Todistus. Merkitään

$$E_k = A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k$$

ja todetaan aluksi, että

$$E_0 = A_1 B_0 - A_0 B_1 = b_0 b_1 - b_0 b_1 = -1.$$

Kaavojen (13) ja (14) perusteella

$$\begin{aligned} E_{k+1} = A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1} &= (b_{k+1} A_k + A_{k-1}) B_k - A_k (b_{k+1} B_k + B_{k-1}) \\ &= b_{k+1} A_k B_k + A_{k-1} B_k - A_k b_{k+1} B_k - A_k B_{k-1} \\ &= -(A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k) \\ &= -E_k. \end{aligned}$$

Siispä $E_0 = -1$, $E_1 = 1$, $E_2 = -1$ ja niin edelleen, joten $E_k = (-1)^{k-1}$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$. □

Lauseen 1.7 seurauksena yksinkertaisten ketjumurtolukujen konvergenteille pätee, että $(A_k, B_k) = 1$. Näin on, koska jos olisi $(A_k, B_k) \geq 1$, niin tämän ykköstä suuremman luvun ja jonkin kokonaisluvun tulo olisi miinus yksi tai yksi, mikä on mahdotonta. Samalla tavoin $(A_k, A_{k+1}) = 1$ ja $(B_k, B_{k+1}) = 1$.

Lause 1.8. *Yksinkertaisen ketjumurtoluvun konvergenttien raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

on äärellisenä olemassa.

Todistus. Lauseen 1.7 mukaan

$$A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1}.$$

Jakamalla tämä luvuilla B_k ja B_{k-1} saadaan

$$\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{B_k B_{k-1}}. \tag{15}$$

Tällöin

$$\frac{A_0}{B_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) = \frac{A_0}{B_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{B_k B_{k-1}}$$

on suppeneva sarja, koska jono $(B_k)_{k\geq 0}$ on aidosti kasvava. Siis raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

on äärellisenä olemassa. □

Määritelmä 1.9. Yksinkertaisen ketjumurtoluvun hännän

$$\tau_k = \cfrac{1}{b_k + \cfrac{1}{b_{k+1} + \ddots}}$$

käänteisluvulle käytetään merkintää

$$C_k = 1/\tau_k = b_k + \cfrac{1}{b_{k+1} + \cfrac{1}{b_{k+2} + \ddots}} = [b_k; b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots].$$

Kutsutaan ketjumurtolukua C_k ketjumurtoluvun τ *k:nneksi kokonaisosamääräksi.*

Kokonaisosamäärälle pätee $\tau = C_0$ ja

$$C_k = b_k + \frac{1}{C_{k+1}}. \tag{16}$$

Lause 1.10. *Yksinkertainen ketjumurtoluku τ voidaan kokonaisosamäärien avulla esittää seuraavasti*

$$\tau = \frac{A_k C_{k+1} + A_{k-1}}{B_k C_{k+1} + B_{k-1}}$$

kaikilla $k \geq 0$, kun merkitään $A_{-1} = 1$ ja $B_{-1} = 0$.

Todistus. Aluksi

$$\tau = \frac{A_0 C_1 + A_{-1}}{B_0 C_1 + B_{-1}} = \frac{b_0 C_1 + 1}{C_1} = b_0 + \frac{1}{C_1} = C_0.$$

Tehdään induktio-oletus, että lause on tosi jollakin k. Tällöin yhtälön (16) ja rekursiokaavan (13) perusteella

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{A_k C_{k+1} + A_{k-1}}{B_k C_{k+1} + B_{k-1}} = \frac{A_k \left(b_{k+1} + \frac{1}{C_{k+2}}\right) + A_{k-1}}{B_k \left(b_{k+1} + \frac{1}{C_{k+2}}\right) + B_{k-1}} \\
&= \frac{(a_{k+1} A_k + A_{k-1}) + \left(\frac{1}{C_{k+2}}\right) A_k}{(a_{k+1} B_k + B_{k-1}) + \left(\frac{1}{C_{k+2}}\right) B_k}{}^{(C_{k+2}} = \frac{A_{k+1} C_{k+2} + A_k}{B_{k+1} C_{k+2} + B_k}.
\end{aligned}$$

Väite on siis tosi myös arvolla $k+1$ ja induktioperiaatten nojalla lause on tosi kaikilla $k = 0, 1, \ldots$. □

Ketjumurtoluvun konvergenttijono suppenee kohti ketjumurtoluvun arvoa, jolloin konvergenteilla voidaan arvioida ketjumurtoluvun arvoa. Johdetaan arvion virheelle kaava.

Lause 1.11. *Yksinkertaisen ketjumurtoluvun ja sen konvergentin erotukselle pätee*

$$\left|\tau - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{B_k^2}$$

Todistus. Lauseiden 1.10 ja 1.7 perusteella johdetaan

$$\begin{aligned}\tau - \frac{A_k}{B_k} &= \frac{A_k C_{k+1} + A_{k-1}}{B_k C_{k+1} + B_{k-1}} - \frac{A_k}{B_k} \\ &= \frac{(A_k C_{k+1} + A_{k-1}) B_k}{(B_k C_{k+1} + B_{k-1}) B_k} - \frac{(B_k C_{k+1} + B_{k-1}) A_k}{(B_k C_{k+1} + B_{k-1}) B_k} \\ &= \frac{-(A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k)}{(B_k C_{k+1} + B_{k-1}) B_k} \\ &= \frac{-(-1)^{k-1}}{(B_k C_{k+1} + B_{k-1}) B_k} \\ &= \frac{(-1)^k}{B_k^2 \left(C_{k+1} + \frac{B_{k-1}}{B_k} \right)} \qquad (17)\end{aligned}$$

Koska $C_{k+1} > 0$ ja $B_{k-1} < B_k$, eli $B_{k-1}/B_k > 1$, niin $C_{k+1} + B_{k-1}/B_k > 1$. Tämän avulla

$$\left| \tau - \frac{A_k}{B_k} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{B_k^2 \left(C_{k+1} + \frac{B_{k-1}}{B_k} \right)} \right| < \frac{1}{B_k^2}.$$

□

Tutkitaan vielä lisää konvergentteja ja käytetään niitä yksinkertaisen äärettömän ketjumurtoluvun irrationaalisuuden todistamiseen. Seuraavat kaksi lausetta ja niiden todistukset pohjautuvat lähteen [4] sivuihin 400-408.

Lause 1.12. *Merkitään yksinkertaisen ketjumurtoluvun konvergentteja seuraavasti*

$$K_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

Tällöin

$$K_1 > K_3 > K_5 > \dots$$

ja

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots$$

Lisäksi kaikki parittomat konvergentit K_{2j-1} ovat suurempia, kuin mikä tahansa parillinen konvergentti K_{2j}.

Todistus. Kirjoitetaan aluksi

$$K_k - K_{k-2} = \frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} = \frac{A_k B_{k-2}}{B_k B_{k-2}} - \frac{A_{k-2} B_k}{B_{k-2} B_k} = \frac{A_k B_{k-2} - A_{k-2} B_k}{B_k B_{k-2}}.$$

Rekursiokaavaojen (13) ja (14), sekä Lauseen 1.7 avulla yllä olevan lausekkeen viimeisen osamäärän osoittaja voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} A_k B_{k-2} - A_{k-2} B_k &= (b_k A_{k-1} + A_{k-2}) B_{k-2} - A_{k-2}(b_k B_{k-1} + B_{k-2}) \\ &= b_k A_{k-1} B_{k-2} + A_{k-2} B_{k-2} - A_{k-2} b_k B_{k-1} - A_{k-2} B_{k-2} \\ &= b_k (A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1}) \\ &= b_k (-1)^{k-2}. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$K_k - K_{k-2} = \frac{b_k (-1)^k}{B_k B_{k-2}},$$

joten $K_k < K_{k-2}$, kun k on pariton ja $K_k > K_{k-2}$, kun k on parillinen. Siis

$$K_1 > K_3 > K_5 > \dots \tag{18}$$

ja

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots. \tag{19}$$

Todistetaan vielä viimeinen yhtälö, jonka mukaan parittomat konvergentit ovat suurempia, kuin parilliset konvergentit. Lauseen 1.7 perusteella

$$K_{2m} - K_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m-1}}{B_{2m} B_{2m-1}} < 0,$$

joten

$$K_{2m-1} > K_{2m}, \tag{20}$$

eli pariton konvergentti on suurempi kuin seuraava parillinen konvergentti. Yhtälöiden (18), (19) ja (20) perusteella

$$K_{2j-1} > K_{2j+2k-1} > K_{2j+2k} > K_{2k},$$

joten jokainen pariton konvergentti on suurempi kuin mikä tahansa parillinen konvergentti. $\square$

Lause 1.13. *Yksinkertainen ketjumurtoluku*

$$\tau = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots}}$$

on irrationaaliluku.

Todistus. Kaavan (15) perusteella

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{B_{2n+1}B_{2n}} = \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}}$$

ja tiedetään, että jono $(B_k)_{k\geq 0}$ on aidosti kasvava, joten

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}}\right) = 0.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \tau.$$

Lauseen 1.12 perusteella jono $(\frac{A_{2n}}{B_{2n}})_{n\geq 0}$ on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu sekä jono $(\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}})_{n\geq 0}$ on aidosti vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Lisäksi saman lauseen perusteella parittoman jonon jäsenet ovat suurempia kuin parillisen jonon jäsenet. Tästä saadaan, että parillinen jono lähestyy lukua τ vasemmalta ja pariton jono oikealta. Voidaan siis kirjoittaa

$$0 < \tau - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} < \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}}.$$

Kaavan (15) perusteella

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}},$$

eli

$$0 < \tau - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} < \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}}.$$

Kerrotaan saatu yhtälö puolittain luvulla B_{2n}, jolloin

$$0 < \tau B_{2n} - A_{2n} < \frac{1}{B_{2n+1}}.$$

Oletetaan, että τ on rationaalinen, eli $\tau = c/d$, missä c ja d ovat kokonaislukuja ja $d \neq 0$. Tällöin

$$0 < \frac{cB_{2n}}{d} - A_{2n} < \frac{1}{B_{2n+1}}.$$

Kerrotaan yhtälö luvulla d, jolloin

$$0 < cB_{2n} - dA_{2n} < \frac{d}{B_{2n+1}}.$$

Nyt $cB_{2n} - dA_{2n}$ on kokonaisluku kaikilla positiivisilla indeksin n arvoilla. Koska $(B_n)_{n\geq 0}$ on aidosti kasvava jono, niin on olemassa sellainen kokonaisluku n_0, että $B_{2n_0+1} > d$, jolloin $d/B_{2n_0+1} < 1$. Saatiin

$$0 < cB_{2n_0} - dA_{2n_0} < 1,$$

mikä on ristiriita, koska $cB_{2n_0} - dA_{2n_0}$ on kokonaisluku. Oletus, että τ on rationaaliluku on väärä ja lause tosi. □

Määritelmä 1.14. Määritellään yksinkertaisen ketjumurtoluvun τ *k:nnes differenssi* asettamalla $D_{-1} = -1$, $D_0 = \tau - b_0 = \tau$ ja

$$D_k = B_k\tau - A_k$$

kaikilla $k = 2, 3, \ldots$.

Lause 1.15. *Differensseille pätee*

$$D_{k+1} = -\frac{D_k}{C_{k+2}}.$$

Todistus. Differenssin määritelmästä saadaan $D_k/B_k = \tau - A_k/B_k$. Käytetään tähän Lauseen 1.11 yhtälöä (17), jolloin

$$D_k/B_k = \tau - A_k/B_k = \frac{(-1)^k}{B_k^2\left(C_{k+1} + \frac{B_{k-1}}{B_k}\right)}$$

ja

$$D_k = \frac{(-1)^k}{B_kC_{k+1} + B_{k-1}}. \tag{21}$$

Korvataan äsken saadusta lausekkeesta C_{k+1} kaavan (16) mukaan, sekä käytetään rekursiokaavaa (14), jolloin

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{(-1)^k}{B_k(b_{k+1} + \frac{1}{C_{k+2}}) + B_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{(b_{k+1}B_k + B_{k-1}) + \frac{B_k}{C_{k+2}}} \\ &= \frac{(-1)^k}{B_{k+1} + \frac{B_k}{C_{k+2}}} = C_{k+2}\frac{(-1)^k}{B_{k+1}C_{k+2} + B_k}. \end{aligned} \tag{22}$$

Yhtälön (21) perusteella

$$D_{k+1} = \frac{-(-1)^k}{B_{k+1}C_{k+2} + B_k}.$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (22), niin

$$D_k = -C_{k+2}D_{k+1}$$

ja

$$D_{k+1} = -\frac{D_k}{C_{k+2}}.$$

□

Yhtälöstä (21) nähdään, että differenssien jonon $(D_k)_{k\geq -1}$ jäsenten etumerkki vaihtelee positiiviseksi ja negatiiviseksi vuorotellen. Indeksin k kasvaessa jono lähestyy nollaa monotonisesti, sillä jono $(B_k)_{k\geq 1}$ on aidosti kasvava.

Esimerkki 1.16. Tutkitaan ketjumurtolukujen, kultaisen leikkauksen ja Fibonaccin lukujonon yhteyttä. Tarkastellaan janaa, jonka pituus on yksi. Jaetaan jana kahteen osaan niin, että koko janan suhde pitempään osaan on sama kuin pitemmän osan suhde lyhyempään janaan. Jos merkitään, että pitempi osa on x, niin saadaan yhtälö

$$g = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \tag{23}$$

missä g on kultainen leikkaus. Muokataan yhtälöä ja ratkaistaan se. Siis

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad | \cdot x(1-x) \quad \Rightarrow \quad 1 - x = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Negatiivinen muuttujan x arvo ei käy, joten yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

ja tällöin kultainen leikkaus voidaan laskea seuraavasti

$$g = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}^{(\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,61803\ldots.$$

Kun $g > 1$, saadaan

$$\frac{1}{x} = 1 + (\frac{1}{x} - 1) = 1 + \frac{1 - x}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{1-x}},$$

joten

$$g = 1 + \frac{1}{g}.$$

Kun tätä käytetään uudelleen ja uudelleen, saadaan yksinkertainen ketjumurtoluku

$$g = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ddots}}.$$

Tähän ketjumurtoon liittyvää lukujonoa $(F_k)_{k \geq 0}$, missä $F_{k+1} = B_k$ ja $B_{-1} = 0$ kutsutaan Fibonaccin lukujonoksi. Kyseisen ketjumurtoluvun osaosoittajat ovat nyt $a_k = 1$ ja osanimittäjät $b_k = 1$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ joten rekursiokaavoiksi saadaan

$$A_{k+2} = A_{k+1} + A_k$$

ja

$$B_{k+2} = B_{k+1} + B_k.$$

Tällöin

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1},$$

missä $k = 1, 2, \ldots$. Kun lasketaan Fibonaccin lukujonon ensimmäiset termit rekursiokaavan (8) avulla, niin

$$\begin{aligned}
&F_0 = B_{-1} = 0, \quad F_1 = B_0 = 1, \quad F_2 = B_1 = F_1 + F_0 = 1 = A_0,\\
&F_3 = B_2 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 = A_1, \quad F_4 = B_3 = 2 + 1 = 3 = A_2,\\
&F_5 = B_4 = 3 + 2 = 5 = A_3, \ldots.
\end{aligned}$$

Siis $A_k = B_{k+1} = F_{k+2}$.

Muodostetaan differenssin avulla Fibonaccin luvuille lauseke indeksin k avulla lausuttuna. Edellisten ja differenssin määritelmän perusteella $D_k = F_{k+1}g - F_{k+2}$. Tiedetään, että $C_k = g$, joten Lauseesta 1.15 seuraa

$$F_{k+1}g - F_{k+2} = (-1/g)(F_k g - F_{k+1}) = \ldots = (-1/g)^k (F_1 g - F_2) = (-1/g)^{k+1}(-1).$$

Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain luvulla g, saadaan

$$F_{k+1} - gF_k = (-1/g)^k$$

ja

$$F_{k+1} = (-1/g)^k + gF_k.$$

Kirjoitetaan viimeisimpään yhtälöön

$$h = -1/g = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

jolloin

$$F_{k+1} = h^k + gF_k.$$

Toistetaan tätä kaavaa yhä uudelleen ja saadaan

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= h^k + gF_k = h^k + gh^{k-1} + g^2 F_{k-1}\\
&= \ldots = h^k + gh^{k-1} + g^2 h^{k-2} + \ldots + g^k h^0 + g^{k+1} F_0.
\end{aligned}$$

Käyttämällä äsken saatuun yhtälöön yleistä potenssien erotuksen kaavaa

$$C^n - D^n = (C - D)(C^{n-1} + C^{n-1}D + \ldots + CD^{n-2} + D^{n-1}),$$

voidaan kirjoittaa

$$F_{k+1} = \frac{g^{k+1} - h^{k+1}}{g - h}.$$

Lasketaan

$$g - h = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

jolloin

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

1.3 Jaksollinen yksinkertainen ketjumurtoluku

Määritelmä 1.17. Ketjumurtoluku

$$\begin{aligned} &[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, \overline{b_N, \ldots, b_{N+L-1}}] \\ &= [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, b_N, \ldots, b_{N+L-1}, b_{N-1}, b_N, \ldots, b_{N+L-1}, \ldots] \end{aligned}$$

on yksinkertainen jaksollinen ketjumurtoluku, jonka *jakson pituus* on L ja *alkutermin pituus* on N. Jos alkutermiä ei ole, eli ketjumurtoluku on muotoa

$$[\overline{b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{L-1}}],$$

niin sitä sanotaan *yksinkertaiseksi puhtaasti jaksolliseksi ketjumurtoluvuksi.* Tässä jakson pituus määritellään aina lyhimmäksi mahdolliseksi ja alkutermin lopussa ei ole jakson toistuvaa osaa.

Jaksollisessa ketjumurtoluvussa siis jokin äärellinen osa osaosoittajista toistuu äärettömän monta kertaa.

2 Algebrallisen luvun yksinkertainen ketjumurtoesitys

Käsitellään lyhyesti toisen asteen algebrallisia lukuja. Näitä lauseita ei todisteta, koska todistukset eivät kuulu tutkielman aihepiiriin. Algebrallisten lukujen määritelmät ja lauseet perustuvat lähteeseen [5].

Määritelmä 2.1. Kompleksiluku τ on toisen asteen algebrallinen luku, jos on olemassa rationaaliluvut a ja b sekä kokonaisluku D, jotka toteuttavat ehdot

$$\tau = a + b\sqrt{D}$$

ja $\sqrt{D}$ on irrationaaliluku. Toisen asteen algebralliset luvut τ muodostavat toisen asteen neliökunnan

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} | a, b \in \mathbb{Q}\}. \tag{24}$$

Luku

$$\overline{\tau} = a - b\sqrt{D}$$

on luvun τ liittoluku. Luku $\overline{\tau}$ kuuluu myös neliökuntaan (24). Toisen asteen algebrallisten lukujen A ja B liittoluvuille pätee

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A/B} = \overline{A}/\overline{B} \quad \text{ja} \quad \overline{nA} = n\overline{A},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Lause 2.2. *Jos kompleksiluku τ on toisen asteen algebrallinen luku, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut A, B, C ja D, että*

$$A\tau^2 + B\tau + C = 0.$$

Määritelmä 2.3. Määritelmän 2.1 luku τ on irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku, jos $d \neq 0$.

Lause 2.4. *Irrationaaliluku τ on irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku, jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut A, B ja C, $A \neq 0$, että*

$$A\tau^2 + B\tau + C = 0. \tag{25}$$

Käydään läpi kaksi yksinkertaisiin jaksollisiin ketjumurtolukuihin ja algebrallisiin lukuihin liittyvää lausetta. Toisen lauseen todistuksesta saadaan metodi joidenkin neliöjuurta sisältävien lausekkeiden jaksollisen ketjumurtoesityksen löytämiseen, joten lasketaan tästä pieni esimerkki lopuksi. Käsiteltävät lauseet perustuvat lähteeseen [3].

Lause 2.5. *Jos τ on yksinkertainen jaksollinen ketjumurtoluku, niin τ on irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku.*

Todistus. Koska τ on yksinkertainen päättymätön ketjumurtoluku, niin se on positiivinen ja irrationaalinen. Olkoon

$$\tau = [\overline{b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{L-1}}]$$

puhtaasti jaksollinen yksinkertainen ketjumurtoluku. Tällöin $\tau = C_0 = C_L = C_{2L} = \ldots$, joten tämän ja Lauseen 1.10 perusteella

$$\tau = \frac{A_{L-1}C_L + A_{L-2}}{B_{L-1}C_L + B_{L-2}} = \frac{A_{L-1}\tau + A_{L-2}}{B_{L-1}\tau + B_{L-2}}.$$

Kun tätä yhtälöä kerrotaan puolittan luvulla $B_{L-1}\tau + B_{L-2}$, niin

$$B_{L-1}\tau^2 + B_{L-2}\tau = A_{L-1}\tau + A_{L-2}.$$

Tästä saadaan toisen asteen yhtälö

$$B_{L-1}\tau^2 + (B_{L-2} - A_{L-1})\tau - A_{L-2} = 0.$$

Tässä B_{L-1} on yksinkertaisen ketjumurtoluvun konvergentin osoittajana nollasta eroava kokonaisluku ja $B_{L-2} - A_{L-1}$ sekä A_{L-2} ovat samoin kokonaislukuja. Siis τ on irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku määritelmän mukaan.

Olkoon nyt ketjumurtoluvulla τ alkutermi, eli

$$\tau = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, \overline{b_N, \ldots, b_{N+L-1}}].$$

Nyt $C_N = C_{N+L} = C_{N+2L} = \ldots$. Käytetään Lausetta 1.10 kahdella eri indeksillä ja saadaan kaksi yhtälöä

$$\tau = \frac{A_{N-1}C_N + A_{N-2}}{B_{N-1}C_N + B_{N-2}} \quad \text{ja} \quad \tau = \frac{A_{N+L-1}C_{N+L} + A_{N+L-2}}{B_{N+L-1}C_{N+L} + B_{N+L-2}}.$$

Koska $C_N = C_{N+L}$, niin jälkimmäisestä yhtälöstä tulee

$$\tau = \frac{A_{N+L-1}C_N + A_{N+L-2}}{B_{N+L-1}C_N + B_{N+L-2}}.$$

Muokataan ensimmäistä yhtälöä niin, että

$$
\begin{aligned}
&\tau = \frac{A_{N-1}C_N + A_{N-2}}{B_{N-1}C_N + B_{N-2}} \quad | \cdot (B_{N-1}C_N + B_{N-2}) \\
\Rightarrow \quad & B_{N-1}C_N\tau + B_{N-2}\tau = A_{N-1}C_N + A_{N-2} \\
\Rightarrow \quad & B_{N-1}C_N\tau - A_{N-1}C_N = A_{N-2} - B_{N-2}\tau \\
\Rightarrow \quad & C_N(B_{N-1}\tau - A_{N-1}) = A_{N-2} - B_{N-2}\tau \quad | : (B_{N-1}\tau - A_{N-1}) \\
\Rightarrow \quad & C_N = \frac{A_{N-2} - B_{N-2}\tau}{B_{N-1}\tau - A_{N-1}} = -\frac{B_{N-2}\tau - A_{N-2}}{B_{N-1}\tau - A_{N-1}}.
\end{aligned}
$$

Muokataan samalla tavoin toista yhtälöä, jolloin

$$
\begin{aligned}
&\tau = \frac{A_{N+L-1}C_N + A_{N+L-2}}{B_{N+L-1}C_N + B_{N+L-2}} \quad | \cdot (B_{N+L-1}C_N + B_{N+L-2}) \\
\Rightarrow \quad & B_{N+L-1}C_N\tau + B_{N+L-2}\tau = A_{N+L-1}C_N + A_{N+L-2} \\
\Rightarrow \quad & C_N(B_{N+L-1}\tau - A_{N+L-1}) = A_{N+L-2} - B_{N+L-2}\tau \quad | : (B_{N+L-1}\tau - A_{N+L-1}) \\
\Rightarrow \quad & C_N = -\frac{B_{N+L-2}\tau - A_{N+L-2}}{B_{N+L-1}\tau - A_{N+L-1}}.
\end{aligned}
$$

Nyt on saatu kaksi muotoa kokonaisosamäärälle C_N, joten merkitään ne samaksi. Muokataan saatua yhtälöä niin, että

$$
\begin{aligned}
&\frac{B_{N-2}\tau - A_{N-2}}{B_{N-1}\tau - A_{N-1}} = \frac{B_{N+L-2}\tau - A_{N+L-2}}{B_{N+L-1}\tau - A_{N+L-1}} \\
\Rightarrow \quad & (B_{N-2}\tau - A_{N-2})(B_{N+L-1}\tau - A_{N+L-1}) = (B_{N+L-2}\tau - A_{N+L-2})(B_{N-1}\tau - A_{N-1}) \\
\Rightarrow \quad & B_{N-2}B_{N+L-1}\tau^2 - B_{N-2}A_{N+L-1}\tau - A_{N-2}B_{N+L-1}\tau + A_{N-2}A_{N+L-1} \\
& = B_{N+L-2}B_{N-1}\tau^2 - B_{N+L-2}A_{N-1}\tau - A_{N+L-2}B_{N-1}\tau + A_{N+L-2}A_{N-1} \\
\Rightarrow \quad & (B_{N-2}B_{N+L-1} - B_{N+L-2}B_{N-1})\tau^2 \\
& \quad + (B_{N+L-2}A_{N-1} + A_{N+L-2}B_{N-1} - B_{N-2}A_{N+L-1} - A_{N-2}B_{N+L-1})\tau \\
& \quad + A_{N-2}A_{N+L-1} - A_{N+L-2}A_{N-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Saatu yhtälö ei ole toisen asteen yhtälö, jos toisen asteen termin kerroin on nolla, eli

$$B_{N-2}B_{N+L-1} = B_{N+L-2}B_{N-1}.$$

Tässä tapauksessa siis kokonaisluku B_{N+L-1} jakaisi termin $B_{N+L-2}B_{N-1}$. Tiedetään, että $(B_{N+L-1}, B_{N+L-2}) = 1$, jolloin luvun B_{N+L-1} täytyisi jakaa luku B_{N-1}, mutta $B_{N+L-1} > B_{N-1}$. Siis B_{N+L-1} ei jaa tuloa $B_{N+L-2}B_{N-1}$. Näin ollen kyseinen yhtälö on toisen asteen yhtälö ja τ on irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku. $\square$

Lause 2.6. *Jos τ on positiivinen irrationaalinen algebrallinen luku, niin τ on jaksollinen yksinkertainen ketjumurtoluku.*

Todistus. Olkoon nyt τ positiivinen irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku, jolloin sen on toisen asteen yhtälön (25) ratkaisu. Siis

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4CA}}{2A}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\tau = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0},$$

missä $Q_0 \neq 0$ ja P_0 ovat kokonaislukuja ja $D > 0$ ei ole minkään luvun neliö. Lisäksi

$$Q_0 | (D - P_0^2),$$

koska

$$D - P_0^2 = b^2 - 4CA - (-B)^2 = -4CA = -2C(2A) \quad \text{ja} \quad Q_0 = 2A.$$

Etsitään luvulle τ ketjumurtoesitystä. Merkitään luvun τ kokonaisosaa $b_0 = [\tau]$, jolloin desimaaliosa on

$$\begin{aligned}\tau - [\tau] &= \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} - b_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} - \frac{Q_0 b_0}{Q_0} = \frac{P_0 - Q_0 b_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \\ &= \frac{\sqrt{D} - (Q_0 b_0 - P_0)}{Q_0} = \frac{\sqrt{D} - P_1}{Q_0},\end{aligned}$$

missä

$$P_1 = b_0 Q_0 - P_0$$

on kokonaisluku. Nyt

$$C_1 = \frac{1}{\tau - b_0} = \frac{Q_0}{\sqrt{D} - P_1} = \frac{Q_0(\sqrt{D} + P_1)}{(\sqrt{D} - P_1)(\sqrt{D} + P_1)}$$
$$= \frac{Q_0(\sqrt{D} + P_1)}{D - P_1^2} = \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1},$$

missä

$$Q_1 = \frac{D - P_1^2}{Q_0} = \frac{D - (b_0Q_0 - P_0)^2}{Q_0} = \frac{D - (b_0^2Q_0^2 - 2b_0Q_0P_0 + P_0^2)}{Q_0}$$
$$= \frac{D - P_0^2 + Q_0(2b_0P_0 - b_0^2Q_0)}{Q_0} = \frac{D - P_0^2}{Q_0} + 2b_0P_0 - b_0^2Q_0.$$

Luku Q_1 on kokonaisluku, sillä tiedetään, että $Q_0|(D - P_0^2)$. Koska C_1 on positiivisen luvun τ desimaaliosan käänteisluku, niin $C_1 > 1$.

Seuraavaksi merkitään, että luvun C_1 kokonaisosa on b_1 ja lasketaan samalla tavoin luvun C_1 desimaaliosa ja sen käänteisluku

$$C_2 = \frac{1}{C_2 - b_1} = \frac{P_2 + \sqrt{D}}{Q_2}.$$

Koska

$$Q_1 = \frac{D - P_1^2}{Q_0},$$

niin

$$Q_1Q_0 = D - P_1^2,$$

joten

$$Q_1|(D - P_1^2).$$

Tästä saadaan, samalla tavoin kuin luvun Q_1 kohdalla, että luku

$$Q_2 = \frac{D - P_2^2}{Q_1}$$

on kokonaisluku.

Kun jatketaan yllä olevaa algoritmia, niin saadaan

$$C_{k+1} = \frac{P_{k+1} + \sqrt{D}}{Q_{k+1}},$$

missä $P_{k+1} = b_k Q_k - P_k$, $Q_{k+1} = (D - P_{k+1}^2)/Q_k$ ja $C_{k+1} > 1$ kun $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tässä luvut P_{k+1} ja Q_{k+1} ovat kokonaislukuja. Todistetaan seuraavaksi, että algoritmi alkaa jossakin kohti toistamaan itseään.

Luvun C_k konjugaatti on luku

$$\overline{C}_k = \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k}.$$

Lauseen (1.10) perusteella

$$\tau = C_0 = \frac{A_k C_{k+1} + A_{k-1}}{B_k C_k + B_{k-1}},$$

jolloin

$$\overline{C}_0 = \frac{A_k \overline{C}_{k+1} + A_{k-1}}{B_k \overline{C}_k + B_{k-1}}.$$

Ratkaistaan tästä $\overline{C}_{k+1}$ kirjoittamalla

$$\begin{aligned}
\overline{C}_0 &= \frac{A_k \overline{C}_{k+1} + A_{k-1}}{B_k \overline{C}_{k+1} + B_{k-1}} \qquad | \cdot (B_k \overline{C}_{k+1} + B_{k-1}) \\
\Rightarrow \quad \overline{C}_0 (B_k \overline{C}_{k+1} + B_{k-1}) &= A_k \overline{C}_{k+1} + A_{k-1} \\
\Rightarrow \quad \overline{C}_0 B_k \overline{C}_{k+1} - A_k \overline{C}_{k+1} &= A_{k-1} - \overline{C}_0 B_{k-1} \\
\Rightarrow \quad \overline{C}_{k+1} (\overline{C}_0 B_k - A_k) &= -(\overline{C}_0 B_{k-1} - A_{k-1}) \quad | : (\overline{C}_0 B_k - A_k) \\
\Rightarrow \quad \overline{C}_{k+1} &= -\frac{\overline{C}_0 B_{k-1} - A_{k-1}}{\overline{C}_0 B_k - A_k} \\
&= -\frac{B_{k-1}}{B_k} \cdot \frac{\overline{C}_0 - (A_{k-1}/B_{k-1})}{\overline{C}_0 - (A_k/B_k)}.
\end{aligned}$$

Koska $A_k/B_k \to \tau$ kun $k \to \infty$, niin tiedetään, että

$$\overline{C}_{k+1} = -\frac{B_{k-1}}{B_k}(1 + \epsilon_k),$$

missä $\epsilon_k \to 0$, kun $k \to \infty$ (ei todisteta tätä). Tästä seuraa, että $-1 < \overline{C}_{k+1} < 0$. Koska kokonaisosamäärä $C_{k+1} > 1$, niin suurilla indeksin k arvoilla

$$C_k - \overline{C}_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{D}}{Q_k} > 0, \text{ joten } Q_k > 0,$$

$$C_k + \overline{C}_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} + \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} = \frac{2P_k}{Q_k} > 0 \text{ joten } P_k > 0,$$

$$\overline{C}_k = \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} < 0, \text{ joten } P_k - \sqrt{D} < 0, \text{ joten } P_k < \sqrt{D},$$

$$-1 < \overline{C}_k = \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} < 0, \text{ joten } 0 < \frac{\sqrt{D} - P_k}{Q_k} < 1, \text{ joten } \sqrt{D} - P_k < Q_k \text{ ja}$$

$$C_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} > 1 \text{ joten } Q_k < \sqrt{D} + P_k.$$

Näin ollen P_k ja Q_k ovat positiivisia kokonaislukuja, sekä $0 < P_k < \sqrt{D}$ ja $0 < \sqrt{D} - P_k < Q_k < \sqrt{D} + P_k$. Siis positiivisten kokonaislukujen jonot (P_k) ja (Q_k) ovat rajoitettuja, eli luvuille (P_k) ja (Q_k) on vain äärellinen määrä vaihtoehtoja. Nämä luvut siis alkavat toistua suoritettaessa algoritmia tarpeeksi pitkälle ja ketjumurtoluku $\tau = [b_0; b_1, b_2 \ldots]$ on jostakin lähtien jaksollinen. □

Yllä olevassa todistuksessa esitetään algoritmi irrationaalisen toisen asteen algebrallisen luvun jaksollisen yksinkertaisen ketjumurtoesityksen löytämiseksi. Käytetään tätä metodia seuraavassa esimerkissä, joka ei perustu mihinkään lähteeseen.

Esimerkki 2.7. Tutkitaan yhtälöä

$$3x^2 - 8x + 3 = 0.$$

Yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Ratkaisu

$$\tau = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

on positiivinen irrationaalinen toisen asteen algebrallinen luku. Käytetään tähän todistuksen (2) algoritmia, jolloin

$$C_0 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \quad P_0 = 4, \quad Q_0 = 3, \quad D = 7, \quad b_0 = 2 \quad \text{ja} \quad 3|(7 - 4^2) = -9.$$

Jatketaan laskemista ja

$$P_1 = b_0Q_0 - P_0 = 2 \cdot 3 - 4 = 2, \quad Q_1 = \frac{D - P_1^2}{Q_0} = \frac{7 - 2^2}{3} = 1,$$
$$C_1 = \frac{P_1 + \sqrt{7}}{Q_1} = \frac{2 + \sqrt{7}}{1} = 2 + \sqrt{7}, \quad b_1 = 4,$$

$$P_2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2, \quad Q_2 = \frac{7 - 2^2}{1} = 3, \quad C_2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \quad b_2 = 1,$$

$$P_3 = 1 \cdot 3 - 2 = 1, \quad Q_3 = \frac{7 - 1^2}{3} = 2, \quad C_3 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \quad b_3 = 1,$$

$$P_4 = 1 \cdot 2 - 1 = 1, \quad Q_4 = \frac{7 - 1^2}{2} = 3, \quad C_4 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}, \quad b_4 = 1,$$

$$P_5 = 1 \cdot 3 - 1 = 2, \quad Q_5 = \frac{7 - 2^2}{3} = 1, \quad C_5 = \frac{2 + \sqrt{7}}{1} = 2 + \sqrt{7}, \quad b_5 = 4.$$

Huomataan, että $C_5 = C_1$ ja tästä eteenpäin algoritmi alkaa toistua. Saadaan

$$\tau = [2; \overline{4, 1, 1, 1, 4}].$$

3 Hypergeometriset sarjat

Tässä luvussa tutkitaan hypergeometristen sarjojen ja ketjumurtolukujen yhteyttä. Todistukseen luvun π irrationaalisuudesta tarvitaan näihin sarjoihin liittyvää yleistä teoriaa ja lauseita, joita tässä luvussa käsitellään. Käsitellyt asiat pohjautuvat lähteisiin [1] ja [5].

Määritellään uusi merkintä

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a + 1) \ldots (a + n - 1), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tästä erikoistapauksena saadaan luvun n kertoma

$$(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n = n!.$$

Tällaisten tulojen avulla määritellään hybergeometrinen sarja

$$ {}_AF_B \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_A \\ b_1, \ldots, b_B \end{matrix} \;\middle|\; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_A)_n}{(b_1)_n \cdots (b_B)_n} \cdot \frac{t^n}{n!}. $$

Esimerkki 3.1. Erikoistapauksia hypergeometrisista sarjoista:

a) geometrinen sarja

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix} \;\middle|\; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot n! \cdot t^n}{n! \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix} \;\middle|\; t \right) $$

b) eksponenttifunktio

$$ {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \;\middle|\; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t. $$

3.1 Hypergeometrinen sarja ${}_0F_1$

Tässä kappaleessa $c, t, z \in \mathbb{C}, c \neq 0, -1, -2, \ldots$ ja

$$ f(c) = {}_0F_1 \left(\begin{matrix} * \\ c \end{matrix} \;\middle|\; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n. $$

Lemma 3.2. $f(c) = f(c+1) + \frac{t}{c(c+1)} f(c+2)$

Todistus. Merkinnän $(a)_n$ ja funktion $f(c)$ määritelmien perusteella

$$
\begin{aligned}
f(c+1) + \frac{t}{c(c+1)} f(c+2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(c+1)_n} + \frac{t}{c(c+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(c+2)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(c+1)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!(c)_{n+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(c+1)_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!(c)_{n+1}} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!(c+1)_n}^{(c} + \frac{1}{(n-1)!(c)_{n+1}}^{(n} \right) t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c+n}{n!(c)_n} t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c+n}{n!c(c+1)\dots(c+n)} t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n \\
&= f(c)
\end{aligned}
$$

□

Lause 3.3. *Funktiolle $f(c)$ pätee*

$$
\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{c(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1+\dots}} = 1 + \frac{t/c}{c+1+\frac{t}{c+2+\frac{t}{c+3+\dots}}}.
$$

Todistus. Lemmasta 3.2 saadaan

$$
f(c+k) = f(c+1+k) + \frac{t}{(c+k)(c+1+k)} f(c+2+k),
$$

joten

$$
\frac{f(c+k)}{f(c+1+k)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c+k)(c+1+k)}}{f(c+1+k)/f(c+2+k)}. \tag{26}
$$

Kun $k = 0$, saadaan yhtälöstä (26)

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{c(c+1)}}{f(c+1)/f(c+2)}$$

Käytetään yhtälöä (26) vakion k arvolla 1 edellä saadun yhtälön oikean puolen nimittäjän nimittäjään ja saadaan

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{c(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{f(c+2)/f(c+3)}}.$$

Kun näin jatketaan yhtälön (26) sijoittamista, saadaan

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{c(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1 + \ddots}}.$$

$\square$

Lemma 3.4. *Trigonometriset funktiot sini ja kosini voidaan esittää seuraavalla tavalla:*

a) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z_0 F_1 \left({* \atop 3/2} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4} \right)$

b) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} =_0 F_1 \left({* \atop 1/2} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4} \right)$

Todistus. Kehitelmät

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

ovat sinin ja kosinin Taylorin kehitelmät. Kirjoitetaan auki sinin ja kosinin hyperbolinen fuktio ${}_0F_1$:

a)

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4}\right) &= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3/2)_n n!}\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3/2)_n 4^n n!} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{3/2 \cdot 5/2 \cdot 7/2 \cdot \ldots \cdot (3/2+n-1)}_{n\ kpl} 4^n n!} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) 2^n n!} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1/2)_n n!}\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1/2)_n 4^n n!} z^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} z^{2n}. \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}
\end{aligned}
$$

$\square$

Äsken todistetusta lemmasta saadaan, että

$$
\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{z_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 3/2 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 1/2 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \frac{-z^2}{4}\right)}.
$$

Lause 3.5. *Olkoon $z \neq \pi/2 + k\pi$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tangenttifunktio voidaan esittää ketjumurtolukuna*

$$\tan z = \frac{z}{1+} \frac{-z^2}{3+} \frac{-z^2}{5+\dots}.$$

Todistus. Käytetään lausetta 3.3 sijoituksilla $t = -z^2/4$ ja $c = 1/2$ ja saadaan

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{z {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{-z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{-z^2}{4}\right)} \\
&= \frac{zf(3/2)}{f(1/2)} \\
&= \frac{z}{f(1/2)/f(3/2)} \\
&= \frac{z}{1 + \frac{-z^2/2}{3/2 + \frac{-z^2/4}{5/2 + \frac{-z^2/4}{7/2+\dots}}}}.
\end{aligned}$$

Käytetään vielä Lausetta 1.2 arvoilla $t_1 = 1$ ja $t_n = 2$, kun $n = 2, 3, \dots$, jolloin

$$\tan z = \frac{z}{1 + \frac{-z^2}{3 + \frac{-z^2}{5 + \frac{-z^2}{7+\dots}}}}.$$

□

4 Luvun π irrationaalisuustodistuksia

Lause 4.1. *Luku π on irrationaalinen.*

Todistus. Todistetaan lause kahdella hyvin erilaisella tavalla.

Tapa 1. Tämä todistus perustuu lähteeseen [5]. Olkoon nyt $z = \pi/4$, jolloin $\tan z = 1$. Käyttämällä tangenttifunktion ketjumurtokehitelmää saadaan

$$1 = \frac{z}{1 + \frac{-z^2}{3+} \frac{-z^2}{5+} \frac{-z^2}{7+\dots}},$$

joten

$$z = 1 + \frac{-z^2}{3+}\frac{-z^2}{5+}\frac{-z^2}{7+\ldots}.$$

Tehdään vastaoletus, että $\pi \in \mathbb{Q}$. Nyt voidaan merkitä $z = \pi/4 = r/s$, $r \in \mathbb{Z}$ ja $s \in \mathbb{Z}^+$, jolloin

$$r/s = 1 + \frac{-(r/s)^2}{3+}\frac{-(r/s)^2}{5+}\frac{-(r/s)^2}{7+\ldots}.$$

Käytetään Lausetta 1.2 ja saadaan

$$r/s = 1 + \frac{-r^2}{3s^2+}\frac{-r^2}{5+}\frac{-r^2}{7s^2+\ldots} = \tau.$$

Ketjumurtoluvussa τ siis

$$b_k = (2k+1)s^2, \text{ kun } 2 \not| k,$$

$$b_k = 2k+1, \text{ kun } 2 \mid k,$$

ja

$$a_k = -r^2 \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Nyt

$$(2k+1)s^2 \geq 2k+1 \geq 2k_0+1 \geq 2\frac{r^2+1}{2}+1$$
$$= r^2+2 > r^2+1 = |a_k|+1,$$

eli

$$b_k \geq |a_k|+1,$$

kun $k \geq k_0 = \frac{r^2+1}{2}$. Joten Lauseen 1.4 perusteella

$$|\tau_k| \leq 1, \forall k \geq k_0.$$

Edelleen

$$0 < |\tau_k| = \frac{|a_k|}{|b_k+\tau_{k+1}|} \leq \frac{|a_k|}{b_k-|\tau_{k+1}|}$$
$$\leq \frac{|a_k|}{b_k-1} \leq \frac{|a_k|}{b_k-1} < \frac{r^2+1}{2k} \leq \frac{r^2+1}{2\cdot\frac{r^2+1}{2}} = 1$$
$$\forall k \geq k_0,$$

eli $0 < |\tau_k \leq 1$ kaikilla $k \geq k_0$. Näin ollen Lauseen 1.5 perusteella

$$\tau_k \notin \mathbb{Q},$$

jolloin myös

$$\tau \notin \mathbb{Q}.$$

Tämä on ristiriita vastaoletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä ja lause on tosi.

Tapa 2. Todistuksen idea on lähteestä [6]. Tutkitaan luvun π irrationaalisuutta integraalien avulla. Tehdään vastaoletus, että luku π on rationaaliluku, eli on olemassa kokonaisluvut $q \neq 0$ ja p siten, että $\pi = \frac{p}{q}$. Määritellään lauseke

$$C_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Käytetään integraaliin jatkuvien ja derivoituvien funktioiden osittaisintegroinnin kaavaa

$$\int_0^\pi f' g dx = \Big/_{0}^{\pi} fg - \int_0^\pi g' f dx$$

sijoituksilla

$$f = -\cos x, \; f' = \sin x,$$

$$g = (x(\pi - x))^n = (\pi x - x^2)^n$$

ja

$$g' = n(x(\pi - x))^{n-1}(\pi - 2x).$$

Nyt

$$\Big/_{0}^{\pi} fg = -\cos\pi \cdot n[\pi(\pi - \pi)]^n - [-\cos 0 n(0 \cdot (\pi - 0))^n] = 0$$

joten

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x dx \\ &= \int_0^\pi n[x(\pi - x)]^{n-1}(\pi - 2x) \cos x dx. \end{aligned}$$

Käytetään osittaisintegrointia edellä saatuun lausekkeeseen sijoituksilla

$$f = \sin x,\ f' = \cos x,$$

$$g = n(x(\pi - x))^{n-1}(\pi - 2x)$$

ja

$$g' = n(n-1)(x(\pi - x))^{n-2}(\pi - 2x)^2 - 2n(x(\pi - x))^{n-1}.$$

Kuten edellä, niin myös tässä tapauksessa $\Big/_{0}^{\pi} fg = 0$, joten

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x dx \\
&= -\int_0^\pi [n(n-1)(x(\pi - x))^{n-2}(\pi - 2x)^2 - 2n(x(\pi - x))^{n-1}] \sin x dx \\
&= \int_0^\pi 2n(x(\pi - x))^{n-1} \sin x - n(n-1)(x(\pi - x))^{n-2}(\pi - 2x)^2 \sin x dx.
\end{aligned} \tag{28}$$

Kirjoittamalla

$$(\pi - 2x)^2 = \pi^2 - 4x\pi + 4x^2 = \pi^2 - 4x(\pi - x)$$

saadaan

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi 2n(x(\pi - x))^{n-1} \sin x - n(n-1)[x(\pi - x)]^{n-2}[\pi^2 - 4x(\pi - x)] \sin x dx \\
&= \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi 2n(x(\pi - x))^{n-1} \sin x dx - \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi n(n-1)[x(\pi - x)]^{n-2}\pi^2 \sin x dx \\
&+ \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi n(n-1)[x(\pi - x)]^{n-1} \cdot 4 \sin x dx \\
&= 2qC_{n-1} - (q\pi)^2 C_{n-2} + 4(n-1)qC_{n-1} \\
&= (4n-2)qC_{n-1} - (q\pi)^2 C_{n-2}.
\end{aligned}$$

Alussa määritetylle lausekkeelle pätee siis rekursiokaava

$$C_n = (4n-2)qC_{n-1} - (q\pi)^2 C_{n-2}, \tag{29}$$

kun $n = 2, 3, \ldots$.

Osoitetaan nyt, että C_n on kokonaisluku kaikilla $n = 0, 1, \ldots$. Integraalit C_0 ja C_1 ovat kokonaislukuja, sillä yhtälön (27) mukaan

$$C_0 = \int_0^\pi \sin x dx = \Big/_0^\pi - \cos x = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

ja yhtälön (28) mukaan

$$\begin{aligned} C_1 &= q\int_0^\pi 2(x(\pi - x))^0 \sin x - 0 \cdot (x(\pi - x))^{-1}(x - 2x)^2 \sin x dx \\ &= 2q\int_0^\pi \sin x dx = 2q\Big/_0^\pi - \cos x = 2q[-\cos\pi - (-\cos 0)] = 4q. \end{aligned}$$

Oletetaan, että C_{k-1} ja C_{k-2} ovat kokonaislukuja jollakin positiivisella kokonaisluvulla k. Nyt kaavan (29) mukaan

$$C_k = (4k-2)qC_{k-1} - (q\pi)^2 C_{k-2} = (4k-2)qC_{k-1} - p^2 C_{k-2},$$

eli myös C_k on kokonaisluku. Induktioperiaatteen nojalla siis C_n on kokonaisluku kaikilla $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Olkoon nyt $x \in [0, \pi]$. Tällöin

$$\begin{aligned} &(2x - \pi)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 4x^2 - 4x\pi + \pi^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; -x^2 + x\pi - \pi^2/4 \leq 0 \\ &\Rightarrow\; -x^2 + x\pi \leq \pi^2/4 \;\Rightarrow\; x(\pi - x) \leq \pi^2/4, \end{aligned}$$

joten $0 \leq \sin x \leq 1$ ja $0 \leq x(\pi - x) \leq \pi^2/4$. Voidaan siis arvioida, että

$$0 < C_n = \frac{q^n}{n!}\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x dx \leq \frac{g^n}{n!}\int_0^\pi (\pi^2/4)^n dx = \frac{(q\pi^2/4)^n}{n!}\Big/_0^\pi x = \pi\frac{(q\pi^2/4)^n}{n!}.$$

Tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(q\pi^2/4)^n}{n!} = 0,$$

joten myös

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0.$$

Näin ollen suurilla indeksin n arvoilla $0 < C_n < 1$. Aikaisemmin kuitenkin saatiin, että C_n on kokonaisluku, mikä on ristiriita. Vastaoletus on siis epätosi ja alkuperäinen väite tosi. $\square$

Lähdeluettelo

[1] George A. Baker (junior): *Essentials of Pade approximants.* Academic Press, New Your, 1975.

[2] Lester R. Ford: *Analytic Theory of Continued Fractions.* D. van Nostrand Company Inc., New York, 1948.

[3] Andrew R. Rockett, Peter Szüsz: Continued fractions. Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1992.

[4] Kenneth H. Rosen: *Elementary Number Theory and Its Applications, Third Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[5] Tapani Matala-aho: Ketjumurtoluvut-luentomoniste. Oulun yliopisto, 15.2.2012. http://cc.oulu.fi/~tma/KETJU.html

[6] www.proofwiki.org/wiki/Pi_is_Irrational (25.4.2014)