Teknologiset apuvälineet varhaisalgebran opetuksessa

Pro gradu - tutkielma

Hannu Suvanto
1977585
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto

Kevät 2015

Tiivistelmä

Tietotekniikan rooli opetuksessa on korostunut viime vuosina voimakkaasti, koska erilaisten tietoteknisten välineiden uskotaan parantavan oppimista. Myös matematiikan opetus on kokemassa muutoksia, sillä esimerkiksi ohjelmointi on tulevaisuudessa osa pakollista matematiikan opetusta. Kansainvälisten tutkimustulosten perusteella suomalaisten peruskoululaisten matematiikan taidot ovat heikentyneet, jonka vuoksi matematiikan opetusta yritetään uudistaa.

Tässä kirjallisuustutkielmassa keskitytään tutkimaan aritmetiikan ja algebran välistä siirtymävaihetta, joka on osoittautunut haastavaksi matematiikan opetuksen kannalta. Siirtymävaiheen hahmottamiseksi määritellään ns. varhaisalgebran käsite, jolla kuvataan sitä vaihetta, missä oppilaat ensimmäistä kertaa tutustuvat algebraan. Tutkielmassa tarkastellaan, miten tietotekniikkaa voidaan käyttää algebran opetuksessa hyväksi ja mitä muutoksia oppilaan oppimisprosessissa tapahtuu teknologisessa oppimisympäristössä.

Teknologia-avusteisen oppimisprosessin hahmottamiseksi oppimista tarkastellaan konstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalta, missä oppilaan rooli korostuu käsitteellisessä muutoksessa ja erilaisten tietorakenteiden muodostumisessa. Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välinen riippuvuus on keskeisessä roolissa. Lisäksi kuvataan, kuinka teknologisesta välineestä muodostuu oppimisen väline. Teknologisen oppimisympäristön suunnittelussa on tärkeää ottaa huomioon oppilaan aktiivinen rooli.

Kirjallisuuden perusteella algebran opettamiseksi parhaiten soveltuvia teknologisia apuvälineitä ovat aritmetiikkaa ja algebraa yhdistävä taulukkolaskennallinen oppimisympäristö sekä CAS-ympäristö (computer algebra system), joka korostaa automaattista symbolista muokkaamista ja dynaamista algebrallisten esitysmuotojen käyttämistä. CAS-järjestelmän ja taulukkolaskennan käytöllä voidaan saavuttaa algebrassa syvempää ymmärrystä, sillä työskentely teknologisessa oppimisympäristössä vapauttaa kapasiteettia käsitteellistä ymmärrystä vaativiin tehtäviin. Teknologian käyttö voi kuitenkin myös heikentää oppimista jos teknologisen oppimisympäristön suunnitteluun ja välineiden valintaan ei kiinnitetä riittävästi huomiota.

Tutkielmasta saatuihin tuloksiin tulee suhtautua kriittisesti, sillä teknologia-avusteinen algebran opetus on vielä varsin uusi tutkimuskohde. Kuitenkin teknologia-avusteinen algebran opetus toi tutkimusten mukaan enemmän hyötyä kuin haittaa, joten aiheeseen liittyvien tutkimusten määrä tulee oletettavasti jatkossa kasvamaan.

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikkaa on vuosisatojen ajan opittu kynän ja paperin avulla ja vielä nykyäänkin kouluissa opetettavaa matematiikkaa opitaan pääasiassa perinteisiä työvälineitä käyttäen. Viime vuosikymmeninä tietotekniikan nopea kehittyminen on mahdollistanut sen, että yhä nuoremmat oppilaat hallitsevat erilaisia tietoteknisiä järjestelmiä. Matematiikan opetus on käymässä läpi rajuja muutoksia, joista esimerkkinä on ylioppilaskokeen suorittaminen tulevaisuudessa sähköisessä muodossa.

Matematiikan opetuksessa teknologisten apuvälineiden käyttö on rajoittunut laskimiin ja niidenkin käyttöä suositellaan vasta kun ns. rutiinitaidot ovat hallussa. Matematiikan didaktiikkaa koskevassa keskustelussa onkin herännyt pelko siitä, että laskimien ja muiden teknologisten apuvälineiden liian varhainen käyttö opetuksessa saattaa heikentää matematiikassa tarvittavien perustaitojen oppimista. Suomalaisten peruskoululaisten heikentyneet tulokset uusimmissa kansainvälisissä tutkimuksissa lisäävät huolta matematiikan opetuksen tilasta. Yhtenä vaihtoehtona pidetään teknologian laajempaa opetuskäyttöä matematiikassa.

Opetusteknologian käyttöä matematiikassa on tutkittu kansainvälisesti paljon erityisesti 2000-luvulla. Useissa tutkimuksissa on keskitytty tarkastelemaan erilaisten tietoteknisten opetusohjelmistojen soveltamista matemaattisiin sisältöihin, mutta harvemmin huomiota on kiinnitetty matemaattisen ajattelun ja teknologisten apuvälineiden väliseen yhteyteen. Oppimisprosessia koskevat tulokset ovat kuitenkin keskeisessä roolissa, kun suunnitellaan teknologia-avusteista matematiikan opetusta. Tässä tutkielmassa pyritään selvittämään, miten teknologian tuominen matematiikan opetukseen vaikuttaa yksilön oppimisprosessiin matematiikassa.

Tutkimus on kirjallisuuskatsaus, jonka avulla pyritään luomaan kattava kuvaus nykyään vallitsevasta teknologisia apuvälineitä sisältävän matematiikan opetuksen tilasta. Tutkielman rajaamiseksi matemaattiseksi sisällöksi on valittu peruskoulussa opetettava algebra, jossa oppilaat ensimmäistä kertaa käsittelevät algebrallisia objekteja. Tämä siirtymävaihe aritmetiikan ja algebran välillä on koettu erityisen haastavaksi, sillä siinä oppilas joutuu hylkäämään osin vanhoja toimintaperiaatteita ja omaksumaan uusia lyhyen ajan sisällä.

Toisessa luvussa tarkastellaan yleisesti oppimisen teoriaa ja teknologiaa koskevia käsitteitä. Tärkeitä tuloksia ovat käsitteellisen muutoksen teoria sekä oppimisvälineen kehittymistä koskeva malli, missä kuvataan, kuinka teknologisesta apuvälineestä muotoutuu oppimisen työkalu. Kolmas luku keskittyy kouluissa opetettavan algebran sisältöön ja samalla pohditaan, mikä merkitys on ns. varhaisalgebralla. Algebrallisiin objekteihin ja erityisesti algebrassa käytettyihin symboleihin liittyvät ominaisuudet ovat tutkielman kannalta keskeisessä roolissa tarkasteltaessa, miten teknologian käyttö opetuksessa vaikuttaa algebralliseen ajatteluun. Tutkielmassa keskitytään myös niihin ongelmakohtiin, joita esiintyy koulussa opetettavan algebran ja aritmetiikan välisessä siirtymävaiheessa. Aritmetiikan ja algebran välinen ns. kognitiivinen kuilu on tämä tutkielman kantava teema.

Neljännessä luvussa kuvataan lyhyesti sitä, millaisia teknologisten oppimisvälineiden sovelluksia on mahdollista käyttää algebran opetuksessa. Viides ja kuudes luku käsittelevät kahta yleisintä erityisesti algebran oppimiseen soveltuvaa teknologista oppimisympäristöä ja niistä saatuja oppimisprosessia koskevia tutkimustuloksia. Kaksi valittua oppimisympäristöä ovat automatisoitua symbolista muokkaamista korostava CAS-järjestelmä (engl. computer algebra system environment) sekä taulukkolaskennallinen ympäristö (engl. spreadsheet environment), joka sisältää sekä aritmetiikkaa, että algebraa.

Tutkielma toteutettiin vertailemalla erilaisia kansainvälisiä lähteitä teknologia-avusteisen algebran oppimisen näkökulmasta. Aihetta rajattiin peruskoulu-tasolle eli lähteissä tarkastellut oppilaat ovat ikäjakaumaltaan 10-15 -vuotiaita. Tutkielman aineiston kokoaminen aloitettiin tekemällä aineistohakuja teknologia-avusteisesta matematiikan opetuksesta ja edelleen ottamalla mukaan ne lähteet, missä teknologiaa tarkasteltiin nimenomaan algebran näkökulmasta. Lopuksi mukaan otettiin ne lähteet, joista saatuja tutkimustuloksia voitiin pitää merkityksellisinä algebran oppimisen kannalta.

Teknologia-avusteisen algebran opetuksen ydinaineiston kokoamisen jälkeen aineistoa laajennettiin tutkimalla yleistä opetuksen didaktiikkaa ja opetusteknologiaa muutaman perusteoksen avulla. Konstruktivistinen oppimiskäsitys, käsitteellisen muutoksen teoria ja teknologinen oppimisympäristö muodostavat tämän tutkielman teoreettisen viitekehyksen.

Tutkielman keskeisimpänä lähteenä voidaan pitää Drijversin (2003) tekemää väitöskirjaa, jossa tutkitaan erityisesti CAS-järjestelmän käyttöä algebran oppimisessa. Drijversin väitöskirja antaa myös kattavan kuvauksen algebran oppimiseen liittyvistä ongelmista. Muita erityisesti CAS-järjestelmään liittyviä lähteitä ovat Artiguen (2002), Heidin ja Edwardsin (2010),Piercen ja Staceyn (2001) sekä Zellerin ja Barzelin (2010) tekemät julkaisut.

Taulukkolaskennan käyttöön algebran opetuksessa keskittyvät erityisesti Dettorin, Garutin ja Lemutin (2002), Haspekianin (2005), Tabachin, Hershkowitzin ja Dreyfusin (2013), Rojanon (1993) ja Sutherlandin (1999) tekemät tutkimukset. Algebran ja aritmetiikan välisen siirtymävaiheen problematiikkaa on käsitelty useissa lähteissä pintapuolisesti, tarkimmin Herscowicsin ja Linchevskin (1994) julkaisussa. Symbolien merkitystä algebran oppimisessa tutkittiin pääosin Arcavin (2005) luomna symbolisen ajattelun (engl. symbol sense) käsitteen pohjalta.

Tutkielmassa käsiteltiin myös laajempia matematiikan didaktiikkaa käsitteleviä teoksia niiltä osin kuin ne liittyivät teknologian käyttöön algebran opetuksessa. Näitä ovat *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Volume 2, 2007* sekä *International Handbook of Mathematics Education Part 1, Volume 4, 1996*. Näiden kahden teoksen avulla pystyttiin arvioimaan koulussa opetettavan algebran nykytilaa ja osin myös havainnoimaan, miten koulualgebraa ja teknologiaa koskeva keskustelu on muuttunut vuodesta 1996 vuoteen 2007.

Tutkielman tarkoituksena on selvittää, miksi siirtyminen aritmetiikasta algebraan on ongelmallista ja voiko tähän siirtymävaiheeseen liittyviä ongelmia korjata käyttämällä algebran opetukseen soveltuvaa teknologiaa?

2 Oppimisen teoria ja teknologia

Teknologian liittäminen opetukseen on ollut mielenkiintoinen ja suosittu teema viime vuosikymmeninä. Tieto-ja viestintätekniikan nopea kehittyminen on mahdollistanut sen, että yhä useammilla on mahdollisuus sellaisiin teknologisiin välineisiin, jotka aikaisemmin olivat liian kalliita ja osin myös opetuskäyttöön soveltumattomia. Nykyään laskimet, tietokoneet, älytaulut ovat arkipäivää monissa kouluissa, mutta monien mielestä niiden potentiaalia ei ole hyödynnetty tarpeeksi. Tässä kappaleessa perehdytään oppimisen teorian didaktiikkaan sekä siihen, mikä merkitys teknologialla voisi olla oppimisen kannalta.

2.1 Oppimisen teoriaa

Tässä tutkielmassa matematiikkaa tarkastellaan didaktisesta eli oppimisen näkökulmasta. Aluksi esitellään tarkemmin niitä keskeisimpiä didaktisia käsitteitä, joita tarvitaan jatkossa analysoitaessa algebran oppimiseen liittyviä ongelmakohtia ja teknologian vaikutusta yksilön oppimisprosessissa. Yksilön oppimisprosessia käsitellään *konstruktivistisesta* näkökulmasta, missä korostetaan yksilön aktiivista roolia tiedonmuodostusprosessissa.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan yksilö konstruoi eli rakentaa omia tietorakenteitaan havaintojensa kautta (Salovaara 2004). Lenni Haapasalo (2011) on kuvannut teoksessaan *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu* konstruktivistista matematiikkakäsitystä, jossa matematiikkaa korostetaan verkkomaisena järjestelmänä (Haapasalo 2011, s. 137). Verkon rakentamiseksi yksilön on löydettävä matemaattisten objektien välisiä yhteyksiä, sääntöjä sekä proseduureja omien kokemuksiensa pohjalta. Konstruktivismissa painotetaan erityisesti yksilön kokemuksien merkitystä tiedon kannalta.

Nykyään didaktiikassa korostetaan oppijan aktiivista roolia oppimisprosessissa, missä oppilas käsittelee uutta tietoa aikaisempien näkemystensä pohjalta ja konstruoi uuden tiedon siten, että se vastaa mahdollisimman hyvin oppijan aikaisemmin oppimaa tietoa (Järvelä, Häkkinen ja Lehtinen 2006, s. 19). Aikaisemmin opittu tieto muuttuu ja tarkentuu uuden tiedon mukaan, mutta jos oppijan aikaisemmat tietorakenteet ovat oleellisesti erilaisia kuin uusi tieto niin ajaudutaan ns. *käsitteellisen muutoksen* ongelmaan (Järvelä et al 2006, s. 20). Tällöin aikaisemmin opittu voi olla esteenä uuden oppimiselle tai uusi tieto rakentuu virheellisesti vanhan tiedon varaan.

Käsitteellinen muutos on kuitenkin tärkeää oppimisprosessin kannalta ja sen aikaansaamiseksi oppijan on tietoisesti koettava ristiriita aikaisemmin koettujen käsitteiden ja tietorakenteiden välillä. Oppija ei välttämättä aina edes huomaa tai tunnista ristiriitaa, jolloin oppijalle saattaa jäädä virheellinen käsitys siitä, että hän hallitsee uuden asian. Käsitteellisessä muutoksessa ristiriidan havaitsemiseksi on tärkeää metakognitiivinen herkkyys eli oppijan kyky olla tietoinen omasta ajattelustaan ja motivationaalinen herkkyys eli oppijan kiinnostus uudesta tiedosta. (Järvelä et al 2006, s. 27)

Jatkon kannalta on tärkeää ymmärtää, mitä ominaisuuksia yksilön konstruoimat tietorakenteet sisältävät. Lenni Haapasalo on tehnyt työuransa aikana laajaa tutkimusta tiedon luonteesta. Tämän tutkielman kannalta erityisen mielenkiintoista on Haapasalon korostama ns. *proseduraalisen* ja *konseptuaalisen* tiedon välinen riippuvuus, joka on keskeisessä roolissa etenkin matematiikassa. Haapasaloa siteeraten proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto voidaan määritellä seuraavasti:

- *Proseduraalinen tieto (merkitsen lyhyesti P) tarkoittaa sekä dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmien syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.*
- *Konseptuaalinen tieto (merkitsen lyhyesti C) on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduureja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia.*

(Haapasalo 2011, s. 51-53.)

Proseduraalinen tieto siis liittyy yksilön toimintaan, joka sisältää erilaisia menetelmiä, sääntöjä tai algoritmeja. Proseduraalinen tieto ei liity pelkästään erilaisten menetelmien sujuvaan käyttöön vaan siihen liittyy myös se teoria ja käsitteet, johon menetelmä perustuu. Konseptuaalinen tieto liittyy muun muassa erilaisten käsitteiden välisten yhteyksien ymmärtämiseen sekä niiden vertailuun. Konseptuaalisen tiedon hallitsemisessa keskeistä on myös esimerkiksi kyky käsitellä tietoa erilaisten esitysmuotojen kautta. Käsitteen erilaisten esitystapojen sujuva käyttö viittaa siihen, että yksilöllä on syvempää ymmärrystä käsitteestä. Matemaattisena esimerkkinä proseduraalisesta ja konseptuaalisesta tiedosta voitaisiin esimerkiksi tarkastella derivaattaa. Derivoimissääntöjen hallitseminen sisältää proseduraalista tietoa ja derivaatta-käsitteen ymmärtäminen ja sen yhteys esimerkiksi integraaliin on konseptuaalista tietoa. (Haapasalo 2011, s. 305)

Tärkeä huomio Haapasalon esittelemistä määritelmistä on proseduraaliseen tietoon liittyvä kyvyttömyys ymmärtää suorituksien ominaisuuksia, mikäli suoritus on automatisoitunut. Matematiikan opetus onkin saanut kritiikkiä juurikin siitä, että opetus keskittyy liikaa erilaisten matemaattisten proseduurien hallitsemiseen olettaen, että käsitteellinen ymmärtäminen seuraa perässä (Gray ja Tall 1991 ; Tall ja Thomas 1991).

Haapasalon mukaan sekä proseduraalisen, että konseptuaalisen tiedon hallitseminen on tärkeää oppimisen kannalta. Haapasalon kehittelemä "matematiikan opetuksen didaktis-empiirisiä malleja"koskeva projekti (MODEM) keskittyy empiiristen opetuskokeilujen pohjalta luotuihin malleihin matematiikan opetuksessa, joissa hyödynnetään konstruktivismiin perustuvaa oppimiskäsitystä. Yksi MODEM-teorian keskeinen havainto on se, että *voidakseen soveltaa matemaattista tietoa oppilas tarvitsee konseptuaalista tietoa, mutta toisaalta viimeksi mainittuun pääseminen edellyttää proseduraalisen tiedon hyödyntämistä* (Haapasalo ja Karkkulainen 2014). Haapasalon mukaan proseduraalinen, menetelmien käytöstä saatu tieto on siis kytkeytynyt käsitteistä muodostettuun, konseptuaaliseen tietoon. On siis tärkeää oppia käyttämään ja ymmärtämään erilaisia menetelmiä ja niiden taustalla vaikuttavaa tietoa kunhan tiedon käsittelyyn liittyvä suoritus ei ole automatisoitunut.

2.2 Teknologiset oppimisympäristöt

Teknologinen oppimisympäristö on oppimistilanne, jossa opetusteknologia on jollain tavalla läsnä. Kyseessä voi olla siis opettajan esittämä animaatio videotykin välityksellä tai vaikkapa tunnin aiheeseen liittyvä peli, jota oppilas pelaa omassa kodissaan. Nykyään opetus on jo osin siirtynyt pois luokkatilasta ja suurimmalla osalla oppilaista on mahdollisuus käyttää oppimiseen liittyvää teknologiaa vapaa-ajallaan. Oppimiseen tarkoitetun teknologian hyödyntäminen avaa oppilaille uusia mahdollisuuksia, sillä lahjakkaat oppilaat voivat teknologian tukemana opiskella osin itsenäisesti ja toisaalta oppilas voi saada apua ongelmiinsa teknologisten apuvälineiden avulla.

Tietotekniikkaa voidaan psykologisesta näkökulmasta pitää *kognitiivisena teknologiana*, jonka avulla on mahdollista ylittää mielen rajat ajattelussa, oppimisessa ja ongelmanratkaisuprosesseissa. Pea ehdottikin jo vuoden 1987 julkaisussaan *Cognitive Technologies for Mathematics Education*, että kognitiivisen teknologian käyttö voi auttaa käyttäjäänsä oppia oppimaan. Oppimisprosessia voidaan tehostaa kognitiivisen teknologian avulla, sillä sen avulla oppijan on mahdollista reflektoida ajatteluprosessiaan. (Pea 1987, s. 91)

Järvelä, Häkkinen ja Lehtinen havaitsivat, että teknologinen oppimisympäristö voi tukea edellisessä kappaleessa mainittua käsitteellistä muutosta, jos sen suunnittelussa otetaan huomioon oppijan aikaisemmat käsitykset ja oppijoille annetaan mahdollisuus esittää omia näkemyksiään ja verrata niitä muiden kanssa. Huolellisella teknologisen oppimisympäristön suunnittelulla on mahdollista aktivoida oppijoiden aikaisempia näkemyksiä ja myös metatason ajattelua. (Järvelä et al 2006, s. 36.)

Teknologisessa oppimisympäristössä on syytä korostaa konstruktivistista oppimiskäsitystä. Oppija käyttää erilaisia strategioita oppimistilanteen ja tavoitteiden mukaan. Teknologista oppimisympäristöä suunniteltaessa on tärkeää pohtia oppimisympäristöä kokonaisuudessaan. Tehtävänasettelu ja työvälineiden valinta on olennaisen tärkeää, jotta oppija osaa valita itselleen sopivan oppimistrategian. Teknologian liittäminen oppimisympäristöön antaa mahdollisuuden erityyppisille oppimistehtäville, -materiaaleille ja -ympäristöille. Teknologisissa oppimisympäristöissä ei ole olemassa vain yhtä oppimisstrategiaa. (Järvelä et al 2006 s. 110.)

2.3 Esineestä oppimisen työkaluksi

Oppimisprosessin helpottamiseksi oppilaille on tarjolla erilaisia kognitiivisia välineitä, joiden käyttö aktivoi oppilaiden ajatteluprosesseja. Tarkasteltaessa oppimiseen liittyviä välineitä, on tärkeää ymmärtää, miten välineestä tulee oppimisprosessin kannalta merkityksellinen apuväline. Aluksi on syytä pohtia, mikä ero on konkreettisen, ihmisen tekemän esineen (artifact) ja psykologisen, oppimiseen tarkoitetun välineen (instrument) välillä (Nabb 2010). Tyypillinen vertaus on tarkastella esimerkiksi vasaraa. Vasarasta tulee työkalu silloin kun sillä lyödään ensimmäistä kertaa naulaa ja yksilö antaa tällöin vasaralle merkityksen. Samoin voidaan ajatella esimerkiksi harpista tai laskimesta. Ilman tällaista välinearvoa esine on yksilölle merkityksetön (Drijvers 2003, 96).

Kirjallisuudessa oppimiseen liittyvän työkalun muodostumista on tarkasteltu Vérillonin ja Rabardelin (1995) esittelemän käsitteen *instrumental genesis* avulla, jota on tarkastelu esimerkiksi Tabachin, Hershkowitzin ja Dreyfusin (2013) artikkelissa *Learning beginning algebra in a computer-intensive environment* ja Artiguen (2002) artikkelissa *Learning mathematics in a CAS environment*. Tässä tutkielmassa em. käsitettä tarkastellaan näiden kahden lähteen pohjalta. Käsitteelle ei ole vakiintunut tarkkaa käännöstä, mutta tässä yhteydessä sillä tarkoitetaan oppimiseen tarkoitetun työkalun, instrumentin syntyprosessia.

"Instrumental genesis"on siis malli, joka kuvaa prosessia, missä oppilaat muodostavat saamistaan esineistä oppimisen työkaluja. Prosessin ensimmäisessä vaiheessa oppilaat muodostavat itselleen mielikuvan välineestä ja sen tarkoituksesta. Muodostunut kuva välineestä ja sen tarkoituksesta riippuu oppilaan aikaisemmista kokemuksista, uskomuksista, koetusta ympäristöstä, annetun tehtävän tarkoituksesta, keskusteluista muiden oppilaiden kanssa ja spontaaneista havainnoista, joita välineen käytössä on havaittu. "Instrumental genesis"on prosessi, jossa yksilö muokkaa ideaa välineistä erilaisten tehtävien kautta. (Tabach 2013, s. 380)

Prosessi esineestä oppimisen välineeksi on kaksisuuntainen (Artigue 2002, s. 15). Esineestä välineeksi -prosessissa (instrumentalisation) käyttäjä antaa esineelle uusia merkityksiä ja muokkaa sitä tiettyjä tarkoituksia varten. Välineestä esineeksi -prosessissa (instrumentation) välineelliset taidot kehittyvät *tekniikoiksi*, joita voidaan käyttää tehokkaasti annetuissa tehtävissä. Tekniikalla Artigue tarkoittaa tapaa suorittaa annettu tehtävä. Tekniikalla on sekä *pragmaattinen*, että *episteeminen* arvo (Artigue 2002, s. 3-4). Tekniikan pragmaattinen arvo liittyy kykyyn ja tehoon suorittaa annettu tehtävä. Esimerkiksi laskimen pragmaattinen arvo on hyvä, mikäli se suorittaa annetun toiminnon oikein. Episteeminen arvo puolestaan liittyy tekniikan kykyyn lisätä käyttäjänsä ymmärrystä tehtävästä, jossa tekniikkaa käytetään (Nabb 2010). Nabb huomauttaa, että matematiikassa rutiinimaisten menetelmien käyttö voi vähentää tekniikan episteemistä arvoa. On selvää, että ne tekniikat, joilla on episteemistä arvoa, ovat hyödyllisiä oppimisen kannalta.

3 Varhaisalgebra

Algebra on yksi matematiikan pääalueista geometrian ja analyysin ohella. Kouluissa opetettavaa algebraa on joissakin yhteyksissä nimitetty yleistetyksi aritmetiikaksi eli toisin sanoen oppilaat harjoittelevat algebrassa tarvittavien symbolien käyttöä yksinkertaisesti korvaamalla numerot kirjaimilla. Käyttämällä tällaista aritmetiikkaan pohjautuvaa lähestymistapaa voidaan perustella joitakin algebraan liittyviä sääntöjä, mutta ongelmia aiheuttavat aritmetiikasta tuttujen symbolien uudet merkitykset algebrassa ja uusien algebrallisten objektien käyttäminen. On siis selvää, että algebran käsitteleminen pelkästään yleistettynä aritmetiikkana on puutteellinen lähestymistapa. Miten algebraa kannattaisi sitten lähestyä, jotta vältyttäisiin ristiriidoilta, jotka voivat estää tehokasta oppimista?

3.1 Määritelmä

Varhaisalgebralla (engl. pre-algebra) tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä osaa algebrasta, missä oppilaat tutustuvat ensimmäistä kertaa alkavat tarkastella numeroiden sijaan muuttujia ja polynomeja. Monissa maissa varsinaisen algebran opetus alkaa noin kuuden kouluvuoden jälkeen, joka on sisältänyt aritmetiikkaa, perusgeometriaa ja jonkin verran datan analysointia (Tabach 2013, s. 378).

Linchevski (1995) kokosi julkaisuunsa vetämänsä työryhmän ajatuksia siitä, mitä varhaisalgebra voisi sisältää. Linchevski väittää, että varhaisalgebran tarkoituksena on kehittää alkeellisia *esikäsityksiä* (preconcepts), jotka ovat välttämättömiä formaalien, abstraktien käsitteiden kehittymiselle. Esikäsityksien analysoiminen on tarpeellista, jotta vältyttäisiin edellä tarkastellun käsitteellisen muutoksen ongelmilta. Muodostuneita esikäsityksiä on hankala muuttaa ja ne vaikuttavat pitkään vielä kehittyneempienkin käsitteiden rinnalla. (Linchevski 1995, s. 114)

Linchevskin mukaan varhaisalgebra voisi toimia valmistelevana kurssina ennen formaalin algebran opetusta. Varhaisalgebraan liittyvää algebrallista aktiviteettia voidaan joustavasti liittää myös aritmetiikan opetukseen ja formaalin algebran opetuksen yhteyteen. Ajatusta varhaisalgebran opetuksesta pidetään kannattavana, mutta liian usein varhaisalgebran sisältö on muodostettu jakamalla varsinaisen algebran sisältö pitemmälle aikajaksolle. Herscovicsin ja Linchevskin (1994) mukaan tärkeämpää olisi pohtia niitä kognitiivisia esteitä, joita algebran ymmärtämiseen liittyy ja suunnitella varhaisalgebraan kuuluva sisältö niin, että se auttaa formaalin algebran ymmärtämistä (Hersovics ja Linchevski 1994, s. 61).

Muuttujat ja algebrallisten lausekkeiden sieventäminen ovat keskeisessä roolissa nykyisen algebran opetuksessa. Linchevskin työryhmän mukaan varhaisalgebran opettaminen lausekkeita sieventämällä johtaa kognitiivisiin esteisiin, joita kirjallisuudessa on havaittu. Muuttujan ja algebrallisten lausekkeiden käsittellistä ymmärtämistä tulisi rakentaa erilaisten yleistämisaktiviteettien (engl. generalizing activities) avulla tukeutuen samalla aritmetiikkaan. (Linchevski 1995, s. 115)

Sanallisten ongelmien ratkaiseminen algebrallisesti on osoittautunut haastavaksi. Usein oppilaat haluavat pitäytyä heille tutussa aritmetiikassa ja ratkaista ongelmia pelkästään numeerisesti. Linchevskin työryhmän mukaan varhaisalgebrassa voitaisiin käsitellä sanallisia ongelmia niin, että oppilailla on mahdollisuus käyttää aritmeettisen ja algebrallisen ratkaisutavan yhdistelmää. Esimerkiksi taulukoiden käyttö voisi olla suositeltavaa, jotta oppilaat oppisivat yleistämään tekemiään numeerisia operaatioita muuttujien avulla. (Linchevski 1995, s. 118)

Algrebraa voidaan pitää yleistettynä aritmetiikkana, jossa aritmetiikasta tuttuja ominaisuuksia ja sääntöjä tutkitaan yleisessä tapauksessa muuttujien avulla. Esimerkiksi kommutatiivisuus, assosiatiivisuus ja merkkisäännöt ovat esimerkkejä tilanteista, joissa algebraa voidaan lähestyä aritmetiikan avulla. Tässä lähestymistavassa muuttujaa algebrallisessa lausekkeessa pidetään numeron paikkana ja oppilaat pyrkivät selvittämään sellaisen numeron muuttujan paikalle, että yhtälö pitää paikkansa.

Algebra sisältää myös sellaisia ongelmanratkaisutapoja, joilla pyritään löytämään yhtälöiden ratkaisuja. Tyypillisesti oppilaita opetetaan aluksi ratkaisemaan yksinkertaisia yhtälöitä kokeilemalla eli sijoittamalla muuttujan paikalle sellainen luku, että yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtäpitävät. Yhtälöparien ratkaisussa sovelletaan kehittyneempiä menetelmiä, kuten sijoitustapaa. Algebrassa ei kuitenkaan riitä oppia pelkästään ratkaisemaan systemaattisesti erilaisia ongelmia vaan algebrassa keskeistä on tutkia suureiden välisiä suhteita ja edelleen laajentaa muuttujan käsitettä tarkastelemalla sen määrittelyjoukkoa. Kun määritellään lisäksi muuttujien kertoimet ja vakiot, voidaan määritellä analyysissa tarvittava funktion käsite (Harvey 1996, s. 78.)

Algebraan liittyvää aktiviteettia tarkastellaan Kieranin (2007) määrittelemän ns. GTG-mallin (Generational, Transformational, Global) avulla, jota hän on käsitellyt muun muassa julkaisussaan *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels* (Lester 2007, s. 713-714). Tämä malli määrittelee koulussa käsiteltävän algebran kolmeen aktiviteettityyppiin:

- Yleistävä aktiviteetti (Generational activity)
- Muutoksellinen aktiviteetti (Transformational activity)

- Yleinen/Meta-tason aktiviteetti (Global/Meta-Level activity)

Algebran yleistävä aktiviteetti sisältää lausekkeiden ja yhtälöiden muodostamista. Siihen liittyvät myös muuttujan, tuntemattomien suureiden ja yhtäsuuruuden käsitteet. Muutoksellinen aktiviteetti keskittyy pääasiassa lausekkeiden muokkaamiseen kuten termien järjestelyyn, tekijöihin jakamiseen, sieventämiseen ja yhtälöiden ratkaisemiseen. Yleisessä/Meta-tason aktiviteetissa algebraa käytetään työkaluna esimerkiksi ongelmanratkaisussa ja todistamisessa. (Lester, 2007, s. 713-714.) Meta-tason aktiviteetti on olennaisessa roolissa algebrallisen ajattelun kehittymisessä, sillä sitä esiintyy myös silloin, kun oppilaat eivät konkreettisesti käsittele algebrallisia lausekkeita.

Drijvers (2003) on koonnut teokseensa neljä erilaista lähestymistapaa, joita yleisesti käytetään koulualgebrassa. Nämä lähestymistavat helpottavat koulualgebran luonteen hahmottamista. Algebraa voi käsitellä *ongelmalähtöisesti* eli algebra on pääasiassa yhtälöiden muodossa esitettyjen ongelmien ratkaisemista. Toisaalta algebraa voidaan tarkastella *funktionaalisesti* eli algebra keskittyy funktioiden ja riippuvuuksien tutkimiseen. Tässä lähestymistavassa funktio voidaan muodostaa tutkimalla useita muuttujia ja määrittämällä niiden välille riippuvuus, jota kuvataan symbolien avulla. *Yleistävä* lähestymistapa keskittyy yleisten relaatioiden muodostamiseen ja erilaisten rakenteiden ja menetelmien tutkimiseen. Esimerkiksi muuttujia voidaan pitää yleistettyinä numeroina. *Kielellinen* lähestymistapa korostaa algebran symbolista kieltä. Jotta algebraa voitaisiin käyttää matemaattisten ideoiden ilmaisemiseen, tarvitsee ymmärtää algebrassa tarvittavaa merkkikieltä. (Drijvers, 2003, s. 39-40.)

3.2 Symbolit

Matematiikka on kumulatiivinen tiede eli kaikki uusi rakentuu aikaisemmin opitun varaan. Aritmetiikassa lähtökohtana on luonnollisten lukujen järjestelmä, geometriassa tasoon liittyvät objektit. Algebran oppimisessa olennaista on aluksi ymmärtää sen symboleihin perustuva kieli. Algebran oppimisesta haastavaa tekee osaltaan sen ainutlaatuinen kieli, missä yhdistetään sanallista kieltä ja symbolein merkittyä kieltä (Drouhard ja Teppo 2004). Lausekkeiden ja erilaisten kaavojen ymmärtäminen on mahdotonta, jos symboleja ei osata tulkita oikein.

Algebrassa ei riitä ainoastaan kyky oppia kirjoittamaan ja lukemaan algebrallisia symboleja vaan niitä täytyy osata tulkita. Drouhard ja Teppo puhuvat symbolien merkityksestä (engl. denotation). Algebrallisista lausekkeista pystyy riittävän harjoittelun jälkeen esimerkiksi "näkemään"yhteisiä tekijöitä tai jakamaan lausekkeita tekijöihin suoraan ilman, että varsinaista tekijöihin jako -menetelmää tehdään.

Abraham Arcavi esitteli vuonna 1994 laajasti käytetyn käsitteen: *symbolinen ajattelu* (engl. symbol sense), joka kuvaa symboleihin liittyviä ajatteluprosessin vaiheita (Arcavi, 2005). Aluksi oppilaiden täytyy totuttautua symbolien käyttöön ja ymmärtää, mikä merkitys niillä on ja missä tilanteissa niitä pitäisi käyttää. Symbolit kuvaavat riippuvuuksia ja niillä voidaan tehdä yleistyksiä ja osoittaa todeksi lauseita. Arcavi havaitsi, että oppilaat eivät luota symboleihin todistustehtävissä, joten on tärkeää, että symboleja opitaan käyttämään oikeina työkaluina erilaisissa tehtävissä. Symbolisessa ajattelussa tarvitaan myös symbolisten lausekkeiden muokkaamiseen tarvittavia taitoja ja lausekkeiden lukukykyä. Saadusta informaatiosta täytyy osata muodostaa tehtävän ratkaisun kannalta hyödyllisiä riippuvuuksia, joita kuvataan symbolien avulla. Esimerkiksi kuvaajista täytyy osata tehdä oikeita suureiden välisiä riippuvuuksia kuvaavia lausekkeita. Tehtävän ratkaisun kannalta on oleellista osata valita tilanteeseen sopiva symbolien esitysmuoto. On myös tarpeen tarkistaa säännöllisesti, mikä merkitys kullakin symbolilla on tehtävän kannalta ja tulkita niitä oikein. Symboleilla voi olla myös erilaisia rooleja eri konteksteissa. (Arcavi, 2005, s. 43)

Symbolinen ajattelu kehittyy vaiheittain ja kirjallisuudessa puhutaan Arcavin (1994), Friedlander et al:n (1989) ja Hershkowitzin ja Arcavin (1990) havaitsemista *symbolisen yleistyksen* (engl. symbolic generalization) vaiheista, jotka esimerkiksi Tabach, Hershkowitz ja Dreyfus (2013) ovat esitelleet tiivistetysti julkaisussa *Learning beginning algebra in a computer-intensive environment*. On väitetty, että perinteisissä kynä-paperi-ympäristössä varhaisalgebran oppilaat ajattelevat kolmen vaiheen kautta. Ensimmäisessä vaiheessa oppilaat kuvaavat erilaisia suureita annetuissa tilanteissa eri kirjaimilla välittämättä suureiden välisistä riippuvuuksista. Toisessa vaiheessa oppilaat alkavat muodostaa yksinkertaisia riippuvuuksia, mutta käyttävät kirjaimia monimutkaisemmissa riippuvuuksissa. Kolmannessa vaiheessa suureiden välisiä suhteita kuvataan symbolien avulla täydellisesti. (Tabach et al 2013, s. 378-379)

Symbolisessa ajattelussa tarvitaan siis paljon muutakin kuin algebrallisten lausekkeiden muokkaamiseen tarvittavia menetelmiä. Tuttuja ohjeita algebrasta ovat esimerkiksi "kertominen ennen yhteenlaskua", "ristiinkertominen", "samankaltaisten termien kokoaminen", "merkin vaihtuminen siirrettäessä yhtälön toiselle puolelle"ja niin edelleen. Nykyään koulussa opetettava algebra onkin saanut kritiikkiä siitä, että se keskittyy liian paljon käsin suoritettaviin symbolisen muokkaamisen taitoihin. Oppilailta oletetaan, että kunhan he oppivat käyttämään tällaisia sääntöjä sujuvasti, ymmärrys seuraa perässä (Tall 1991, s. 3). Nykyään erilaisten algebrallisten esitystapojen sujuvaa käyttöä pidetään tärkeämpänä (Heid ja Edwards, 2001, s. 129.). Algebrallisten lausekkeiden muokkaaminen ei lisää ymmärrystä, mikäli suoritus on automatisoitunut kuten kappaleessa 2.1 puhuttiin proseduraalisen tiedon yhteydessä.

3.3 Siirtyminen aritmetiikasta algebraan

Monissa maissa, kuten myös Suomessa, kouluissa opetetaan ensimmäisen kerran algebraa kuuden kouluvuoden jälkeen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 algebraa esiintyy myös hieman vuosiluokilla 1-5. Esimerkiksi lausekkeen käsite mainitaan ensimmäisen kerran vuosiluokkien 3-5 yhteydessä ja oppilaiden oletetaan tuolloin hallitsevan esimerkiksi säännönmukaisuuksia, suhteita ja riippuvuuksia. Opetussuunnitelman perusteita tarkastelemalla voidaan nähdä, että suomalaisessa peruskoulussa matematiikan opetus keskittyy enemmän aritmetiikan ja geometrian hallitsemiseen kuin algebraan. Suurimmat harppaukset algebran sisällön osalta koetaan vuosiluokkien 6-9 välillä. Tuolloin algebran opetus koostuu uusien käsitteiden, kuten polynomin, muuttujan ja yhtälön käsitteiden ja niihin liittyvien menetelmien hallitsemisesta (Opetushallitus 2004). Esimerkiksi muuttuja-käsitteen jälkeen harjoitellaan jo seuraavaksi lausekkeen arvon laskemista.

Suomen peruskoulussa algebran opetus sisältää siis paljon Kieranin esittelemää muutoksellista (transformational) aktiviteettia. Tämä edellyttää algebrassa tarvittavien keskeisten käsitteiden vahvaa hallitsemista, joka on yleistä, meta-tason aktiviteettia. Proseduraalista tietoa sisältävät harjoitukset ovat kuitenkin hyvin keskeisessä roolissa. Opetussuunnitelman perusteet sisältävät myös esimerkiksi yhtälöparin ratkaisemisen algebrallisesti ja graafisesti. Tämä on tutkimusten mukaan hyödyllistä, sillä siirtyminen erilaisten esitystapojen välillä samassa tehtävässä edistää ymmärrystä.

Opetushallitus hyväksyi 22.12.2014 perusopetuksen opetussuunnilman perusteet, jotka otetaan käyttöön vuodesta 2016 alkaen. Tätä analysoimalla voidaan tehdä varovaisia oletuksia siitä, mihin suuntaan algebran opetus on siirtymässä tulevaisuudessa. Sisällön suhteen algebran opetus tulee pysymään Suomessa jatkossa suurin piirtein samanlaisena kuin nykyään. Mielenkiintoinen yksityiskohta on, että jatkossa vuosiluokilla 3-6 saatetaan tutustua tuntemattoman käsitteeseen ja tutkia yhtälöä ja etsiä sen ratkaisuja päättelemällä tai kokeilemalla (Opetushallitus 2014). Tämä suuntaus on yritys madaltaa kynnystä siirtyä aritmetiikasta algebraan, sillä monien kansainvälisten tutkimusten mukaan algebrassa haastavaa on siirtyminen aritmetiikasta algebraan (Herscovics 1994). Vaikuttaa siltä, että Suomessa ongelmaa yritetään helpottaa tarkastelemalla algebraa osittain jo aritmetiikan yhteydessä.

Aritmetiikan ja algebran välisestä oppimisprosessin ongelmakohdasta on kirjallisuudessa käytetty nimitystä *kognitiivinen kuilu* (engl. cognitive gap). Herscovics ja Linchevski (1991) ovat päätelleet, että suurin ongelma aritmetiikan ja algebran välisessä siirtymävaiheessa on kyvyttömyys operoida spontaanisti tuntematonta (engl. unknown) eli kirjaimen avulla lausuttua muuttujaa (Herscovics ja Linchevski 1991, s. 75). Toinen merkittävä tiedostettu ongelma algebran ymmärtämisessä on sanallisten ongelmien kääntäminen algebran kielelle (MacGregor ja Stacey 1993, 230), mitä käsiteltiin symbolisen ajattelun 3.2 yhteydessä. Kolmantena merkittävänä ongelmana voidaan todeta Herscovicsin (1980, 1979) havainnot funktion erilaisista esitystavoista (taulukot, kuvaajat ja yhtälöt), jota on siteerattu lyhyesti Herscovicsin ja Linchevskin (1991) artikkelissa (Herscovics ja Linchevski 1991, s. 74).

Aritmetiikan ja algebran välisen kognitiivisen kuilun problematiikkaa on tutkittu kansainvälisesti laajasti ja esimerkiksi Drijvers esitteli omassa julkaisussaan kootusti seuraavia ongelmia, joita liittyy algebran ymmärtämiseen:

- Algebrallisten menetelmien formaali, algoritminen luonne, joita oppilaat eivät osaa liittää tiedollisiin ja merkityksellisiin lähestymistapoihin.
- Ongelmanratkaisun abstraktin luonteen suhde konkreettisiin ongelmiin ja merkityksen puute matemaattisille objekteille abstraktilla tasolla.
- Tarve pysyä ongelmanratkaisun yleisellä tasolla samalla kun työskennellään siihen liittyvissä algebrallisissa menetelmissä.
- Tiivis algebrallinen kieli ja siihen liittyvät erityiset säännöt ja symbolit.
- Algebrallisten kaavojen ja lausekkeiden käsitteleminen prosesseina objektien sijaan.

(Drijvers, 2003, s. 41-42)

Algebran oppiminen on haastavaa jo pelkästään siinä käytetyn kielen vuoksi. Esimerkiksi Tall ja Thomas ovat analysoineet teoksessaan niitä ongelmia, joita oppilaat kokevat varhaisalgebran parissa. Suurimmat vaikeudet näyttävät liittyvän muuttujien ja numeroiden välisen eron ymmärtämiseen, sillä aritmetiikalla on suuri merkitys algebrallisen ajattelun alkuvaiheessa. Esimerkiksi aritmetiikassa laskuoperaatiot luetaan ja suoritetaan samassa järjestyksessä vasemmalta oikealle, mutta algebrassa lausekkeet saatetaan lukea ja suorittaa eri järjestyksessä. Numeroiden merkitys saattaa olla niin suuri, että oppilaat eivät pidä esimerkiksi muuttujaa sisältävää tulosta lopullisena, koska aritmetiikassa lopullinen vastaus on usein yksi luku. (Tall ja Thomas 1991, s. 2)

Aritmetiikassa tuttuja symboleita, kuten yhtäsuuruutta käytetään algebrassa laajemmassa merkityksessä. Aritmetiikassa yhtäsuuruudella tarkoitetaan tietyn vasemmalta oikealle suuntautuvan toiminnan tulosta, esimerkiksi laskutoimituksessa $4 + 7 = 11$ yhtäsuuruus kuvaa lukujen 4 ja 7 välisen yhteenlaskun tulosta. Lauseketta $4 + 7$ voidaan kuvata monin tavoin: $4 + 7 = 7 + 4$, $4+7 = 4+(2+5)$ tai vaikkapa $4+7 = 1+10$. Lausekkeet yhtäsuuruuden molemmilla puolilla antavat saman määrän informaatiota, lukujen välistä summaa, joka on 7. Yhtäsuuruus on ekvivalenssirelaatio ja algebrassa olennaista on oppia tarkastelemaan lausekkeita molempiin suuntiin. (Linchevski 1995, s. 113)

Algebrassa tyypillistä on siirtyä abstraktista näkökulmasta konkreettiseen ja päinvastoin, mikä on ongelmallista algebran oppimisen kannalta varsinkin silloin kun oppilaan algebrallinen tausta on puutteellinen. Algebran päämääränä on abstrakti, yleinen rakenne, mutta sitä opetetaan konkreettisten ongelmien avulla. Mikäli algebrassa keskitytään liikaa sen konkreettiseen puoleen, sen voima yleistämisen ja abstraktioinnin välineenä jää huomiotta (Drjivers 2003, s. 43).

Algebran ymmärtämisessä ongelmia aiheuttaa myös prosessi-tulos ongelma, sillä algebrallinen lauseke tarkoittaa sekä prosessia, että prosessin tulosta. Aritmetiikassa prosessi ja tulos esiintyvät toisistaan erillään. Algebrallisia lausekkeita voi myös esittää eri tavoin, vaikka niiden tulos olisi sama (Tall ja Thomas 1991). Yleisemmin kaikilla matemaattisilla käsitteillä on kaksi puolta: operatiivinen prosessi-luonne ja rakenteellinen objekti-luonne.

Oppimisen teorian yhteydessä tarkasteltiin lyhyesti tiedon proseduraalista ja konseptuaalista luonnetta. Matemaattisille objekteille on tyypillistä niiden samanaikainen proseduraalinen ja konseptuaalinen luonne. Gray ja Tall (1991) ovat helpottaneet ymmärtämään prosessin ja objektin välistä duaalisuutta ottamalla käyttöön uuden käsitteen procept, jolla tarkoitetaan sekä prosessia (process), että objektia, käsitettä (concept). Lisäksi tällaisen käsitteen prosessia ja tulosta kuvataan samoilla symboleilla. Havainnollistavana esimerkkinä procept-käsitteestä Gray ja Tall antavat numeron kolme, joka kuvaa sekä yhteenlaskuprosessia "yksi, kaksi, kolme", että esimerkiksi lukujen yksi ja kaksi välisen yhteenlaskun tulosta (Gray, Tall 1991, s. 2).

Drijversin mukaan matemaattisen käsitteen prosessi-luonne on hallitsevampi kuin objektiluonne, mikä tekee haastavaa käsitteen syvällisemmästä ymmärtämisestä (Drijvers 2003, s. 44). Useiden tutkimusten mukaan on pääteltу, että algebrassa perinteinen opetustyyli korostaa liikaa algebrallisten lausekkeiden laskemista ja muokkaamista (Graham ja Thomas 2000 ; Tall ja Thomas 1991) käsitteiden ymmärtämisen kustannuksella. Tämä johtuu Grahamin ja Thomaksen mukaan osin aritmetiikasta, mikä on hyvin prosessi-painotteista. Drijvers on tehnyt teoksessaan hypoteesin siitä, että

CAS-ympäristössä (computer algebra system) työskenteleminen voi vahvistaa algebrallisten kaavojen ja lausekkeiden objektiluonnetta. Tall ja Thomas ovat myös vakuuttuneita siitä, että tietokoneavusteinen algebran opetus johtaa käsitteiden syvällisempään ymmärrykseen ja mahdollinen lasku algebran manipulatiivissa taidoissa on korvattavissa myöhemmin (Tall ja Thomas 1991, s.1). Tall ja Thomas väittävät edelleen, että lapsilla on algebrassa taipumus peitellä käsitteiden ymmärtämättömyyttään rutiinitaitojen opettelulla. Algebran oppiminen jää tällöin pinnalliseksi ja oppilaat ajautuvat kierteeseen, missä he oppivat ainoastaan kokoelman erilaisia mekaanisia ratkaisumenetelmiä (Tall ja Thomas 1991, s. 3)

Algebran ja aritmetiikan välisen siirtymävaiheeseen liittyviä ongelmia voitaisiin tarkastella vieläkin tarkemmin, mutta tässä tutkielmassa tarkoituksena on pyrkiä ainoastaan esittelemään ongelmista keskeisimpiä ja pohtia myöhemmin tarkemmin sitä, onko teknologialla tutkimusten mukaan mahdollista tukea varhaisalgebraan liittyvää oppimisprosessia.

4 Teknologia algebran opetuksessa

Teknologialla tulee tulevaisuudessa olemaan aikaisempaa suurempi merkitys matematiikan opetuksessa, joka voidaan havaita esimerkiksi Suomen uudesta perusopetuksen opetussuunnitelmasta . Matematiikan oppimista tuetaan tieto- ja viestintäteknologian avulla jo ensimmäisestä luokasta lähtien. Yksi suurimmista muutoksista on ohjelmoinnin opettaminen peruskoulun matematiikassa. Oppimisympäristön ja työtapojen suunnittelussa tullaan hyödyntämään esimerkiksi taulukkolaskentaa ja dynaamista geometriaohjelmistoa. Kyky hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa on myös osa oppilaan arviointia. (Opetushallitus 2014, s. 135-138 ; 261-266 ; 429-436)

Tarkastellaan seuraavaksi, mikä merkitys teknologialla voisi olla erityisesti algebran oppimisen osana. Tutkimusten mukaan teknologisten oppimisympäristöjen käyttö tukee aritmetiikan ja algebran välistä siirtymävaihetta, sillä ne vahvistavat oppilaiden älyllistä kapasiteettia ja rohkaisevat oppilaita suunnittelemaan, reflektoimaan ja perustelemaan näkemyksiään. (Pea 1985, Heid 1995 lähteessä Tabach et al 2008, s. 55)

Teknologiapainotteisessa oppimisympäristössä työskentelevät oppilaat käsittelevät ohjelmassa tarvittavaa symbolista kieltä, mikä voi Filloyn ja Sutherlandin (1996) mukaan auttaa oppilaita luomaan omia matemaattisia yleistyksiä, jotka pohjautuvat aritmetiikassa saatuihin kokemuksiin. Filloyn ja Sutherlandin mukaan tietotekniikan käyttö antaa oppilaille mahdollisuuden keskittyä enemmän algebran rakenteeseen. (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick ja Laborde 1996 s. 155) Kuitenkin esimerkiksi Drijvers ja Gravemeijer (2005) huomauttavat, että idea tiettyjen tehtävien jättämisestä tietokoneiden suorittamiseksi ei ole näin yksinkertainen vaan tietokoneiden suorittamat tekniikat ja käsitteellinen ymmärtäminen vaikuttavat toisiinsa (Drijvers ja Gravemeijer 2005, s. 164). Monissa lähteissä oletetaan, että teknologia "vapauttaa"kapasiteettia käsitteellistä ymmärrystä vaativiin tehtäviin kun aikaa ei tarvitse enää käyttää niin paljon erilaisiin muutoksellista aktiviteettia sisältäviin tehtäviin.

Teknologisia työkaluja voidaan soveltaa esimerkiksi sanallisissa ongelmissa käyttäen useita esitystapoja, funktion muodostamisessa numeeristen kokeilujen kautta ja funktioiden symbolisten ja graafisten esitysten muokkaamisessa. Erityisesti useiden esitystapojen käyttö saman ongelman parissa koetaan hyödylliseksi ja esimerkiksi graafisella laskimella oppilaiden on mahdollista siirtyä sujuvasti eri esitystapojen välillä. Graafisten, numeeristen ja symbolisten esitystapojen välillä on dynaaminen luonne teknologisessa ympäristössä, jollaista on vaikea hahmottaa ainoastaan kynän ja paperin avulla. (Tabach et al 2008, s. 55)

Opetusteknologian soveltamista funktioiden tapauksessa voidaan kirjallisuuden perusteella pitää perusteltuna (Monaghan 2005, s. 65 ; Pierce ja Stacey 2001, s. 34), sillä esimerkiksi graafisten laskimien avulla on helppo piirtää funktioista tarkkoja kuvaajia. Kuvaajien piirtäminen käsin on aikaavievää ja työlästä. Graafisia toimintoja tukevilla ohjelmilla on mahdollista tutkia, miten funktioon tehdyt muutokset vaikuttavat funktion kuvaajaan. Laskimien avulla oppilaan on mahdollista saada tekemistään muutoksista välitöntä palautetta, mikä voi kannustaa oppilasta kokeilemaan ja tutkimaan itsenäisesti funktioiden ominaisuuksia. Kappaleessa 3.3 on todettu, että ongelmat funktion erilaisten esitystapojen käytössä voivat olla esteenä algebran ymmärtämiselle. Graafisia ominaisuuksia sisältävät teknologiset apuvälineet ovatkin jo saavuttaneet suosiota matematiikan opetuksessa.

Symbolista muokkaamista tukevat järjestelmät eivät sen sijaan ole saaneet varauksetonta kannatusta algebran opetuksessa. CAS-teknologiaa tukevilla ohjelmistoilla on mahdollista suorittaa symbolista muokkaamista automaattisesti, mikä poikkeaa merkittävästi nykyään koulussa opetettavasta algebrasta. Kiistoja aiheuttaa symbolisen muokkaamisen taitojen merkitys käsitteiden ymmärtämisessä. Symbolinen muokkaaminen kuitenkin sisältää proseduraalista tietoa, jota tarvitaan konseptuaalisen tiedon saavuttamiseksi (Haapasalo 2011). On siis syytä pohtia, menetetäänkö algebran opetuksessa jotain tiedollisesti arvokasta, jos symbolinen muokkaaminen poistetaan algebran opetuksesta?

Kappaleessa 3 käsiteltiin varhaisalgebran sisältöä Linchevskin työryhmän ajatusten pohjalta. Mikä rooli teknologialla voisi olla varhaisalgebrassa? Työryhmän mukaan laskimet voisivat olla mahdollinen työkalu varhaisalgebrassa algebrallisen rakenteen tutkimisessa, sillä laskimien avulla oppilaat voivat esimerkiksi oppia muodostamaan yleistettyjä lausekkeita sijoittamalla toistuvasti lukuja lausekkeeseen. Tietokoneista mainittiin niiden graafiset ominaisuudet ja taulukkolaskennan käyttö. Huolta kuitenkin aiheutti teknologian vaikutus oppilaiden työskentelytapoihin, jotka voivat muuttua odottamattomalla tavalla. (Linchevski 1995, s. 118)

Teknologiset apuvälineet voivat siis kannustaa oppilaita kokeilemaan ja testaamaan eli oppilas toimii ikään kuin tutkijana. Kokeiluun perustuva oppimistapa tukee konstruktivistista oppimiskäsitystä, sillä oppilaalla on mahdollisuus rakentaa omia tietorakenteitaan havaintojensa kautta. Huolellisesti suunnitellut teknologiset oppimisympäristöt voivat auttaa oppilaita "löytämään"itse algebran sisältöä, mikä oletettavasti lisää oppilaan motivaatiota ja kiinnostusta matematiikkaan.

5 CAS-järjestelmä

CAS-järjestelmä (Computer Algebra System) kuvaa sellaisia tietokonejärjestelmiä, jotka sisältävät numeeriseen, graafiseen ja symboliseen muokkaamiseen tarvittavia toimintoja (Nabb, 2010). Jatkossa kaikkiin näihin järjestelmiin viitataan lyhyesti CAS-järjestelmällä. Esimerkiksi *Mathematica*, *Maple* ja *TI-Nspire* ovat tunnettuja CAS-ohjelmistoja. 1950-luvulla CAS-ohjelmistoja kehitettiin tieteellisiä tarkoituksia varten ja ohjelmistojen kehityttyä helppokäyttöisemmiksi ne ovat löytäneet paikkansa myös koulutusympäristöissä. 1980-luvulla alettiin kiinnittää enemmän huomiota CAS-ohjelmistojen pedagogisiin mahdollisuuksiin (Drijvers 2003, s. 82-83). On huomattava, että graafisiin laskimiin verrattuna CAS-teknologialla on mahdollista suorittaa myös symbolista muokkausta kuten sieventämistä ja yhtälöiden ratkaisemista välivaiheineen. Jatkossa keskitymme juuri tähän CAS:n ominaisuuteen, sillä tämän ominaisuuden soveltaminen algebran opetukseen tuo mukanaan merkittäviä muutoksia.

5.1 CAS-järjestelmän edut ja haitat

CAS-ohjelmistot ovat algebraan oppimiseen hyvin soveltuvia työkaluja ensinnäkin siksi, että ne sisältävät algebraan liittyviä toimintoja, jotka mahdollistavat kehittyneitä ja joustavia lähestymistapoja algebrallisiin ongelmiin. Koska CAS-ohjelmistot ovat kykeneviä suorittamaan algebrallisia operaatioita tarkasti, ne antavat mahdollisuuksia keskittyä ongelmanratkaisun strategioihin ja käsitteisiin. Oppilaan ei tarvitsisi miettiä ongelmanratkaisun seuraavaa välivaihetta ja huolimattomuusvirheitä. Tällöin aikaa ja resursseja jäisi syvempää ymmärrystä vaativiin tehtäviin. (Drijvers 2003, s. 89-90.) CAS-ohjelmistoilla on mahdollista vaihtaa nopeasti ja tarkasti funktion erilaisten esitystapojen välillä, joita ovat symbolinen (algebrallinen), graafinen ja taulukoitu (numeerinen) esitysmuoto (Pierce ja Stacey 2001, s. 30). Tutkimusten mukaan juuri tämä ominaisuus on erityisen hyödyllinen algebran oppimisessa, sillä erilaisten esitysmuotojen vapaa käyttö antaa oppilaille mahdollisuuden käyttää useita erilaisia ratkaisutapoja saman ongelman parissa. Kappaleessa 2.2 todettiin, että teknologisessa oppimisympäristössä on tärkeää antaa oppilaille vapaus käyttää erilaisia työskentelytapoja. CAS-ohjelmistoilla siirtyminen eri esitysmuotojen välillä on nopeaa ja helppoa. CAS-ohjelmien parissa työskentelevillä oppilailla on samassa ajassa laajempi ja yksityiskohtaisempi kokemus algebrallisesta ongelmasta kuin käsin työskentelevillä oppilailla.

Erilaisten esitystapojen käyttö funktioiden tapauksessa on hyödyllistä, sillä pelkästään graafinen, algebrallinen tai numeerinen esitystapa ei riitä kuvaamaan kaikkia funktion ominaisuuksia. Funktion täydellinen määrittely tehdään algebrallisesti symboleita käyttäen ja graafit ja taulukot kuvaavat vain osaa funktiosta. Funktiosta tasoon piirretty kuvaaja täytyy sovittaa x- ja y-akseleille tai rajoittaa osa kuvaajasta tarkastelua varten. Numeerisella esitystavalla ei ole mahdollista kuvata täydellisesti jatkuvia funktioita, sillä taulukoissa muuttujille voidaan antaa vain tiettyjä arvoja. Taulukoiden käyttö funktioiden esitystapana varhaisalgebrassa on kuitenkin tärkeä, sillä ne toimivat linkkinä aritmetiikan ja algebran välillä. (Harvey, Waits ja Demana 1995, s. 82-83.) Pierce ja Stacey (2001) tutkivat erilaisten esitystapojen samanaikaista käyttöä tekemällä opetuskokeilun DERIVE-nimisellä CAS-ohjelmistolla. Tutkimuksen mukaan kyky siirtyä ohjelman avulla erilaisten esitysmuotojen välillä auttoi oppilaiden ymmärtämistä. Oppilaat vertailivat erilaisia esitysmuotoja tarkistaakseen tulosten järkevyyttä. Graafisten ja algebrallisten esitysmuotojen käyttö oli yleisempää kuin taulukoiden.

CAS-ohjelmistojen käyttöön opetuksen välineenä liittyy myös heikkouksia. CAS-järjestelmä on esimerkki sellaisesta oppimisympäristöstä, jolla on niin sanottu *top-down*-luonne. CAS-ohjelmistot ovat oppimistarkoituksessa niin laajalle kehittyneitä, että ne saattavat heikentää oppilaiden motivaatiota ja poistaa matematiikasta "löytämisen ilon"(Drijvers 2003, 90). Tämä on ristiriidassa konstruktivistisen oppimiskäsityksen kanssa, jota käsiteltiin kappaleessa 2.1. Teknologian käyttäminen algebran opetuksessa ei siis välttämättä lisää oppilaiden motivaatiota, mikäli oppilaat eivät ymmärrä, mitä ovat tekemässä.

CAS-ohjelmistoihin ja muihin teknologisiin välineisiin liittyy myös niin sanottu *musta laatikko*-luonne (engl. black box). Tällä tarkoitetaan sitä, että CAS-ohjelmistot eivät näytä yksityiskohtaisia tietoja siitä, miten ratkaisu on saavutettu. Tämä voi aiheuttaa sen, että oppilaat käyttäisivät CAS-ohjelmistojen tuottamia liian kehittyneitä ratkaisumenetelmiä (Drijvers 2003, s. 90). CAS:n käytöllä ei tällöin ole suurta episteemistä arvoa ja sen käyttö opetuksessa on kyseenalainen (Nabb 2010). Mustan laatikon luonne saattaa edesauttaa erilaisten proseduraalista tietoa sisältävien matemaattisten menetelmien automatisoitumista, mikä voi estää konseptuaalisen tiedon kehittymisen kuten kappaleessa 2.1 todettiin Haapasalon MODEM-teorian yhteydessä.

Toisaalta CAS-järjestelmiin liittyy myös niin sanottu *valkoinen laatikko*-luonne (engl. white box), missä CAS-järjestelmää voidaan käyttää esimerkiksi lineaaristen yhtälöiden ratkaisussa. Valkoisen laatikon menetelmässä käyttäjä pystyy syöttämään järjestelmään vaiheittain komentoja ja näkemään komentojensa tulokset vaiheittain. Käyttäjä pystyy esimerkiksi kertomaan yhtälöjä puolittain tai lisäämään lukuja yhtälön molemmille puolille. Koska CAS:n antama palaute on välitöntä, käyttäjä näkee heti, onko hänen antama komentonsa oikea yhtälön ratkaisun kannalta vai tarvitseeko hänen muokata aikaisempia komentojaan. Näin käytettynä CAS palvelee erityisesti niitä, joilla on vielä vaikeuksia yhtälönratkaisussa. (Nabb 2010)

Varhaisissa CAS-ohjelmistoissa ongelmia aiheutti myös tekniikan vaikeaselkoisuus ja jyrkkä oppimiskäyrä ohjelmien käytössä. Nykyään CAS-teknologiaa tukevista laskimista löytyvät numeeriset, graafiset ja symboliset toiminnot ovat helpommin omaksuttavia, sillä laskimiin voidaan ladata erilaisia opetusohjelmia. CAS-teknologian opetuskäyttöä koskeva kirjallisuus kehittyy koko ajan ja esimerkiksi Lenni Haapasalon ja Olli Karkkulaisen vuonna 2014 julkaistu teos *CAS kummaa -oivallan matikkaa teknologian avulla!* sisältää valmiita opetusmalleja CAS-teknologian soveltamisesta esimerkiksi suoran, paraabelin ja ympyrän yhtälön oppimiseen Geogebran, TI-Nspiren ja Classpadin avulla. Haapasalon mukaan CAS-teknologia voisi soveltua hyvin matematiikan oppimiseen, sillä CAS-ympäristössä oppilaiden on mahdollista *"tarkastella matemaattisten objektien proseduraalisia ja konseptuaalisia ominaisuuksia samanaikaisesti leikittelemällä eri esitysmuodoilla"* (Haapasalo 2014).

5.2 CAS-teknologia käytännössä

Pierce, Ball ja Stacey (2009) ovat tutkineet julkaisussaan *Is it worth using CAS for symbolic algebra manipulation in the middle secondary years? Some teachers' views* opettajien mielipiteitä CAS-teknologian käytöstä symbolista muokkaamista vaativissa tehtävissä. Tutkimuksen mukaan CAS-teknologian hyöty vaihtelee oppilaiden lahjakkuuden mukaan. Suurin osa tutkimukseen osallistuneista opettajista uskoi, että CAS-teknologia edistää lahjakkaampien oppilaiden matemaattista ymmärrystä, mutta heikommilla oppilailla ongelmia saattaa aiheuttaa CAS-teknologian syntaksikieli ja CAS-ohjelmista saatujen tulosten tulkinta. Opettajien mielestä CAS-teknologian käyttö kuormittaa matematiikan oppimista ja osaltaan estää sitä (Pierce et al 2009, s. 1170). Pierce kumppaneineen onkin sitä mieltä, että CAS-teknologian käytön suunnittelussa tulee ottaa huomioon oppilaiden taso ja vaatimukset, jotta opetuksesta olisi hyötyä kaikille. Tämä vastaa kappaleessa 2.2 tarkastelua teknologisen oppimisympäristön vaatimuksia.

Mikä rooli CAS-teknologialla voisi olla matematiikan opetuksessa? Heid ja Edwards ovat esitelleet CAS-teknologian neljä eri käyttötapaa matematiikan opetuksessa. Yhden käsityksen mukaan CAS on symbolisten tulosten pääasiallinen tuottaja ja oppilas keskittyy matematiikan muihin osa-alueisiin. Näin oppilailla on mahdollisuus kehittää matematiikan käsitteellistä ymmärrystään sen sijaan, että he opettelisivat kynällä ja paperilla suoritettavia symbolisen muokkaamisen taitoja (Heid ja Edwards, 2001, s. 130.)

CAS:n toinen mahdollinen rooli on ainoastaan tuottaa erilaisia symbolisen muokkaamisen välivaiheita. Oppilas on kuitenkin vastuussa tehtävän suorittamisessa, mutta CAS:n avulla oppilas voi tutkia ratkaisumenetelmän vaiheita, sillä CAS pystyy esittämään ratkaisun vaihe vaiheelta. Heid ja Edwards väittävät, että CAS:n symboliset toiminnot rohkaisevat heikompia oppilaita tutkimaan algebrallisia lausekkeita enemmän käsitteellisestä näkökulmasta. Tämä mahdollistaa oppilaita rakentamaan kehittyneempiä yhtälönratkaisun malleja. Käsitteellisen näkökulman korostuminen tukee procept-teoriasta tehtyjä havaintoja (Drijvers 2003). Tässä roolissa oppilas voi kokeilla CAS:n avulla, miten oppilaan tekemät muutokset vaikuttavat CAS:n tuottamiin välivaiheisiin eli hyödynnetään CAS-teknologian valkoisen laatikon luonnetta. (Heid ja Edwards, 2001, s. 131)

Kolmannessa roolissa CAS auttaa oppilasta tuottamaan useita esimerkkejä, joita tutkimalla oppilaat voivat muodostaa sääntöjä. Esimerkkinä Heid ja Edwards esittivät $(x+n)^3$ lausekkeen laajentamisen kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Oppilaat voivat tutkia tätä lauseketta n:n eri arvoilla ja johtaa esimerkkien avulla lausekkeen yleinen muoto. Neljäntenä roolina CAS tuottaa abstraktissa muodossa olevien ongelmien tuloksia. (Heid, 2001, s. 131-132)

Zellerin ja Barzelin (2010) julkaistu artikkeli *Influences of CAS and GC in early algebra* käsittelee CAYEN-projektia, jossa tutkittiin 13-vuotiaiden oppilaiden käyttäytymistä varhaisalgebran opetuksessa videoitujen oppituntien avulla. Tutkimusjärjestely koostui kolmesta luokasta, joista kahdessa luokassa oppilailla oli vapaa pääsy CAS-ohjelmiston käyttöön ja yhdellä luokassa graafiseen laskimen käyttöön. Ohjelmistona käytettiin TI-nspire laskimia, joista käytettiin CAS-versiota ja graafista versiota. Näin tekemällä pystyttiin havaitsemaan CAS-laskimen automaattisen symbolisen muokkaamisen vaikutusta algebralliseen toimintaan. Tutkimuksessa tarkkailtiin oppilaiden suhtautumista algebraan ja sen suhdetta aritmetiikkaan, teknologian vaikutusta oppilaiden algebran arviointitaitoihin sekä CAS:n vaikutusta oppilaiden kognitiiviseen aktiviteettiin ja konseptuaaliseen ymmärtämiseen algebran parissa (Zeller ja Barzel 2010, s. 778). Erityisesti algebraan liittyvästä kognitiivisesta aktiviteetista ja konseptuaalisesta ymmärtämisestä saadut tulokset ovat tämän tutkielman kannalta keskeisessä roolissa.

Zeller ja Barzel havaitsivat, että CAS-laskimia käyttäneet oppilaat keskittyivät lausekkeiden rakenteisiin ennen niiden muokkaamista. CAS-laskimeen syötetyn komennon ja kynän ja paperin välinen keskinäinen riippuvuus viritti erilaisten algebrallisten esitysten käyttämistä itsenäisinä matemaattisina työkaluina (Zeller ja Barzel 2010, s. 786). Oppilaat käyttivät laskimessa tarvittavia komentoja myös työskennellessään ilman laskinta, mikä saattaa kuulostaa oudolta. Zeller ja Barzel kuitenkin havaitsivat videoiden avulla, että oppilaat ajattelivat ja keskustelivat annetusta tehtävästä ennen komentojen kirjoittamista, mikä viittaa siihen, että oppilailla oli käsitys siitä, mitä he olivat tekemässä. Kynä-paperi-ympäristössä näitä komentoja ei käytetä näkyvällä tavalla, mutta komentojen näkyväksi tekeminen voisi auttaa havaitsemaan ja pohtimaan erilaisia mahdollisuuksia algebrallisista manipulaatioista. Tutkimuksessa havaittiin myös, että oppilaat eivät aina turvautuneet laskimen tarjoamaan "ratkaise"(solve) -komentoon, vaan he saattoivat käyttää laskinta tarkistamaan oppilaiden käsin tekemiä ratkaisuja. (Zeller ja Barzel 2010, s. 785.)

Arkimaailmaan liittyvien ongelmien ratkaiseminen algebrallisten mallien avulla on usein haastavaa oppilaille, kuten kappaleessa 3.3 todettiin. Zellerin ja Barzelin havaintojen mukaan CAS:ia käyttäneet oppilaat muodostivat joustavia esityksiä annetuista ongelmista. Oppilaat osasivat esimerkiksi sujuvasti käyttää useita muuttujia ja vaihtaa niitä toisiin. Algebrallisten manipulaatioiden tekeminen laskimella antaa oppilaille mahdollisuuden keskittyä algebrallisen esityksen rakenteeseen ja esityksen ja reaalimaailman väliseen riippuvuuteen (Zeller ja Barzel 2010, s. 786).

Yhteenvetona Zellerin ja Barzelin tekemästä tutkimuksesta voidaan todeta, että CAS-ohjelmistoa käyttäneet oppilaat käsittelevät algebraa enemmän abstraktilla tasolla, mikä aktivoi meta-tason aktiviteettia ja vahvistaa algebrallisten objektien objektipuolta. Vaikuttaa siis siltä, että CAS-ympäristössä työskenteleminen toteuttaa teknologisen oppimisympäristön vaatimukset, joita käsiteltiin luvussa 2.2. Algebran yleisen rakenteen tutkiminen voi auttaa käsitteellisen muutoksen aikaansaamista ja yleisemmin kehittämään käsitteellistä ymmärtämistä algebrallisista objekteista, kuten muuttujista ja funktioista.

6 Taulukkolaskenta

Taulukkolaskentaohjelmalla (*spread sheet program*) on mahdollista käsitellä numeerista dataa sijoittamalla dataa niin sanottuihin soluihin ja ohjelmoida niiden välille erilaisia operaatioita. Solujen välistä riippuvuutta on mahdollista tutkia ja piirtää esimerkiksi kuvaajia kahden suureen välille. Tunnettu ja yleisesti käytetty taulukkolaskentaohjelma on esimerksi Microsoftin kehittämä *Excel*. Taulukkolaskennan käyttäminen matematiikan oppimisen välineenä on ollut suosittu tutkimuskohde ja tässä kappaleessa tarkastellaan, miten taulukkolaskentaa voitaisiin hyödyntää algebran opetuksessa.

Taulukkolaskennassa esiintyvät solut ilmoitetaan rivin kirjaimen ja sarakkeen numeron mukaan. Esimerkiksi solu B3 kuvaa rivillä 3 sarakkeessa B olevaa lukua. Toinen solu, esimerkiksi A1, voidaan määrittää niin, että se riippuu solusta B3 jonkin kaavan mukaan. Solujen välinen riippuvuus voitaisiin kirjoittaa esimerkiksi muodossa A1 $=$ 2B3 $+$ 4. Tämä esitysmuoto on analoginen funktiolle $y = 2x + 4$ eli taulukkolaskennassa solu A1 on funktion y arvo ja B3 kuvaa muuttujaa x. Taulukkolaskenta voi siis tukea funktionaalista lähestymistapaa algebrassa (Tabach et al 2008, s. 56). Taulukkolaskennalla voidaan käsitellä numeerista aineistoa helposti kopioi-liitä-toiminnolla ja tottua käsittelemään symboleita eli algebrallista kieltä pysyen kuitenkin tutussa numeerisessa ympäristössä. Numeerisen aineiston helppoa käsittelyä voidaan pitää yhtenä taulukkolaskennan suurimmista eduista ja siksi taulukkolaskennasta voisi olla apua niille, joilla on vaikeuksia esimerkiksi muuttujan ymmärtämisessä.

Taulukkolaskennan ja algebran välistä yhteyttä on tutkinut esimerkiksi Haspekian (2003, 2005), joka on tutkinut taulukkolaskennan integraatiota varhaisalgebran opetuksessa teoreettisesta näkökulmasta sekä analysoinut siitä aiheutuneita didaktisia seurauksia. Capponi (1999) (viitattu lähteessä Haspekian 2003, s. 3) pitää taulukkolaskentaa sopivana oppimisen työkaluna aritmetiikan ja algebran välisessä siirtymävaiheessa, sillä se sisältää sekä aritmeettisia, että algebrallisia ominaisuuksia.

Taulukkolaskennan käyttöä algebran opetuksessa suositaan siinä käytetyn symbolisen kielen vuoksi, joka muistuttaa algebrallista kieltä. Algebrallisen kielen oppimisprosessia voitaisiin tukea taulukkolaskennan avulla, sillä sen kielelliset rajoitukset voivat auttaa oppilaita huomaamaan algebrallisen kielen voiman (Haspekian 2005, s. 112-113). Algebraa voitaisiin pitää kielenä, jonka avulla kommunikoidaan taulukkolaskennallisessa ympäristössä (Monaghan 2005, s. 65-66). Kuten Arcavi perusteli symbolisen ajattelun yhteydessä kappaleessa 3.2, symbolien merkityksien ymmärtäminen on olennaisessa osassa algebran oppimisessa ja taulukkolaskenta voisi olla vaihtoehtona symbolien opettelemisessa.

Taulukkolaskennan vahvuuksina voidaan Haspekianin (2005) mukaan pitää sen erilaisten esitysmuotojen käyttöä (vrt. CAS-järjestelmä). Taulukkolaskennassa on esimerkiksi mahdollista käyttää kirjoitettua kieltä, käsitellä numeerista aineistoa taulukoiden muodossa, määrittää yhtälöitä solujen välille sekä piirtää numeerisesta datasta kuvaajia. Haspekianin mukaan mahdollisuus käyttää sujuvasti erilaisia esityksiä helpottaa löytämään niiden välisiä yhteyksiä, minkä on todettu parantavan käsitteellistä ymmärtämistä. Kaiken kaikkiaan taulukkolaskennallinen ympäristö algebran opetuksessa on monimuotoisempi kuin pelkästään kynän ja paperin avulla ja taulukkolaskennan avulla oppilaat pystyvät helpommin kokeilemaan, tekemään oletuksia ja löytämään virheitä. (Haspekian 2005, s. 113-114)

Taulukkolaskennalla oppilaiden on mahdollista käsitellä optimointiin ja yhtälöihin liittyviä ongelmia ns. T/R-menetelmän avulla (trial and refinement method) (Dettori, Garuti, Lemut 2001; Haspekian 2005, s. 114), minkä ideana on esimerkiksi yhtälöiden tapauksessa sijoittaa lukuja toistuvasti muuttujien paikalle niin kauan, että yhtälö on tosi. Tällainen lähestymistapa voi auttaa oppilaita löytämään uusia mallintamistapoja ongelmien ratkaisussa ja ymmärtää yhtälönratkaisun idean jopa ennen formaaleja yhtälönratkaisumenetelmiä. Taulukkolaskenta voisikin olla sopiva väline esimerkiksi ratkaisemaan yhtälöitä iteratiivisesti (Monaghan 205, s. 66). Dettori kumppaneineen kuitenkin huomauttaa, että kokeiluun perustuvan ongelmanratkaisustrategian opettaminen edellyttää opettajalta huolellista ohjausta niin, että oppilas oppisi käsittelemään ongelmaa yleisellä tasolla (Dettori et al 2001).

6.1 Esimerkki sanallisen tehtävän ongelmanratkaisusta

Esimerkkinä yhtälönratkaisemista taulukkolaskennan avulla käytetään monissa kirjallisuuden lähteissä esitettyä sanallista tehtävää (Bishop et al 1996, 156; Rojano 1993, Sutherland et al, s. 11-15), jossa lasketaan suorakaiteen muotoisen pellon pituutta ja leveyttä tiedetyn piirin avulla (Kuva 1.). Tässä kappaleessa esitetään esimerkin avulla, kuinka taulukkolaskennan käyttö algebrallisessa ongelmassa muuttaa ongelmanratkaisun strategiaa.

LEVEYS	PITUUS	PIIRI
8	16	48
9	18	54
10	20	60
11	22	66
12	24	72
13	26	78
14	28	84
15	30	90
16	32	96
17	34	102

Suorakaiteen muotoisen pellon ympärysmitta on 102 m.
Pellon pituus on kaksi kertaa niin pitkä kuin leveys.
Mikä on pellon pituus ja leveys?

Kuva 1. Taulukkolaskennallinen lähestymistapa sanalliseen algebran tehtävään

Algebrallisesti sama tehtävä olisi ratkaistu seuraavasti:

Merkitään pellon leveyttä muuttujalla x, jolloin pellon pituus on $2x$. Nyt pellon piiri on $x + x + 2x + 2x$ eli saadaan yhtälö:

$$x + x + 2x + 2x = 102$$
$$6x = 102$$
$$x = 17$$

Siis pellon leveys on 17 m ja pituus $2 \cdot 17 = 34$ m.

Edellinen esimerkki on tyypillinen tapa käyttää taulukkolaskentaa sanallisten ongelmien ratkaisemisessa. Edellä esitettyä tehtävää on tutkittu opetuskokeilujen avulla (Rojano 1993), sillä kyseinen tehtävä on tyypillinen esimerkki sanallisesta ongelmasta, jossa voidaan soveltaa algebrallista lähestymistapaa. Algebrallisten ongelmien käsitteleminen symbolisen kielen avulla ja muuttujan käyttö ovat haasteellisia oppilaille (Drijvers 2003;MacGregor ja Stacey 1993; Herscovics ja Linchevski 1991) , joten taulukkolaskennallinen tapa lähestyä algebrallisia ongelmia voi auttaa formaalien ongelmanratkaisumetodien käyttöä. Rojano tutki em. ongelmaa kahden opetusryhmän avulla, jotka koostuivat 14-15-vuotiaista oppilaista, jotka eivät olleet erityisen lahjakkaita matematiikassa ja joista suurin osa ei kyennyt ratkaisemaan sanallisia ongelmia tutkimuksen alussa.

Rojano havaitsi, että oppilaat käyttävät todennäköisemmin ei-algebrallista lähestymistapaa tämänkaltaisten sanallisten tehtävien ratkaisemisessa. Kaksi tällaista tyypillistä strategiaa ovat ns. *whole/parts strategy* ja *a systema-*

tic and error approach (Rojano 1993.). Ensin mainitussa strategiassa oppilaat pyrkivät ratkaisemaan tehtävän käyttämällä tunnettuja arvoja (tässä tapauksessa piiriä) ja päätellä kysyttujen suureiden arvot tunnetun suureen avulla. Jälkimmäisessä strategiassa sitä vastoin ratkaisun suunta on tuntemattomasta suureesta tunnettuun. Oppilaat kokeilevat järjestelmällisesti eri arvoja tuntemattomille suureille niin kauan, kunnes tulos vastaa tiedettyä arvoa. Algebrallinen, sanallinen ongelma on siis mahdollista ratkaista kokonaan ilman algebrallisten menetelmien käyttöä.

Taulukkolaskennallisessa lähestymistavassa ongelmanratkaisun strategian suunta on tuntemattomasta tunnettuun. Oppilaiden on mahdollista kokeilla eri luvuilla, miten pellon piirin pituus muuttuu kun leveyden ja pituuden arvot muuttuvat. Menetelmä on siis samankaltainen em. systemaattisen kokeiluun perustuvan menetelmän kanssa. Kuitenkin taulukkolaskennallinen lähestymistapa sisältää algebrallisia piirteitä, sillä dataa muodostaessa oppilas valitsee yhden solun, tässä tapauksessa esimerkiksi leveys-sarakkeen solun B2, joka vastaa nyt muuttujaa x. Edelleen solu C2 kuvaa muuttujaa $2x$ ja solu D2 piiriä (Kuva 1.).

Rojanon tekemän opetuskokeilun tulosten pohjalta voidaan todeta, että taulukkolaskennan käyttö paransi oppilaiden kykyä suoriutua sanallisista ongelmista. Taulukkolaskenta voisi tukea ongelmalähtöistä tapaa lähestyä algebraa. Rojanon mukaan taulukkolaskennan mukanaan tuomat symboliset ominaisuudet olivat merkittävässä roolissa ratkaisuprosessin kannalta. Rojano ehdottaakin, että taulukkolaskennan käyttö algebran opetuksessa voisi toimia pohjana algebrallisten metodien kehitykselle, vaikka huomauttaakin, että opetuskokeilun tulokset perustuvat vain muutamaan valittuun ongelmaan. (Rojano 1993)

6.2 Taulukkolaskennan mahdolliset heikkoudet

Taulukkolaskennan käyttöä algebran oppimisessa on myös kyseenalaistettu. Taulukkolaskennan avulla voidaan helposti sijoittaa lukuja taulukkomuotoon ja kahden solun välille määritetty riippuvuus voidaan laajentaa koskemaan muitakin soluja. Aineistosta ei kuitenkaan käy muille ilmi, onko soluihin vain sijoitettu lukuja peräkkäin vai kuvaavatko solut jotain riippuvuutta (Tabach et al 2008, 57). Dettori, Garuti ja Lemut (2001) havaitsivat tutkimuksissaan, että taulukkolaskennassa käytetty merkkikieli on ongelmallista algebran oppimisessa, sillä = merkki on taulukkolaskennassa komento suorittaa annettu operaatio soluun, kun taas algebrassa se merkitsee relaatiota. Näin ollen taulukkolaskentaa ei ole mahdollista käyttää täydellisten algebrallisten mallien käsittelyssä (Dettori et al 2001).

Taulukkolaskennassa luvut ovat keskeisessä roolissa ja algebrassa tarvittavaa formaalia symbolien muokkaamista ei ole mahdollista tehdä helposti. Algebrallisen kielen oppimisessa on tärkeää osata lukea riippuvuuksia molempiin suuntiin, mikä ei ole mahdollista taulukkolaskennassa. Dettorin, Garutin ja Lemutin (2001) mukaan taulukkolaskenta on sopiva työkalu algebran oppimisen aloitukseen, mutta siinä ei ole tarvittavia ominaisuuksia algebran kokonaisvaltaiseen oppimiseen. Taulukkolaskennalla voidaan määrittää objektien välisiä riippuvuuksia, mutta ei tuottaa ja muokata kokonaisia riippuvuuksia. Tämä on kuin ymmärtäisi sanoja ja joitakin lauserakenteita, mutta niistä ei olisi mahdollista muodostaa kokonaisia lauseita. (Dettori et al 2001.) Kappaleessa 3.2 käsitelty symbolisen ajattelun käsite on algebran oppimisen kannalta tärkeää ja on syytä pohtia, onko taulukkolaskenta sopiva väline symbolien oppimiseen.

Dettori kumppaneineen (2001) on aiheellisesti pohtinut, onko algebrassa tarpeellista opetella formaaleja ratkaisumenetelmiä. Heidän mukaansa teoreettisen ratkaisumenetelmien ymmärtäminen kuitenkin johtaa ongelmien syvällisempään ymmärrykseen ja ymmärtämään myös, mitä ongelmia voi ratkaista ja mitä ei. Teoreettisten ratkaisumetodien avulla saavutetetaan täydellisiä ratkaisuja, jotka on menetelmän avulla todistettu oikeaksi (Dettori et al 2001). Kokeiluun perustuvia menetelmiä ei voida pitää matematiikassa suositeltavina, sillä matematiikassa on tarkoitus oppia käyttämään päättelyketjuja, joiden jokainen vaihe on perusteltavissa.

6.3 Algebrallinen aktiviteetti taulukkolaskennassa

Tabach, Arcavi ja Hershkowitz (2008) tutkivat opetuskokeilussaan, millaisia muutoksia 7-luokkalaisten varhaisalgebran opiskelijoiden symbolisen yleistyksen taidoissa tapahtui ennen tietokone-avusteista algebran opetusta ja sen jälkeen. Aikaisemmin havaittiin, että varhaisalgebran oppilailla oli kynäpaperi-ympäristössä mahdollista erottaa kolme vaihetta 3.2. Taulukkolaskennan avulla oppilaiden on mahdollista tutkia suureiden välisiä riippuvuuksia jopa aikaisemmilla symbolisen yleistyksen tasoilla kuin kynän ja paperin avulla. Tämä on mahdollista taulukkolaskennassa, sillä muuttujaa ja numeeristen datojen välistä riippuvuutta voidaan kuvata niin, että riippuvuus on näkyvissä ilman formaalia, symbolein ilmaistua esitystä. (Tabach, Arcavi ja Hershkowitz 2008, 57)

Taulukkolaskentaa voidaan käyttää eri tavoin symbolisen yleistyksen saavuttamiseksi (Tabach et al 2008, 379). Yksi tapa on käsitellä suurta joukkoa numeroita (esimerkiksi sarake) muuttujana ja tarkastella, miten se riippuu toisesta numerojoukosta. Toisaalta suureiden välisiä suhteita voidaan tarkastella rekursiivisesti tutkimalla vaikkapa peräkkäisiä soluja samassa sarakkeessa ja muodostaa yleinen riippuvuus kahdesta solusta saadun paikallisen riippuvuuden kautta. Taulukkolaskennalla on myös mahdollista kuvata yleistä riippuvuutta täydellisesti taulukkolaskennassa käytetyn symbolisen kielen avulla. Opetuskokeilun perusteella (Tabach et al 2008, 69) oppilaat käyttivät opetuskokeilun lopuksi kehittyneempiä symbolisen yleistyksen menetelmiä kuin aikaisemmin. Numeeristen menetelmien käyttö vähentyi ja rekursiivisten metelmien käyttö lisääntyi.

Tabach ja Friedlander (2008) tutkivat, voisiko taulukkolaskentaa käyttää Kieranin GTG-mallin muutoksellisessa (engl. transformational) aktiviteetissa. Toisin sanoen, voidaanko taulukkolaskennalla harjoitella algebraan kuuluvaa symbolista muokkaamista? Valitsemieni lähteiden perusteella on näyttöä siitä, että taulukkolaskenta ei soveltuisi symbolisen muokkaamisen välineeksi osin taulukkolaskennassa käytetyn merkkikielen vuoksi, joka on erilainen kuin kynä-paperi-ympäristössä. Tabach ja Friedlander havaitsivat, että symbolien erilainen esitysmuoto taulukkolaskennassa häiritsi vain jonkin verran oppilaita, mutta he kuitenkin kykenivät jatkamaan työskentelyään käsitellessään algebrallisten lausekkeiden muokkaamista (Tabach ja Friedlander 2008, s. 44).

Taulukkolaskennassa korostuu numeroiden käyttö, mikä voi olla vahvuus ja myös heikkous algebran oppimisen kannalta. Toisaalta algebrassa olisi tärkeää oppia ajattelemaan yleisellä tasolla, mutta toisaalta numeroiden käsittely varsinkin algebran oppimisen alkuvaiheessa voi madaltaa aritmetiikan ja algebran välistä kynnystä kuten edellä on havaittu. On kuitenkin haitallista käsitellä algebraa liikaa numeerisessa ympäristössä kuten todettiin kappaleessa 3.3 (Drijvers 2003). Numeerisessa, prosessi-painotteisessa ympäristössä pitäytyminen ei edistä käsitteellistä ymmärrystä kuten todettiin tarkasteltaessa aritmetiikan ja algebran välistä siirtymävaihetta. Tabachin ja Friedlanderin mukaan parhaita tuloksia saavutetaan kun symbolista muokkaamista käsitellään sekä taulukkolaskennan, että perinteisen kynä-paperi-ympäristön avulla (Tabach ja Friedlander 2008, 45). Taulukkolaskenta voi toimia vaikkapa eräänlaisena kokeiluun perustuvana oppimisympäristönä, jossa testataan kynän ja paperin avulla suoritettuja symbolisia, yleisiä tehtäviä.

7 Johtopäätökset

Teknologian tuominen matematiikan opetukseen ei ole ollut yksinkertainen tehtävä. Useat tutkimukset ovat näyttäneet, että teknologia tuo mukanaan monia positiivisia vaikutuksia, mutta se voi myös luoda uusia ongelmia. Tässä tutkimuksessa ei otettu esimerkiksi kantaa siihen, että kaikilla ei välttämättä ole samanlaisia mahdollisuuksia teknologian käyttöön koulun ulkopuolella. Lähtökohtana matematiikan ja muiden oppiaineiden opetuksessa on oltava sen tasapuolisuus. Kaikki eivät välttämättä ole tottuneet käyttämään erilaisia teknologisia välineitä, jolloin niiden käyttö voi myös estää oppimista. Siksi opettajien on tärkeää ymmärtää esineestä oppimisen työkaluksi -prosessin vaiheet ja suunnitella opetus huolellisesti niin, että teknologisia välineitä käytetään pedagogisesti tehokkaasti sopivissa tarkoituksissa. Teknologisten apuvälineiden käyttäminen matematiikan opetuksessa on vielä niin vähäistä ja teknologia-avusteisista oppimiskokeiluista saadut tulokset eivät aina ole sopusoinnussa keskenään. Monet opetuskokeiluista tehdyt tutkimukset ovat niin tuoreita, että niistä tehtyjä johtopäätöksiä täytyy tarkastella vielä varovaisesti, sillä teknologia kehittyy koko ajan.

Teknologia-avusteisen matematiikan opetuksen keskustelussa on tyypillistä vastakkainasettelu kynällä ja paperilla opetettavan matematiikan ja teknologiaa opetuksessa hyödyntävän matematiikan välillä. Kuinka paljon esimerkiksi algebrassa on tarpeen harjoitella käsin suoritettavaa symbolista muokkaamista algebrallisen ymmärryksen saavuttamiseksi? Yksiselitteistä vastausta tähän on mahdotonta antaa, mutta esimerkiksi Harvey, Waits ja Demana (1995) ovat sitä mieltä, että matematiikan opetuksessa on tarpeellista toimia jonkin verran kynä-paperi-ympäristössä, jotta teknologiaa osattaisiin käyttää sopivasti oikeissa tilanteissa ja oppilaiden itseluottamuksen kohottamiseksi. On mahdollista, että teknologian käyttö matematiikan opetuksessa voi heikentää oppilaiden luottamusta omiin matematiisiin kykyihin, jos oppilaat eivät tunne kontrolloivansa omaa oppimistaan (Harvey et al 1995, 104).

Tässä tutkielmassa on käsitelty aritmetiikan ja algebran välisen siirtymävaiheen ongelmia ja yritetty etsiä ratkaisuja niihin teknologisten apuvälineiden avulla. Algebran oppiminen on haastavaa, sillä sen luonne eroaa aritmetiikasta. Aritmetiikassa korostetaan numeroiden muokkaamiseen liittyviä menetelmiä ja tulosta kun taas algebrassa tulisi pyrkiä eroon konkreettisesta, numeerisesta ympäristöstä ja siirtyä ajattelemaan yleisellä tasolla. Uudet käsitteet, joita käytetään symbolisen kielen avulla, tuovat mukanaan omat haasteensa.

Tutkimusten perusteella algebran oppimista voidaan helpottaa esimerkiksi taulukkolaskennan avulla, jossa käytetään hyväksi sen aritmeettisia ja algebrallisia ominaisuuksia. Taulukkolaskennan avulla algebraa voidaan lähestyä helpommin, mutta siitä puuttuvat esimerkiksi täsmälliset symbolista muokkaamista harjoittavat toiminnot. Vaikuttaakin siltä, että taulukkolaskentaa voitaisiin käyttää algebran oppimisen alkuvaiheessa, sillä se madaltaa aritmetiikan ja algebran välistä kynnystä. Formaalin algebran oppimiseen taulukkolaskenta ei kuitenkaan näytä sopivan ainakaan niin, että se olisi merkittävästi hyödyllisempää kuin perinteiset algebran oppimismetodit.

CAS-järjestelmän käyttäminen tuo mukanaan radikaaleja muutoksia perinteiseen algebran oppimiseen, sillä CAS-järjestelmää käyttämällä oppilaiden ei enää tarvitse välttämättä harjoitella symbolista muokkaamista, vaan he voivat keskittyä syvällisemmin algebran rakenteeseen ja parantamaan käsitteellistä ymmärtämistään. Esimerkiksi Zellerin ja Barzelin tekemä opetuskokeilu antoi rohkaisevia tuloksia CAS-järjestelmän vaikutuksesta käsitteelliseen ymmärtämiseen.

CAS-järjestelmän ja myös taulukkolaskennan suurin vahvuus vaikuttaa kuitenkin liittyvän algebrassa käytettävien erilaisten esitysmuotojen (algebralliset lausekkeet, taulukot, kuvaajat) samanaikaiseen, dynaamiseen käyttöön. CAS-järjestelmää käyttämällä on esimerkiksi mahdollista tutkia helposti, kuinka oppilaan tekemät muutokset funktion lausekkeeseen muuttavat siitä piirrettyä kuvaajaa.

Teknologia-avusteisesta algebran oppimista tarkasteltaessa voidaan kirjallisuuden perusteella olettaa, että teknologia antaa oppilaille mahdollisuuden tarkastella algebraa uudesta näkökulmasta. Teknologian avulla oppilaiden on mahdollisuus keskittyä enemmän matemaattisten procept-objektien objektiluonteeseen kuin prosessiluonteeseen ja mahdollisesti näkemään näiden kahden luonteen välinen ero. Kenties opetuksessa olisi syytä korostaa enemmän procept-käsitteiden objektiluonnetta. Erilaisten tietorakenteiden kuten proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon käsittelemistä olisi syytä harjoitella tasapuolisesti.

Teknologia tekee algebran oppimisesta dynaamisempaa, sillä siirtyminen esitystavasta toiseen on vaivatonta. Esimerkiksi yhtälöparien ratkaisemista voi helposti kokeilla harjoittelemalla algebrallisesti käsin ja graafisesti laskimen avulla. Kuitenkin on huomattava, että kaikki teknologian suorittamat toiminnot pystytään suorittamaan käsin, mutta tällöin aikaa kuluu piirtämiseen ja huolimattomuusvirheet saattavat heikentää oppilaiden motivaatiota. Teknologia antaa mahdollisuuden tutkia ja kokeilla algebraa uudella tavalla kunhan opetus on järjestetty niin, että se aktivoi oppilaiden meta-tason ajattelua.

Yhteenvetona voidaan todeta, että teknologiaa tulisi soveltaa algebran opetukseen harkiten niin, että oppilaan rooli ei ainakaan pienenisi vaan korostuisi. Oppilaalle tulisi antaa vapaus valita oppimisen työvälineet ja antaa oppilaalle aikaa opetella käyttämään näitä välineitä. Teknologiaa voidaan käyttää algebrassa oppimisen tukena kunhan oppilaiden työskentely ei automatisoidu. Teknologian liittäminen algebran opetukseen edellyttää opettajilta ja opetusmateriaalin suunnittelijoilta huolellisesta perehtymistä matematiikan didaktiikkaan.

Lähdeluettelo

[1] A. Arcavi: *Developing and using symbol sense in mathematics*. For the Learning of Mathematics 25, vol 2, 2005.

[2] M. Artigue: *Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, Volume 7, Issue 3, 2002.

[3] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde: *International Handbook of Mathematics Education Part 1*. Volume 4, 1996. Kluwer International Handbook of Education, s. 145-158.

[4] Dettori G, Garuti R, E. Lemut: *From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet* Perspectives on School Algebra, Mathematics Education Library, Volume 22, 2002.

[5] P.H.M. Drijvers: *Learning algebra in a computer algebra environment.* Center for Science and Mathematics Education, 2003.

[6] P. Drijvers, K. Gravemeijer: *Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes.* The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Mathematics Education Library, Volume 36, s. 163-196, 2005.

[7] J-P. Drouhard, A. Teppo: *Symbols and Language*. The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Volume 8, 2004, s. 225-264.

[8] A. Graham, M. Thomas: *Building a versatile understanding of algebraic variables with graphic calculator*. Educational Studies in Mathematics, Volume 41, Issue 3, 2000.

[9] E. Gray, D. Tall: *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. PME Conference, 1991. Saatavissa http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/91c-procept-pme.pdf

[10] L. Haapasalo: *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu.* Kahdeksas painos, Medusa software, 2011.

[11] L. Haapasalo, O. Karkkulainen: *CAS kummaa! Opin matematiikkaa teknologian avulla.* MEDUSA-Software, 2014.

[12] J. Harvey, B. Waits, F. Demana: *The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra.* Journal of mathematical behavior 14, 75-109, 1995.

[13] M. Haspekian: *Between arithmetic and algebra: A space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach.* European Research in Mathematics Education III

[14] M. Heid, M. Edwards: *Computer Algebra Systems: Revolution or Retrofit for Today´s Mathematics Classrooms?* Theory into Practice, Volume 40, No. 2, Realizing Reform in School Mathematics, 128-136, 2001.

[15] N. Herscovics, L. Linchevski: *A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra.* 1994. Educational Studies in Mathematics. Volume 27. Issue 1

[16] S. Järvelä, P. Häkkinen, E. Lehtinen: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö.* 2006

[17] F. Lester: *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Volume 2.* National council of teachers of mathematics, 2007.

[18] L. Linchevski: *Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra.* Journal of mathematical behavior 14, 113-120, 1995.

[19] J. Monaghan: *Thinking algebraically: Manipulative algebra.* Teaching secondary mathematics with ICT, 2005, 62-81.

[20] Opetushallitus: *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.* 2004.

[21] Opetushallitus: *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* 2014.

[22] R. Pierce, K. Stacey: *Observations on Students´ Responses to Learning in a CAS Environment* Mathematics Education Research Journal Vol. 13, No.1, 28-46, 2001.

[23] T. Rojano: *Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets.* Toimittanut R. Sutherland teoksessa: Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1993.

[24] H. Salovaara: *Oppimisen teoriasta tukea tieto- ja viestintätekniikan pedagogiseen käyttöön.* Suomen virtuaaliyliopisto, 2004. Saatavissa http://tievie.oulu.fi/verkkopedagogiikka/

[25] R. Sutherland, N. Balacheff: *Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics.* International Journal of Computers for Mathematics Learning 01/1999, 4(1):1-26

[26] M. Tabach, A. Arcavi, R. Hershkowitz: *Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment.* Educational Studies in Mathematics 69:53-71, 2008.

[27] M. Tabach, A. Friedlander: *Understanding Equivalence of Symbolic Expressions in a Spreadsheet-Based Environment.* International Journal of Computers for Mathematics Learning 13:27-46, 2008.

[28] M. Tabach, R. Hershkowitz, T. Dreyfus: *Learning beginning algebra in a computer-intesive environment.* ZDM Mathematics Education, 45:377-391, 2013.

[29] D. Tall, M. Thomas: *Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer.* Educational Studies in Mathematics, Volume 22:125-147, 1991.

[30] M. Zeller, B. Barzel: *Influences of CAS and GC in early algebra* ZDM Mathematics Education 42:775-788, 2010.