Tuoton arvioinnista eri huutokauppamekanismeissa

Pro gradu -tutkielma

Ari Alasalmi
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto

Kevät 2015

Sisältö

Johdanto

Huutokauppa on tarjouskilpailu, jossa yksi tai useampi myyjä kaupittelee hyödykettä joukolle ostajia. Se on parhaimmillaan sekä myyjän että ostajien kannalta tehokas tapa allokoida kaupan kohde parhaalla mahdollisella hinnalla sille ostajaehdokkaalle, joka kohdetta eniten haluaa. Lähteen [4] mukaan ensimmäisen kerran huutokauppaa on käyty Babyloniassa vähintään 500 vuotta ennen ajanlaskun alkua. Nykyään huutokauppojen kirjo on laaja, ja se ulottuu internetin yksityishenkilöille kohdistetuista, automatisoiduista huutokauppasivustoista satojen miljoonien eurojen suuruisiin ja tapauskohtaisesti suunniteltuihin tietoliikennetaajuuksien käyttöoikeuksien kauppoihin. Näistä jättikaupoista kerrotaan kirjassa [3]. Hyvässä huutokauppamallissa hyödykkeen saa se huutaja, joka on valmis maksamaan siitä korkeimman hinnan. Erilaisia malleja on olemassa valtava määrä, mutta niistä osalla on merkitystä ainoastaan teoreettisessa mielessä.

Huutokauppojen teoreettinen tutkimus sai alkusysäyksen 60-luvulla, kun William Vickrey valjasti peliteorian tulokset alan palvelukseen. Hänen esittelemänsä tulos eri huutokauppamallien tuoton yhtäsuuruudesta on edelleen tutkimuksen perusta. Tuoton yhtäsuuruuden lause (engl. *revenue equivalence theorem*) on myös tämän pro gradu -työn pohjana. Tuloksen todistamisen jälkeen selvitetään, mitä tapahtuu, jos vuorotellen luovutaan kustakin lauseen varsin vahvoista oletuksista. Pääasiassa keskitytään tutkimaan huutajien tarjousstrategioita sekä myyjän tuottoa eri huutokauppamalleissa.

Tutkielman päälähteitä ovat [4] ja [3], joista edellisen runkoa on löyhästi seurattu tutkielman rakennetta mietittäessä. Jälkimmäinen on vähemmän tekninen mutta varsin kattava katsaus aiheeseen.

1 Yleistä teoriaa

1.1 Funktioteoriaa

Määritelmä 1.1. Funktio f on aidosti *konkaavi* eli ylöspäin kupera, mikäli millä tahansa luvulla $t \in [0, 1]$

$$f((1-t)x_1 + tx_2) > f(x_1)(1-t) + f(x_2)t,$$

kun $x_1 \neq x_2$.

Lemma 1.2. *Oletetaan, että funktio $f(x)$ on aidosti konkaavi ja että $f(0) = 0$. Tällöin*

$$\frac{f(x)}{f'(x)} > x,$$

kun $x > 0$ [4, s. 39].

1.2 Todennäköisyysteoriaa

Olkoon satunnaismuuttuja X, joka saa arvoja välillä $[a, b]$. Satunnaismuuttujan *kertymäfunktio* $G : [a, b] \to [0, 1]$ on

$$G(x) = P[X \leq x].$$

Funktio G on kasvava, ja sille pätee $G(a) = 0$ ja $G(b) = 1$. Kertymäfunktion derivaattaa $g(x) = G'(x)$ kutsutaan *tiheysfunktioksi*, ja se on jatkuva välillä $[a, b]$. Lisäksi oletetaan, että funktio $g(x) \geq 0$ tällä välillä. Mikäli satunnaismuuttuja X noudattaa jakaumaa $G(x)$, sen *odotusarvo* on

$$E(X) = \int_a^b xg(x)dx.$$

Mielivaltaisen funktion $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ odotusarvo on vastaavasti

$$E(\alpha(X)) = \int_a^b \alpha(x)g(x)dx.$$

Ehdollinen odotusarvo tapaukselle, jossa satunnaismuuttuja $X < x$, saadaan yhtälöstä

$$E(X|X < x) = \frac{1}{G(x)} \int_a^x tg(t)dt.$$

Osittaisintegroinnin avulla päästään muotoon

$$E(X|X < x) = \frac{1}{G(x)} \left[xG(x) - \int_a^x G(t)dt \right]$$

tai vastaavasti

$$G(x)E(X|X < x) = xG(x) - \int_a^x G(t)dt. \tag{1.1}$$

Määritelmä 1.3. Tutkitaan avaruudessa $\mathbb{R}^k$ satunnaismuuttujia $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$, joiden yhteinen tiheysfunktio on p. Olkoot lisäksi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ mielivaltaisia pisteitä avaruudessa $\mathbb{R}^k$. Sanotaan, että satunnaismuuttujat $\mathbf{Z}$ ovat *liittyneitä* (engl. *affiliated*), jos ja vain jos kaikilla pisteillä x ja y

$$p(x \vee y)p(x \wedge y) \geq p(x)p(y),$$

missä $x \vee y = (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2), \ldots, \max(x_k, y_k))$ ja
$x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2), \ldots, \min(x_k, y_k))$. [4, s. 267][8, s. 1118]

Liittyneisyydessä on siis kyse satunnaismuuttujien vahvasta positiivisesta riippuvuudesta. Liittyneisyydestä voidaan johtaa seuraavat tulokset.

Lemma 1.4. *Olkoot satunnaismuuttujat $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ liittyneitä. Tällöin seuraavat väitteet pätevät.*

1. *Järjestetään satunnaismuuttujat $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ suuruusjärjestykseen. Merkitään näin saatua joukkoa $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$. Nyt satunnaismuuttujat $Z_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ ovat myös liittyneitä.*

2. *Olkoon G satunnaismuuttujan Y_1 ehdollinen jakauma ehdolla $Z_1 = z$. Jos satunnaismuuttujat Y_1 ja Z_1 ovat liittyneitä ja $z' > z$, niin*

$$\frac{g(y|z')}{G(y|z')} \geq \frac{g(y|z)}{G(y|x)} \tag{1.2}$$

kaikilla muuttujan y arvoilla.[4, s. 86]

3. Kun $z' > z$, niin

$$E(g(Y_1)|Z_1 = z') \geq E(g(Y_1)|Z_1 = z), \tag{1.3}$$

missä g on mikä tahansa kasvava funktio. [8, s. 1120]

1.3 Stokastinen vahvuus

Olkoot satunnaismuuttujien $x_i \in [a_i, b_i]$ kahdesti jatkuvasti differentioituvat kertymäfunktiot $F_i(x_i)$, missä $i \in \{1, 2\}$. Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujan tiheysfunktio $F'(x) = f_i(x)$ on aidosti positiivinen välillä $x \in [a_i, b_i]$.
Tutkitaan tilannetta, jossa jakaumat poikkeavat siten, että

$$F_1(x) > F_2(x)$$

kaikilla satunnaismuuttujan arvoilla $x \in (a_1, b_2)$. Sanotaan että jakauma 2 on *stokastisesti vahvempi* (engl. *stochastical dominance*). Tästä seuraa, että

$$a_1 \leq a_2 \text{ ja } b_1 \leq b_2. \tag{1.4}$$

Määritellään aluksi hieman vahvempi ehto.

Määritelmä 1.5 (Ehdollinen stokastinen vahvuus (engl. *conditional stochastic dominance*))**.** Oletetaan, että kohdan (1.4) epäyhtälöt ovat voimassa. Jakauma F_s on jakaumaan F_w nähden *ehdollisesti stokastisesti vahvempi*, mikäli on olemassa sellaiset $\lambda \in [0, 1]$ ja $\gamma \in [a_s, y_w]$, joilla

$$F_s(x) = \lambda F_w(x)$$

kaikilla $x \in [a_s, \gamma]$ ja

$$\frac{d}{dx}\frac{F_s(x)}{F_w(x)} > 0$$

kaikilla $x \in]\gamma, y_s]$.

Tämän seurauksena

$$\frac{f_s(x)}{F_s(x)} > \frac{f_w(x)}{F_w(x)} \tag{1.5}$$

kaikilla $x \in]\gamma, y_w]$. [7, s. 419]

Lemma 1.6. *Olkoot Määritelmän 1.5 oletukset voimassa. Nyt joko*

$$F_w(a_s) > F_s(a_s) \text{ tai } F_w(a_s) = F_s(a_s) = 0.$$

Todistus. Kun $a_w < a_s$, niin $F_w(x) > 0 = F_s(x)$ kun $x \in [a_w, a_s]$. Kun $x \in]a_s, y_s]$, niin ehdoista 1.5 seuraa

$$\frac{F_s(x)}{F_w(x)} < \frac{F_s(y_s)}{F_w(y_s)} = 1. \tag{1.6}$$

Kun $a_w = a_s$, niin muuttujan x ollessa välillä $[a_s, \gamma]$ pätee

$$F_w(x) > \lambda F_w(x) = F_s(x).$$

Kun muuttuja $x \in [\gamma, y_s]$, ehdoista 1.5 seuraa jälleen 1.6. Mutta mikäli $a_s = a_w = a$ ja $F_s(a) = F_w(b) > 0$, niin epäyhtälöstä (1.5) seuraa erisuuruus $F_s(x) > F_w(x)$ kaikilla muuttujan x luvun a läheisyydessä. Näin ollen, mikäli $a_s = a_w$ ja $F_s(a) = F_w(a)$, niin

$$F_s(a) = F_w(a) = 0. \tag{1.7}$$

□

2 Klassisia huutokauppatyyppejä

2.1 Englantilainen eli nouseva huutokauppa

Englantilaisessa huutokaupassa korkeimman tarjouksen tehnyt voittaa ja maksaa hyödykkeestä lupaamansa hinnan. Huutokauppa on avoin, eli huutajat saavat tiedon toistensa tarjouksista. Englantilaista huutokauppamallia käytetään usein esimerkiksi antiikkiesineiden ja taiteen myynnissä. Niin kutsutussa japanilaisessa huutokaupassa meklari nostaa hintaa tasaisesti, ja osallistujat ilmaisevat olevansa mukana esimerkiksi pitämällä kättään ylhäällä. Kun hinta nousee osallistujan mielestä liian korkeaksi, hän laskee kätensä luovuttamisen merkiksi. Osallistuja ei voi liittyä takaisin kilpailuun siitä kerran luovuttuaan. Kilpailun voittaa lopulta se, joka laskee kätensä viimeisenä [4, s.2]. [3, s. 11]

2.2 Hollantilainen eli laskeva huutokauppa

Hollantilainen huutokauppa alkaa siten, että meklari asettaa alussa hyödykkeelle erittäin korkean hinnan, jota kenenkään osallistujan ei uskota maksavan. Tämän jälkeen hintaa aletaan laskea tasaisesti, kunnes joku huutajista ilmaisee hyväksyvänsä sen hetkisen hinnan. Huutokauppa päättyy tähän [4]. Tätä mallia käytetään Hollannissa kukkien tukkumyynnissä, mistä myös sen nimitys juontaa juurensa. Tämä huutokauppamalli on käytännöllinen silloin, kun myynnissä on paljon niin sanottua bulkkitavaraa, sillä se on nopea ja yksinkertainen. [3, s. 13] [9, s.14]

2.3 Suljetut huutokaupat

Yleisesti käytetään kahta suljettua huutokauppamenetelmää, ensimmäisen ja toisen hinnan suljettua huutokauppaa. Ensimmäisen hinnan suljettu huutokauppa toimii muuten kuten englantilainen huutokauppa, mutta kukin osallistuja antaa vain yhden tarjouksen. Tarjousta ei paljasteta muille osallistujille. Korkeimman tarjouksen antanut huutaja voittaa ja maksaa tarjoamansa hinnan. Toisen hinnan huutokaupassa menetellään samalla tavalla, mutta tarjouskilpailun voittaja maksaa hyödykkeestä toiseksi tulleen tarjouksen hinnan. Tätä mallia kutsutaan joskus nimellä Vickrey-huutokauppa, ja se on suosittu mekanismi esimerkiksi kun myydään postimerkkejä keräilijöille. [3, s. 12] [5, s. 188]

Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupan voisi periaatteessa järjestää myös avoimena, mikäli voitaisiin luottaa siihen, että huutajat käyttäytyvät reilun pelin hengen mukaisesti. Kuvitellaanpa esimerkiksi tilannetta, jossa toiseksi korkein tarjous on 90 euroa ja korkein 100 euroa, eikä kellään ole enää halua tarjota tätä enempää. Tässä tapauksessa pahantahtoinen kilpakumppani voisi tarjota 99 euroa, minkä seurauksena hyödykkeen allokointi ei muuttuisi, mutta voittaja joutuisi maksamaan 9 euroa niin sanotusti ylimääräistä. [9, s.22] Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa huutoja ei myöskään voi rajoittaa niin, että uuden tarjouksen on aina oltava edellisiä suurempi. Tällöin kaikissa huutokaupoissa järjestyksessään toinen tarjous olisi aina suuruudeltaan tähtitieteelinen, mikä päättäisi huutokaupan lyhyeen eikä ilmeisesti tuottaisi kaupan järjestäjälle toivottua tulosta.

Olisi tietysti mahdollista järjestää myös kolmannen (tai miksei myös n.) hinnan huutokauppa, mutta Krishnan mukaan sellaisia ei tiettävästi ole käytännössä järjestetty. Kolmanneksi korkeimman hinnan huutokauppaa on kuitenkin tutkittu teoreettisesti. [4, s.32]

Wolfstetterin [10] mukaan kolmannen ja sitä matalampien hintojen huutokauppoja käytetään uhkapelaamisen korvikkeena sellaisissa maissa, joissa varsinainen uhkapelaaminen on kiellettyä.

3 Yhden kohteen huutokauppa

Tutkitaan ensin huutokauppamalleja, joissa myytävänä on ainoastaan yksi kohde. Määritellään tätä varten eräitä merkintöjä. Olkoon kilpailuun osallistuvia huutajia n kappaletta, eli huutajien joukko $N = [1, 2, \ldots, n]$. Merkitään mielivaltaista huutajaa indeksillä i, jolloin hänen etukäteen arvioimansa kaupan kohteen arvo on v_i. Merkitään vielä korkeinta huutajan i tekemää tarjousta eli tarjousstrategiaa funktiolla $\beta_i(v)$.

Pidetään ilmeisenä, että jokainen huutokauppaan osallistuva pyrkii saamaan kaupasta mahdollisimman suuren taloudellisen hyödyn. Toisin sanoen osallistujat ovat riskineutraaleja. Lisäksi oletetaan, että jokaisella osallistujalla on kykyä ja halua maksaa lupaamansa tarjous kohteen kauppaajalle. [4, s. 14]

Tutkitaan seuraavaksi, millaista strategiaa tarjoajan kannattaa käyttää ensimmäisen ja toisen hinnan huutokaupoissa.

3.1 Korkeimman hinnan huutokauppa

Tutkitaan huutokauppamallia, jossa korkeimman tarjouksen tehnyt voittaa ja maksaa tarjoamansa summan. Sillä, onko mekanismi huutajille avoin vai suljettu, ei ole tässä vaiheessa merkitystä. Olkoon v_i tarjouskilpailuun osallistuvan huutajan arvioima *arvotus* kaupattavalle hyödykkeelle, ja hänen tekemänsä tarjous $\beta_i(v_i) = b_i$. Tällöin hän saa tapahtumasta tuoton

$$S_i(v_i) = \begin{cases} v_i - b_i, & \text{kun } b_i > max_{j \neq i} b_j \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } b_i < max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Ylempi yhtälö kuvaa siis tilannetta, jossa osallistuja i tekee korkeimman tarjouksen ja voittaa huutokaupan. Koska jokainen osallistuja hakee kaupasta voittoa, on tässä tapauksessa tavoiteltava tilannetta $S_i > 0$. Toisin sanoen tarjoajan on annettava tarjous $b_i < v_i$. Kauppaan osallistuvan henkilön 1 hyödykkeestä tarjoama hinta riippuu huutokauppamallin lisäksi arvotuksesta v_1. Olkoon hänen strategiafunktionsa $\beta(v)$. Tavoitteena on siis löytää tuoton kannalta optimaalinen funktion $\beta(v)$ arvo. Huomataan, että mikäli kaupattava hyödyke on kauppaan osallistuvalle arvoton, niin hänen ei kannata tehdä siitä tarjousta. Toisin sanoen $\beta(0) = 0$.

Olkoon jatkuvasti differentioituva funktio $F_i(v_i)$ huutajan i arvotuksen v_i jakaumafunktio, kun arvotus $v_i \in \{0, \bar{v}\}$. Lisäksi määritellään huutajaa i satunnaismuuttuja $Y_i \equiv Y_i^{n-1}$, joka on korkein muiden huutajien keskuudesta löytyvä arvotus n huutajan huutokaupassa. Määritellään tämän avulla jatkoa varten satunnaismuuttujan Y_i jakaumafunktio $G(v)$. Kun korkein muiden huutajien keskuudesta löytyvä arvotus on y, niin $G(y) = F(y)^{n-1}$.

Lause 3.1. *Korkeimman hinnan huutokaupassa kannattava tarjousstrategia on*

$$\beta(v)^I = v - \int_0^v \frac{G(y)}{G(v)} dy,$$

missä satunnaismuuttuja v on osallistujan arvioima hyödykkeen arvo.

Todistus. Oletetaan, että kaikki huutokaupan osanottajat huutajaa i lukuun ottamatta noudattavat väitteen strategiaa. Koska funktio β on kasvava ja jatkuva, niin korkeimman arvotuksen tehnyt osallistuja tekee suurimman tarjouksen ja voittaa huutokaupan. Lasketaan nyt osallistujan i tuotto siinä tapauksessa, että hän tarjoaa summan $b \leq b(\bar{v})$, missä $\bar{v}$ on arvotusten jakauman yläraja. Olkoon $z \in [0, \bar{v}]$ siten, että $\beta(z) = b$. Tarjouksella $\beta(z)$ osallistujan i tuotto on siinä tapauksessa

$$\begin{aligned}
\Pi(b, v) &= G(z)[v - \beta(z)] \\
&= G(z)v - G(z)\beta(z) \\
&= G(z)v - G(z)E(Y_i | Y_i < z).
\end{aligned}$$

Käytetään hyväksi yhtälöä (1.1), jolloin saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\Pi(b, v) &= G(z)v - G(z)z + \int_0^z G(y)dy \\
&= G(z)(v - z) + \int_0^z G(y)dy.
\end{aligned}$$

Voidaan verrata huutajan tuottoa tarjouksilla $\beta(v)$ ja $\beta(z)$, toisin sanoen laskea erotus

$$\Pi(\beta(v), v) - \Pi(\beta(z), v) = G(z)(z - v) - \int_v^z G(y)dy \geq 0.$$

Tämä on voimassa riippumatta siitä, kumpi muuttujista on suurempi. Näin ollen poikkeamalla luvusta v ei voida saavuttaa parempaa tuottoa. [4, s. 17] □

Lauseessa 3.1 määritelty funktio $\beta^I(v)$ voidaan kirjoittaa yhtälön (1.1) avulla myös muodossa

$$\beta^I(v) = v - \int_0^v \frac{G(y)}{G(v)} dy. \tag{3.1}$$

Tästä nähdään selvästi, että $\beta^I(v) \leq v$. Huutajan kannattaa siis niin sanotusti bluffata, eli tarjota arvotustaan pienempää summaa. Koska määritelmänsä mukaan $G(v) = F(v)^{n-1}$, missä n on huutajien lukumäärä, niin yhtälön (3.1) osamäärä

$$\frac{G(y)}{G(v)} = \left(\frac{F(y)}{F(v)}\right)^{n-1}.$$

Tästä nähdään, että mitä pienimpi huutajien määrä on, sitä enemmän tarjouksissa on vara bluffata.[4, s. 19]

3.2 Toiseksi korkeimman hinnan huutokauppa

Perehdytään sitten huutokauppamalliin, jossa korkeimman tarjouksen tehnyt voittaa, mutta maksaa toiseksi korkeimman tarjouksen mukaan. Edellisen kappaleen merkinnöin ilmaistuna osallistujan i tuotto

$$S_i(v_i) = \begin{cases} v_i - max_{j\neq i} b_j, & \text{kun } b_i > max_{j\neq i} b_j \\ 0, & \text{kun } b_i < max_{j\neq i} b_j \end{cases}.$$

Käy ilmi, että huutajan kannattaa tässä huutokauppamallissa tarjota täsmälleen omaa arvotustaan vastaava summa.[4, s.15]

Lause 3.2. *Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa kannattavin tarjousstrategia on $\beta(v_i) = v_i$.*

Todistus. Tehdään ensin vastaoletus: tarjoajan i kannattaa tarjota summa $v_i - x$. Jos toiseksi korkein tarjous on v_j, ja $v_i - x > v_j$, niin osallistuja i voittaa kaupan ja maksaa hinnan v_j. Tulos on siis sama kuin siinä tapauksessa, että osallistuja i tekee tarjouksen v_i. Samoin jos joku tekee tarjouksen $v_j > v_i$. Mutta jos $v_i > v_j > v_i - x$, niin tarjoaja i ei voita kauppaa tarjouksella $v_i - x$; tarjous v_i sen sijaan toisi voiton.

Tehdään toinen vastaoletus: kannattava strategia on tarjota $v_i + x$. Mikäli on olemassa osallistuja j, jonka tarjous $v_j > v_i + x > v_i$, niin hän voittaa kaupan riippumatta siitä, kumpaa strategiaa osallistuja i käyttää. Tilanne säilyy muuttumattomana myös, jos toiseksi korkein tarjous $v_j < v_i$, jolloin huutaja i siis voittaa ja maksaa hinnan v_j. Mutta jos $v_i + x > v_j > v_i$, niin osallistuja i voittaa ja joutuu maksamaan hinnan $v_j > v_i$.
Edellä esitettyjen vastaoletusten nojalla nähdään, että summasta v_i poikkeaminen ei ole kannattavaa missään tapauksessa. [3, s.14] $\square$

4 Tuottojen yhtäsuuruus

Määritelmä 4.1. Asetetaan tulevaa lausetta varten seuraavat ehdot.

1. Kaikki osallistujat pyrkivät saamaan kaupasta mahdollisimman suuren taloudellisen hyödyn sekä minimoimaan riskin. Toisin sanoen osallistujat ovat *riskineutraaleja.*

2. Kaikkien osallistujien arvotuksen $v \in [0, \bar{v}]$ jakauman määrää jatkuvasti differentioituva funktio $F(v)$. Eri tarjoajien arvotukset ovat kuitenkin keskenään riippumattomia.

3. Korkeimman tarjouksen tekijä voittaa huutokaupan.

4. Arvotusten jakauman alarajalla huutajan tuoton odotusarvo on nolla, eli $S_i(\underline{v}) = 0$.

Kohtaan kolme liittyen oletetaan luonnollisesti, että tarjouskilpailun voittaja myös maksaa myyjälle huutokauppamekanismin määräämän hinnan.
Tutkitaan huutokauppamekanismeja, jotka toteuttavat edellä asetetut ehdot.
Huomataan, että myyjän kaupasta saama tuotto ei riipu hänen valitsemastaan mekanismista.[2, s. 311]

Lemma 4.2. *Olkoon huutokaupan osallistujien määrä n. Jos ostaja i tekee tarjouksensa todellisesta mahdollisesti poikkeavan arvotuksen z mukaan, toisin sanoen hänen tarjouksensa $b = \beta(z)$, niin hänen tuottonsa odotusarvo arvotuksen v_i funktiona on*

$$\begin{aligned}\Pi_i(z, v_i) &= v_i F(z)^{n-1} - P(z) \\ &\equiv v_i G(z) - P(z),\end{aligned}$$

missä funktio $P(v_i)$ kuvaa ostajan i maksaman hinnan odotusarvoa.

Lause 4.3 (Tuottojen yhtäsuuruus, (engl. *Revenue Equivalence Theorem*))**.** *Myyjän huutokaupasta saama tuotto ei riipu hänen valitsemastaan huutokauppamallista, mikäli määritelmässä 4.1 luetellut ehdot ovat voimassa.*

Todistus. Oletetaan, että kaikki huutokauppaan osallistuvat tarjoajat osallistujaa i lukuun ottamatta noudattavat heille optimaalista tarjousstrategiaa. Tutkitaan osallistujan i käyttäytymistä huutokaupassa. Oletetaan, että hän tekee tarjouksen $\beta(z)$, joka poikkeaa hänelle optimaalisesta tarjouksesta $\beta(v)$. Tällöin osallistujan i tuoton odotusarvo huutokauppamallissa A on

$$\Pi_i^A(z, v) = vG(z) - P^A(z).$$

Haetaan funktiolle $\Pi_i^A(z, v)$ maksimi etsimällä sen derivaatan

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi_i^A(z, v) = g(z)v - p^A(z)$$

nollakohtia. Tasapainotilanteessa $z = v$, joten kaikilla muuttujan y arvoilla

$$p^A(y) = g(y)y.$$

Kun integroidaan yhtälö molemmin puolin muuttujan y suhteen välillä $[0, v]$, saadaan

$$P^A(v) - P^A(0) = \int_0^v y g(y) dy.$$

Koska määritelmän 4.1 kohdan 4 mukaan huutajan tuoton odotusarvo $S(0) = 0$, niin myös maksettavan summan odotusarvo $P(0) = 0$. Niinpä kunkin huutajan maksaman hinnan odotusarvo on

$$\begin{aligned} P(v) &= \int_0^v yg(y)dy \\ &= G(v)E(Y_1|Y_1 < v). \end{aligned}$$

Tämä ei enää riipu siitä, mitä huutokauppamallia käytetään. Koska huutajien maksamat summat ovat samat eri malleissa, kaupan järjestäjän tuotto pysyy vakiona.[4, s. 30][3, s. 40] □

Edellisen lauseen tuloksesta huolimatta tietynlaiset huutokaupat järjestetään yleensä samalla mekanismilla; esimerkiksi taidetta kaupataan yleensä nousevalla huutokaupalla. Tämä johtuu siitä, että Määritelmän 4.1 oletukset ovat käytännössä varsin rajoittavia [7]. Lause on kuitenkin huutokauppateorian merkittävimpiä ja luonteeltaan perustavanlaatuinen. Tutkitaan seuraavaksi erilaisia tilanteita, joissa tuottojen yhtäsuuruuden ehdot eivät täyty, sekä niiden vaikutuksia tuottoon.

4.1 Riskinotto

Tuottojen yhtäsuuruden lauseessa oletettiin, että huutajat eivät ole halukkaita ottamaan riskiä tarjousta tehdessään. Luovutaan nyt tästä oletuksesta ja tutkitaan, miten eri huutokauppamekanismien luonne muuttuu tämä seurauksena. Sallitaan siis riskihalukkaiden huutajien olemassaolo. He voivat esimerkiksi tarjota hieman optimaalista tarjousta korkeampaa hintaa, jolloin voiton todennäköisyys kasvaa. Tällöin kaupan voittaminen ei selvästikään tuota yhtä suurta taloudellista voittoa. Oletetaankin, että osallistuja tavoittelee koko kaupasta suoranaisen taloudellisen tuoton sijaan muuta hyötyä. Tuoton odotusarvon $\Pi(v)$ sijaan tutkitaankin nyt hyötyfunktiota $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, jolla on voimassa $u(0) = 0$. Lisäksi funktion u ensimmäinen derivaatta on aina aidosti nollaa suurempi, ja toinen derivaatta aidosti nollaa pienempi välillä $[a, b]$. Koska funktion toinen derivaatta on nollaa pienempi, on funktio siis konkaavi.

Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa riskinotto ei vaikuta huutajan tekemään tarjoukseen, sillä optimaalinen strategia on joka tapauksessa tarjota omaa arvotusta v vastaava summa. Tämä todistettiin Lauseessa 3.2. [3, s. 19]

Tutkitaan seuraavaksi, miten kaupan osallistujien riskinottohalukkuus vaikuttaa myyjän tuottoon eri huutokauppamallien kesken. Todistuksessa käytetään hyväksi myös tietoa ostajien käyttäytymisestä riskineutraalissa tilanteessa.

Lause 4.4. *Oletetaan että huutokaupan ostajaehdokkailla yhteinen hyötyfunktio u ja että he ovat halukkaita riskinottoon. Tällöin huutokaupan järjestäjän tuoton odotusarvo on korkeimman hinnan huutokaupassa parempi kuin toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa, mikäli järjestäjä ei ota riskiä.*

Todistus. Olkoon korkeimman hinnan huutokaupan riskinottotapauksen tarjousstrategia $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ niin, että $\rho(a) = 0$. Kauppaan osallistuvan huutajan on löydettävä arvotus $z \in [a, b]$, jolla odotettavissa oleva tuotto

$$\Pi(z, v) = G(z)u(v - \rho(z))$$

saa maksimiarvonsa. Edellä $\rho(z)$ on siis osallistujan tekemä tarjous, ja $G(z)$ todennäköisyys sille, että osallistuja voittaa kaupan tarjouksella z. Tutkitaan funktion $\Pi(z)$ derivaatan nollakohtaa.

$$\Pi'(z) = g(z)u(v - \rho(z)) - G(z)\rho'(z)u'(x - \rho(z)) = 0.$$

Tasapainotilanteessa on kannattavaa valita $z = v$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$\frac{g(v)u(v - \rho(v)}{\rho'(v)} = G(v)u'(v - \rho(v)).$$

Näin ollen tarjousstrategian derivaatta

$$\rho'(v) = \frac{u(v - \rho(v))}{u'(v - \rho(v))} \cdot \frac{g(x)}{G(x)}\ . \tag{4.1}$$

Palataan hetkeksi tutkimaan riskineutraalia tilannetta. Siinä tarjousstrategia on funktio $\beta(v)$, hyötyfunktio $u(v) = v$ ja $u'(v) = 1$. Tässä tapauksessa yhtälöä 4.1 vastaava derivaatta on muotoa

$$\beta'(v) = [v - \beta(v)] \cdot \frac{g(x)}{G(x)} \ .$$

Nyt Lemman 1.2 nojalla $\frac{u(v)}{u'(v)} > v$. Näin ollen yhtälöä (4.1) voidaan arvioida alaspäin, jolloin saadaan

$$\rho'(v) > [v - \rho(v)] \cdot \frac{g(v)}{G(v)} \ . \tag{4.2}$$

Jos $\beta(v) > \rho(v)$, niin

$$[v - \beta(v)] \cdot \frac{g(v)}{G(v)} < [v - \rho(v)] \cdot \frac{g(v)}{G(v)} \ . \tag{4.3}$$

Tämän ja yhtälön (4.2) nojalla $\rho'(v) > \beta'(v)$. Lisäksi tarjousjakauman alarajalla $\beta(a) = \rho(a) = 0$. Tästä ja riippuvuudesta (4.3) seuraa se, että korkeimman hinnan huutokaupassa tarjousstrategioille pätee $\rho(v) > \beta(v)$ aina, kun arvotus $v > 0$. Huutajien tekemät tarjoukset siis nousevat silloin, kun he ovat halukkaita riskinottoon.
Lauseen 4.3 perusteella korkeimman ja toiseksi korkeimman huutokaupan tuotto-odotukset ovat riskineutraaleissa tilanteissa yhtä suuret. Mutta kuten edellä nähtiin, ainoastaan korkeimman hinnan huutokaupan tarjoukset nousevat, kun riskinottoa esiintyy. Näin ollen myös myyjän tuotto-odotus on korkeampi korkeamman hinnan huutokaupassa kuin toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa. [4, s.38-40] $\square$

On myös mahdollista, että huutokaupassa myyjä on halukas riskinottoon mutta ostajat eivät. Voidaan osoittaa, että myös tällöin ensimmäisen hinnan huutokauppa on myyjälle tuottavampi.[6, s. 1490]

5 Epäsymmetriset jakaumat

Tuottojen yhtäsuuruuden yhteydessä laskettaessa oletettiin myös, että tarjoajien arvotukset noudattavat samaa jakaumaa $F(v)$. Luovutaan seuraavaksi tästä ehdosta ja tutkitaan, mitä seuraa, kun ostajien arvotusten jakaumat ovat epäsymmetrisiä. Tällöin siis jokaisen huutajan kesken ilmenee eroja hyödykkeen arvotuksen jakaumafunktiossa esimerkiksi niin, että jollain huutajalla korkeat arvotukset ovat selvästi todennäköisempiä kuin muilla. Oletetaan kuitenkin edelleen, että ostajaehdokkaat tekevät tarjouksensa toisistaan riippumatta.
Lauseen 3.2 mukaan huutajien arvotusten jakaumalla ei toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa ole merkitystä kannattavaan tarjousstrategiaan. Tässä kappaleessa on siis tarpeen käsitellä pelkästään korkeimman hinnan huutokaupan tarjousstrategioita ja tuottoa. Tutkitaan yksinkertaisuuden vuoksi tarjouskilpailua, jossa on vain kaksi ostajaa. Olkoot tarjoajan 1 arvotus $v_1 \in [a, y_1]$ ja tarjoajan 2 arvotus $v_2 \in [a, y_2]$. Vastaavasti arvotukset määräytyvät keskenään riippumattomien todennäköisyysjakaumien F_1 ja F_2 mukaan. Jos tarjoaja i tekee tarjouksen b, hänen tuottonsa on $v_i - b$ mikäli hän voittaa kilpailun. Näin ollen huutajan i tuoton odotusarvo on

$$\Pi_i(b, v_i) = \psi_j(b)(v_i - b),$$

missä funktio ψ_j on toisen huutajan tarjousten jakauma. Olkoon funktio ϕ_i funktion β_i käänteisfunktio, toisin sanoen $\phi_i = \beta_i^{-1}$. Näin ollen $\psi_i(b) = F_i(\phi_i(b))$ kummallakin $i \in \{s, w\}$.
Kun huutajan i tuotto optimoidaan, saadaan

$$\psi_j'(b)(\phi_i(b) - b) = \psi_j(b) \tag{5.1}$$

kaikilla tarjouksilla $b < b^*$. Nyt siis

$$\psi_j'(b) = F_j(\phi_j(b))\phi_j'(b)$$

minkä avulla yhtälöstä (5.1) saadaan edelleen [4]

$$\phi_j'(b) = \frac{F_j(\phi_j(b))}{f_j(\phi_j(b))} \cdot \frac{1}{\phi_i(b) - b} \, , \tag{5.2}$$

mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{f_j(\phi_j(b))}{F_j(\phi_j(b))}\phi_j'(b) = \frac{1}{\phi_i(b) - b} \ . \tag{5.3}$$

Yhtälölle on olemassa kolme rajaehtoa. Ensimmäisen mukaan $F_i(\phi_i(b^*)) = 1$ kummallekin huutajalle i. Toisen ehdon mukaan $b_* = \phi_s(a_s) = \phi_w(a_s) = a_s$, mikäli alarajoille pätee $a_w = a_s$. Jos sen sijaan $a_w < a_s$, niin kolmannen rajaehdon mukaan $\phi_w(b_*) = b_*$ ja $arg\max_b[(a_s - b)F_w(b)]$. Huutajan w odotettu tuotto on [7, s. 422]

$$\Pi_w(v, b) = (v_w - b)P[v_s < \phi_s(b)] = F_s(\phi_s(b))(v_w - b). \tag{5.4}$$

Kun tästä otetaan molemmin puolin logaritmi ja derivoidaan yhtälö muuttujan b suhteen, saadaan

$$\frac{f_s(\phi_s)}{F_s(\phi_s)}\phi_s' = \frac{1}{v_w - b},$$

kun $\phi_w(b) = v_w$. Otetaan seuraavaksi käyttöön symmetrisen tilanteen tarjousfunktion käänteisfunktio $z_i(b)$, jota siis käytetään, kun kumpikin huutaja on stokastisesti vahva tai heikko. Funktio $z_i(b)$ vastaa siis epäsymmetrisen tilanteen funktiota $\phi_i(b)$. Asetetaan vielä käänteisfunktio $z_i^{-1}(b) = \bar{b}_i(v)$. Funktion $z_i(b)$ avulla yhtälö (5.2) voidaan kirjoittaa

$$\frac{f_i(z_i(b))}{F_i(z_i(b))}z_i'(b) = \frac{1}{z_i(b) - b} \ . \tag{5.5}$$

Kun kerrotaan yhtälö molemmin puolin binomilla $z_i(b) - b$ ja järjestellään se uudelleen, saadaan

$$b \cdot f_i(z_i) \cdot \frac{dz}{db} + F_i(z_i) = f_i(z_i) \cdot \frac{dz}{db} \cdot z_i,$$

missä on siis käytetty merkintää $z_i' = \frac{dz}{db}$. Kerrotaan yhtälön kumpikin puoli termillä db ja integroidaan molemmin puolin, jolloin saadaan

$$\bar{\beta}_i(v)F_i(v) = \int_{a_i}^{v} z \cdot f_i(z)dz. \tag{5.6}$$

Edellä on käytetty hyväksi määritelmää $z_i(b) = v$ sekä tietoa $b = z_i^{-1}(v) = \beta_i(v)$. Yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa.

$$\bar{\beta}_i(v) = v - \int_{a_i}^{v} \frac{F_i(x)}{F_i(v)} dx. \tag{5.7}$$

Symmetrinen tilanne määriteltiin niin, että kumpikin huutaja on tyyppiä $i \in \{s, w\}$. Näin ollen kummankin huutajan tarjous suurimmalla mahdollisella arvotuksella $v = y$ on yhtälön (5.6) nojalla

$$\bar{\beta}_i(y)F_i(y) = \bar{\beta}_i(y) \cdot 1 = \int_{a_i}^{y_i} zf(z)dz.$$

Kappaleessa 1.2 esitellyn odotusarvon määritelmän nojalla

$$\bar{\beta}_i(y) = E(z_i(b)) = E(v_i) \equiv \mu_i.$$

Koska $F_w(v) > F_s(v)$ kaikilla $v \in \{a_w, y_s\}$, niin

$$\mu_w < \mu_s. \tag{5.8}$$

Yhtälön (5.7) avulla voidaan arvioida tarjousfunktioita välillä $v \in]a_s, y_w[$. Saadaan epäyhtälö

$$\beta_w(v) \leq \beta_s(v). \tag{5.9}$$

Siis mikäli kumpikin huutaja sattuu arvottamaan hyödykkeen yhtä arvokkaaksi, stokastisesti vahvempi huutaja tarjoaa siitä korkeamman hinnan.

5.1 Tasainen jakauma

Rajataan tarkastelua epäsymmetrisiin mutta tasaisiin jakaumiin. Selvitetään optimaalinen tarjousfunktio sen käänteisfunktion avulla, kun tämä lisäoletus on voimassa.

Olkoot huutajien arvotukset jakautuneet tasaisesti siten, että huutajan 1 arvotus on välillä $[0, v_1^*]$, ja huutajan 2 välillä $[0, v_2^*]$. Lisäksi valitaan $v_1^* > v_2^*$. Kertymäfunktiot ovat $F_i(v) = \frac{v}{v_i^*}$ ja tiheysfunktiot $f_i(v) = \frac{1}{v_i^*}$. Sijoittamalla yhtälöön (5.2) saadaan

$$\begin{aligned}\phi_i'(b) &= \frac{F_i(\phi_i(b))}{f_i(\phi_i(b))} \cdot \frac{1}{\phi_j(b) - b} \\ &= \frac{\frac{\phi_i(b)}{v_i^*}}{\frac{1}{v_i^*}} \cdot \frac{1}{\phi_j(b) - b} \\ &= \frac{\phi_i(b)}{\phi_j(b) - b} \ , \end{aligned} \tag{5.10}$$

kaikilla $b \in [0, b^*]$, missä b^* on siis määritelmän mukaan tarjousten yläraja. Tämä on yhtäpitävää yhtälön

$$\phi_i'(b)\phi_j(b) - b\phi_i'(b) = \phi_i(b)$$

kanssa. Kun lisätään tähän molemmin puolin $b - \phi_j(b)$, päästään edelleen muotoon

$$\phi_i'(b)\phi_j(b) - b\phi_i'(b) + b - \phi_j(b) = \phi_i(b) + b - \phi_j(b).$$

Tämä voidaan edelleen sieventää muotoon

$$(\phi'(b) - 1)(\phi_j(b) - b) = \phi_i(b) + b - \phi_j(b).$$

Voidaan kirjoittaa $(\phi'(b) - 1) = \frac{d}{db}((\phi_i(b) - b)$. Kun sijoitetaan lisäksi yhtälöt $\phi_i(b)$ ja $\phi_j(b)$, saadaan

$$\frac{d}{db}((\phi_1(b) - b)(\phi_2(b) - b)) = 2b.$$

Kun tämä integroidaan molemmin puolin, saadaan

$$(\phi_1(b) - b)(\phi_2(b) - b) = b^2, \tag{5.11}$$

missä integroimisvakio on nolla reunaehdon $\phi_i(0) = 0$ nojalla. Korkeimman tarjouksen $b = b^*$ kohdalla

$$b^{*2} = (v_1^* - b^*)(v_2^* - b^*).$$

Kun otetaan edellisestä puolittain neliöjuuri, saadaan

$$b^* = \frac{v_1^* \cdot v_2^*}{v_1^* + v_2^*} \ . \tag{5.12}$$

Palataan yhtälöön (5.10). Huutajan i funktiosta $\phi_i'(b)$ saadaan poistettua toisen huutajan tarjousfunktion käänteisfunktio $\phi_j(b)$ käyttämällä hyväksi yhtälöä (5.11). Kummallekin huutajalle pätee

$$\phi_i'(b) = \frac{\phi_i(b)(\phi_i(b) - b)}{b^2} \ . \tag{5.13}$$

Otetaan käyttöön apufunktio

$$\xi(b) = \frac{\phi_i(b) - b}{b} \ .$$

Derivoimalla edellinen yhtälö muuttujan b suhteen saadaan

$$\phi_i'(b) - 1 = \xi'(b) \cdot b + \xi_i(b).$$

Tämän avulla yhtälö (5.13) voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\xi_i'(b) \cdot b + \xi_i(b) + 1 = \xi_i(b)(\xi_i(b) + 1).$$

Etsitään tälle differentiaaliyhtälölle ratkaisu. Muodosta

$$\xi_i'(b) \cdot b = \xi(b)^2 - 1$$

nähdään, että kyseessä on ensimmäisen asteen epälineaarinen differentiaaliyhtälö. Sen toteuttaa yhtälö

$$\xi_i(b) = \frac{1 - C_i b^2}{1 + C_i b^2},$$

missä C_i on integroimisvakio. Funktion $\xi_i(b)$ määritelmän nojalla

$$\phi_i(b) = \frac{2b}{1 + C_i b^2} \ . \tag{5.14}$$

Nyt tarjousstrategia $\beta(v)$ voidaan selvittää sen käänteisfunktion avulla. Huutajan i tarjousstrategia on

$$\beta(v)_i = \frac{1}{C_i v}\left(1 - \sqrt{1 - C_i v^2}\right).$$

Ratkaistaan vielä integroimisvakio C_i. Koska funktio $\phi(b)$ on funktion $\beta(v)$ käänteisfunktio ja $\beta(v^*) = b^*$, niin

$$\phi_i(b^*) = \frac{2b^*}{1 + C_i b^* 2} = v_i^*.$$

Yhtälön (5.12) nojalla $b^* = \frac{v_1^* \cdot v_2^*}{v_1^* + v_2^*}$, jolloin integrointivakio

$$C_i = \frac{1}{v_i^*} - \frac{1}{v_j^*} \ . \tag{5.15}$$

5.2 Optimaalinen tarjous

Tutkitaan seuraavaksi tuoton odotusarvoja epäsymmetrisissä korkeimman ja toiseksi korkeimman hinnan huutokaupoissa. Aloitetaan kahdella esimerkillä.

Esimerkki 5.1. Olkoot huutajien arvotukset jakautuneet tasaisesti siten, että huutajan i arvotus on välillä $[0, \frac{1}{1+z}]$, ja huutajan j välillä $[0, \frac{1}{1-z}]$. Huutajien jakaumat ovat siis muuten samat, paitsi että huutajan i jakaumaa on ikään kuin venytetty leveämmäksi. Oletetaan, että $z > 0$, sillä tilanteessa $z = 0$ jakaumat ovat identtiset eikä epäsymmetriaa ilmene.
Huutajien korkeimmat mahdolliset arvotukset ovat siis $v_i^* = \frac{1}{1+z}$ ja $v_j^* = \frac{1}{1-z}$. Yhtälön (5.12) nojalla korkeimman hinnan huutokaupassa tarjouskilpailun korkein tarjous

$$b^* = \frac{v_i^* \cdot v_j^*}{v_i^* + v_j^*} = \frac{\frac{1}{1+z} \cdot \frac{1}{1-z}}{\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{2} \ .$$

Tässä tapauksessa yhtälöstä (5.14) saadaan huutajille tarjousfunktion käänteisfunktiot

$$\phi_i(b) = \frac{2b}{1 + C_i b^2} \ .$$

Yhtälöstä (5.15) saadaan edelliseen yhtälöön integroimisvakiot $C_1 = -4z$ ja $C_2 = 4z$. Myyntihinnan kertymäfunktiolle $G_H(b)$ pätee

$$G_K(b) = P[\beta_1(v_1) \leq b] \cdot P[\beta_2(v_2) \leq b] = F_1(\phi_1(p)) \cdot F_2(\phi_2(p)),$$

missä $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Lasketaan edelleen korkeimmalle tarjoukselle

$$G_K(b) = (1 - z)\phi_1(b) \cdot (1 + z)\phi_2(b) = \frac{(1 - z^2)(2b)^2}{1 - z^2(2b)^4}.$$

Korkeimman hinnan huutokaupassa funktion $G_K(b)$ arvo siis pienenee, kun huutajien jakaumien eroa kuvaava parametri z kasvaa. Siis epäsymmetrisessä tilanteessa $z > 0$ myyntihinta on pienempi, kuin tilanteessa $z = 0$. Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa myyntihinnan kertymäfunktio on

$$\begin{aligned} G_T(b) &= 1 - (1 - F_1(b))(1 - F_2(b)) = F_1(b) + F_2(b) - F_1(b)F_2(b) \\ &= (1 - z)b + (1 + z)b - (1 - z^2)b^2 = 2b - (1 - z^2)b^2 \\ &= 2b - b^2 + z^2b^2. \end{aligned}$$

Funktio $G_T(b)$ siis kasvaa, kun luku z kasvaa. Tämä tarkoittaa sitä, että päin vastoin kuin korkeimman hinnan huutokaupassa, toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa myyntihinta on epäsymmetrisessä tilanteessa suurempi kuin symmetrisessä tilanteessa.

Esimerkki 5.2. Huutokauppaan osallistuu kaksi tarjoajaa, joiden kummankin arvotukset ovat jakautuneet diskreetisti välille $[0, 2]$. Huutajan s arvotus on aina 2, toisin sanoen $P[v_s = 2] = 1$. Huutajan w arvotus on sen sijaan jakautunut tasan lukujen 0 ja 2 kesken, eli $P[v_w = 0] = P[v_w = 2] = \frac{1}{2}$.
Aloitetaan tutkimalla korkeimman hinnan huutokauppaa. Jos huutaja s tarjoaa hieman nollaa suuremman summan, hänen todennäköisyytensä voittaa on yli $\frac{1}{2}$ ja tuoton odotusarvo yli yhden. Huutajan s ei siis missään tapauksessa kannata tarjota yli yhden suuruista summaa, sillä hänen tuottonsa odotusarvo laskisi alle yhden. Näin ollen mikäli huutajan w arvotus on 2, hänen kannattaisi tarjota summa $1 + \epsilon$, missä $\epsilon > 0$. Ennakkoon arvioituna hänen tuottonsa odotusarvo olisi

$$\Pi_s(v_s) \geq \frac{1}{2}[2 - (1 + \epsilon)] = \frac{1}{2}(1 - \epsilon).$$

Tästä seuraa se, että korkeimman hinnan huutokaupassa kahden ostajaehdokkaan tuottojen odotusarvojen summa on $1 + \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)$. Myyjän tuoton odotusarvon on siis $\frac{1}{2} - \epsilon$, missä $\epsilon > 0$ on mielivaltaisen pieni.
Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa lopullisella hinnalla on kaksi vaihtoehtoa: Jos huutajan w arvotus on 2, kummankin arvotus on sama, ja voittaja maksaa hinnan 2. Jos huutajan w mielestä hyödyke on arvoton,

huutaja s voittaa kilpailun, eikä maksa kaupan järjestäjälle mitään. Näin ollen myyjän tuoton odotusarvo

$$G_T(b) = P[v_w = 0] \cdot 0 + P[v_w = 2] \cdot 2 = 1.$$

Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa myyjän tuoton odotusarvo on siis suurempi kuin ensimmäisen hinnan huutokaupassa. [7, s. 417-418]

Huomautus 5.3. Esimerkin 5.1 tapauksessa oli mahdollista, että korkeimman hinnan huutokauppa tuottaa myyjälle paremman tuloksen. Vastaavasti Esimerkissä 5.2 esiteltiin tapaus, jossa toiseksi korkeimman hinnan huutokaupan järjestäminen on järkevämpää. Epäsymmetristen arvotusjakaumien tilanteessa ei siis voida yksikäsitteisesti sanoa, kumpi huutokauppamekanismi on myyjälle kannattavampi. [4]

Siirrytään tuoton ja strategian yleisempään tarkasteluun. Määritellään ensiksi apufunktio

$$e_i(v) = \frac{(v-a)F_i'(v)}{F_i(v)}, \tag{5.16}$$

jonka avulla yhtälö (5.2) voidaan kirjoittaa uudelleen kummallekin huutajalle muodossa

$$\begin{aligned} e_s(\phi_s)\phi_s'(b) &= \frac{\phi_s - a}{\phi_w - b} \\ e_w(\phi_w)\phi_w'(b) &= \frac{\phi_w - a}{\phi_s - b} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Määritelmästä 5.16 saadaan l'Hôpitalin säännön avulla laskettua raja-arvot

$$\begin{aligned} e_i(a) &= 1 \\ e_i'(a) &= \frac{f_i'(a)}{2f_i(a)}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

kun $i \in \{s, w\}$, $F_i(a) = 0$ ja $f(v) = F'(v)$. Koska

$$\frac{d}{dv}\frac{F_s(v)}{F_w(v)} = \frac{f_sF_w - f_wF_s}{F_w^2},$$

kun $F_s, F_w > 0$. Käytetään jälleen l'Hôpitalin sääntöä: kun $F_s(a) = F_w(a) = 0$, niin

$$\frac{d}{dv}\frac{F_s(v)}{F_w(v)} = \frac{1}{2}\left[\frac{f_s'(a)}{f_s(a)} - \frac{f_w'(a)}{f_w(a)}\right]\frac{f_s(a)}{f_w(a)}, \tag{5.19}$$

kun arvotus v lähestyy minimiään a. Koska kertymäfunktiot $f_i(v) \geq 0$ kaikilla arvotuksilla v, on hakasuluissa oleva lauseke positiivinen, mikäli yhtälön vasemman puolen derivaatta on positiivinen. Määritellään lisäksi ostajien tarjousjakauma tasapainotilanteessa

$$\psi_i(b) = F_i(\phi_i(b)). \tag{5.20}$$

Merkitään vastaavaa jakaumaa symmetrisessä tilanteessa

$$\pi_i(b) = F_i(z_i(b)), \tag{5.21}$$

missä funktio $z_i(b)$ on tarjousfunktion käänteisfunktio symmetrisessä tilanteessa. [7]

Lemma 5.4. *Olkoon $F_w(v) > F_s(v)$ kaikilla $v \in [a_w, y_s]$ ja oletetaan että kummankin huutajan arvotusten alarajat ovat samat, eli $a_s = a_w = a$. Oletetaan lisäksi, että $F_s(a) = F_w(a) = 0$ ja*

$$\frac{F_s(v)}{F_w(v)}\frac{d}{dv} > 0,$$

kun $v \to a$. Tällöin on olemassa luku $\delta > a$ niin, että kaikille tarjouksille $b \in [a, \delta]$ pätevät seuraavat epäyhtälöt:

1. $\pi_w(b) > \pi_s(b)$
2. $\psi_w(b) > \psi_s(b)$
3. $\pi_w(b) > \psi_s(b)$
4. $\psi_w(b) > \pi_s(b)$

Todistus. Kummallekin huutajalle $i \in \{s, w\}$ pätee $F_i(\phi_i(a)) = \pi_i(a) = 0$, sillä $F_s(a) = F_w(a) = 0$. Kun käytetään l'Hôpitalin sääntöä yhtälöön (5.18), saadaan yhtälö

$$e_i(a)\phi_i'(a) = \frac{\phi_i'(a)}{\phi_j'(a) - 1}, \tag{5.22}$$

missä $i, j \in \{s, w\}$ ja $i \neq j$. Koska nyt $F_i(a) = 0$, niin kohdan (5.18) nojalla epäsymmetrisessä tilanteessa

$$\phi_i'(a) = 2 \tag{5.23}$$

ja symmetrisessä

$$z_i'(a) = 2. \tag{5.24}$$

Muokataan yhtälöitä (5.17) niin, että otetaan ensin kummastakin puolesta logaritmi ja derivoidaan sen jälkeen muuttujan b suhteen. Tämä välivaihe on helppo mutta pitkä ja löytyy työn lopussa olevasta liitekappaleesta. Tulos on

$$\frac{\phi_i''(b)}{\phi_i'(b)} + \frac{e_i'(\phi) \cdot \phi_i'(b)}{e_i(\phi)} = \frac{\phi_i(b)}{\phi_i - a} - \frac{\phi_j'(b) - 1}{\phi_j(b) - b} \, . \tag{5.25}$$

Yhtälö (5.17) voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\phi_i' = \frac{\phi_i - a}{(\phi_j - b)e_i} \, .$$

Sijoitetaan tämän avulla kirjoitettu ϕ_w' yhtälön (5.25) oikealle puolelle. Näin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\phi_i''}{\phi_i'} + \frac{e_i' \cdot \phi_i'}{e_i} &= \frac{\frac{\phi_i - a}{(\phi_j - b)e_i}}{\phi_w - a} - \frac{\phi_s' - 1}{\phi_s - b} \\ &= \frac{\frac{1}{e_w} - \phi_s' + 1}{\phi_s - b} \, .\end{aligned}$$

Edellä muuttujat on jätetty merkitsemättä yksinkertaisuuden vuoksi. Kun käytetään edelliseen yhtälöiden (5.18) ja (5.23) tuloksia sekä l'Hôpitalin sääntöä kun $b = a$, saadaan

$$\frac{\phi''(a)}{2} + \frac{f_i'(a)}{f(a)} = -\frac{f_i'(a)}{2f_i(a)} - \phi_j''(a).$$

Tämä puolestaan on yhtäpitävää yhtälön

$$\frac{\phi_i''(a)}{2} + \phi_j''(a) = -\frac{3f_i'(a)}{2f_i(a)}$$

kanssa. Nämä yhtälöt ovat voimassa kaikilla $i, j \in \{s, w\}, i \neq j$, joten yhtälöt voidaan ratkaista. Arvotuksen käänteisfunktion toinen derivaatta on siinä tapauksessa

$$\phi_i''(a) = \frac{f_i'(a)}{f_i(a)} - 2\frac{f_j'(a)}{f_j(a)} \ . \tag{5.26}$$

Symmetrisen tilanteen määritelmän mukaan $F_i(v) = F_j(v)$ kaikilla arvotuksilla $v \in [a, y]$. Tällöin myös $f_i'(a) = f_j'(a)$, joten symmetrisessä tasapainossa

$$z_i''(a) = -\frac{f_i'(a)}{f_i(a)},$$

mikä voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa myös

$$z_i''(a) = \frac{f_i'(a)}{f_i(a)} - 2\frac{f_i'(a)}{f_i(a)} \ . \tag{5.27}$$

Funktioiden $\psi_i(b) = F_i(\phi_i(b))$ ja $\pi_i(b) = F_i(z_i(b))$ ensimmäiset derivaatat ovat

$$\psi_i'(b) = f_i(\phi_i)\phi_i'(b) \textit{ ja } \pi_i'(b) = f_i(z_i)z_i'(b) \tag{5.28}$$

sekä toiset derivaatat

$$\psi_i''(b) = f_i'(b)(\phi_i'(b))^2 + f_i(b)\phi_i''(b) \tag{5.29}$$

ja

$$\pi_i''(b) = f_i'(b)(z_i'(b))^2 + f_i(b)z_i''(b). \tag{5.30}$$

Aiemmin (katso yhtälöt (5.23) ja (5.24)) saatiin selville, että arvotuksen alarajalla $\phi_i'(a) = 2$ ja $z_i'(a) = 2$. Tämän ja yhtälön (5.28) nojalla

$$\psi_i'(a) = f_i(\phi_i)\phi_i'(a) = 2 = f_i(z_i)z_i'(a) = \pi_i'(a),$$

mistä seuraa

$$\psi_i'(a) = 2 \cdot f(a) = \pi_i(a). \tag{5.31}$$

Kun yhtälöön (5.29) sijoitetaan $\phi_i'(a) = 2$ ja $\phi_i''(a)$ yhtälöstä (5.26), saadaan

$$\psi_i''(a) = 4f_i'(a) + f_i(a)\left[\frac{f_i'(a)}{f_i(a)} - 2\frac{f_j'(a)}{f_j(a)}\right]. \tag{5.32}$$

Vastaavasti symmetrisessä tilanteessa saadaan yhtälöiden (5.24) ja (5.27) avulla

$$\pi_i''(a) = 4f_i'(a) - f_i(a)\left[\frac{f_i'(a)}{f_i(a)} - 2\frac{f_i'(a)}{f_i(a)}\right]. \tag{5.33}$$

Lemman heikompaa huutajaa w koskeva väite numero 3 on siis edellisten yhtälöiden avulla kirjoitettuna

$$4f_s'(a) - f_w(a)\left[\frac{f_w'(a)}{f_w(a)} - 2\frac{f_w'(a)}{f_w(a)}\right] > 4f_w'(a) + f_w(a)\left[\frac{f_w'(a)}{f_w(a)} - 2\frac{f_s'(a)}{f_s(a)}\right],$$

mikä on yhtäpitävää epäyhtälön

$$-2\frac{f_w'(a)}{f_w(a)} > -2\frac{f_s'(a)}{f_s(a)} \tag{5.34}$$

kanssa. Koska lemmassa oletetaan, että $\frac{d}{dv}\frac{F_s(v)}{F_w(v)} > 0$, kun $v \to a$, niin yhtälön (5.19) nojalla

$$\frac{f_w'(a)}{f_w(a)} < \frac{f_s'(a)}{f_s(a)}.$$

Tämä on yhtäpitävää epäyhtälön (5.34) kanssa, joten väitteen kohta 3 pätee. Vastaavasti stokastisesti vahvemman huutajan s tapauksessa yhtälöiden (5.29) ja (5.30) avulla kirjoitettu väite $\psi_w(b) > \pi_s(b)$ on

$$4f_s'(a) - f_s(a)\left[\frac{f_s'(a)}{f_s(a)} - 2\frac{f_s'(a)}{f_s(a)}\right] > 4f_s'(a) + f_s(a)\left[\frac{f_s'(a)}{f_s(a)} - 2\frac{f_w'(a)}{f_w(a)}\right].$$

Kun tehdään vastaava päättely kuin edellisessä kohdassa, havaitaan lemman kohdan 4 olevan myös tosi.

Oletuksen nojalla $F_w(v) > F_s(v)$ kaikilla arvotuksilla v ja erityisesti, kun muuttuja $v = a$. Lisäksi, jos $f_w(a) = f_s(a)$, niin $f_s'(a) > f_w'(a)$, sillä $\frac{d}{dv}\frac{F_s(a)}{F_w(v)} > 0$, kun arvotus v lähestyy alarajaa a. Tästä seuraisi $f_w'(a) > f_s'(a)$, mikä on ristiriidassa oletetun stokastisen vahvuuden kanssa. [7] $\square$

5.2.1 Tarjousjakaumien vertailua

Vertaillaan seuraavaksi stokastisesti heikon ja vahvan huutajan tarjousjakaumia, jotta päästään myöhemmin tutkimaan, millainen mekanismi on mieluisampi kullekin huutajalle ja toisaalta kaupan järjestäjälle.

Lause 5.5. *Oletetaan, että huutajan s arvotusjakauma on stokastisesti vahvempi kuin huutajan w jakauma, eli että Määritelmän 1.5 ehdot täyttyvät. Tällöin ovat voimassa seuraavat epäyhtälöt:*

1. $\pi_w(b) > \pi_s(b)$, *kun* $b \in]a_s, \mu_s[$
2. $\psi_w(b) > \psi_s(b)$, *kun* $b \in]b_*, b^*[$
3. $\pi_w(b) > \psi_s(b)$, *kun* $b \in]b_*, b^*[$
4. $\psi_w(b) > \pi_s(b)$, *kun* $b \in]b_*, \mu_s[$

Edellä b_* *ja* b^* *ovat matalin ja korkein tarjous, jolla on mahdollista voittaa kauppa.*

Todistus. Yhtälön (5.8) nojalla kohdan 1 väite on voimassa välillä $v \in [\mu_w, \mu_s[$. Tehdään sen jälkeen vastaoletus: on olemassa sellainen tarjous $\hat{b} \in]a_s, \mu_w[$, jolla $\pi_w(b) = \pi_s(b)$. Nyt arvotusten jakaumafunktioiden $F_i(v)$ käänteisfunktioille $H_i(p)$ pätee $H_s(p) > H_w(p)$ kaikilla $p \in]0, 1[$ kun $\pi_s \geq \pi_w$. Näin ollen $H_s(\pi_s) \geq H_s(\pi_w) > H_w(\pi_w)$. Koska lisäksi $\pi_i(b) = F_i(z_i(b))$ ja $\pi_i'(b) = f_i(z_i(b))z_i'(b)$, niin yhtälöstä (5.5) saadaan

$$\frac{\pi_w'}{\pi_w} = \frac{1}{H_w - b} \ .$$

Tätä voidaan arvioida alaspäin, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\frac{\pi_w'}{\pi_w} = \frac{1}{H_w(\pi_w) - b} > \frac{1}{H_s(\pi_s) - b} = \frac{\pi_s'}{\pi_s} \ . \tag{5.35}$$

Osamäärän $\frac{\pi_w}{\pi_s}$ derivaatta on

$$\frac{d}{db}\frac{\pi_w(b)}{\pi_s(b)} = \frac{\pi_w'\pi_s - \pi_w\pi_s'}{\pi_s^2} = \frac{\pi_w}{\pi_s}\left[\frac{\pi_w'}{\pi_w} - \frac{\pi_s'}{\pi_s}\right].$$

Vastaoletuksen ja epäyhtälön (5.35) nojalla derivaatta on nollaa suurempi, kun $b = \hat{b}$. Näin ollen on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $b \in]\hat{b} - \delta, \hat{b}[$

$$\pi_s(b) > \pi_w(b). \tag{5.36}$$

Olkoon δ suurin sellainen luku, jolla tämä epäyhtälö pätee.
Oletetaan, että $\hat{b} - \delta = a_s$, sillä jos $\hat{b} - \delta > a_s$, niin

$$\pi_s(\hat{b} - \delta) = \pi_w(\hat{b} - \delta). \tag{5.37}$$

Jos nyt tarjouksen b arvo lähestyy ylhäältä päin arvoa $\hat{b} - \delta$, niin jossain vaiheessa $\pi_w(b) > \pi_s(b)$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (5.36) kanssa. Näin ollen siis $\hat{h} - \delta = a_s$. Symmetrisessä huutokaupassa, jossa kumpikin huutaja on stokastisesti vahva, kummankin huutajan tarjous ylittää arvon a_s jos ja vain jos heidän arvotuksensa ylittävät sen. Tästä seuraa, että $\pi_w(a_s) \geq F_w(a_s) \geq F_s(a_s) = \pi_s(a_s)$. Yhtälö (5.37) on siis tämän ja yhtälön (5.36) seurauksena voimassa. Tästä edelleen seuraa yhtäsuuruus $F_w(a_s) = F_s(a_s)$, minkä vuoksi $a_s = a_w = a$. Nyt Lemman 1.6 seurauksena $F_w(a) = F_s(a) = 0$. Jos Määritelmän 1.5 ja Lemman (1.6) mukainen luku $\gamma \in]a, y_w]$, niin $F_s(v) = \lambda F_w(v)$, kun $v \in [a, \gamma]$ ja $\lambda \in [0, 1]$. Lauseen 5.5 seurauksena tarjousfunktioille pätee $z_s(b) = z_w(b)$, kun tarjous b on tarpeeksi lähellä arvotusten alarajaa a. Tästä kuitenkin seuraa, että tuolla alueella $\pi_w(b) > \pi_s(b)$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön (5.36) kanssa. Näin ollen luku $\gamma = a$. Tutkitaan vielä tilannetta, jossa tarjous $b \in [a, \gamma]$. Nyt Lemman 5.4 nojalla jälleen $\pi_w(b) > \pi_s(b)$. Ei siis ole olemassa sellaista lukua $\hat{b}$ välillä $]a, \mu_w[$, jolla $\pi_w(\hat{b}) = \pi_s(\hat{b})$, joten väitteen kohta 1 pätee.
Kohdan kaksi väittämä on, että epäyhtälö $\psi_w(b) > \psi_w(b)$ on voimassa kaikilla muuttujan b arvoilla välillä $\{b_*, b^*\}$. Tehdään jälleen vastaoletus: on olemassa sellainen luku $\hat{b} \in \{b_*, b^*\}$, että $\pi_w(\hat{b}) = \psi_s(\hat{b})$. Nyt edellisen kohdan todistuksen kanssa vastaavalla tavalla voidaan pisteessä $b = \hat{b}$ arvioida

$$\frac{\psi_w'}{\psi_w} = \frac{1}{H_s(p_s) - b} < \frac{1}{H_w(p_w) - b} = \frac{\psi_s'}{\psi_s}$$

Näin ollen osamäärä $\frac{p_s(b)}{p_w(b)}$ on kasvava kaikilla tarjouksen arvoilla $b_0 \geq \hat{b}$, joilla $\psi_s(b_0) = p_w(b_0)$. Tästä seuraa, että suuremmilla tarjouksen b arvoilla, tarkkaan ottaen kun $b \in \{\hat{b}, b^*\}$. Kuitenkin yhtälön (5.3) reunaehdoissa todettiin,

että kummankin huutajan i jakaumille pätee $F_i(\phi_i(b^*)) = 1$. Koska määritelmänsä mukaan funktio $\psi_i(b) = F_i(\phi_i(b))$, niin yhtälön $\psi_w(b^*) = \psi_s(b)$ on oltava voimassa. Lisäksi Lemman 5.4 kohdan 2 nojalla myöskään epäyhtälö $\psi_w(b) < \psi_s(b)$ ei ole mahdollinen kaikille $b \in \{b_*, b^*\}$. Näin ollen väitteen kohta 2 pitää paikkansa.
Kohtien 3 ja 4 todistukset etenevät vastaavalla tavalla kuin kahden edellisen kohdan todistukset. Niissä käytetään hyväksi Lemman 5.4 kohtia numero 3 ja 4.[7, s. 433] □

Lauseen 5.5 kohdassa 2 osoitetaan siis, että vahvemman huutajan tarjousjakauma on stokastisesti vahvempi kuin heikon ostajan. Kohdan 3 mukaan heikko ostaja suosii aggressiivisempaa tarjousjakaumaa, mikäli kaupan toinen tarjoaja on stokastisesti vahvempi. Vastaavasti kohdan 4 mukaan vahvan huutajan kannattaa noudattaa passiivisempaa tarjousjakaumaa, mikäli vastassa on stokastisesti heikompi kilpahuutaja.[7, s. 423]

Lemma 5.6. *Olkoon Lauseen 5.5 oletus voimassa. Tällöin*

$$\mu_w \leq b^* \leq \mu_s$$

siten, että ainakin toinen epäsuuruus on aito.

Todistus. Tehdään vasemmanpuoleisen epäyhtälön suhteen vastakkainen oletus: $b^* < \mu_w$. Tällöin $\psi_s(b^*) > \pi_w(b^*)$ sekä $\psi_s(b) > \pi_w(b)$, kun valitaan muuttujan arvo b tarpeeksi läheltä tarjousten ylärajaa b^*. Tämä on kuitenkin ristiriidassa Lauseen 5.5 kohdan 3 kanssa. Näin ollen vastaoletus on väärä, ja $\mu_w \leq b^*$. Oikeanpuoleinen epäyhtälö voidaan todistaa vastaavalla tavalla. □

Lause 5.7. *Oletetaan, että huutajan s arvotusjakauma on stokastisesti vahvempi kuin huutajan w jakauma, eli että Määritelmän 1.5 ehdot täyttyvät. Tällöin ovat voimassa seuraavat epäyhtälöt:*

1. $z_w(b) \geq z_s(b)$, *kun* $b \in]a_s, \mu_s[$

2. $\phi_s(b) > \phi_w(b)$*, kun* $b \in]b_*, b^*[$

3. $z_w(b) \geq \phi_w(b)$*, kun* $b \in]b_*, b^*[$

4. $\phi_s(b) > z_s(b)$*, kun* $b \in]a_s, b^*[$

Todistus. Epäyhtälön (5.9) perusteella $\bar{b}_w(v) \leq \bar{b}_s(v)$, joten väitteen ensimmäinen on voimassa välillä $b \in]a_s, \mu_w[$. Kun $b \in [\mu_w, \mu_s]$, niin $z_s(b) < z_w(b) = 1$. Näin ollen väitteen kohta 1 pitää paikkansa välillä $b \in]a_s, \mu_s[$.

Tutkitaan ensin kohtaa 2 tarjousten ylärajan b^* läheisyydessä. Mikäli arvotusten ylärajoille pätee $y_w < y_s$, niin $y_s = \phi_s(b^*) > \phi_w(b^*) = y_w$, ja väite on voimassa. Jos taas $y_w = y_s$, niin $\phi_s(b^*) = \phi_w(b^*)$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (5.3), jolloin saadaan

$$\frac{f_w(\phi_w)}{F_w(\phi_w)}\phi_w' = \frac{1}{\phi_s - b} = \frac{1}{\phi_w - b} = \frac{f_s(\phi_s)}{F_s(\phi_s)}\phi_s', \tag{5.38}$$

kun siis $b = b^*$. Tehtävän lähtöoletus on, että jakauma F_s on stokastisesti vahvempi kuin jakauma F_w. Jo aiemmin osoitettiin, että tästä seuraa epäyhtälö $\frac{f_s(v)}{F_s(v)} > \frac{f_w(v)}{F_w(v)}$. Kun tämä mielessä pitäen arvioidaan yhtälöä (5.38), huomataan, että $\phi_s'(b) < \phi_w'(b)$. Näin ollen kohdan 2 väite pätee.

Kohdan 3 tarkastelussa tehdään tuttuun tapaan vastaoletus: on olemassa sellainen tarjous $\hat{b} \in]b_*, b^*[$, että $\phi_w(\hat{b}) = \phi_s(\hat{b})$. Nyt kaikilla sitä suuremmilla tarjouksen arvoilla $b \in]\hat{b}, b^*[$ on jälleen lauseen lähtöoletuksen nojalla oltava $\phi_w(b) > \phi_s(b)$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa edellä todistetun kohdan 2 kanssa, joten vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite $\phi_s(b) > \phi_w(b)$, kun $b \in]b_*, b^*[$ pätee.

Tutkitaan seuraavaksi väitteen kohtaa 4. Yhtälön (5.3) ja kohdan 2 nojalla saadaan

$$\frac{f_s(\phi_s}{F_s(\phi_s)}\phi_s' = \frac{1}{\phi_w - b} > \frac{1}{\phi_s - b} \ .$$

Koska Lemman 5.6 nojalla $b^* \leq \mu_s$, niin tarjousten käänteisfunktioille pätee $\phi_s(b^*) \geq z_s(b^*)$. Näin ollen voidaan jatkaa

$$\frac{f_s(\phi_s}{F_s(\phi_s)}\phi_s' = \frac{1}{\phi_w - b} > \frac{1}{\phi_s - b} \geq \frac{1}{z_s - b} = \frac{f_s(z_s)}{F_s(z_s)}z_s'.$$

Siis kun $\phi_s(b) \leq z_s(b)$, niin

$$\frac{d}{db}\frac{F_s(\phi_s(b))}{F_s(z_s(b))} > 0. \tag{5.39}$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että osamäärä $\frac{F_s(\phi_s(b))}{F_s(z_s(b))}$ on siis aidosti kasvava välillä $b \in]b_*, b^*[$. Oletetaan seuraavaksi, että jollakin luvulla $\theta \leq 1$ on olemassa sellainen tarjous $\hat{b} \in]a_s, b^*[$, että

$$\frac{F_s(\phi_s(\hat{b}))}{F_s(z_s(\hat{b}))} = \theta. \tag{5.40}$$

Koska yhtälön vasemmalla puolella oleva osamäärä on yhtälön (5.39) perusteella aidosti kasvava kohdassa $b = \hat{b}$, niin

$$\begin{cases} \phi_s(b) < z_s(b) \\ \frac{d}{db}\frac{F_s(\phi_s(b))}{F_s(z_s(b))} > 0 \end{cases}$$

kaikilla tarjouksen arvoilla $b \in [a_s, \bar{b}[$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $z_s(b_s) = b_s$, josta seuraa $\phi_s(b_s) \geq z_s$. Niinpä edellä oletetun kaltaista lukua $\hat{b}$ ei ole olemassa, ja lauseen kohta 4 pätee. Kohdan 3 todistus etenee vastaavalla tavalla. [7, s. 433-434] □

Huomautus 5.8. Lauseen 5.7 kohdasta 2 seuraa suoraan, että välillä $b \in]b_*, b^*[$ tarjousfunktioille $\beta_i(v)$ tietyllä arvotuksella v pätee [4, s. 48]

$$\beta_s(v) < \beta_w(v).$$

Lause kertoo siis sen, että epäsymmetristen jakaumien tilanteessa stokastisesti heikomman huutajan tarjous b_w on lähempänä hänen omaa arvotustaan v_w, kuin mitä vahvemman huutajan tarjous b_s on hänen arvotustaan v_s. Sanotaan, että heikompi huutaja on aggressiivisempi. [4, s. 48] Jos vahva huutaja kohtaa toisen vahvan huutajan sijasta heikon kilpailijan, hänen tarjouksensa muuttuvat vähemmän aggressiivisiksi.
Seuraavaksi otetaan kantaa siihen, millaista huutokauppamekanismia erilaiset huutajat suosivat.[7]

Lause 5.9. *Stokastisesti heikompi ostaja w suosii korkeimman hinnan huutokauppaa, kun taas vahvempi ostaja s suosii toiseksi korkeimman hinnan huutokauppaa.*

Todistus. Olkoon funktio $\Pi_i^I(v_i, F_i, F_j)$ huutajan $i \in \{s, w\}$ odotettu tuotto korkeimman hinnan ja funktio $\Pi_i^{II}(v_i, F_s, F_w)$ toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa, kun $i, j \in \{s, w\}$ ja $i \neq j$. Nyt Lauseen 5.7 kohdan 4 nojalla

$$F_s(\phi_s(b)) = \psi_s(b) > \pi_s(b) = F_s(z_s(b)),$$

kun tarjous b on avoimella välillä $]b_*, b^*[$. Näin ollen, kun $v \in]b_*, y_w]$, niin

$$\begin{aligned}\Pi_w^I(v_w, F_s, F_w) &= \max_b \psi_s(b)(v - b)\\ &\geq \psi_s(\bar{\beta}_s(v))(v - \bar{\beta}_s(v))\\ &> \pi_s(\bar{\beta}_s(v))(v - \bar{\beta}_s(v))\\ &= \Pi_s^I(v_s, F_s, F_s).\end{aligned}$$

Yhtälön alin kohta on siis huutajan s tuotto symmetrisessä tilanteessa, eli kun $F_s = F_w$. Lauseen 4.3 (tuottojen yhtäsuuruus) nojalla voidaan jatkaa

$$\begin{aligned}\Pi_s^I(v_s, F_s, F_s) &= \Pi_s^{II}(v_s, F_s, F_s)\\ &= \int_a^v (v - x) dF_s(x)\\ &= \Pi_w^{II}(v_s, F_s, F_w).\end{aligned}$$

Näin ollen $\Pi_w^I(v_w, F_s, F_w) > \Pi_w^{II}(v_w, F_s, F_w)$, kun arvotus v_w on pienintä mahdollista tarjousta suurempi, eli kun $v_w \in]b_*, y_w]$. Mikäli arvotus $v_w \in [a_w, b_*]$, niin $\Pi_w^{II} = 0$, sillä nyt $v_w < a_s$. Pitää siis paikkansa, että korkeimman hinnan huutokauppa on stokastisesti heikommalle huutajalle kannattavampi.

Lauseen 5.7 kohdassa 3 osoitettiin, että $\pi_w(b) > \psi_w(b)$ aina, kun $b \in]a_w, b^*[$. Niinpä kun arvotus v on puoliavoimella välillä $]a_s, y_s]$, vahvemman huutajan

s tuoton odotusarvo toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa on

$$\begin{aligned}\Pi_s^{II}(v, F_s, F_w) &= \Pi_w^{II}(v, F_w, F_w) \\ &= \Pi_w^{I}(v, F_w, F_w) \\ &= \max_b \pi_w(b)(v-b) \\ &\geq \pi_w(\beta_s(v))(v-\beta_s(v)) \\ &> \psi_w(\beta_s(v))(v-\beta_s(v)) \\ &= \Pi_s^{I}(v, F_s, F_w).\end{aligned}$$

Viidennen rivin epäyhtälö johtuu Lauseen 5.7 kohdasta 3. Nähdään siis, että stokastisesti vahvan huutajan odotettavissa oleva tuotto on suurempi toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa.[7, s. 425] □

5.3 Epäsymmetrian vaikutus myyjän tuottoon

Lauseen 5.7 kohdassa 2 osoitettiin, että $\phi_s(b) > \phi_w(b)$, kun tarjous $b \in]b_*, b^*[$. Määritellään funktio $Q(v) > v$ siten, että välillä $v \in [b_*, y_s[$

$$\phi_s(b) = Q(\phi_w(b)). \tag{5.41}$$

Määritellään lisäksi, että kun $v \in [a_w, b_*]$, niin funktio $Q(v) = v$. Funktiosta $Q(v)$ saadaan näin kuvaus, jonka lähtöjoukko on $[b_*, y_w]$ ja maalijoukko $[a_s, y_s]$.

Käytetään hyväksi Lauseen 5.5 kolmannessa kohdassa osoitettua epäyhtälöä. Näin saadaan

$$F_s(\phi_s(b)) = \psi_s(b) < \psi_w(b) = F_w(\phi_w(b)),$$

kun $b \in]b_*, b^*[$. Tämän ja funktion $Q(v)$ määritelmän seurauksena kaikilla arvotuksilla $v \in]b_*, y_w[$ on voimassa

$$F_w(v) > F_s(Q(v)). \tag{5.42}$$

Kahdessa seuraavassa lauseessa tutkitaan myyjän tuottoa eri huutokauppamalleissa epäsymmetristen jakaumien tapauksessa.

Lause 5.10. *Suljetussa korkeimman hinnan epäsymmetrisessä huutokaupassa myyjän odotettavissa oleva tuotto on huutajalta w*

$$R_w^I = b_*(1 - F_w(b_*)) + \int_{b_*}^{y_w} [1 - F_s(Q(v))] \frac{d}{dv}[v(1 - F_w(v))]dv \qquad (5.43)$$

ja huutajalta s

$$R_s^I = b_* F_w(b_*)(1 - F_s(s_s)) + \int_{b_*}^{y_w} [1 - F_s(Q(v))] Q(v) f_w(v) dv. \qquad (5.44)$$

Todistus. Heikon huutajan todennäköinen maksun suuruus yksittäisellä tarjouksen arvolla $b \geq b_*$ on $b \cdot F_s(\phi_s(b))$. Kun otetaan huomioon kaikki tarjoukset välillä $[b_*, b^*]$, saadaan

$$R_w^I = \int_{b_*}^{b^*} bF_s(\phi_s(b)) dF_w(\phi_w(b)).$$

Osittaisintegroinnin ja Lauseen 5.3 avulla päästään edelleen muotoon

$$R_w^I = b_* F_s(b_*)(1 - F_w(b_*)) + \int_{b_*}^{b^*} [1 - F_w(\phi_w(b))] \frac{d}{db} bF_s(b) db.$$

Yhtälö (5.3) voidaan kirjoittaa muodossa $\frac{d}{db} bF_s(b) = \phi_w f_s(\phi_s) \frac{d\phi_s}{db}$. Sijoitetaan tämä edellä saatuun yhtälöön, jolloin saadaan

$$R_w^I = b_* F_s(b_*)(1 - F_w(b_*)) + \int_{b_*}^{b^*} [1 - F_w(\phi_w(b))] \phi_w(b) f_s(\phi_s(b)) \frac{d\phi_s}{db} db. \quad (5.45)$$

Funktion $Q(v)$ määriteltiin yhtälöllä (5.41) niin, että $\phi_s(b) = Q(\phi_w(b))$. Nyt siis $d\phi_s = Q'(v)dv$, jonka muun muassa sijoittamalla saadaan

$$R_w^I = b_* F_s(b_*)(1 - F_w(b_*)) + \int_{b_*}^{y_w} [1 - F_w(v)] v F_s'(Q(v)) Q'(v) dv.$$

Integroimalla yhtälön oikean puolen loppuosa osittain saadaan

$$R_w^I = b_*(1 - F_w(b_*)) + \int_{b_*}^{y_w} [1 - F_s(Q(v))] \frac{d}{dv}[v(1 - F_w))]dv,$$

mikä on väitteen ensimmäinen kohta. Symmetrian ja yhtälön (5.45) nojalla voidaan vahvan huutajan tuottamalle tuotolle kirjoittaa

$$R_s^I = b_* F_w(b_*)(1 - F_s(a_s)) + \int_{b_*}^{b^*} [1 - F_s(\phi_s(b)] \phi_s(b) f_w(+hi_w(b)) \frac{d\phi_w}{db} db,$$

mihin sijoittamalla jälleen $\phi_s(b) = Q(\phi(\phi_w(b))$ saadaan yhtälö (5.44).[7, s. 434] $\square$

Lause 5.11. *Toiseksi korkeimman hinnan epäsymmetrisessä huutokaupassa myyjän odotettavissa oleva tuotto on huutajalta w*

$$R_w^{II} = \int_{a_s}^{y_w} (1 - F_s(v)) \frac{d}{dv}[v(1 - F_w(v))dv + a_s(1 - F_w(a_s))]$$

ja huutajalta s

$$R_s^{II} = a_w F_w(a_w)(1 - F_s(a_w)) + \int_{a_s}^{y_w} (1 - F_s(v))v dF_w(v).$$

Todistus. Arvotuksella $v_w > a_s$ heikon huutajan maksun odotusarvo on

$$P(v) = a_s F_s(a_s) + \int_{a_s}^{v_w} v f_s(v)(1 - F_w(v))dv.$$

Myyjän saama tuotto huutajalta w saadaan, kun integroidaan edellinen yhtälö arvotusten $v \in [a_s, y_w]$ yli, toisin sanoen

$$\begin{aligned} R_w^{II} &= \int_{a_s}^{y_w} P(v) dF_w(v_w) \\ &= \int_{a_s}^{y_w} \left[a_s F_s(a_s) + \int_{a_s}^{v_w} v f_s(v)(1 - F_w(v))dv \right] dF_w(v_w) \\ &= a_s F_s(a_s)(1 - F_w(a_s)) \int_{a_s}^{y_w} v f_s(v)(1 - F_w(v))dv \\ &= -\int_{a_s}^{y_w} F_s(v) d[v(1 - F_w(v)]. \end{aligned}$$

Edellä on käytetty osittaisintegrointia kahteen otteeseen. Viimeinen kohta on yhtäpitävä väitteen ensimmäisen kohdan kanssa. Symmetrian nojalla myös tuoton R_s^{II} lauseke pätee. [7, s. 435] □

Seuraus 5.12. *Korkeimman ja toiseksi korkeimman hinnan huutokauppojen tuoton erotus on*

$$\begin{aligned} D &\equiv (R_s^I + R_w^I) - (R_s^{II} + R_w^{II}) \\ &= \int_{b_*}^{y_w} (Q - v)(1 - F_s(Q))(1 - F_w(v)) C(v, Q) dv, \end{aligned}$$

missä

$$C(v, Q) = \frac{f_w(v)}{1 - F_w(v)} - \frac{F_s(Q) - F_s(v)}{(1 - F_s(Q))(Q - v)} .$$

Palataan kappaleen alussa esitettyihin esimerkkeihin ja tutkitaan niissä esitettyjä tapauksia yleisemmin. Aloitetaan Esimerkin 5.1 kaltaisesta tilanteesta, jossa huutajien jakaumat ovat muuten samat, mutta toisen jakaumaa on venytetty. Osoitetaan, että korkeimman hinnan huutokauppa on silloin myyjälle tuottoisampi vaihtoehto.

Lause 5.13. *Oletetaan, että $F_w(a_w) = 0$ ja että välillä $v \in [a_w, y_w]$ pätee*

$$\frac{d}{dv}\frac{f_w(v)}{F_w(v)} < 0. \tag{5.46}$$

Määritellään vahvemman huutajan arvotuksen kertymäfunktio $F_s(v)$ niin, että kun luku $\lambda \in [0, 1]$, niin

$$F_s(v) = \begin{cases} \lambda F_w(v), & \text{kun } v \in [a_w, y_w] \\ G(v), & \text{kun } v \in]y_w, y_s]. \end{cases} \tag{5.47}$$

Edellä $G(y_w) = \lambda, G(y_s) = 1$ ja

$$f_w(v) \geq g(t) > 0 \tag{5.48}$$

kaikilla arvotuksilla $v \in [a_w, y_w]$ ja $t \in [y_w, y_s]$. Lisäksi funktio $g(v) \equiv G'(v)$. Mikäli ylläolevat oletukset ovat voimassa, niin myyjän kannalta korkeimman hinnan huutokauppa on toiseksi korkeimman hinnan huutokauppaa kannattavampi myyntimekanismi.

Todistus. Yhtälöistä (5.47) ja (5.48) nähdään, että Määritelmän (1.5) ehdot täyttyvät. Näin ollen voidaan käyttää Lauseen 5.7 kohtaa 2, jonka mukaan tarjousten käänteisfunktioille pätee epäyhtälö $\phi_s(b) > \phi_w(b)$ kaikilla tarjouksilla $b \in]b_*, b^*[$. Voidaan siis käyttää kappaleen alussa määriteltyä funktiota $Q(v) > v$ avoimella välillä $v \in]a_w, y_w[$. Nyt Seurauksessa 5.12 esitelty huutokauppamallien tuottojen erotus

$$D > \int_{a_w}^{y_w} (Q(v) - v)(1 - F_w(v)) \left(f_w(v) - \frac{F_s(Q(v)) - F_s(v)}{Q - v} \right) dv, \tag{5.49}$$

sillä yhtälön (5.42) nojalla $F_w(v) > F_s(Q(v))$ välillä $v \in]b_*, y_w[$. Koska $Q(v) > v$, niin on olemassa sellainen arvotus $\hat{v} \in [v, Q(v)]$, jolla

$$\frac{F_s(Q(v)) - F_s(v)}{Q - v} = f_s(\hat{v}).$$

Huomataan, että yhtälön (5.49) oikealla puolella myös $(1 - F_w(v)) \geq 0$, sillä $0 \leq F_i(v) \leq 1$ kaikilla arvotuksilla v.

Näin ollen erotus D on positiivinen, jos $f_w(v) \geq f_s(v)$. Kun $y_w < \hat{v} < y_s$, niin oletuksen kohtien (5.47) ja (5.48) nojalla $f_s(\hat{v}) = g(\hat{v}) > 0$, joten $f_w(\hat{v}) \geq f_s(\hat{v})$.

Kun $\hat{v} < y_w$, niin oletuksen kohtien (5.46) ja (5.47) avulla saadaan

$$\frac{f_s(\hat{v})}{F_s(\hat{v})} = \frac{f_w(\hat{v})}{F_w(\hat{v})} \leq \frac{f_w(v)}{F_w(v)} . \tag{5.50}$$

Arvotuksen $\hat{v}$ nojalla $\hat{v} \leq Q(v)$. Siispä $F_s(\hat{v}) \leq F_s(Q(v))$. Lisäksi epäyhtälön (5.42) nojalla $F_s(Q(v)) < F_w(v)$, joten $F_s(\hat{v}) < F_w(v)$. Tämän ja lausekkeen (5.50) avulla nähdään, että $f_w(v) \geq f_s(\hat{v})$. Epäyhtälön (5.49) oikea puoli on siis suurempi tai yhtä suuri kuin nolla, jolloin myös $D \equiv (R_s^I + R_w^I) - (R_s^{II} + R_w^{II}) > 0$. [7, s. 436] $\square$

Esimerkissä 5.2 osa toisen huutajan arvotusjakaumasta on siirretty arvotuksen alarajalle. Tutkitaan myös näitä tilanteita yleisessä muodossa.

Lause 5.14. *Olkoot vahvemman huutajan arvotus v_s välillä $[a, y_s]$, $F_s(a) = 0$, ja osamäärä*

$$\frac{f_s(v)}{1 - F_s(v)} \tag{5.51}$$

kasvava. Huutajan w arvotuksen kertymä on puolestaan

$$F_w(v) = \int_a^v \theta(t) dF_s(v) + \gamma, \tag{5.52}$$

missä $\theta(v) \in]0, 1[$ ja $\theta'(v) \geq 0$, sekä

$$\gamma = \int_a^{y_s} (1 - \theta(t)) dF_s(t). \tag{5.53}$$

Mikäli yllä olevat oletukset ovat voimassa, niin myyjän kannalta toiseksi korkeimman hinnan huutokauppa on korkeimman hinnan huutokauppaa kannattavampi myyntimekanismi.

Todistus. Epäyhtälö $\frac{f_s(v)}{F_s(v)} > \frac{f_w(v)}{F_w(v)}$ voidaan nyt yhtälön (5.52) avulla kirjoittaa

$$\frac{f_s(v)}{F_s(v)} > \frac{\theta(v)f_s(v)}{\int_a^v \theta(t)dF_s(t) + \gamma} .$$

Tästä saadaan edelleen epäyhtälö

$$\int_a^v \theta(t)dF_s(t) + \gamma > \theta(v)F_s(v). \tag{5.54}$$

Kirjoittamalla muuttuja γ auki yhtälön (5.53) yhtälön vasemmalle puolelle saadaan

$$F_s(v) + \int_v^{y_s} (1 - \theta(t))dF_s(t). \tag{5.55}$$

Näin ollen epäyhtälö (5.54) on voimassa. Nyt

$$\frac{f_w(v)}{1 - F_w(v)} = \frac{\theta(v)f_s(v)}{\int_v^{y_s} \theta(v)f_w(v)dv} \tag{5.56}$$

yhtälön (5.52) nojalla. Niinpä erotus

$$\begin{aligned}
\frac{f_w(v)}{1 - F_w(v)} - \frac{f_s(v)}{1 - F_s(v)} &= \frac{\theta(v)f_s(v)}{\int_v^{y_s} \theta(v)f_w(v)dv} - \frac{f_s(v)}{\int_v^{y_s} f_s(v)dv} \\
&= \frac{f_s(v)}{\int_v^{y_s} \theta(v)f_s(v)dv} \left[\theta(v) - \frac{\int_v^{y_s} \theta(v)f_s(v)dv}{\int_v^{y_s} f_s(v)dv}\right] \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

koska $\theta(v)$ on kasvava funktio. Toisin sanoen hinnan korotus on vahvalle huutajalle kannattavampaa kuin heikolle huutajalle, ja lauseen väite pätee.

□

6 Keskenään riippuvaiset arvotukset

Tähän mennessä käsitellyissä tapauksissa on useimmiten oletettu, että jokainen huutaja pystyy määrittämään tarkan henkilökohtaisen arvon (engl.

private value) kaupattavalle hyödykkeelle. Hänen arvotuksensa ei siis riipu siitä, kuinka arvokkaaksi muut huutajat hyödykkeen arvioivat. Todellisuudessa arvotukset ovat kuitenkin harvoin täysin riippumattomia. Esimerkiksi taidehuutokaupassa on yleensä syytä huomioida omien mieltymysten lisäksi teoksen jälleenmyyntiarvo. Tällöin sanotaan, että arvotukset ovat keskenään riippuvaisia (engl. *interdependent values*). Toisessa ääripäässä henkilökohtaisella arvotuksella ei ole mitään merkitystä, vaan hyödykkeen arvo on kaikille sama (engl. *common value*). Tämä on tilanne esimerkiksi tietoliikennetaajuuksien tai luonnonvarojen käyttöoikeuksien kaupoissa. [3, s. 13][4, s. 83]
Oletetaan siis, että huutajien arvotukset ovat ainakin osittain toisistaan riippuvaisia. Muodollisesti ilmaistuna n ostajakandidaatin huutokaupassa huutajan i arvotusta kuvaa kasvava funktio $v_i(\mathbf{X})$, missä vektori $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$. Tässä satunnaismuuttuja X on kunkin huutajan henkilökohtaisen informaationsa avulla tekemä arvio hyödykkeen arvosta eli *signaali.* Olkoon lisäksi V_i hyödykkeen arvo huutajalle i. Tällöin arvotus

$$v_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv E(V_i | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_i = x_i, \ldots, X_n = x_n).$$

Kuvataan kaupattavan hyödykkeen arvon odotusarvo huutajalle 1 kasvavalla funktiolla

$$v(x, y) = E(V_1 | X_1 = x, Y_1 = y), \tag{6.1}$$

missä x on siis hänen käsityksensä hyödykkeen arvosta ja Y_1 on korkein signaali muiden huutajien keskuudessa. Symmetriaoletuksen vuoksi funktio $v(x, y)$ on kaikille huutajille sama.
Oletetaan myös, että huutajien signaalit $\mathbf{X}$ ovat Määritelmän 1.3 mukaisesti liittyneitä. Toisin sanoen huutajien henkilökohtaiset tiedot hyödykkeen arvosta eivät ole mielivaltaisia, vaan niiden välillä on positiivinen korrelaatio.

6.1 Korkeimman hinnan huutokauppa

Olkoot G satunnaismuuttujan $Y_i \equiv \max_{j \neq i} X_j$, kun $X_i = x$, jakauma ja g vastaava tiheysfunktio. Huutajan i tuoton odotusarvo on näin ollen

$$\begin{aligned}\Pi_i(z_i, x_i) &= \int_a^z [v(x,y) - \beta(z)] g(y|x) dy \\ &= \int_a^z v(x,y) g(y|x) dy - \beta(z) G(z|x),\end{aligned}$$

missä a on arvotusten alaraja. Edellisestä yhtälöstä saadaan ensimmäisen asteen optimointiehto

$$[v(x,z) - \beta(z)] g(z|x) - \beta'(z) G(z|x) = 0.$$

Tasapainotilanteessa optimi on $z = x$. Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan differentiaaliyhtälö

$$\beta'(x) = [v(x,x) - \beta(x)] \frac{g(x|x)}{G(x|x)} \ . \tag{6.2}$$

Otetaan tämän avulla kantaa ostajakandidaattien toimintaan huutokauppatilanteessa.

Lause 6.1. *Suljetussa korkeimman hinnan huutokaupassa, jossa huutajien arvotusten välillä on riippuvuus, optimaalinen tarjous saadaan funktiosta*

$$\beta^I(x) = \int_a^x v(y,y) dL(y|x),$$

missä funktio

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt}.$$

Todistus. Lemman 1.4 nojalla kaikilla muuttujilla $t > 0$ pätee

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \geq \frac{g(t|0)}{G(t|0)}.$$

Epäyhtälö pätee myös määrätylle integraalille, jolloin

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} &\leq -\int_0^x \frac{g(t|0)}{G(t|0)} \\
&= -\int_0^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|0))dt \\
&= -(\ln G(x|0) - \ln G(0|0)) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Koska funktio L on eksponenttifunktio, saadaan edellisen perusteella $L(0|x) = 0$ ja $L(x|x) = 1$. Koska funktio L on vielä kasvava välillä $[0, x]$, se täyttää kertymäfunktion ehdot välillä $[0, x]$. Lisäksi kun $x' > x$, niin $L(y|x') \leq L(y|x)$ kaikilla muuttujan y arvoilla. Jakauma L on siis stokastisesti vahvempi ehdolla x' verrattuna ehtoon x.

Koska arvotuksen funktion $v(y)$ oletettiin olevan kasvava, myös tarjousfunktio $\beta(x)$ on kasvava. Tarjouksella $\beta(z)$ huutajan saaman tuoton odotusarvo on

$$\Pi(z, x) = \int_0^z (v(x, y) - \beta(z))g(y|x)dy.$$

Aloitetaan optimaalisen muuttujan z arvon etsiminen laskemalla tuoton odotusarvon osittaisderivaatta muuttujan z suhteen. Saadaan

$$\frac{\partial \Pi(z, x)}{\partial z} = (v(x, z) - \beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z|x).$$

Kun muotoillaan yhtälön oikeaa puolta muotoon

$$\frac{\partial \Pi(z, x)}{\partial z} = G(z|x)\left[(v(x, z) - \beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta'(z)\right] \tag{6.3}$$

saadaan mukaan tutunnäköinen osamäärä.

Käy ilmi, että huutajan kannalta on optimaalista valita tarkalleen $z = x$. Todistetaan tämä vastaoletuksen avulla. Jos $z < x$, niin Lemman 1.4 nojalla

$$\frac{g(z|x)}{G(z|x)} > \frac{g(z|z)}{G(z|z)}.$$

Lisäksi $v(x, z) > v(z, z)$. Näin ollen yhtälön (6.3) osittaisdifferentiaalista saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi(z,x)}{\partial z} &> G(z|x)\left[(v(z,z)-\beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)}-\beta'(z)\right]\\ &= 0,\end{aligned}$$

missä funktion $\beta'(x)$ kohdalla on hyödynnetty yhtälöä (6.2). Valinta $z < x$ ei siis johda tuoton odotusarvon kannalta optimaaliseen tilanteeseen. Vastaava päättely voidaan tehdä, mikäli valitaan $z > x$. Silloin päädytään tilanteeseen, jossa tuoton odotusarvon osittaisdifferentiaali on nollaa pienempi. Näin ollen vastaoletukset ovat vääriä, ja tuoton odotusarvo on suurimmillan, kun $z = x$. □

6.2 Toiseksi korkeimman hinnan huutokauppamallit

Nouseva ja avoin huutokauppa, eli englantilainen huutokauppa, on tähän asti rinnastettu suljettuun toiseksi korkeimman hinnan huutokauppaan. Tämä rinnastus ei kuitenkaan päde, mikäli huutajia on enemmän kuin kaksi eikä kyseessä ole puhtaasti henkilökohtaisiin arvotuksiin perustuva tarjouskilpailu. Tämä johtuu siitä, että nousevan huutokaupan aikana huutajat saavat jatkuvasti tietoa toistensa arvotuksista, sillä he voivat tarkkailla, kuinka kauan muut pysyttelevät kilpailuissa mukana. Tämän perusteella on mahdollista korjata omaa käsitystään hyödykkeen arvosta, mikä ei selvästikään onnistu missään suljetussa huutokauppamallissa. Vertaillaan seuraavaksi näitä kahta huutokauppamallia.

Lause 6.2. *Suljetussa toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa, jossa huutajien arvotusten välillä on riippuvuus, optimaalinen tarjous saadaan funktiosta*

$$\beta^{II}(x) = v(x, x).$$

Todistus. Oletetaan, että kaikki muut tarjouskilpailun osallistujat $j \neq i$ noudattavat tarjousstrategiaa β^{II}. Tällöin huutajan i tuoton odotusarvo on

$$\begin{aligned}\Pi_i(b_i, x_i) &= \int_0^{\phi(b_i)} [v(x, y) - \beta^{II}(y)] g(y|x) dy \\ &= \int_0^{\phi(b_i)} [v(x, y) - v(y, y)] g(y|x) dy,\end{aligned}$$

missä funktio g on ehdollinen tiheysfunktio. Koska funktio $v(x, y)$ on kummankin muuttujan suhteen kasvava, niin $v(x, y) > v(y, y)$ aina, kun $x > y$. Samoin $v(x, y) < v(y, y)$, kun $x < y$. Siispä edellä oleva integraali ja siten koko tuoton odotusarvo saa suurimman arvonsa, kun $\phi(b) = x$, mikä on määritelmän mukaan yhtäpitävää valinnan $b = \beta(x)$ kanssa. □

Esimerkki 6.3. Suljetussa toiseksi korkeimman huutokaupassa myytävänä on hyödyke, jonka yleinen arvo on $V = v$. Kauppaa osallistuu kolme huutajaa, joiden signaalien avulla määritellään satunnaismuuttuja $Z = \max\{\mathbf{X}\}$ ja vastaavasti muuttuja $z = \max\{x_1, x_2, x_3\}$. Heidän signaalinsa ovat jakautuneet tasaisesti ja riippumattomasti välille $[0, 2v]$.

Nyt ehdollinen tiheysfunktio $g(X_i|V = v) = \frac{1}{2v}$. Kolmen eri huutajan yhdistetty tiheysfunktio muuttujilla $(V, \mathbf{X})$ saa vastaavasti arvon $\frac{1}{8v^3}$. Tässä vaiheessa huutajien signaalien $\mathbf{X}$ avulla voidaan päätellä, että kaupan kohteen arvo $V \geq \frac{Z}{2}$. Näin ollen yhdistetty tiheysfunktio

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\frac{z}{2}}^1 \frac{1}{8v^3} dv \\ &= \frac{4 - z^2}{16z^2}.\end{aligned}$$

Näin ollen mikäli $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, arvon V tiheys on sama kuin ehdolla $Z = z$. Siis välillä $[\frac{z}{2}, 1]$ pätee

$$\begin{aligned}f(v|\mathbf{X} = \mathbf{x}) &= f(v|Z = z) \\ &= \frac{1}{8v^3} \cdot \frac{16z^3}{4 - z^2}.\end{aligned}$$

Edelleen ehdollinen odotusarvo

$$\begin{aligned} E(V|\mathbf{X}=\mathbf{x}) &= E(V|Z=z) \\ &= \int_{\frac{z}{2}}^{1} vf(v|\mathbf{X}=\mathbf{x})dv \\ &= \frac{2z}{2+z}. \end{aligned}$$

Tämän ja yhtälön (6.1) avulla saadaan arvotus

$$\begin{aligned} v(x,y) &= E(V|X_1=x, Y_1=y) \\ &= E(V|Z=\max\{x,y\}) \\ &= \frac{2\max\{x,y\}}{2+\max\{x,y\}}\ . \end{aligned}$$

Edellä on käytetty hyväksi yhtälöä $Z = \max\{X_1, Y_1\}$, joka johtuu suoraan satunnaismuuttujien Y ja Z määritelmistä. Lauseen 6.2 nojalla optimaaliseksi tarjousstrategiaksi esimerkin tapauksessa saadaan siis[4, s. 88]

$$\beta^{II}(x) = v(x,x) = \frac{2x}{2+x}.$$

Kuten todettua, avoin ja suljettu toiseksi korkeimman hinnan huutokauppa poikkeavat toisistaan. Avoimessa eli englantilaisessa huutokaupassa kukin huutaja saa lisätietoa muiden signaaleista sitä mukaa, kun huutajia jättäytyy pois tarjouskilpailusta. Hahmotellaan ensin pari mahdollista tarjousstrategiaa.

Tutkitaan avointa ja nousevaa huutokauppaa, johon osallistuu n ostajaehdokasta. Kun kaupan alussa kaikki n huutajaa ovat vielä mukana, kannattavin tarjousstrategia muodostuu yhtälöstä

$$\beta_n(x) = u(x, x, \ldots, x), \tag{6.4}$$

mihin vaikuttaa siis pelkästään huutajan oma signaali hyödykkeen arvosta. Yhtälössä indeksi, tässä tapauksessa n, viittaa siis jäljellä olevien huutajien määrään. Muuttuja x on kunkin huutajan oma signaali. Oletetaan seuraavaksi, että huutaja n jättäytyy ensimmäisen pois kilpailusta. Tällöin muut voivat lisätä hänen hintarajansa $p_n \equiv \beta_n(x_n)$ omiin laskelmiinsa. Uudeksi tarjousstrategiaksi tulee

$$\beta_{n-1}(x, p_n) = u(x, \dots, x, x_n),$$

missä $x_n = \phi_n(p_n)$. Edelleen kun $N-k$ huutajaa on luopunut kilvasta, jäljellä olevien k ostajaehdokkaiden tarjousstrategia on muotoa

$$\beta_k(x, p_{k+1}, \dots, p_n) = u(x, \dots, x, x_{k+1}, \dots, x_n). \tag{6.5}$$

Todistetaan muodollisesti, että edellä esitellyt funktiot todella ovat optimaalisia tarjousstrategioita.

Lause 6.4. *Avoimessa toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa huutajan kannattavin tarjousstrategia on yhtälön (6.4) mukainen, kun kaikki kilpailijat ovat vielä mukana, ja yhtälön (6.5) mukainen, kun tarjouskilpailusta on luopunut osallistujia.*

Todistus. Olkoon x huutajan i signaali. Oletetaan, että muut kuin huutaja i seuraavat edellä esiteltyjä strategioita $\mathbf{B} = (\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_2)$. Merkitään muiden huutajien suuruusjärjestykseen järjestettyjä signaaleja $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ ja niiden toteutumia vastaavasti $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$.
Valitaan voittavan osallistujan indeksiksi 1. Huutaja 1 siis voittaa kaupan, mikäli myös hän noudattaa strategioita $\mathbf{B}$. Muuttujien y_i määritelmän perusteella hänen signaalilleen pätee $x > y_i$. Voittajan maksama hinta on huutokauppamallin luonteen perusteella siis y_i. Koko kaupasta hän saa hyödyn

$$u(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - u(y_1, y_1, y_2, \dots, y_n) > 0. \tag{6.6}$$

Edellä huutaja 1 ei voi vaikuttaa toisten huutajien käytöksestä määräytyvään muuttujaan y_1. Lisäksi hänen oma signaalinsa x on etukäteen tarkin mahdollinen arvio, joka hyödykkeestä on voitu tehdä. Koska huutajan 1 hyöty on yhtälön (6.6) mukaan positiivinen, myös hänen kannattaa noudattaa strategioita $\mathbf{B}$.

Muiden huutajien kannalta on selvää, ettei heidän kannata poiketa kyseisistä strategioista, sillä se voi johtaa pahimmillaan kaupan voittamiseen taloudellisesti tappiollisella hinnalla. □

6.3 Tuoton vertailua

Tarkastellaan myyjän tuottoa ensin huutokaupoissa, joissa voittaja päätyy maksamaan toiseksi korkeimman tarjouksen mukaan.

Lause 6.5. *Kun huutajien arvotusten oletetaan olevan riippuvia ja liittyneitä, myyjän on aina vähintään yhtä kannattavaa järjestää avoin nouseva huutokauppa kuin suljettu toiseksi korkeimman hinnan huutokauppa.*

Todistus. Lauseessa 6.2 osoitettiin, että optimaalinen tarjousstrategia suljetussa toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa on $\beta^{II}(x) = v(x,x)$, missä $v(x,x) = E(V_1|X_1 = x, Y_1 = y)$. Nyt myyjän tuoton odotusarvo toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa on

$$\begin{aligned} E(R^{II}) &= E(\beta^{II}(Y_1)|X_1 > y_1) \\ &= E(v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1). \end{aligned}$$

Tutkitaan tarkemmin funktiota $v(x,y)$. Kun $x > y$, niin

$$\begin{aligned} v(y,y) &= E(u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) \\ &= E(u(Y_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) \\ &\leq E(u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = x, Y_1 = y). \end{aligned}$$

Viimeisessä epäyhtälössä on käytetty hyväksi Lemman 1.4 kohtaa 3. Tämän avulla saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
E(R^{II}) &= E(v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1) \\
&\leq E(E(u(X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})|X_1 = x, Y_1 = y)|X_1 > Y_1) \\
&= E(u(Y_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})|X_1 > Y_1) \\
&= E(\beta_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})) \\
&= E(R^{eng}),
\end{aligned}$$

missä R^{eng} viittaa siis myyjän tuottoon englantilaisessa huutokaupassa. Merkintä β_2 puolestaan tarkoittaa yhtälön (6.5) määrittämää tarjousstrategiaa tilanteessa, jossa mukana on enää kaksi huutajaa. [4, s. 96] □

Osoitetaan lisäksi, että myyjän kannalta korkeimman hinnan huutokauppa voi olla vielä suljettua toiseksi korkeimman hinnan huutokauppaakin huonompi vaihtoehto.

Lemma 6.6. *Tutkitaan kertymäfunktioita*

$$K(y|x) = \frac{G(y|x)}{G(x|x)}$$

ja

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt}.$$

välillä $[0, x]$. *Nyt* $K(y|x) \leq L(y|x)$ *aina kun* $y < x$. *Tämä tarkoittaa siis sitä, että funktio* K *on stokastisesti vahvempi kuin funktio* L.

Todistus. Koska huutajien signaalien oletetaan tässä kappaleessa olevan liittyneitä, voidaan jälleen käyttää hyväksi Lemman 1.4 tuloksia, tällä kertaa kohtaa 2. Siispä kaikilla $t < x$ pätee epäyhtälö

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \leq \frac{g(t|x)}{G(t|x)}.$$

Aloitetaan vertailu tutkimalla funktion L eksponentissa olevaa funktiota

$$\begin{aligned}
-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt \geq & -\int_y^x \frac{g(t|x)}{G(t|x)}dt \\
&= -\int_y^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|x))dt \\
&= -(\ln G(x|x) - \ln G(y|x)) \\
&= \ln\left(\frac{G(y|x)}{G(x|x)}\right).
\end{aligned}$$

Koska nyt $e^{\ln\left(\frac{G(y|x)}{G(x|x)}\right)} = K(y|x)$, niin lemman väite pätee. □

Lause 6.7. *Kun huutajien arvotusten oletetaan olevan riippuvia ja liittyneitä, myyjän on aina vähintään yhtä kannattavaa järjestää suljettu toiseksi korkeimman hinnan huutokauppa kuin korkeimman hinnan huutokauppa.*

Todistus. Toiseksi korkeimman hinnan huutokaupassa optimaalinen tarjous määriteltiin Lauseessa 6.2. Sen nojalla voittajan maksaman summan odotusarvo eli myyjän saama tuotto on puolestaan

$$\begin{aligned}
E(R^{II}) =& E(\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x) \\
&= E(v(Y_1, Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x) \\
&= \int_0^x v(y, y)dK(y|x).
\end{aligned}$$

Korkeimman hinnan huutokaupassa myyjän saama summa on yksinkertaisesti voittajan tarjous. Kyseisen mallin optimaalinen tarjousstrategia

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y, y)dL(y|x),$$

määriteltiin Lauseessa 6.1. Koska Lemman 6.6 nojalla $K(y|x) \leq L(y|x)$ aina, kun $y < x$. Tästä seuraa, että $E(R^{II}) > E(R^I)$, joten lauseen väite pätee. □

Kootaan vielä yhteen edellisten lauseiden tulokset eri huutokauppamekanismien paremmuudesta myyjän kannalta.

Seuraus 6.8. *Lauseiden 6.5 ja 6.7 nojalla eri huutokauppamallien tuotoille pätee*

$$E(R^{eng}) \geq E(R^{II}) \geq E(R^{I}).$$

6.4 Voittajan kirous

Kun kaupataan hyödykkeitä, joiden arvo ainakin osittain riippuu yleisestä arvotuksesta, olennaiseksi ilmiöksi nousee *voittajan kirous* (engl. *the winner's curse*). Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että kun joukko ostajaehdokkaita tekee oman arvionsa hyödykkeen arvosta, huutokaupan voittaa pääsääntöisesti se huutaja, joka arvioi hinnan eniten yläkanttiin. Tällöin on todennäköistä, että voittaja maksaa kaupan kohteesta ylihintaa.[4, s. 84]
Eräs esimerkki, jossa voittajan kirous ilmenee, on korkeimman hinnan huutokauppa, jossa tarjouskilpailun kohteena on purkki täynnä kolikoita. Kohteella on siis ilmeisesti kaikille yhteinen arvo, mutta sitä ei kerrota ostajaehdokkaille. Sen sijaan ostajille kerrotaan, että purkissa on vain yhdenlaisia kolikoita. Tämän perusteella kukin osallistuja tekee arvion koko purkin arvosta ja tarjoaa sopivaksi arvioimansa summan. Bazermanin ja Samuelsonin kokeessa tutkimusasetelma oli pääpiirteissään edellä esitetyn kaltainen. Tutkimuksessa ($N = 419$) sisällöltään 8 dollarin arvoista purkkia kaupiteltiin 48 eri huutokaupassa. Korkeimpien tarjousten keskiarvoksi tuli $10,01$ dollaria ja keskihajonnaksi $5,48$ dollaria. Näin ollen huutokaupan voittajan tappio oli keskimäärin $2,01$ dollaria.[1]

A Liitteet

Välivaiheessa, joka johtaa yhtälöön (5.25) Lemmassa 5.4, otetaan molemmin puolin logaritmi yhtälöstä (5.17) ja derivoidaan se. Käydään kyseinen välivaihe tarkemmin läpi. Yhtälö (5.17) on siis

$$e_i(\phi_i)\phi_i'(b) = \frac{\phi_i - a}{\phi_j - b} \ .$$

Tutkitaan ensin yhtälön vasenta puolta. Tehtävänä on siis derivoida $\log[e_i(\phi_i)\phi_i'(b)]$ muuttujan b suhteen. Yhdistetyn funktion derivaatan kaava on

$$\frac{d}{dx}\left[g(f(x))\right] = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Lisäksi tarvitaan tulon derivaatan kaavaa, joka tunnetusti on

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Näiden avulla lasketaan ensin yhdistetyn funktion derivaatta

$$\frac{d}{db}[e_i(\phi_i)] = e_i'(\phi_i) \cdot \phi_i'$$

ja sen jälkeen tulon derivaatta

$$\frac{d}{dx}e_i(\phi_i)\phi_i'(b) = e_i(\phi_i) \cdot \phi_i''(b) + e_i'(\phi_i) \cdot \phi_i'(b) \cdot \phi_i'(b).$$

Palautetaan vielä mieliin logaritmin derivaatan laskusääntö, joka on

$$\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)} \ .$$

Näin ollen yhtälön (5.17) vasemman puolen logaritmin derivaatta muuttujan b suhteen on

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}\log[e_i(\phi_i)\phi_i'(b)] &= \frac{e_i(\phi_i) \cdot \phi_i''(b) + e_i'(\phi_i) \cdot \phi_i'(b) \cdot \phi_i'(b)}{e_i(\phi_i) \cdot \phi_i'(b)} \\ &= \frac{\phi_i''(b)}{\phi_i'(b)} + \frac{e_i'(\phi) \cdot \phi_i'(b)}{e_i(\phi)} \ . \end{aligned} \tag{A.1}$$

Yhtälön (5.17) oikeaa puolta derivoidessa tarvitaan osamäärän derivaatan kaavaa

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} \ .$$

Tämän avulla saadaan siis

$$\frac{d}{db}\left[\frac{\phi_i(b)-a}{\phi_j(b)-b}\right] = \frac{\phi_i'(b)\cdot(\phi_j(b)-b)-(\phi_i(b)-a)(\phi_j'(b)-1)}{(\phi_j(b)-b)^2}\ .$$

Lasketaan vielä

$$\begin{aligned}
\frac{d}{db}\log\left[\frac{\phi_i(b)-a}{\phi_j(b)-b}\right] &= \frac{\frac{\phi_i'(b)\cdot(\phi_j(b)-b)-(\phi_i(b)-a)(\phi_j'(b)-1)}{(\phi_j(b)-b)^2}}{\frac{\phi_i(b)-a}{\phi_j(b)-b}} \\
&= \frac{\phi_i(b)(\phi_j(b)-b)-(\phi_i(b)-a)(\phi_j'(b)-1)}{(\phi_j(b)-b)(\phi_i(b)-a)} \\
&= \frac{\phi_i(b)}{\phi_i(b)-a}-\frac{\phi_j'(b)-1}{\phi_j(b)-b}\ . \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Näin ollen yhtälöistä (A.1) ja (A.2) saadaan yhtälö (5.25).

Lähdeluettelo

[1] Max H. Bazerman - William F. Samuelson: I won the auction but don't want the prize, The Journal of Conflict Resolution **27** (1983), 618-634.

[2] G. Fibich - A. Gavious - A. Sela: Revenue equivalence in asymmetric auctions, Journal of Economic Theory **115** (2004), 309-321.

[3] P. Klemperer: *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, 2004.

[4] V. Krishna: *Auction Theory*, Academic Press, San Diego, 2002.

[5] D. Lucking-Reiley: Vickrey auctions in practice: From nineteenth-century philately to twenty-first-century E-commerce, Journal of Economic Perspectives 14 (2000), 183-192.

[6] E. Maskin - J. Riley: Optimal auctions with risk averse buyers, Econometrica **52** (1984), 1473-1518.

[7] E. Maskin - J. Riley: Asymmetric auctions, Review of Economic Studies **67** (2000), 413-438.

[8] P.R. Milgrom - R.J. Weber: A theory of auctions and competitive bidding, Econometrica **50** (1982) 1089-1122.

[9] W. Vickrey: Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders, Journal of Finance **16** (1961) 8-37.

[10] E.G. Wolstetter: Third- and lower-price auctions, Institut f. Wirtschaftstheorie I Humboldt-Universität zu Berlin (2000).