OULUN YLIOPISTO

Pirie-Kieren-teoria

Matemaattisen ymmärryksen kasvun karakterisointi ja esitys

Maarit Kaketti
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Luonnontieteellinen tiedekunta
Oulun yliopisto
Toukokuu 2015

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Pirie-Kieren-teoria pyrkii karakterisoimaan ja kuvaamaan matemaattisen ymmärryksen kasvun. Sen tavoitteena on ymmärtää matemaattisen tiedon rakentumista yksilöllisesti. Siinä matemaattisen ymmärryksen katsotaan rakentuvan yksilöllisesti edestakaisten liikkeiden myötä eri matemaattisten ymmärrysmuotojen välillä, erilaisten toimintojen ja ilmaisun myötä. Tämä ymmärryksen kasvu nähdään alati jatkuvana ja koskaan päättymättömänä prosessina. Teoriassa tarkastellaan myös ympäristön vaikutusta matemaattisen ymmärryksen kasvuun ja sitä miten ymmärrystä voi jakaa muiden kanssa.

Pirie-Kieren-teoriassa painotetaan, että ymmärrys uudesta käsitteestä tai aihepiiristä rakentuu konstruktiivisesti. Tämän vuoksi olen pyrkinyt laatimaan tutkielmani Pirie-Kieren-mallin mukaisesti. Olen esittänyt aluksi olennaista taustatietoa teoriasta. Sen jälkeen olen pyrkinyt hahmottamaan teorian sisältöä sopivan esimerkin avulla, siirtyen sen myötä tarkempiin määritelmiin. Tämän jälkeen olen esitellyt miten teoriaa on käytetty muissa tutkimuksissa ja sovelluksia. Lopuksi olen esittänyt perustelun sille, miksi Pirien ja Kierenin esitykset voidaan kokonaisuudessaan luokitella teoriaksi.

Tutkielmani pääpainon olen asettanut teorian sisältöön ja siksi olen pyrkinyt havainnollistamaan ja selvittämään tarkasti teorian rakentumista ja piirteitä. Olen korostanut määriteltyjä termejä myös kursivointien avulla.

Teoria sisältää paljon otsikoita ja sanoja, jotka ovat alkuperältään englanninkielisiä. Olen miettinyt tarkkaan tekemäni suomennokset, vertailemalla sanakirjan antamia suomenkielisiä vastineita annetuille englanninkielisille sanoille ja pohtimalla ennen valintaa sanoista annettuja tarkempia määritelmiä.

Lukijan on hyvä vielä huomata, että otsikoissa tai tekstissä sanoilla tieto ja ymmärrys viitataan joka kerta matemaattista tietoon ja ymmärrykseen.

2 Taustaa

Susan Pirie ja Thomas Kieren esittivät vuonna 1994, että eri maissa oli ollut pitkään tarve opettaa matematiikkaa siten, että opettaja ei vain kerro oppilaille olemassa olevaa totuutta. Tavoitteena oli, että oppilaat voisivat rakentaa tietoaan ymmärryksellä [**21**: 165]. Vuoden 1989 julkaisussa he sanoivat, että erityisesti matematiikan psykologian koulutuskonferensseissa oli käyty jatkuvaa keskustelua siitä, mitä matemaattisella ymmärryksellä tarkoitetaan yksilön kannalta [**20**: 7]. Heidän omana toiveenaan oli ollut aikaisemmin kuvata paremmin oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kasvua, jota he tutkivat luokissa aika ajoin. Tämä tarve johti ideoihin heidän teoriastaan [**21**: 165].

Pirie ja Kieren esittelivät ensimmäisen kerran teoriansa matemaattisen ymmärryksen kasvusta vuonna 1989 käyttäen konstruktiivista mallia ja se on sittemmin tullut tunnetuksi nimellä Pirie-Kieren-teoria (Pirie-Kieren Theory, viitataan jatkossa P-K-teoriana) [**20**]. Tämän jälkeen he ovat täydentäneet ja parannelleet teoriaansa. P-K-teorian parissa on työskennellyt myös muita henkilöitä ja Pirie ja Kieren ovat ottaneet vastaan huomioita konferensseissa, jotka ovat edeltäneet julkaisuja [**12**, **14**, **21**, **23**]. Erityisesti myös Jo Towersin ja Lyndon C. Martinin tutkimus on keskittynyt viimeisen 20 vuoden aikana matemaattisen ymmärryksen luonteeseen ja tarkoitukseen. Tässä työssä he ovat laajasti käyttäneet, kehittäneet ja hioneet P-K-teoriaa metodologisena työkaluna [**28**: 247]. Teorian kehitykseen on vaikuttanut heidän huomionsa erityisesti siitä, miten oppimisympäristö vaikuttaa tiedon rakentumiseen ja miten ymmärrystä voidaan jakaa muiden kanssa. Tämä näkökulma ei sisälly pelkästään konstruktiivisiin lähtökohtiin [**12**: 229; **23**: 128]. Martin huomauttaa, että P-K-teorian uudelleen rakentuminen ja täydentyminen tutkimusten edetessä osoittaa, että teoria on itsessäänkin dynaamisesti kasvava ja kehittyvä [**14**: 68].

Teorian juuret ovat Ernst von Glasersfeldin mallissa, jonka mukaan matemaattinen oppiminen tapahtuu konstruktiivisen toiminnan kautta ja matemaattinen ymmärrys kasvaa ja rakentuu dynaamisesti, ei-lineaarisesti ja se on jatkuva prosessi [**20**:7, **21**: 62, **29**]. Artikkelissaan [**29**] von Glasersfeld sanoo, että sikäli kun yksilön tieto ja osaaminen koostuvat kokemuksen muovaamasta käsitteellistämisestä, opettajan rooli on etenkin ohjata käsitteiden järjestämistä eri aihepiireistä, eikä vain jakaa olemassa olevaa totuutta. Opettajat voivat auttaa tässä pyrkimyksessä, kun he ovat selvillä päämääristä ja niistä lähtökohdista, missä oppilas on ennen kuhunkin aihepiiriin siirtymistä.

Von Glasersfeld esittää, että se mitä oppilaat sanovat ja tekevät voidaan tulkita hypoteettisen mallin avulla. Tämän käsitteellisen mallin tulisi olla muodoltaan rakentuva ja siihen tulisi sisällyttää matemaattisia menetelmiä. Sen avulla opettaja voisi nähdä suunnan, johon oppilasta tulisi ohjata. Von Glasersfeldin mukaan hyvät opettajat näkevät ja toimivat tällaisen mallin mukaan intuitiivisesti. Hän sanoo myös, että oppilaat hahmottavat oman yksilöllisen tietämyksensä ja havaintojensa kautta tehtävät ja oikeat ratkaisut, sekä välttämättömyyden, joka yhdistää nuo kaksi toisiinsa. Siten ei ole olemassa vain yhtä reittiä, joka johtaa tehtävästä ratkaisuun ja jonka opettajien tulisi odottaa heidän näkevän [**29**: 47-48]. Teorian lähtökohtiin on vaikuttanut myös tutkijoiden Maturana, Tomm ja Varela artikkelit vuosilta 1986, 1987 ja 1989, missä erityisesti toiminnat rakentavat matemaattista tietämystä ja henkilö itse määrää tämän rakentumisen [**23**: 128].

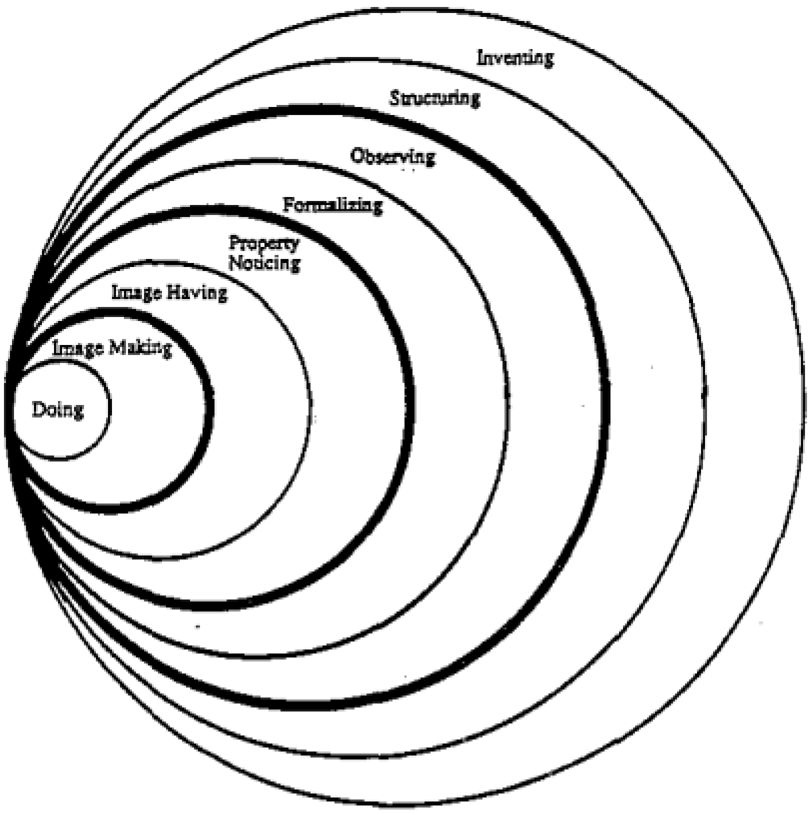
Nämä edellä esitetyt näkökohdat voi selvästi havaita P-K-teoriassa, joka esitellään seuraavaksi.

3 Teorian malli – tasot eri ymmärrysmuodoille

Pirie ja Kieren esittävät teoriassaan matemaattisen ymmärryksen kasvun ”kokonaisena, dynaamisena, asteittaisena, mutta ei-lineaarisena, rajat ylittävänä itseään toistavana prosessina” [**21**: 166]. Teoria kuvaa ymmärrystä koskaan päättymättömänä prosessina [**18**: 100].

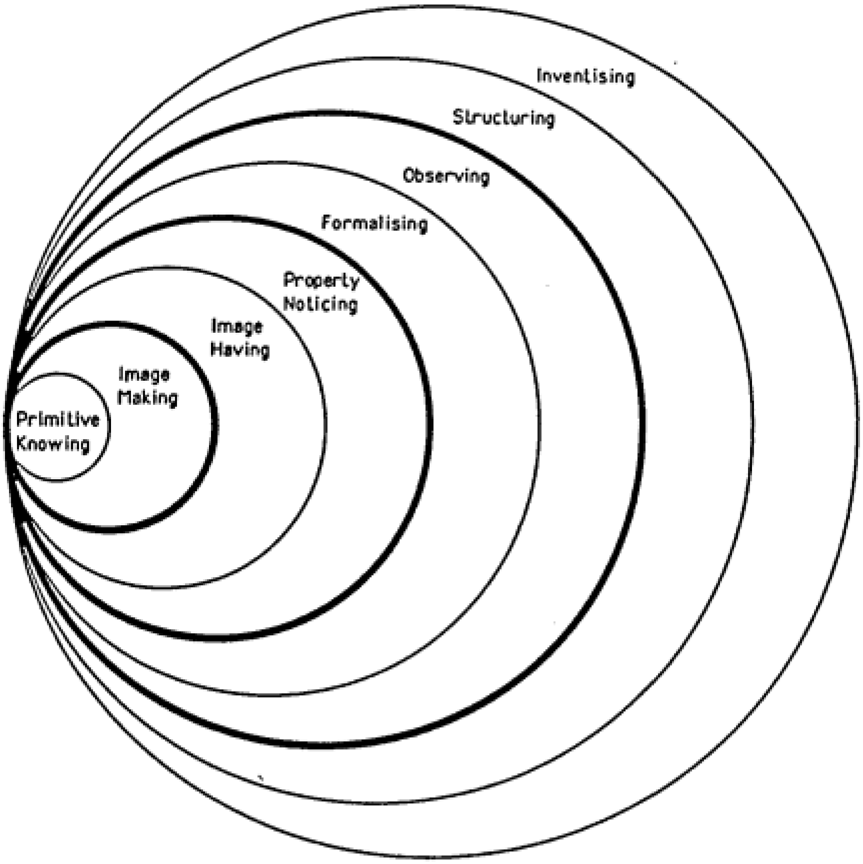
Pirie-Kieren-malli (viitataan jatkossa P-K-mallina) sisältää kahdeksan potentiaalista toiminnan kerrosta kuvaamaan tietyn henkilön tietyn matemaattisen aiheen tai käsitteen piirissä tapahtuvaa ymmärryksen kasvua tietyn aikajakson aikana [**14**: 66]. Artikkelissaan [**21**] Pirie ja Kieren kertovat tarkkaan pohtineensa, mitkä otsikot vastaisivat parhaiten mitäkin ymmärryksen tasoa. Tässä mietinnässä heidän ongelmansa oli, että tutut sanat herättäisivät lukijassa ennestään tuttuja ajatuksia ja siten lisämerkitystä sanoille. Tämä antaisi siten aihetta valittujen otsikoiden kritisoinnille. Uudet sanat toisaalta eivät olisi tuoneet minkäänlaista taustatietoa uuteen käsitteeseen, minkä Pirie ja Kieren katsovat olevan erityisen tärkeää uutta ymmärrystä rakennettaessa. Tämän vuoksi he päätyivät valinnoissaan sanoihin, jotka ovat arkielämästä tuttuja. Erityisesti valitsemallaan sanalla *image* (kuva) Pirie ja Kieren sanovat viittaavansa myös mielen tasolla tapahtuvaan kuvitukseen. Tähän sanaan he sanovat päätyneensä siitä riskistä huolimatta, että sen ajateltaisiin tarkoittavan ainoastaan visuaalista esitystä. Toinen mahdollinen sana olisi ollut *idea*, mutta he ajattelivat sen olevan vielä monitulkintaisempi. [**21**: 62]

Ensimmäisessä esityksessään vuonna 1989 (ks. kuva 1), heidän esityksensä koostui seuraavista tasoista: *alkeellinen tekeminen*, *kuvan luominen*, *kuvan omaaminen*, *ominaisuuden huomaaminen*, *muodollistaminen*, *havainnoiminen*, *koostaminen* ja *keksiminen* (Primitive Doing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalizing, Observing, Structuring, Inventing) [**20**: 8].



*Kuva 1: P-K-teorian malli v. 1989 [**20**: 8]*

Vuoden 1994 julkaisussa osa otsikoista oli vaihdettu vastauksena konferenssijulkaisusta saatuihin huomioihin (ks. kuva 2). *Alkeellinen tekeminen* esiintyi siinä nimellä *alkeellinen tietäminen* (Primitive Knowing) [**21**: 62-63]. Sanan *keksiminen* käytöstä oli vuonna 1989 annettu lisäselvennys, että tällä viitata siihen, etteikö henkilö voisi keksiä uusia ideoita muillakin tasoilla [**20**: 9]. Tämän sanan käyttö oli kuitenkin aiheuttanut kritiikkiä siinä määrin, että vuoden 1994 julkaisussa viimeistä tasoa nimitettiin sanalla *innovoiminen* (Inventising) [**21**: 62].



*Kuva 2: P-K-teorian malli v. 1994 [**21**: 63]*

Teoriassa pyritään sijoittamaan erilaiset tavat käsitellä matematiikkaa tietyille ymmärrystasoille. Esimerkiksi yleistysten parissa työskennellään muodollisten toimintojen parissa, jotka ovat kuitenkin yhteydessä vähemmän monimutkaiseen ymmärrykseen rekursiivisesti. [**14**: 65-66] Sisempien kerrosten tietämystä käytetään rakennettaessa ulompien kerrosten ymmärrystä ja näin ollen ulommat kerrokset sisältävät alempien kerrosten tietämyksen [**20**: 9,11]. Nämä kerrokset muodostavat edellä esitetyn mallin ja siten välineen, jonka avulla tiedon järjestäytymistä ja uudelleen järjestäytymistä, eli oppijan ymmärryksen muotoutumista, voidaan tutkia ja kuvata. Tätä kautta voidaan myös analysoida, mitkä ovat sopivia tapoja rakentaa ymmärrystä. [**14**: 66]

Lukija voi edellisen esityksen pohjalta muodostaa oman lähtökohtaisen käsityksensä teoriasta.

3.1 Tutkimusesimerkki ja tasojen määritelmät

P-K-teorian malli ja määritelmät pohjautuvat alun perin tutkimuksiin mm. murtolukujen ja toisen asteen funktioiden oppimisesta ja opettamisesta. Tutkimukset suoritettiin kokonaisille luokille, joiden perusteella valittiin joitakin oppilaita vielä yksilöllisiin haastatteluihin. Otettujen videotallenteiden pohjalta, Pirie ja Kieren tekivät edelleen erityisiä oppilaille tarkoitettuja toimintoja, joiden avulla he saattoivat testata, täsmentää ja kehittää teoriansa rakenteita ja ominaisuuksia. [**18**: 160]

Koska tasojen määritelmät pohjautuvat siis erityisesti näihin tutkimuksiin, esitän niistä yhden tarkemmin. Koska tasoa (8) ei kuitenkaan käsitellä valitussa tutkimusesimerkissä, esitän siitä tutkimusesimerkin jatkoksi sopivan Pirien ja Kierenin esittämän lisäesimerkin Hamiltonista. Lukijan on hyvä huomioida, että tutkimusesimerkkien tarkoitus ei ole osoittaa teoriaa oikeaksi, vaan pikemminkin havainnollistaa sen sisältöä.

Teorian sisältö painottaa, että muodostettaessa uutta tietämystä oikealla tavalla, täytyy sen tapahtua muodostamalla ensin *kuvia* henkilön aikaisemman tiedon pohjalta. Olen huomioinut tämän hahmottamalla määriteltävää tasoa ensin valitulla tutkimusesimerkillä, yhdistäen sen paloittain tietyille ymmärrystasoille Pirien ja Kierenin tekemän tulkinnan mukaisesti. Paluu sisempään ymmärryskerrokseen tasolta *ominaisuuden huomaaminen* sekä eteneminen sille takaisin on tulkittu ja lisätty omasta toimestani antamaan lisäselvennystä esimerkille. Joissakin kohdissa esimerkkiä olen huomioinut myös oppilaan käyttämän sanallisen ilmaisun osana oppimisprosessia. (*Takaisin paluu* ja *ilmaisu* ovat teorian piirteitä, joita selvennetään lisää kappaleissa 4.2 ja 4.4.) [**21**: 169-171, 173, 175]

Valitussa tutkimusesimerkissä kerrotaan 12-vuotiaan oppilaan Teresan tiedon rakentumisesta, kun hän oppii ymmärtämään murtoluvut summattavina osina [**21**: 167-169].

3.1.1 Taso (1): Alkeellinen tietäminen

Edellisenä kouluvuotena Teresa oli tutustunut yhtä suuriin murtolukuihin ja murtolukujen yhteenlaskuun. Hän oli käyttänyt myös joitakin symbolisia sääntöjä. Opettajan tekeminen havaintojen mukaan Teresa osasi muodostaa yhtäsuuruuksia esimerkiksi luvun 2/3 kanssa, mutta monien luokkatovereidensa tapaan hänellä oli vaikeuksia laskea murtolukuja yhteen. [**21**: 167-168, 170]

Määritelmä: Sisin taso *alkeellinen tietäminen* edustaa taustatietoja, jotka oppija tuo mukanaan opetettavaan asiaan. Tällä ei siten tarkoiteta alhaista matemaattista ymmärrystä, vaan henkilön lähtökohtaa uuteen asiaan siirryttäessä. Täysin tarkasti ei voida koskaan tietää oppilaan mukanansa tuomia tietoja. Se mitä oppilas kykenee ensi alkuun tekemään, perustuukin opettajan tai tutkijan tekemiin olettamuksiin. [**14**: 67; **21**: 170]

3.1.2 Taso (2): Kuvan luominen

Teresa ja muut luokkatoverit saivat käyttöönsä suorakulmioita, jotka edustivat puolikkaita, kolmas-, neljäs-, kuudes-, kahdeksas-, 12.- ja 24.-osia. Tämän jälkeen he ryhtyivät suorittamaan seuraavanlaisia tehtäviä: Oppilaiden tuli välineistöä käyttäen todeta, että yksi neljäsosa, kolme kahdeksasosaa ja kaksi kuudestoistaosaa peittävät tarkalleen kolme neljäsosaa, joka on numeerisesti esitettynä 1/4+3/8+2/16=3/4. Heidän tuli sitten etsiä suorakulmioilla niin monta osaa tai osien yhdistelmää kuin mahdollista, jotka tekevät myös tarkalleen kolme neljäsosaa. Tämän jälkeen heidän tuli piirtää taulukko löydöksistään ja kirjoittaa lausekkeet numeerisesti kuten yllä. Kolmen hengen ryhmässä Teresa alkoi työskennellä annetun toiminnan parissa. [**21**: 168, 170]

Määritelmä: *Kuvan luominen* –tasolla oppija alkaa rakentaa matemaattista ymmärrystään luomalla kuvia opetettavasta asiasta, olemassa olevan tietonsa pohjalta. Tässä tapahtumassa oppijaa pyydetään tekemään eroja aikaisemmassa tietämyksessään ja käyttämään sitä uudella tavalla. [**21**: 170] Tavoitteena on saada jollakin tavalla idea opittavana olevasta käsitteestä [**18**: 144]. Kuten tätä otsikkoa määriteltäessäkin jo korostettiin, tässä ei viitata vain piirrettäviin esityksiin, vaan kuvittaminen tai uuden idean hahmottaminen voi tapahtua myös mielikuvien kautta, kielellisesti ja erilaisten toimintojen kautta ilmaistuna.

Samasta aiheesta eri oppilaat voivat muodostaa myös erilaisia kuvia, toinen nähtäviä, toinen muulla tavalla loogisia, ei-nähtäviä kuvia ja joku toinen molempia. Missä tahansa aihepiirissä oppija muodostaa monenlaisia kuvia, joiden yhdistelmä johtaa seuraavalle tasolle. [**14**: 67; **21**: 166, 178]

3.1.3 Taso (3): Kuvan omaaminen

Teresa sisäisti toiminnan hyvin nopeasti ja näki murtolukujen kuvaavan määriä [**21**: 168, 170].

Määritelmä: *Kuvan omaaminen* –tasolla henkilö voi rakentaa kuvia mielen tasolla, tarvitsematta enää tehdä erityistä toimintaa kuvan näkemiseksi [**21**: 170]. Tämä on ensimmäinen askel kohti abstrahointia ja on tärkeää huomata, että se perustuu oppijan itsensä rekursiiviseen kuvien rakentamiseen annetun toiminnan pohjalta [**20**: 8]. Pirie ja Kieren huomauttavatkin, että oppilaan itsensä muodostama kuva voi olla ensi alkuun virheellinen tai puutteellinen, kuten Teresallakin ennen nimenomaista toimintaa. Tämän vuoksi hän ei kyennyt laskemaan murtolukuja heti onnistuneesti yhteen. Tämä kuva voi kuitenkin muuttua ymmärryksen jatkaessa rakentumistaan ennemmin tai myöhemmin [**21**: 170].

3.1.4 Taso (4): Ominaisuuden huomaaminen

Yhdistettyään murtolukuja Teresa huomasi, että monet niistä tuottivat saman määrän. Teresa kykeni silloin yhdistämään summattavat tuttuihin määriin. Esimerkiksi tehtävän 1/3+1/6+6/12 laskeminen onnistui ajattelemalla laskua muodossa 1/3+(1/6+2/12)+4/12 (=1/3+1/3+1/3). Huomionsa perusteella hän kehitti strategian, jonka avulla hän saattoi laskea yhteen monimutkaisia ja pitkiäkin murtolukulausekkeita. Menetelmässään Teresa etsi yhdistelmiä, jotka muodostaisivat yksinkertaisia määriä, kuten yhden tai puolikkaan. [**21**: 168, 170]

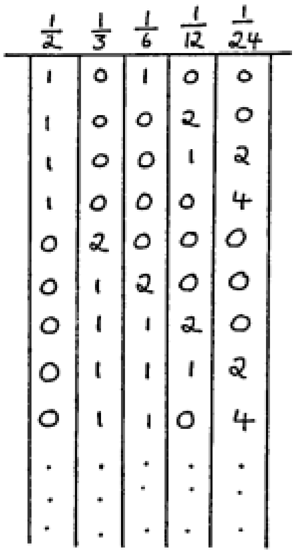
Määritelmä: Neljäs ymmärrysmuoto mallissa on *ominaisuuden huomaaminen*. Tässä vaiheessa ymmärryksen kasvua henkilö alkaa tutkia mielikuviaan ja osaa erotella ja yhdistellä niistä eri asioita, jotka ovat ominaisia tietylle käsitteelle. Esimerkin Teresasta nähdään, että ominaisuudet ovat vielä tiiviissä yhteydessä muodostettuihin kuviin. Tästä johtuen hän joutui käsittelemään jokaisen yhteenlaskettavan murtoluvun erikseen ennen niiden yhdistämistä. Teresa huomasi kuitenkin tässä vaiheessa, miten hänen kuvaansa yhteenlaskusta voitiin käyttää ja muodosti käyttökelpoisen menetelmän ongelmaratkaisuun. [**21**: 170; **18**: 145] *Ominaisuuden huomaaminen* on reflektiivinen toiminta, missä henkilö miettii vaihtoehtoja ja sitä, miten muodostunutta ymmärrystä voidaan käyttää yleisemmin [**14**: 68].

3.1.5 Taso (5): Muodollistaminen

Koska Teresalla ei ollut vielä kuitenkaan yleisemmin toimivaa mallia käytössään hän kohtasi ongelman, kun 1/2+1/3+1/4 lausekkeen summattavat osat eivät sopineet mihinkään tutuista muodoista. Opettaja kehotti oppilaita silloin tutkimaan, voisivatko he löytää uuden palan, jonka kaksi tai kolme murtolukupalaa peittäisivät (*paluu kuvan luomisen* tasolle). Hetkeä myöhemmin Teresa kykeni ennustamaan, mikä pala olisi sopiva (*kuvan omaamisen* taso). Tämä johti hänet muuttamaan aiemmin muodostettua ajatusta yhteenlaskusta. Teresa ilmaisi opettajalle, että 2/3+5/6 voidaan laskea yhteen, sillä 1/12 sopii molempiin summattaviin osiin (*ominaisuuden huomaamisen* taso). Vähän myöhemmin hän esitti opettajalle, että yhteenlasku onnistuu helposti kertomalla osoittajat ja nimittäjät ensin oikeilla määrillä. Pirie ja Kieren huomioivat, että Teresa pyrkii tällöin ajattelemaan tämän metodin toimivan kaikille murtoluvuille (*muodollistamisen* taso).

Tämän jälkeen Teresa siirtyi seuraavan tehtävän pariin: ”Käyttämällä puolikkaita, kolmas-, kuudes-, 12.-, ja 24.-osia, tee kaksi kolmasosaa niin monella tavalla kuin pystyt.” Teresa otti ensin esiin välineistönsä, mutta luopui siitä pian ja alkoi täyttää systemaattisesti annettua taulukkoa kuvan 3 mukaisesti. Tässä vaiheessa hänen menetelmänsä ei ollut enää sidoksissa toimintoihin, vaan seurasi symbolisesta säännönmukaisuudesta. [**21**: 168-171]

Määritelmä: Kun henkilö abstrahoi menetelmän tai yleisen ominaisuuden, jonka hän löysi edellisellä tasolla, hänen ymmärrysmuotonsa *muodollistuu*. Esimerkin Teresa huomasi, että murtolukuja voidaan käsitellä numeerisesti ja silloin murtolukujen yhteenlaskusta tuli matemaattisesti formaalia, menetelmä johon ei tarvita viitettä murtolukujen määrällisestä aineellisemmasta merkityksestä ja joka toimii mille tahansa murtolukujen joukolle. Pirie ja Kieren esittävät, että tässä ymmärryksen vaiheessa henkilö on kykenevä lausumaan muodollisia matemaattisia määritelmiä, algoritmeja ja symbolein ilmaistuja kaavoja. [**21**: 171] Oppilaiden ei tarvitse osata ilmaista käsitettä välttämättä formaalia matemaattista kieltä käyttäen, mutta esitysten tulee olla samaistettavissa asianmukaisiin matemaattisiin määritelmiin [**18**: 145].



1/2	1/3	1/6	1/12	1/24
1	0	1	0	0
1	0	0	2	0
1	0	0	1	2
1	0	0	0	4
0	2	0	0	0
0	1	2	0	0
0	1	1	2	0
0	1	1	1	2
0	1	1	0	4
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

*Kuva 3: Teresan tekemä taulukko murtoluvuista, jotka vastaavat määrää 2/3 [**21**: 65]*

3.1.6 Taso (6): Havainnoiminen

Taulukoinnin pohjalta Teresa ilmaisi, että luvulle 2/3 pitäisi voida ennustaa täsmällinen määrä yhdistelmiä. Hän valitsi murtolukuja ja ykkösen ja teki kaavan, joka ennusti murtolukujoukon yhdistelmien määrää kysytylle murtoluvulle. Hän kokeili kaavansa toimivuutta tekemällä uusia taulukoita. [**21**: 169, 171]

Määritelmä: Pirie ja Kieren määrittelevät, että tässä vaiheessa henkilö on kykenevä tarkastelemaan rakentamaansa ymmärrystä ja järjestelemään sitä johdonmukaisesti [**20**: 9]. Muodollistaminen antaa edellytykset mielen tasolla reflektoida edelleen, suorittaa formaaleja toimintoja ja tehdä rinnastuksia esimerkiksi teoreemoihin. Tällaista ymmärryksen toimintaa kutsutaan mallissa *havainnoinniksi*. Esimerkin Teresa etsi tässä vaiheessa säännönmukaisuutta taulukkonsa yhdistelmille, jotka antavat kysytyn murtoluvun ja suoritti muodollista toimintaa, pyrkiessään ennustamaan niiden määrää. [**21**: 171] Tällä tasolla oppija kykenee myös ilmaisemaan havaintonsa muodollistetusta käsitteestä sanallisesti [**18**: 146].

3.1.7 Taso (7): Koostaminen

Myöhemmin Teresa pyrki kahden toverinsa kanssa koostamaan ja vahvistamaan *havaintojensa* perusteella tekemänsä yleistetyt kaavat ja oli näin tulossa kosketuksiin jakolukuteorian kanssa (partiton number theory). [**21**: 169, 171]

Määritelmä: Täyden ymmärryksen saamiseen, täytyy henkilön kyetä vahvistamaan ajattelunsa seuraukset. *Koostaminen*-tasolla henkilö mieltää formaalit havaintonsa teoriana. Tällöin hän on tietoinen miten hänen teoreemansa liittyvät toisiinsa ja etsii todistusta väittämilleen, käyttäen loogista perustelua tai järjestämällä ajatukset aksiomaattiseen muotoon. Tällä tasolla ollaan tekemisissä matemaattisen rakenteen kanssa, joka ei enää riipu aineellisista tai edes algoritmisistä toiminnoista. [**20**: 9; **21**: 171]

3.1.8 Taso (8): Innovoiminen

Henkilö, joka ymmärtää rationaaliluvut järjestäytyneenä lukujoukkona muotoa a/b, voisi siirtyä miettimään, minkälaisia ovat luvut a/b/c/d. Juuri tällainen kysymys sai Hamiltonin pohtimaan yhteyttä a+bi ja a+bi+cj+dk ja lopulta kehittämään kvaterniot (quaternions), sen jälkeen kun hänellä oli kokonaan rakentunut ymmärrys kompleksiluvuista. [**18**: 147; **21**: 171]

Määritelmä: Korkeimmalla ymmärryksen tasolla (tietystä käsitteestä) oppija voi toimia vapaana toimijana ja siirtyä miettimään vastausta kysymykselle ”entä jos?” [**18**: 146; **20**: 9]. Tämä uloin taso mallissa on *innovoiminen*. Tällä tasolla henkilö omaa täysin rakentuneen ymmärryksen annetusta aiheesta ja on valmis näkemään uusia näkökohtia, jotka voivat olla lähtökohtana kokonaan uuden käsitteen rakentumiselle. Tällöin hän irtautuu aikaisemmista käsitteistä, jotka johtivat kyseiseen ymmärrykseen [**21**: 171]. Tästä tasosta huomautettiin aiemmin, että Pirie ja Kieren eivät halua viitata siihen, etteikö oppija tarvitsisi kekseliäisyyttä kaikilla tasoilla [**20**: 9].

Edellä esitetty tutkimusesimerkki keskittyi yksittäiseen 12-vuotiaaseen henkilöön ja ymmärrykseen murtoluvuista. Pirie ja Kieren esittävät kuitenkin edelleen, että heidän hypoteettisten tasojen mallinsa soveltuu kuvaamaan erityisen henkilön, missä tahansa erityisessä matematiikan aihepiirissä tapahtuvaa ymmärryksen kasvua, kaikissa ikäryhmissä. Tutkimuksia on tehty 7-vuotiaasta yliopistoikäisiin, joten niissä ikäryhmissä tiedetään teorian ainakin pätevän. [**12**: 218; **21**: 170, 185]. Esitän tutkimusesimerkkejä eri aihepiireistä ja ikäryhmistä tämän tutkielmani edetessä.

4 Teoriaa täydentäviä ominaisuuksia ja huomioita

Pirie ja Kieren täydentävät teoriaansa, esittämällä termit *'ei tarvitse'- tai kynnysrajat*, *toimimisen ja ilmaisemisen toisiaan täydentävyys*, *takaisin paluu*, *käsitteen tihentyminen*, *väliintulot* ja *kokoaminen* ('Don't need' or Threshold Boundaries, The Complementarities of Acting and Expressing, Folding Back, Thickening of a Concept, Interventions, Collecting). He esittävät myös teorian tärkeän sovelluksensa *kartoittamisen tai ymmärtämisen polut* (Mapping or Pathways of Understanding) [**12**: 218; **14**: 68; **19**: 234; **21**: 172-186; **22**: 128]. Ennen näiden ominaisuuksien tarkempien määritelmien esittämistä pyrin jälleen ensin havainnollistamaan niiden sisältöä valittujen tutkimusesimerkkien avulla. Koska *kartoittamisen* avulla voidaan havainnollistaa erityisesti teorian piirrettä *takaisin paluu*, esitetään tämä sovellus ennen sitä.

4.1 Kynnysrajat – muista tasoista riippumaton toiminta

Kuvassa 2 nähdään, että ymmärryksen tasot on eroteltu toisistaan vielä kaksittain paksunnetuilla viivoilla. Kyseessä on *'ei tarvitse'- tai kynnys-rajat*. [**12**: 218] Aiemmin esitetyn tutkimusesimerkin Teresa kykeni tasolla (5) täyttämään taulukkoa numeerisesti, ilman tarvetta käsillä olevan välineistön käyttöön. Tässä vaiheessa hän oli ylittänyt *ominaisuuden huomaamisen* ja *muodollistamisen* välisen *kynnysrajan*.

'Ei tarvitse' -rajojen sisällä, oppijan ei tarvitse olla sidoksissa aikaisempiin ymmärryksen muotoihin, vaikkakin ne siirtyvät oppijan mukana seuraavalle tasolle ja niihin on tarvittaessa helppo olla yhteydessä. Tämä tarkoittaa, että henkilö voi työskennellä esimerkiksi abstrahointitasolla pelkkää symbolikieltä käyttäen (mikä katsotaan olevan nimenomaan yksi matematiikan hienouksista), tarvitsematta mielessään tai konkreettisesti olla kuvien kanssa tekemisissä. Tämä ei kuitenkaan estä henkilöä siirtymästä kuvantamisen tasolle, jos tarpeen.

Ensimmäinen kynnysraja sijaitsee *kuvan luomisen* ja *kuvan omaamisen* välillä. Henkilö jolla on mielen tasolla muodostettu kuva käsitteestä, ei tarvitse erityistä toimintaa sen tekemiseksi, mutta henkilö, joka pyrkii näkemään ominaisuuksia kuvissa, työskentelee edelleen mielikuvien parissa.

Toinen kynnysraja sijaitsee *ominaisuuden huomaamisen* ja *muodollistamisen* välissä. Kuten yllä esitettiin, henkilö voi käyttää formaalia matemaattista kieltä, pohtimatta sen enempää käsitteiden aineellisempaa merkitystä. *Havainnoiminen* taas kohdistuu *muodollistettuihin* näkökohtiin.

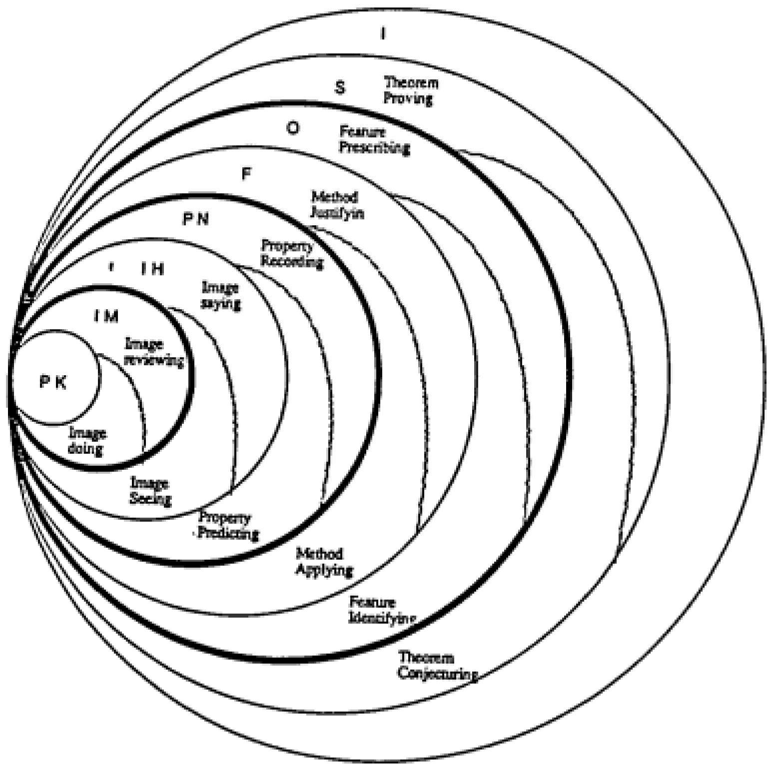
Kolmas kynnysraja on *havainnoimisen* ja *koostamisen* välissä. Henkilön, jolla on kokonaan muodostunut matemaattinen rakenne käsitteestä, ei tarvitse pohtia niitä syitä, jotka siihen johtivat. [**21**: 172-173]

4.2 Toimiminen ja ilmaisu

Pirie ja Kieren esittävät, että ymmärrys kasvaa aluksi toimimisen ja sitten ilmaisun kautta ja yleisimmin edestakaisen liikkeen myötä näiden välillä. Tätä piirrettä kutsutaan teoriassa *toimimisen ja ilmaisemisen toisiaan täydentävyydeksi*. *Toimiminen* käsittää kaiken aiemman ymmärryksen ja on siten jatketussa yhteydessä siihen. Toimiminen muotoutuu näin ollen osittain aikaisemman ymmärryksen pohjalta. *Ilmaiseminen* on väline nimenomaiselle tasolle. *Toimiminen* voi olla niin mielen kuin aineellisella tasolla tapahtuvaa reflektiivistä toimintaa, jonka luonne *ilmaistaan* sitten muille tai itselle suullisesti tai kirjallisesti.

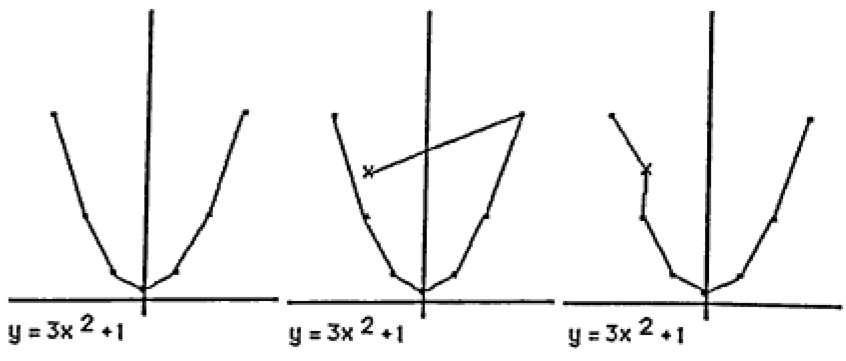
Kaikki aiemmin esitetyt tasot, *alkeellista tietämistä* ja *innovoimista* lukuun ottamatta on jaettu vielä näiden perusteella kahteen osaan *toimiminen/ilmaiseminen* kuvan 4 mukaisesti. Niistä käytetyt nimitykset ovat *kuvan tekeminen*/*tarkasteleminen*, *kuvan näkeminen/lausuminen*, *ominaisuuden ennustaminen*/*tallentaminen*, *menetelmän soveltaminen*/*perusteleminen*, *piirteen tunnistaminen*/*määrääminen* ja *teoreeman olettaminen*/*todistaminen* (Image Doing/Reviewing, Image Seeing,/Saying, Property Predicting/Recording, Method Applying/Justifying, Feature Identifying/Prescribing, Theorem Conjecturing/Proving).

Seuraava tutkimusesimerkki havainnollistaa tätä teorian piirrettä tasoilla *kuvan luominen*, *kuvan omaaminen* ja *ominaisuuden huomaaminen*.



*Kuva 4: Toimiminen/ilmaiseminen [**21**: 176]*

14-vuotiaat oppilaat olivat ensimmäistä kertaa tekemisissä toista astetta olevien funktioiden kanssa. He piirsivät koordinaatistoon eri toisen asteen funktioita, jotka olivat ylöspäin aukeavia paraabeleja. Opettaja tarjosi heille sitten lisättäväksi pistettä, joka poikkesi U-muodosta, jolloin tuotettiin mm. seuraavan laisia kuvassa 5 esitettyjä piirroksia:



*Kuva 5: Oppilaiden paraabeliin lisäämä ylimääräinen piste [**21**: 178]*

Keskimmäinen tuotos kertoo oppilaista, jotka olivat *kuvan tekijöitä*. Heille ei ollut vielä muotoutunut käsitystä vallitsevasta muodosta. Viimeinen kuva taas kertoo *kuvan tarkastelijoista*, joilla ei vielä ollut selvää mallia kuvasta, mutta jotka rakensivat kuvansa loogisesti sen ajattelun pohjalta, joka heillä oli kuvia tehdessä. Tutkijat esittävät, että muodostaakseen kestävän ymmärryksen, pelkkä *kuvien tekeminen* ilman ilmaisua ei riitä.

Nähdessään kuvan poikkeavan edellisistä, osa oppilaista siirtyi *kuvan näkemisen* tasolle ja edelleen *kuvan lausumisen* tasolle. Oppilaat ilmaisivat, että kaikkien kuvaajien pitäisi olla U-muotoisia (käsitys nähtävistä kuvista) tai että kyseiselle pisteelle on jo toinen arvo (käsitys pisteiden ainutlaatuisuudesta). Tästä nähdään myös, että kuvilla ei viitata pelkästään nähtäviin kuviin, kuten kappaleessa 3.1.2 esitettiin.

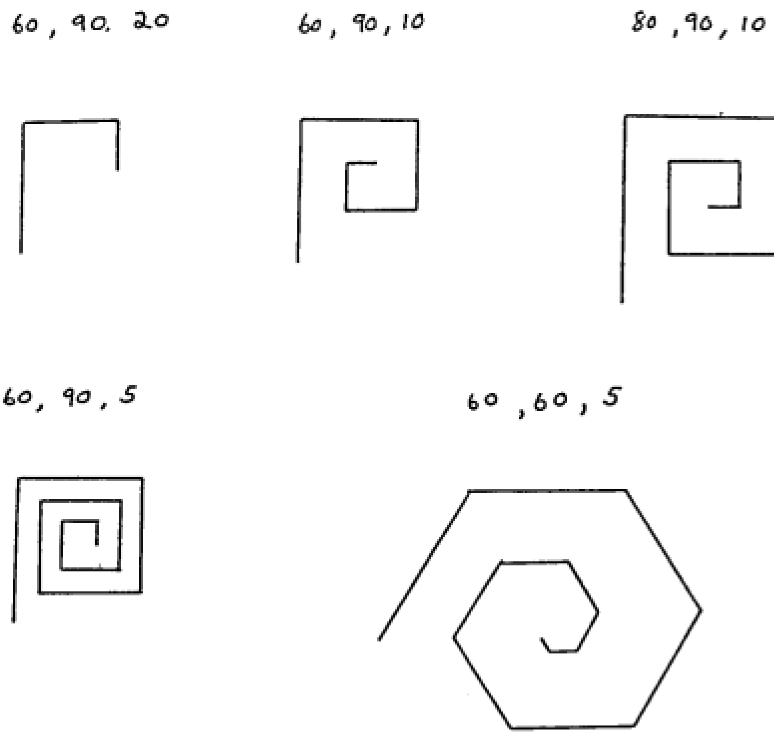
Eräs oppilas siirtyi *ominaisuuden huomaamisen* tasolle, havaitessaan miten paraabelin leveys muuttui sen mukaan, mikä kerroin oli termin x^2 edessä (vaikkakin hänen tekemänsä johtopäätökset olivat vielä tässä vaiheessa osittain virheellisiä). Opettajan *väliintulo* muutti tämän *ominaisuuden ennustaminen* -toiminnan *ilmaisuksi*, jota kutsutaan *ominaisuuden tallentamiseksi*. (Teorian piirrettä *väliintulot* käsitellään kappaleessa 4.5.) Tutkijoiden mukaan *ominaisuuksien huomaamisen* toiminta on yleensä niin ohikiitävä hetki, että ilman asianmukaista ilmaisua, oppija ei muista sitä enää myöhemmin. Näin ollen siirtyminen kuvien yläpuolelle ei tapahdu onnistuneesti.

Vaikka uudempaa tutkimusesimerkkiä muilta tasoilta ei ole esitetty, Pirie ja Kieren ovat vakuuttuneita, että toimimisen ja ilmaisemisen toisiaan täydentävyys vaaditaan ja ilmenee myös niillä. He esittävät myös, että opettajien ja tutkijoiden olisi hyödyllistä tarkastella oppilaidensa tietämystä myös tarkastelemalla heidän näkemiään ja lausumiaan kuvia. [**21**: 175-181]

4.3 Kartoittaminen - ymmärryksen kasvun havainnollistaminen

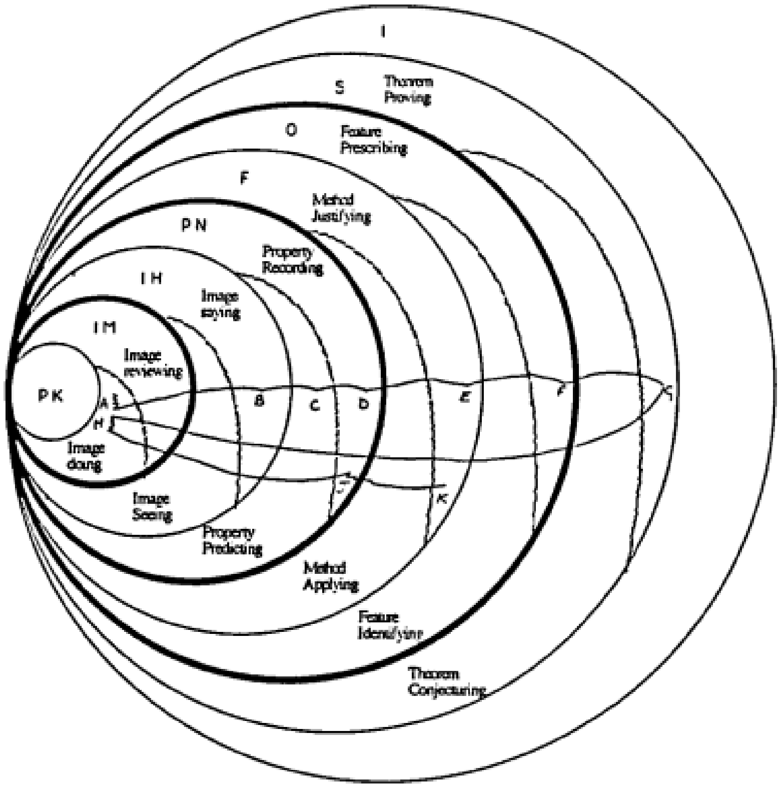
Pirie ja Kieren tarjoavat malliaan välineeksi, jolla oppilaan matemaattinen käyttäytyminen yksittäisen matemaattisen tehtävän parissa voidaan *kartoittaa*. Oppilaan matemaattisen tiedon järjestäminen muodostaa näin hänen erityisen *ymmärryksen polkunsa*.

Pirie ja Kieren havainnollistivat tätä teoriansa sovellusta tutkimusesimerkillä, missä matemaattisen alan yliopisto-opiskelijoita pyydettiin rakentamaan geometrisia muotoja tietokone-ohjelman avulla. Tietokoneelle kirjattiin kolme parametria, joiden perusteella ohjelma piirsi muodon. Opiskelijoiden tehtävänä oli päätellä, mitä kukin parametri sai aikaan ja minkälaisia muotoja niillä pystyttiin piirtämään kuvan 6 esimerkin mukaisesti. Kuvissa 7 ja 8 on kahden eri oppilaan *kartoitus* ymmärryksen muotoutumisesta.

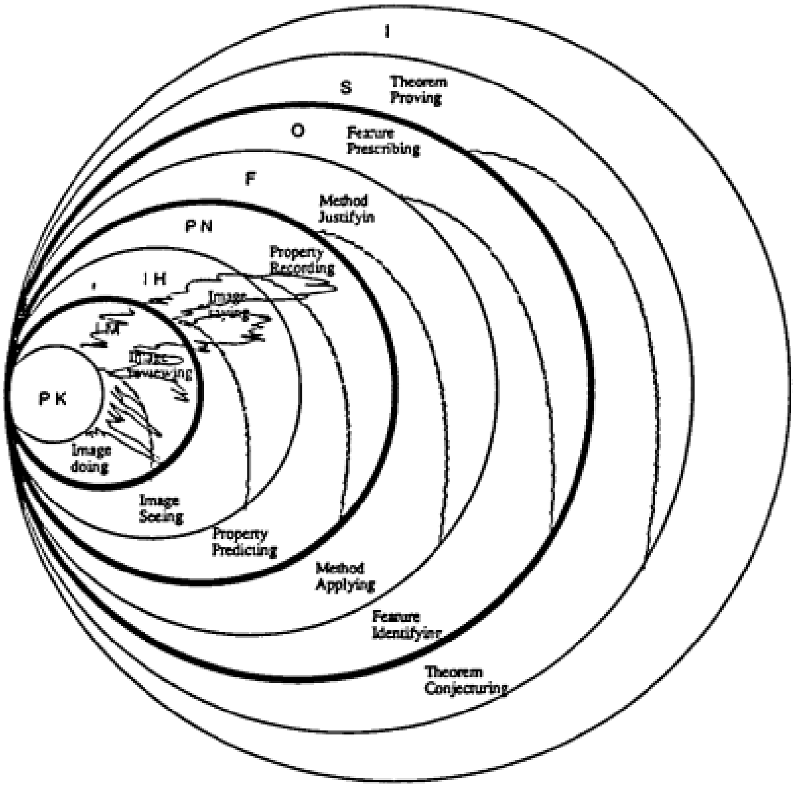


*Kuva 6: Tutkimusesimerkki, kolme parametria, joiden mukaan tietokone piirsi kuvan [**21**: 183]*

Ensimmäisen esimerkin opiskelijan työskentely ja ymmärryksen karttuminen tapahtui ensin melko suoraviivaisesti (kuvassa 6 kohdat A-K). Vain muutaman kuvan piirtämisen jälkeen (A) hän osasi ilmaista kuvien muodon (B) ja miten parametrit vaikuttivat muotojen ominaisuuksiin (C-D): ensimmäinen parametri määräsi tietokone-ohjelman piirtämän janan pituuden, seuraava kulman, missä piirros kääntyi oikealle ja kolmas parametri, kuinka paljon janan pituus lyheni käännyttäessä. Tuloksena oli aina spiraalinmuotoinen kuvio.



*Kuva 7: Ymmärryksen polku, esim. 1 [**21**: 184]*



*Kuva 8: Ymmärryksen polku, esim. 2 [**21**: 187]*

Tämän jälkeen opiskelija siirtyi kirjoittamaan muistiin havaintonsa ja esitti lyhyen todistuksen teorialleen. Tässä vaiheessa opettaja puuttui kuitenkin työskentelyyn, piirtämällä paperille neliön ja kysymällä, onko sen piirtäminen parametrien avulla mahdollista. Koska vastaus oli kieltävä, opettaja asetti salaa parametrien arvot ja näytti ohjelman piirtämän neliön tietokoneen ruudulla. Opiskelija näin ollen palasi piirtämään kuvioita tietokoneen äärelle. Pian hän löysi tämän uuden ominaisuuden, triviaalin ehdon, missä viimeinen parametri asetettiin nollaksi, minkä jälkeen hän *muodollisti* tämän ominaisuuden ilmaisemalla sen ääneen.

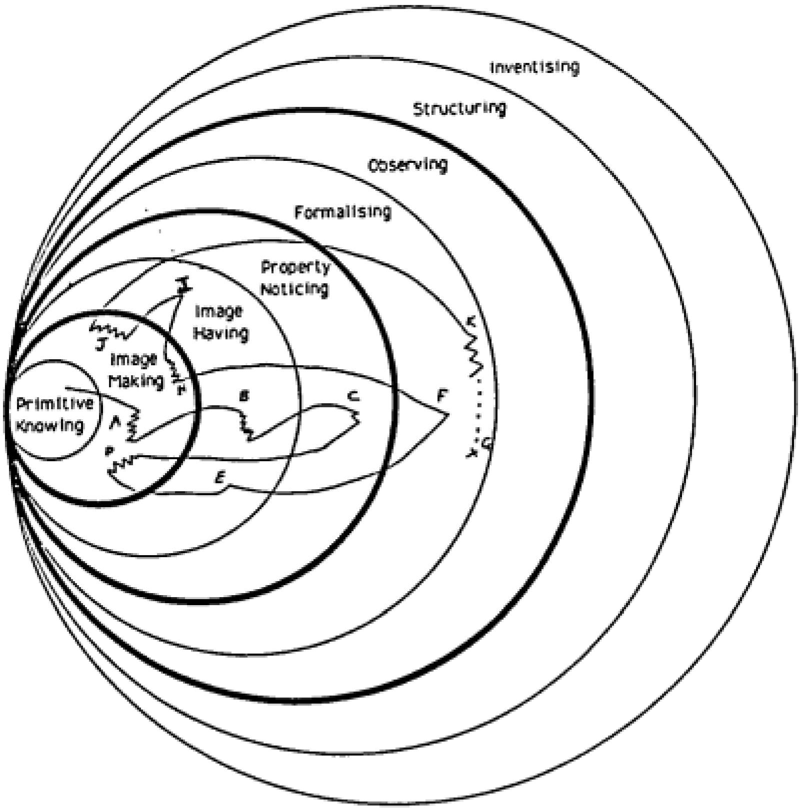
Toisen esimerkin oppilasparilla oli huomattavasti suurempia vaikeuksia nähdä yhteys parametrien ja piirtyvän kuvan välillä, huolimatta lukuisista kokeiluista ja toistoista, sekä opettajan *väliintuloista* (kuva 8). Löydettyään joitakin ominaisuuksia, joita he yrittivät yleistää, he palasivat piirtämään kuvia varmentaakseen tai hylätäkseen tekemänsä ennustukset.

Pirie ja Kieren painottavat jälleen, että he eivät väitä tietävänsä, mitä oppilaan ajatuksissa tarkalleen tapahtuu. Sen määrääminen, millä hypoteettisella tasolla oppilas milloinkin on, tapahtuu tutkijan tai opettajan havaintojen pohjalta. Kyseisestä tutkimusesimerkistä korostui myös se, että eri oppilailla ymmärryksen polut ovat yksilöllisiä. Pirie, Kieren ja Calvert sanovat myös, että polut riippuvat aihepiiristä ja vallitsevista tilanteista.

Pirie ja Kieren esittävät, että tutkimalla näitä oppilaiden eri *ymmärryksen polkuja* eri aihepiireissä voidaan saada psykologisesti ja pedagogisesti arvokasta näkemystä siitä, miten oppiminen muotoutuu oppilailla. *Kartoittaminen* voi olla hyödyllinen väline suunniteltaessa oppitunteja ja tutkittaessa matematiikan oppimisen kehitystä oppilailla. [**12**: 218; **14**: 67; **21**: 170-171, 182]

4.4 Takaisin paluu ja ymmärryksen täydentyminen

P-K-teorian yksi keskeisin ominaisuus on *takaisin paluu*. Esimerkkikuvista 7 ja 8 nähdään jo aiemmin korostettu piirre, että matemaattinen ymmärrys ei kasva lineaarisesti, vaan paluu alemmille tasoille voi tapahtua miltä tahansa ylemmältä tasolta, kun oppijan on tarpeen laajentaa tai muokata kasvavaa, mutta vielä puutteellista ymmärrystään käsitteestä. Tämän edestakaisen liikkeen myötä oppijan ymmärrys uudelleen rakentuu. Pirie ja Kieren katsovat tämän olevan myös välttämätöntä ulompien tasojen ymmärryksen muotoutumiselle. Oppijan on mahdollista saavuttaa *takaisin paluiden* kautta syvällisempi ymmärryksen muoto käsiteltävästä aiheesta, mitä kutsutaan teoriassa *käsitteen tihentymiseksi*. [**12**: 218; **19**: 234; **21**: 173]



*Kuva 9: Katjan ymmärryksen kartoittaminen [**21**: 186]*

Kuvassa 9 esitetään 10-vuotiaan Katjan ymmärryksen *kartoitus*, kun hän pyrkii luomaan käsitystä murtoluvuista. Kuvassa on hyvin esitetty, miten opettaja olisi voinut tarjota Katjalle pisteeseen G puutteellisen tiedon murtoluvuista, mutta sen sijaan hän *palauttaa* kysymyksellään Katjan *takaisin* kuvantamisen tasolle, jolloin Katja saattaa itse muodostaa ymmärryksen *muodollistamisen* tasolle. Pirie ja Kieren pitävät hyvin tärkeänä, että henkilö muodostaa itse tällaisen yhtenäisen ymmärryksen ketjun, sillä silloin hän kykenee käyttämään tietoaan myös myöhemmin tai löytämään sen tarvittaessa uudelleen. He ennustavat lisäksi, että henkilö ei pysty menestyksekkäästi rakentamaan uutta tietoa ymmärryksen varaan, joka ei ole kytköksissä aikaisemman ymmärryksen muotoon ja joka ei siten juonna juuriaan aina kuvien luomisen tasolle. [**21**: 174, 185-186]

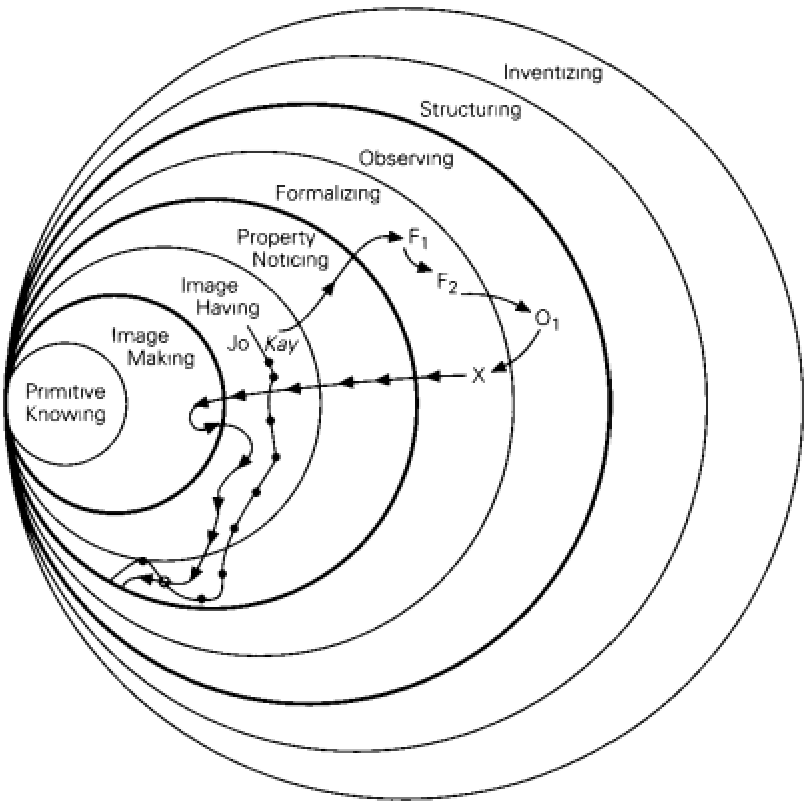
Esimerkistä huomataan myös, että oppijan muodostama kuva voi olla aluksi virheellinen ja puutteellinen, mutta hän saattaa silti edetä ulommille ymmärryksen tasoille. Pirie ja Kieren huomauttavat, että virheelliset lopputulemat kuuluvat olennaisesti matemaattisen ymmärryksen kasvuun. Edestakaiset liikkeet mallin tasolta toiselle muovaavat ja korjaavat jatkuvasti muotoutuvaa ymmärrystä. Näin ollen myös oppilaan sijoittaminen jollekin tasolle ei tarkoita, että hänen ymmärryksensä olisi juuri siihen saakka valmiiksi rakentuneena, vaan Pirie ja Kieren näkevät ymmärryksen kasvun jatkuvana prosessina. [**21**: 180-181]

4.5 Väliintulot – vuorovaikutus ympäristön kanssa

Pirie ja Kieren selittävät kolme tapaa, miten opettaja voi puuttua oppilaan ymmärryksen rakentumiseen. Nämä ovat *eteenpäin kannustava*, *takaisin palauttava* ja *oikeaksi vahvistava väliintulo* (Provocative, Invocative, Validating Intervention). Tärkeää on kuitenkin huomata, että vaikka opettaja pyrkisi esimerkiksi *kannustamaan* oppilasta siirtymään ulommalle ymmärryksen tasolle, oppilas saattaa ottaa sen *vahvistavana* huomautuksena ja jatkaa työskentelyä kyseisellä tasolla. Oppilaan oma reaktio siis kuitenkin määrää lopulta *väliintulon* luonteen. Opettajan puuttuminen kuitenkin vaikuttaa oppilaan *takaisin paluuseen*, edestakaisiin liikkeisiin tasojen välillä ja siten oppilaan *ymmärryksen polkuun*. [**14**: 68]

Kieren, Pirie ja Calvert ovat tutkineet matemaattisen ymmärryksen kasvua vuorovaikutuksessa. Seuraavassa esitetään tutkimusesimerkki heidän artikkelistaan.

Yliopisto-opiskelijat Jo ja Kay työskentelevät vuorovaikutuksessa annettujen tehtävien parissa. Kuvassa 10 on esitetty heidän ymmärryksensä kartoitukset. Heidän tapansa käsitellä annettuja ongelmia on hyvin erilainen, Jo käyttää hyväkseen *muodollisia* keinoja, kun taas Kay käyttää hyväkseen *kuvia*. Koska heidän lähestymistapansa on näin ollen hyvin erilainen ja heillä ei ole samanlaista perustaa ymmärrykselle, heidän on hyvin vaikea kommunikoida keskenään ja löytää sitä kautta apua kohtaamiinsa ongelmiin. Kuitenkin Kayn vaikutuksesta (*väliintulosta*), Jo päätyy lopulta myös tekemään *takaisin paluun kuvan luomisen* tasolle. Tutkijat painottavat, että vaikka heidän polkunsa päätyvät samaan paikkaa, heidän jaettu ymmärryksensä ei ole kuitenkaan sama, vaan tässä vaiheessa heillä on yhteinen perusta kommunikoinnille. Lopuksi Jon ymmärrys rakentui myös muodollistetuista käsitteistä, kun taas Kayn ymmärrys keskittyi pelkkiin kuviin.



*Kuva 10: Tutkimusesimerkki Jo ja Kay, ymmärryksen kartoitukset [**12**: 227]*

Tästä tutkimusesimerkistä nähdään, miten opiskelijan ymmärrys rakentuu myös vuorovaikutuksen seurauksena ja että yksilöllinen ymmärrys samoin vaikuttaa keskinäisen vuorovaikutuksen muotoutumiseen. Kieren, Pirie ja Calvert esittävät edelleen, että ymmärrys karttuu toimintana myös yhteydessä ympäristöön, muihin henkilöihin ja oppimateriaaliin ja että henkilön toiminta uudelleen muotoutuu myös niiden vaikutuksesta. [**12**: 209, 223-229]

Myös seuraavan luvun tutkimusesimerkeillä tutkijat halusivat näyttää, miten lyhytkin keskustelu saa aikaan muutosta henkilön ajattelussa ja painottaa opettajan tekeminen *väliintulojen* tärkeyttä tarvittavan ymmärryksen saavuttamisessa [**23**: 133, 143-144].

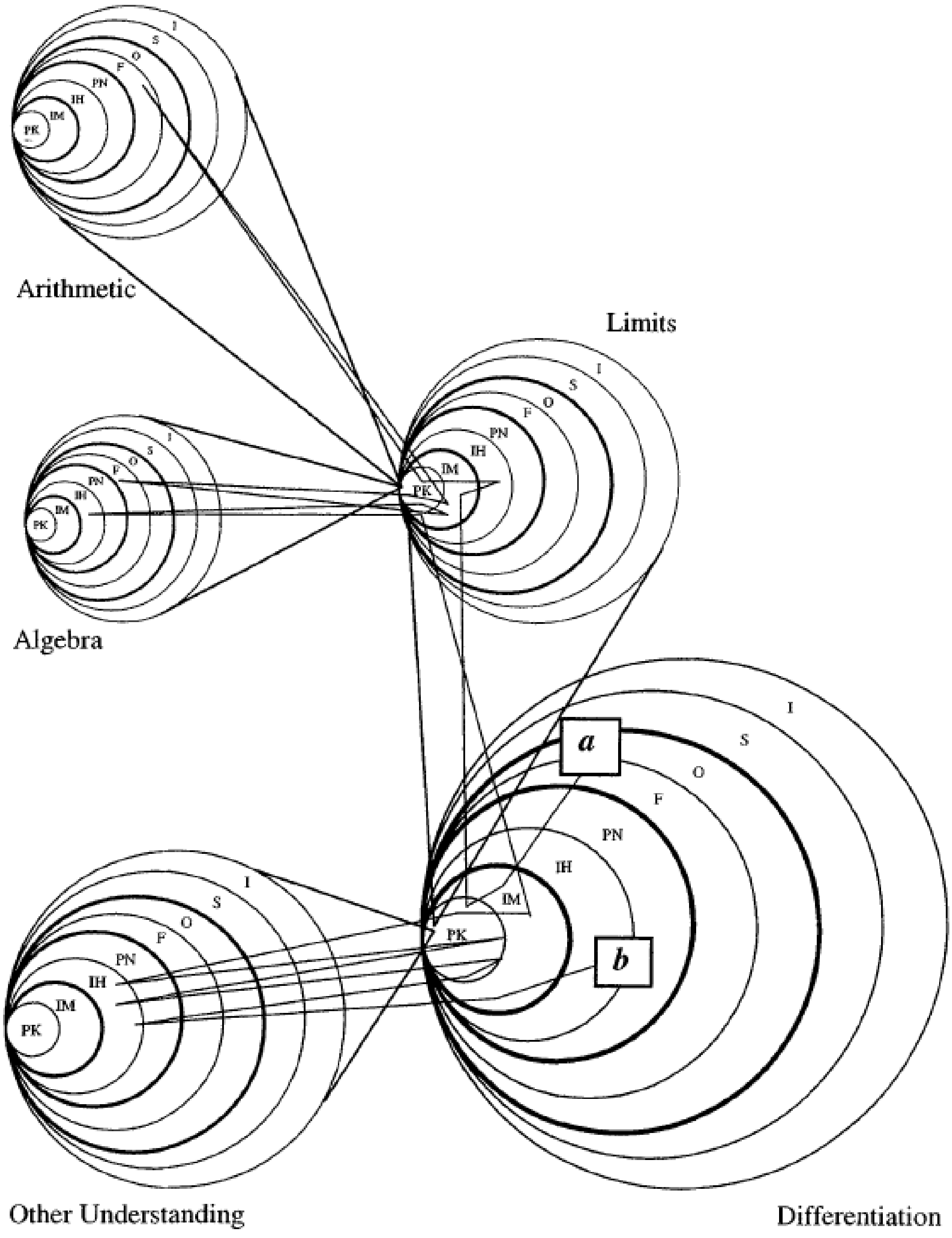
4.6 Kokoaminen – aikaisemman tiedon uudelleen käyttäminen

Koska alkeellisella tietämisellä ei siis tarkoiteta alhaista matemaattista tietoa, ei myöskään ulompien tasojen tietämyksellä viitata korkeaan matemaattiseen ymmärrykseen. Näin ollen koko aikaisempi matemaattinen tietämys tai sen osa voi muodostaa jälleen taustatiedot eli P-K-mallin ensimmäisen tason, siirryttäessä opiskelemaan uutta käsitettä. Tämä pätee myös kääntäen, Pirie ja Kieren esittävät, että siirryttäessä käsittelemään korkeampaa matemaattista ymmärrystä, täytyy käsitteet prosessoida ensin kuvien tasolla ja vasta sitten henkilö on valmis etsimään sopivaa yleistä muotoa ja teoriaa todistuksineen. [**21**: 172, 188] Kieren, Pirie ja Calvert esittävät myös, että matemaattinen ymmärrys ei kasva hierarkkisesti, vaan sen eri osat ja aihepiirit voivat täydentyä ja muotoutua paloittain [**21**: 229]. Seuraavat tutkimusesimerkit havainnollistaa, miten henkilö kerää tietämystään, pyrkiessään laajentamaan ymmärrystään eri aihepiireistä.

Alakouluikäinen Paolo pyrki ratkaisemaan vähennyslaskun 93 - 47. Hän ei kuitenkaan muistanut välittömästi, miten lainaaminen allekkainlaskussa tapahtui, joten hän tarkisti asian oppikirjastaan. Pirie ja Martin selittävät, että Paolo oli heti selvillä tarvitsemastaan tiedosta, mutta hänen täytyi hakea se uudelleen. Tällaista *takaisin paluuta* tasolle *alkeellinen tietäminen*, kutsutaan teoriassa *kokoamiseksi*. [**23**: 132-133]

Toisessa esimerkissä 14-vuotiaan oppilaan tehtävänä oli laskea kakunpalan pinta-ala. Parinsa kanssa hän huomasi tarvitsevansa ympyrän pinta-alaa, jonka kaava löytyi oppikirjasta. Koska kaava ei kuitenkaan sopinut suoraan tehtävän laskemiseen, täytyi oppilaan käyttää tätä aikaisempaa tietoa uudella tavalla. Hänen piti luoda kuva sektorista, joka on osa ympyrää. Pirie ja Martin havainnollistavat tällä esimerkillä, miten henkilö ei voi aina käyttää aikaisempaa tietoaan sellaisenaan, edetäkseen uuden käsitteen parissa. [**23**: 133-135]

Kolmannessa tutkimusesimerkissä kaksi 17-vuotiasta oppilasta työskenteli tehtävän $\lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h+2h^2}$ parissa. Sijoittaessaan h:n paikalle nollan, he päätyivät $\frac{0}{0}$ muotoon. Aikaisemman tietonsa pohjalta, he miettivät, olisiko vastaus nolla vai ääretön. Toinen oppilaista Ann, käytti myös oppimaansa aritmetiikkaa mietinnöissään ja ehdotti vastauksen olevan yksi. Tämän jälkeen opettaja teki *väliintulon* ja kysyi, voisiko h:n alkuperäistä esitystä yksinkertaistaa. Tällöin oppilaat siirtyvät *kokoamaan* aikaisempaa tietämystään algebrasta. Haettu ymmärrys osoittautui kuitenkin epätäydelliseksi tai epäsopivaksi, joten parien keskinäisen vuorovaikutuksen seurauksena he pyrkivät muistamaan aikaisemmin oppimiaan asioita algebrasta ja muista aihepiireistä. He *kokosivat* aikaisempaa tietämystään muistelemalla sekä käsillä olevista aikaisemmista oppikirjoista ja muistiinpanoistaan. Lopuksi opettaja teki *väliintulon*, jonka seurauksena Ann pystyi nopeasti ja helposti *kokoamaan* vielä puuttuvan tiedonpalasen. Annin ymmärryksen polku on esitetty kuvassa 11. [**23**: 135-141]



*Kuva 11: Oppilaan Ann ymmärryksen kasvun kartoitus differentioinnista [**23**: 141]*

Tämä tutkimusesimerkki kertoo miten monimutkainen tapahtuma ymmärryksen dynaaminen kasvu on. *Kokoamista* voi joutua tekemään useistakin aikaisemmista aihepiireistä ja käsitteistä, ennen kuin varsinainen tehtävä tai käsite ja siten ymmärrys siitä etenee. Kuitenkin tästä ymmärrystapahtumasta voidaan tehdä nähtävä esitys P-K-mallin avulla. Esimerkki havainnollistaa myös sen tosiasian, että P-K-teorian sisäkkäisten tasojen esitystä ei pidä ottaa liian yksinkertaistettuna mallina teoriasta, vaan apuvälineenä, jonka avulla ymmärryksen kasvua voidaan visualisoida. [**23**: 142]

Kokoamisella ei tässä tarkoiteta *paluuta takaisin* sisemmän tason toimintojen pariin, missä ymmärrystä rakennetaan uudelleen. Kyseessä on tapahtuma, missä oppija valikoiden noutaa puuttuvan aikaisemman tiedon tai ymmärryksen, joka ei ole hänellä heti saatavilla. Tutkimusesimerkissä Paolon luokkatoverin ei tarvinnut *palata takaisin* aikaisemman tiedon pariin ratkaistessaan tehtävää 93 – 47, vaan hän osasi käyttää tarvittavaa menetelmää suoraan tarkistettuaan sen oppikirjasta. Pirie ja Martin sanovat, että suurimmalla osalla heidän tutkimistaan oppilaista, osa sisempien tasojen ymmärryksestä on muodollistunut heidän mieleensä ja on sieltä siksi helposti saatavilla. Tuon tietämyksen suhteen he eivät tarvitse *kokoavaa takaisin paluuta*. Nämä automatisoituneet prosessit muodostavat henkilölle heidän itsensä tiedostamattomat työkalut, joita he käyttävät tarvittaessa. [**23**: 132, 142]

Koska *kokoaminen* on kuitenkin osa matemaattisen ymmärryksen kasvua, Pirie ja Martin sanovat, että se pitäisi tehdä helpommaksi. Edelliset tutkimusesimerkit osoittavat, miten oppilaat ovat tietoisia siitä, että he tarvitsevat jonkin tietyn palasen aikaisempaa ymmärrystä, mutta heidän on vaikea löytää sitä esimerkiksi aikaisemmasta oppimateriaalista. Kuitenkin opettaja, joka seuraa oppilaiden keskinäistä vuorovaikutusta ja pyrkimystä edetä annetun ongelman parissa, on paras mahdollinen apu tarvittavan tiedonpalan löytämiseksi. Etenkin, kun tämä opettaja ymmärtää, että oppilailla on erilaisia tapoja käsitellä aikaisempaa matemaattista tietämystään. Tämä nähtiin oppilaan Ann kohdalla, kun hän lopuksi opettajan avustuksella pystyi nopeasti muistamaan tarvittavan tiedon. Koska opettajat ovat siten avainasemassa helpomman *kokoamisen* toteuttamiselle, Pirie ja Martin sanovat, että opettajan tekemät *väliintulot* ovat erityisen merkittävässä asemassa.

Pirie ja Martin ovat pohtineet, kuinka puuttuvia tai suoria opettajien tekemien *väliintulojen* pitäisi olla. He esittävät, että *kokoamisen* tapauksessa ei välttämättä ole epäsopivaa johdattaa oppilasta suoraan siihen mitä he tarvitsevat. Tällainen suora johdattaminen on heidän mukaansa verrattavissa siihen, että oppilaiden sallitaan käyttää laskinta tehtävien ratkaisussa. Silloin he voivat keskittyä varsinaisiin menetelmiin paremmin. Pirie ja Martin sanovat, että oppilaiden on kuitenkin tärkeää kehittyä myös *kokoamisen* taidossa. Aikaisemman tiedon *kokoaminen* on tärkeä työkalu uusien käsitteiden selvittämisessä ja tehtävien ratkaisussa, kuten *takaisin paluukin*, ja ilman sitä oppilas ei voi toimia itsenäisesti. [**23**: 132, 142-144]

5 Teorian soveltaminen

Tässä luvussa pyrin laajentamaan näkökulmaa siitä, missä aihepiireissä, ikäryhmissä ja millä osaamistasoilla P-K-teoriaa on käytetty, sekä mitä osia siitä muut tutkijat kuin Pirie ja Kieren ovat huomioineet tutkimuksissaan. Esitän myös mitä lisähuomautuksia teoriasta voidaan johtaa.

Tässä luvussa esitän myös teoriasta johdetun opetusmallin, joka on ollut merkittävässä asemassa Uuden-Seelannissa. Koska P-K-teoria puoltaa hyvin vahvasti konstruktiivista tiedon rakentamista, esitän vielä luvun lopuksi von Glaserfeldin esittämät perustelut sille, miten konstruktiiviseen ymmärryksen kasvuun tähtäävä opetus synnyttää oppilaassa luonnollisen motivaation matematiikan oppimista kohtaan. P-K-teoriaan pelkästään konstruktiivisena teoriana tehtyjä viittauksia en kuitenkaan luettele tässä kirjoitelmassani, niiden suuren lukumäärän vuoksi.

Pirie ja Kieren sanovat itse, että teorian lopullinen arvo on siinä, miten sitä voidaan soveltaa [**21**: 77]. Kokonaisuudessaan liitän tämän luvun P-K-teorian piirteeseen *takaisin paluu*, sillä uusien esimerkkien ja näkökulmien valossa lukijan on mahdollista täydentää jo muodostunutta käsitystä teorian sisällöstä.

5.1 Malli ja ominaisuudet eri tutkimuksissa

Pirie ja Martin tutkivat artikkelissaan [**15**] toisen asteen yhtälön käsitteellistämistä, jossa käytettiin apuna tietokonesovellusta. Tutkimushenkilöiksi oli valittu kaksi matemaattisesti hyvin menestynyttä 15-vuotiasta oppilasta. Tämä tutkimus nosti esille, miten tietokonesovelluksen avulla ja siten toisaalta graafisilla laskimilla voidaan helpottaa *kuvien luomista*. Koska oppilaat saattoivat lisäksi kommunikoida keskenään eli käyttää *ilmaisua* ja keskinäistä *vuorovaikutusta* ymmärryksensä rakentamiseen, opettajan tarjoamaa tukea ei juurikaan tarvittu. Helpotetun kuvantamisen ansiosta, pari saattoi myös keskittyä paremmin *huomaamaan ominaisuuksia* piirretyistä kuvaajista. [**15**: 171, 175, 184]

Pirie ja Martin ovat tutkineet myös lineaarisia yhtälöitä, keskittyen vähemmän lahjakkaisiin yläkoulutason oppilaisiin. Tutkimuksestaan he tekivät tärkeän johtopäätöksen. Opettajan pyrkiminen vain yhdenlaisen *kuvan luomiseen* oppilailla voi vaikuttaa riskiteolta, sillä oppilailla on yksilöllinen tapa rakentaa matemaattista ymmärrystä ja yksilöllinen tapa mieltää esitettyjä asioita. Kuitenkin, jos valitun kuvan juuret ovat syvällä siinä, mitä käsitteellä matematiikassa tarkoitetaan, valintaa voidaan pitää riittävän hyvänä. [**22**: 177]

Dor Abrahamson et al. tekivät tutkimuksissaan [**1**; **2**; **3**; **4**; **5**] myös havainnon, että puutteellinen ymmärrys käsitteestä saattaa johtua puutteellisesta kuvasta, jonka oppilas on siitä muovannut. Abrahamson yhdessä kollegoidensa kanssa vastasi tähän puutteeseen tietokonesovelluksen avulla, keskittyen siinä visuaalisiin kuviin eri matematiikan käsitteistä. [**3**: 299]

Graham, Pfannkuch ja Thomas huomioivat tutkimuksessaan, miten ensimmäinen askel monipuolisen kognitiivisen ymmärryksen rakentamiseksi ja joka on tarpeen tilastollisessa ajattelussa, tapahtuu *huomaamalla ominaisuuksia* annetuissa kohteissa [**9**: 685].

Takaisin paluuseen, sellaisena kuin Pirie ja Kieren sen teoriassaan ovat esitelleet, viitattiin tärkeänä huomiona monissa tieteellisissä julkaisuissa, jotka ovat jollakin tavalla keskittyneet tutkimaan ymmärryksen rakentumista oppilailla eri aihepiireissä, ikäryhmissä ja erilaisten toimintojen parissa [**8**: 1476; **13**: 96; **14**; **19**: 234; **24**: 934; **26**: 22; **27**: 127-129; **30**: 186]. Esimerkiksi Towers esitti tutkimuksessaan, miten opettajan *väliintulo* vaikuttaa oppilaan matemaattisen ymmärryksen kasvuun. Tutkimusesimerkissään hän oli yrittänyt saada 11-vuotiasta oppilasta *huomaamaan ominaisuuksia* eräässä geometrisessa kuviossa ja abstrahoimaan ajatteluaan *muodolliselle* tasolle, mikä olisi mahdollistanut kuvion puuttuvien mittojen määrittämisen ja pinta-alan laskemisen. Hän kertoi pyrkineensä tähän tavoitteeseen *palauttamalla* oppilaan kerta toisensa jälkeen *takaisin kuvan luomisen* tasolle. [**27**: 121-129]

P-K-teoriaa käytettiin myös seuraavissa aihepiireissä, ikäryhmissä ja osaamistasoilla:

Lyndon C. Martin tutki oppilaiden käsitteellistämistä ympyrän segmentin pinta-alasta kahdella 14-vuotiaalla keskitason oppilaalla, käsitteellistämistä toisen asteen yhtälöstä kahdella 15-vuotiaalla hyvin menestyneellä oppilaalla ja käsitteellistämistä differentioinnista 16-vuotiailla oppilaspareilla kohtalaisella, korkealla ja erityisen korkealla menestystasolla, opettajan tukemina. Hän tutki myös matematiikan opettajiksi suuntautuneiden Yliopisto-opiskelijoiden työskentelyä tasogeometrisen ongelman parissa, missä opettajan alustuksen jälkeen nelihenkinen ryhmä työskentelivät ilman opettajan läsnäoloa. [**14**: 75-78]

David E. Meel käsitteli artikkelissaan [**17**] kahden eri oppimateriaalin vaikutusta menestyneiden oppilaiden ymmärrystasoon raja-arvoista, differentioinnista ja integroinnista. Hän analysoi ymmärryksen muotoutumista oppilailla P-K-teorian avulla. Tässä tutkimuksessa huomioitiin myös *toimisen ja ilmaisun toisiaan täydentävyys* käyttämällä haastatteluja.

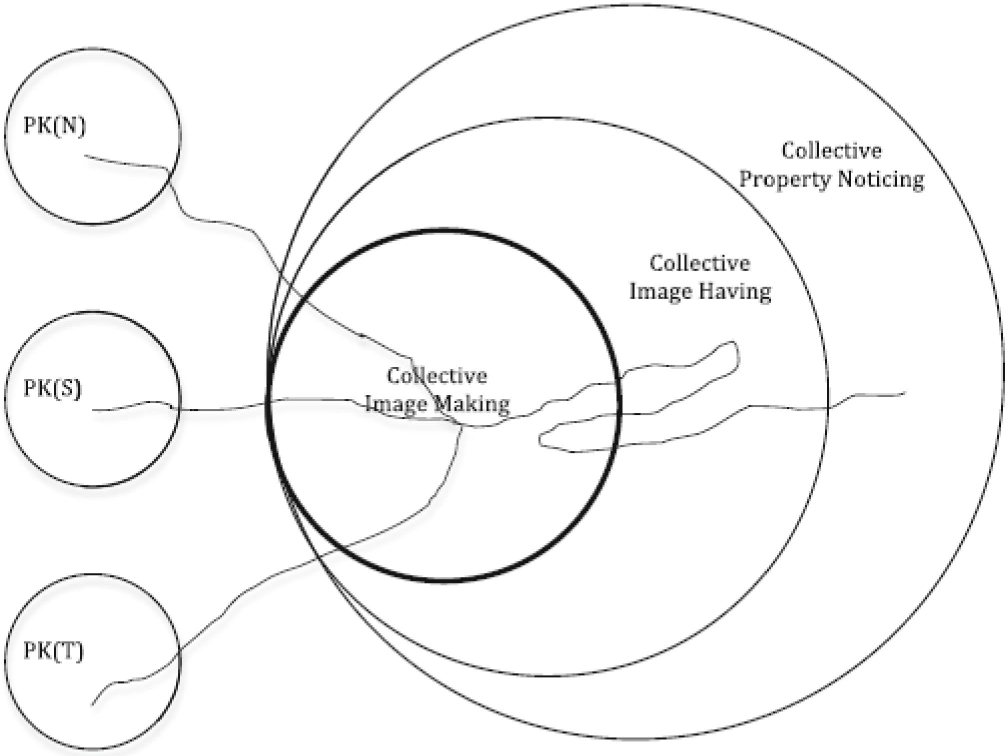
Nason, Chalmers ja Yeh tutkivat alakoululaisten käsitteellistämistä kolmioihin ja neliöihin liittyen [**19**]. Tutkimuksessaan he määrittivät ja ennustivat sanallisesti, mitä ymmärrystä tässä aihepiirissä mikäkin P-K-mallin taso vastaa oppilailla aluksi ja *takaisin paluiden* jälkeen. Tutkimuksessa huomioitiin myös, miten ymmärrys *käsitteestä tihentyy* oppilailla.

Tasoja *havainnoiminen – innovoiminen* ei ole käytetty muiden tutkijoiden kuin Pirien ja Kierenin artikkeleissa. Kuitenkin käyttäessään P-K-teorian tasoja *kuvan luominen – muodollistaminen*, muut tutkijat ovat huomioineet kaikkien tasojen olemassaolon ja esittäneet myös teorian keskeisten piirteiden määritelmät.

5.2 Kollektiivinen kartoittaminen

Towers ja Martin, jotka ovat käyttäneet tutkimuksissaan laajasti myös P-K-teoriaa, ovat tutkineet matemaattisen ymmärryksen kasvua *aktivoituvuuden* (Enactivism) ja siitä erityisesti *kollektiivisuuden* (Collectivity) näkökulmasta. *Aktivoituvuus* painottaa ympäristön vaikutusta henkilön kognitioihin, samalla kun ymmärryksen kasvu nähdään dynaamisena päättymättömänä prosessina samoin kuin P-K-teoriassa on esitetty. *Aktivoituvassa* lähestymisessä merkittävää ovat fyysisesti tehtävät toiminnat, mukaan lukien ääneen lausuttavat ilmaisut. *Kollektiivisella* matemaattisella ymmärryksellä Towers ja Martin tarkoittavat jaettua matemaattista toimintaa ryhmän tai parin välillä. Sen sijaan, että nämä tutkijat tarkastelisivat matemaattisen ymmärryksen kasvua yksilöllisenä tapahtuvana, he ovat siirtyneet keskittämään näkökulmansa *kollektiiviseen* tapahtumaan. [**28**: 247-250]

Artikkelissaan **[16]** Martin ja Towers esittävät ryhmän vuoropuhelun, missä kolme matemaattisesti menestynyttä kuudennen luokan oppilasta (11-vuotiaita) yrittivät laskea suunnikkaan pinta-alan ensimmäistä kertaa. Oppilaat työskentelivät ryhmässä esille tulleiden parhaiden ehdotusten mukaisesti ja haastattelijan tekeminen väliintulojen ohjaamina. Lopulta oppilaat päätyivät yleistykseen, jonka he ajattelevat toimivan kaikille suunnikkaille, vaikkakin heidän lopullinen päätelmänsä ja muodostamansa kuva ei ollut oikea. Tutkijat analysoivat, että vuoropuhelu kokonaisuudessaan on kuin yhden henkilön esittämä. [**16**: 7-15] Artikkelissaan [**28**] Towers ja Martin esittävät samaisen tutkimusesimerkin ja sanovat, että tutkiessaan videoitua ryhmäkeskustelua, he eivät kyenneet eriyttämään oppilaiden *ymmärryksen polkuja* [**28**: 250-251]. He esittävätkin kartoituksen *kollektiivisesta ymmärryksen polusta*, missä Pirie-Kieren-teorian tasojen nimiin on lisätty etuosa *kollektiivinen*. Kuvassa 12 PK(N), PK(S) ja PK(T) viittaavat eri oppilaiden tuomiin taustatietoihin tehtävän pariin tultaessa. [**16**: 15]



*Kuva 12: Kollektiivinen ymmärryksen polku [**28**: 15]*

Pirie ja Kieren näkevät teoriassaan ymmärryksen kasvun ennen kaikkea yksilöllisenä tapahtuvana (ks. luku 4.5). Heidän mukaansa kuitenkin muiden oppilaiden antamat näkökulmat voivat laajentaa omaa näkökulmaa. Tämän vuoksi opettajien olisi hyvä kannustaa oppilaita vuorovaikutuksen kautta rakentamaan omaa ymmärrystään ja auttamaan samalla toisia heidän ymmärryksensä rakentamisessa [**12**: 229].

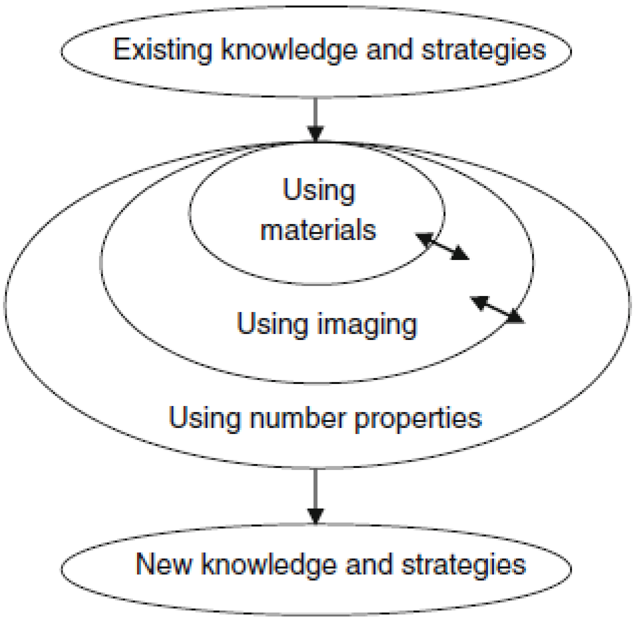
Pirie ja Martin ovat esittäneet tutkimuksessaan myös parin muodostaman yhteisen ymmärryksen polun kuten Martin ja Towers edellä esitetyssä tutkimuksessa [**15**: 184]. Näin ollen nämä esitykset näyttävät, että sikäli kun matemaattisen ymmärryksen muotoutuminen on yksilöllinen tapahtuma, se voi kuitenkin edetä yhteisymmärryksessä jopa niin, ettei yksilöllisiä vivahteita voida näkyvästi erottaa.

5.3 NDP-opettamisteoria Uudessa-Seelannissa

Esittelen nyt miten Uudessa-Seelanissa kehitetty opettamismalli on yhteydessä Pirien ja Kierenin malliin.

Uudessa-Seelanissa on aloitettu vuonna 2000 koko maan laajuinen hanke, jossa on pyritty opettajien ammatillisen kehittämisen avulla parantamaan oppilaiden matemaattisia saavutuksia. Tämä hanke tunnetaan nimellä *laskutaidon kehittämisprojektit* (Numeracy Development Projects, viitataan jatkossa NDP:nä). Avainasemassa NDP:ssä on ollut opetusmalli, joka perustuu P-K-malliin.

NDP-opetusmallin kehitti alun perin Peter Hughes. Malli koostuu kolmesta kerroksesta: *materiaalien käyttäminen*, *kuvantamisen käyttäminen* ja *numero-ominaisuuksien käyttäminen* (Using materials, Using imaging, Using number properties) (ks. kuva 13).



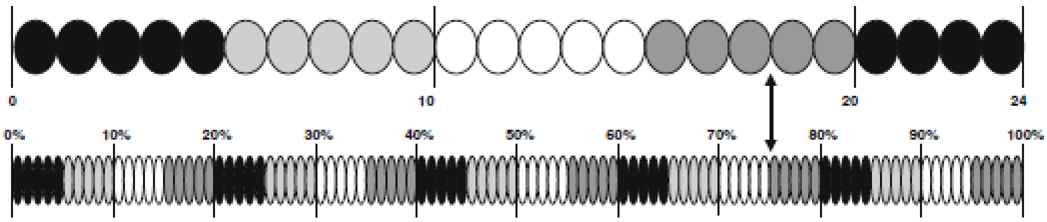
*Kuva 13: NDP-opettamismalli [**31**: 102]*

Kaikki nk. käsikirjoitukset oppitunneille, joiden avulla on tarkoitus kehittää oppilaiden laskutaitoa, on muodostettu NDP:ssä käyttäen tätä opetusmallia. [**31**: 102]

NDP-opetusmalli perustuu näkemykseen, että opettaja voi toiminnallaan helpottaa oppilaan etenemistä mallin kerroksien välillä. Siinä ymmärryksen kehitys liitetään sosiaalikonstruktiiviseen asetelmaan. NDP-opetusmallissa siirtyminen materiaaleista kuvantamiseen ja edelleen numero-ominaisuuksiin oppilailla, tapahtuu aktiivisen kannustuksen myötä. Henkilökohtainen tieto rakentuu näin ollen sosiaalisissa asetelmissa.

Esittelen seuraavaksi esimerkin NDP-opetusmalliin perustuvasta opettamiskäsikirjoituksesta, ja esitän sen jälkeen tasojen määritelmät sekä Vince Wright'in esittämän vertailun NDP-mallin ja P-K-mallin välillä.

Prosentin käsitteen tutkiminen. 100 % esitetään prosentin paloissa. Esimerkiksi 18 24:stä edustaa 75 %:a (ks. kuva 14). *Materiaalien käyttäminen* -tasolla oppilaat mallintavat tilannetta fyysisesti ja tarkastelevat kysyttyjä prosentteja. Opettaja rohkaisee *kuvantamisen käyttämiseen* pyytämällä oppilaita miettimään, miten sata prosentin palaa vastaa annettuja määriä. Hän neuvoo oppilaita käyttämään olemassa olevaa tietoaan ja miettimään vastaavuuksia: esimerkiksi 18 24:stä on yhtä paljon kuin 9 12:sta ja 3 4:stä. Luku 24 on lähellä lukua 25 ja se kerrottuna neljällä on 100. Edelleen 18 kerrottuna neljällä on 72. *Lukuominaisuuksien käyttämisen* tasolla oppilaille annetaan tehtäviä symbolisessa muodossa, kuten 27/36=_?



*Kuva 14: 18 24:stä esitettynä prosentteina [**31**: 106]*

Materiaalien käyttämistä ei esitetä P-K-mallissa. NDP-opetusmallin ensimmäisessä kerroksessa oppilaat liittävät matemaattisen käsitteen tilanteisiin fyysisesti tai virtuaalisesti. Tällä tasolla on kolme erillistä opetustarkoitusta: tuoda esille oppilaiden olemassa oleva tietämys, taata vaikute kuvan synnyttämiselle ja taata vahvistus oppilaiden olettamuksille.

Kuvantamisen käyttäminen –kerroksessa yhdistyy P-K-mallin *kuvan luomisen* ja *omaamisen* tasot. Oppituntien käsikirjoituksissa kuvantamiseen rohkaistaan yleensä fyysisten välineiden ja/tai kysymysten avulla. Nämä vaativat oppijaa pohtimaan toimimisensa tuloksia ja käyttämään kuvantamista. Erityisesti toiminta kannustaa *kuvan luomiseen* ja kysymykset *kuvan omaamiseen*, mutta *kynnysrajaa* tasojen välillä ei silti huomioida täsmällisesti.

Lukuominaisuuksien käyttäminen vaatii oppijaa liittämään kuvantamisesta johdetut yleistykset annettuihin tehtäviin. Oppilas saa näin käytössään hyödyllisiä menetelmiä, joilla uutta matemaattista käsitettä voidaan soveltaa. Tässä kerroksessa yhdistyy ominaisuuksien huomaamisen ja muodollistamisen tasot. *Kynnysrajaa* kuvien ominaisuuksien perustelun ja symbolisella tasolla toimimisen välillä ei tässäkään esitetä. [**31**: 105-106]

Tässäkin mallissa tuottoisin opettamismenetelmä katsotaan olevan *takaisin paluun* kautta materiaaleihin ja kuviin. Tämän toteuttamiseksi opettajan täytyy huomioida, millä ymmärrystasolla oppilas toimii. [**31**: 125] Keskittymällä näin opettajan toimintojen sijasta oppilaan toimintoihin, voidaan tutkijoiden mukaan pyrkiä tuottamaan oppilaita, ”jotka osaavat ratkaista ongelmia ja käsitellä helposti määritettyä tietoa, ja jotka nauttivat matematiikasta ja eivät pelkää sitä”. [**25**: 342]

Laskutaidon kehittämisprojekti Uudessa-Seelanissa on suunnattu vuodesta 2000 lähtien 5-14-vuotialle lapsille ja nuorille [**7**: 39]. Välineiden käyttö matematiikan opetuksessa on suunnattu erityisesti alakouluikäisille ja materiaalien käyttö siitä vanhemmille [**10**: 89]. Tutkittaessa oppilaiden ymmärryksen kehitystä, NDP-opettamismallia on sovellettu eri ala-ja yläkoulun matematiikan aihepiireissä kuten murtoluvut, yhtälönratkaisu ja algebra. [**6**; **7**; **11**; **31**].

NDP:n opettamislähteissä on esitelty lukuisia oppituntikäsikirjoituksia. Näitä opetusmateriaaleja, artikkeleita niiden tutkimuksista ja yleistä tietoa NDP:stä on esitelty internet-sivulla http://nzmaths.co.nz/numeracy-projects.

NDP-opetusmalli yhdistetään Uudessa-Seelannissa merkittäviin parannuksiin oppilaiden saavutuksissa yksittäisillä NDP:n järjestämillä kursseilla. Tutkimusten perusteella opetusmallin on katsottu parantavan myös pitkäaikaista edistymistä kouluissa, joissa sitä on sovellettu. [**31**: 102, 125]

P-K-teoriaa on myös tutkittu vuorovaikutuksessa opettajan ja oppimateriaalien kanssa (luvut 4.5 ja 5.2), mutta siinä ymmärryksen kasvu nähdään erityisesti yksilöllisenä tapahtumana, jota ympäristö voi kuitenkin pyrkiä hyödyllisellä tavalla tukemaan. [**12**: 229]

5.4 Konstruktiivinen oppiminen ja motivaatio

Ernst von Glasersfeld yhdistää konstruktiiviseen oppimiseen muutamien aikaisemmin esitettyjen tutkijoiden tavoin myös motivaation. Hänen mukaansa tämä kannuste syntyy siitä tyydytyksen tunteesta, jonka oppilas saa löytäessään oikean ratkaisun omien kognitioidensa pohjalta. Von Glasersfeld havainnollistaa tätä lapsilla, jotka alkavat leikkiä rakennuspalikoilla. Opittuaan kasaamaan palikoita he saattavat asettaa tavoitteekseen rakentaa tornin kaikista palikoista. Jos he onnistuvat, he ovat ilmeisen tyytyväisiä, huolimatta todellisista palkinnoista tai aikuisten huomioista, sillä he rakentavat torneja tarkkailijoiden poissa ollessakin. Palkinto tulee saavutuksesta, onnistumisesta ja harkitusta suunnitelman toteuttamisesta, joka on luontaista heidän omalle tavalleen järjestää palikoita.

Von Glasersfeld sanoo, että konstruktiivisesta näkökulmasta ei ole järkevää otaksua, että mikään voimakas kognitiivinen tyydytys tulee yksinkertaisesti siitä, että saa kuulla tehneensä jotakin oikein. Todelliseen tyytyväisyyden tunteeseen oikea täytyy nähdä järjestyksen muotona, jonka henkilö on todentanut itse. Nähdäkseen loogisen ja matemaattisen välttämättömyyden ja saadakseen siitä tyydytyksen, henkilön täytyy reflektoida omien konstruktioiden mukaisesti ja tavalla, jolla hän itse on laittanut ne yhteen [**29**: 47-48].

P-K-teoria puoltaa konstruktiivista tiedon rakentamista vahvasti, joten von Glasersfeldin esityksen mukaan sitä mukaileva oppiminen ja opettaminen synnyttävät oppilaassa myös luonnollisen motivaation matematiikkaa kohtaan.

6 Hyvän teorian kriteerit

P-K-teorian alustamisen eli *alkeellisen tietämisen*, teorian hahmottamisen eli *kuvien luomisen* ja *omaamisen* sekä sen sisällön määrittämisen eli *ominaisuuksien huomaamisen* ja *muodollistamisen* jälkeen, voidaan siirtyä *havainnoimisen* tasolle, nähdä kokonaisuus teoriana ja etsiä todistusta sitä varten. Tarkoitukseni onkin nyt tutkielmani lopuksi, P-K-mallin mukaisesti, esittää hyväksyttävä perustelu sille, miksi Pirien ja Kierenin esitykset voidaan kokonaisuudessaan luokitella teoriaksi. Toisin sanoen, esitän tässä luvussa P-K-teorian *koostamisen*.

David A. Meel esittää Schoenfeldin vuonna 2000 esittämät kahdeksan kriteeriä, jotka täyttäessään teoreettinen viitekehys voidaan luokitella teoriaksi. Nämä ovat *kuvaileva voima*, *selittävä voima*, *laajuus*, *ennustava voima*, *tarkkuus ja eriteltävyys*, *falsifioituvuus*, *jäljennettävyys* ja *kolmiomitattavuus* (Descriptive Power, Explanatory Power, Scope, Predictive Power, Rigor and specificity, Falsifiability, Replicability, Triangulation). Seuraavassa analyysissä on esitetty Schoenfeldin kriteerien määritelmät ja Meelin tekemä analyysi siitä, miten P-K-teoria täyttää nämä kriteerit.

Kuvaileva voima edellyttää, että teoreettisen viitekehyksen olennaisia piirteitä voidaan tarkastella.

P-K-teoriassa oppilaan liikkeitä mallin tasojen välillä luonnehditaan käyttäen tallennettuja haastatteluja ja graafisia kuvia. Niistä tehdyn analyysin pohjalta on määritetty ymmärryksen muodot. Tehdyn esityksen perusteella lukija kykenee tulkitsemaan teorian ja huomaamaan, miten kerätty aineisto vastaa johtopäätöksiä. Samalla P-K-teoria jättää kuitenkin toisarvoisia piirteitä määrittelemättä.

Selittävä voima viittaa teorian kykyyn selittää mekanismeja eli sitä kuinka ja miksi asiat sopivat yhteen. Nämä selitykset antavat syyt sille, miksi oppilas voi tai ei voi suorittaa erityistä tehtävää. Teorian täytyy lisäksi sisältää tarkat ja kuvaavat termit, joilla osoitetaan teorian tärkeät kohteet ja kohteiden keskinäinen yhteys.

P-K-teoria kykenee selittämään erot oppilaiden suorituksissa annettujen toimintojen parissa. Siinä *selittävä voima* perustuu ymmärryksen tasoihin, joita voidaan soveltaa eri aihepiireissä.

Laajuus edellyttää, että teoreettinen viitekehys keskittyy laajoihin ilmiöihin, eikä vain yksittäisiin käsitteisiin.

Alun perin Pirie ja Kieren keskittyvät tutkimuksissaan ainoastaan alakouluikäisiin ja vain muutamiin matemaattisiin aihepiireihin, kuten murtolukuihin. Kuitenkin myöhemmin he ja muut tutkijat ovat laajentaneet tutkimusta yläkoulu- ja lukioikäisiin oppilaisiin sekä useampiin aihepiireihin, jonka myötä on saatu vahvistusta sille, että P-K-teoria soveltuu laajemminkin.

Ennustava voima tarkoittaa, että tutkija voi odottaa tietynlaista vastausta oppilaalta aikaisemman tiedon perusteella.

P-K-teoriassa potentiaaliset toiminnat ja ilmaisut, joiden odotetaan johtavan tarvittavaan ymmärrykseen, perustuvat juuri oppilaan aikaisempaan tietämykseen. P-K-teorian piirissä on tutkittu myös opettajan tekemien erilaisten *väliintulojen* vaikutusta ja seurausta oppilaiden *ymmärryksen polkuihin*.

Tarkkuus ja eriteltävyys viittaavat teorian kykyyn selvästi tunnistaa perusosat, jotka ovat luontaisia teorialle ja mekanismit jotka yhdistävät ne. Teorian termit ja niiden yhteydet toisiinsa täytyy olla hyvin määriteltyjä.

P-K-teoriassa tämä tarkoittaisi, että haastattelija kykenisi helposti selvittämään millä P-K-mallin ymmärryksen tasolla oppilas on työskentelemässä. P-K-teoriassa nämä perusosat ja niiden väliset yhteydet on määritelty siten, että ne voidaan tunnistaa. Oppilaan toiminnan määrittämisestä tietylle tasolle on annettu teoriassa myös monia esimerkkejä.

Falsifioituvuudella tarkoitetaan, että tehdyt oletukset ja määritellyt piirteet voidaan todeta empiirisellä tutkimuksella.

P-K-teoria sisältää riittävät kielen, jonka avulla matemaattista kehitystä voidaan kuvata ja siten tutkia oppilailla. Vaikkakaan teoria ei edusta ehdotonta totuutta siitä, mitä oppilaiden ajatuksissa kokonaisuudessaan tapahtuu, teorian avulla voidaan saada siitä syvällinen näkemys. Pirie, Kieren ja heidän kollegansa ovat myös jatkaneet teoriansa empiiristä tutkimista eri aihepiireissä ja erilaisissa asetelmissa.

Jäljennettävyys on läheisessä yhteydessä *tarkkuuteen* ja *eriteltävyyteen*. Sillä tarkoitetaan, että teoria täytyy määrittää niin hyvin, että toiset tutkijat voivat katsoa samaa aineistoa ja päätyä samoihin johtopäätöksiin. Samalla tavalla toistettujen tilanteiden tulisi tuottaa myös samanlaisia lopputuloksia.

P-K-teoriassa tutkimusesimerkkejä on paljon, tulokset ovat samankaltaisia ja niiden perusteella tutkija voi huomata yhteyden aineiston ja teorian välillä. Meel huomauttaa vielä, että Pirie ja Kieren esittävät oppilailla olevan erilaisia lopputulemia sen perusteella, miten he tulkitsevat tutkijan heille esittämät kysymykset.

Kolmiomitattavuudella tarkoitetaan, että teorian sisältöä ei ole määritelty vain rajoitettuun kokemukseen perustuen, vaan tietoa on kerätty esimerkiksi luokkahuonetilanteista, yksintyöskentelystä ja parityöskentelystä eri aihepiireissä. Näin teoriasta on voitu selvittää paikalliset tekijät, jotka eivät vaikuta kuitenkaan yleisemmin.

P-K-malli keskittyy haastatteluaineistoon, joka on kerätty perustuen yksilöllisyyteen. Näissä tilanteissa oppilaat ovat työskennelleet parin kanssa, ryhmässä tai osana luokkaa. Oppilaat ovat olleet kosketuksissa myös monenlaisten tehtävien ja toimintojen parissa, jotka on suunniteltu auttamaan tutkijoita havainnoimaan muutoksia matemaattisessa tietämisessä.

Meel sanoo tämän analyysin kokonaisuudessaan osoittavan, että P-K-teoria täyttää Schoenfeldin esittämät kriteerit teorian luokittelemiseksi. [Meel, 2003:132, 155-159]

7 Loppupäätelmät

Pirien ja Kierenin esitys on esimerkein selvennetty, hyvin määritelty ja teoriaksi luokiteltava karakterisoitu esitys matemaattisen ymmärryksen muotoutumisesta dynaamisena, ei-lineaarisena koskaan päättymättömänä prosessina. Teoria tukee matematiikan toiminnallista opettamista menetelmin, missä oppija itse rakentaa ymmärrystä tekemällä havaintoja ja johtopäätöksiä, ja opettajan rooli on enemmänkin johdatella tässä prosessissa sopivalla tavalla ja lopulta antaa vahvistus opitulle asialle. Esitetty teoria tukee myös ajatusta kollektiivisesta oppimisessa, missä esimerkiksi pareittain oppilaat saattavat keskustella ja siten ilmaista niitä ajatuksia ja johtopäätöksiä, mitä toiminta heissä herättää. P-K-teorian ominaisuuksia voidaan tukea myös sopivan oppimateriaalin avulla.

P-K-teorian sovelluksissa pohdittiin matemaattisen ymmärryksen kasvua myös evoluutiollisista lähtökohdista, missä kasvun katsottiin johtuvan vuorovaikutuksesta ympäristön kanssa. P-K-teoriassa korostetaan sen sijaan kasvua yksilöllisenä tapahtumana. Molemmissa lähtökohdissa olennaisena lähtökohtana oppimisessa pidettiin kuitenkin konstruktiivista ymmärryksen rakentamista, missä sosiaalinen ja ympäristön vuorovaikutus voivat hyödyllisellä tavalla myötävaikuttaa.

Tutkijoiden mielenkiinnon kohteena P-K-teoriasta on ollut erityisesti ymmärrystasot kuvien luomisesta muodollistamiseen. Oletan tämän johtuvan siitä, että tavanomainen koulumatematiikka edellyttää parhaimmillaan muodollisella tasolla tapahtuvaa algoritmista osaamista, sekä päättelyä, joka pohjautuu käsitteiden sisällön ymmärtämiseen. Aksiomaattinen todistaminen on sitä vastoin keskittynyt vasta yliopistotason matematiikkaan. Tutkijat ovat laittaneet merkille myös teorian ominaisuuden takaisin paluu, jonka katsotaan olevan tärkeässä asemassa matemaattisen ymmärryksen korjaamisessa ja täydentämisessä.

Kokonaisuutena kyseessä on mielestäni huomiolle laitetta teoria, joka opettajien olisi hyvä hyödyntää opetuksessaan. P-K-teorian ominaisuuksia tulisi huomioida mielestäni myös matematiikan oppi- ja opetusmateriaaleissa, kuten esimerkiksi Uudessa-Seelannissa on jo tehty erityisesti nuorempien oppilaiden parissa.

Tutkielmani perusteella näen P-K-teoriaa tukevan oppimisen ja opettamisen parantavan matemaattisten käsitteiden sisäistämistä eri aihepiireistä. Konstruktiivinen tiedon rakentaminen lisää kykyä palata opittuihin käsitteisiin sekä käyttää niitä tarvittavalla tavalla. Vaikkakin opettajan yksilöllinen ohjaaminen voi onnistua ainoastaan suhteellisen pienissä ryhmissä, opettaja voi huomioida P-K-mallin mukaisen lähestymistavan isommissakin ryhmissä, esimerkiksi pohjustamalla muodollisia käsitteitä ja algoritmeja sopivien esimerkkien avulla, jotka pohjautuvat oppilaiden aikaisempaan tietoon. Katson tällaisen lähestymistavan uuteen aihepiiriin myös aktiiviseksi, mielekkääksi ja motivoivaksi tavaksi kasvattaa matemaattista ymmärrystä.

Lähdeluettelo

1. Abrahamson: 2014. *Reinventing learning: a design-research odyssey.* ZDM 2014. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0646-3 (25.5.2015)
2. Abrahamson ja Lee: 2013. *Coordinating visualizations of polysemous action: values added for grounding proportion.* ZDM 2014, Vol. 46, Issue 1, s. 79-93. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0521-7 (25.5.2015)
3. Abrahamson, Dor ja Trninic, Dragan: 2014. *Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action.* ZDM 2015, Vol. 47, Issue 2, s. 295-306. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0620-0 (25.5.2015)
4. Abrahamson, Dor; Gutierrez, Jose; Charoenving, Timothy; Negrete, Andrea; Bumbacher, Engin: 2012. *Fostering Hooks and Shifts: Tutorial Tactics for Guided Mathematical Discovery.* Technology, Knowledge and Learning 2012, Vol. 17, Issue 1-2, s. 61-86. http://link.springer.com/article/10.1007/s10758-012-9192-7 (25.5.2015)
5. Abrahamson, Dor; Trnininc, Dragan; Gutierrez, Jose F.; Huth, Jacob ja Lee, Rosa G.: 2011. *Hooks and Shifts: A Dialectical Study of Mediated Discovery.* Technology, Knowledge and Learning 2011, Vol. 16, Issue 1, s. 55-85. http://link.springer.com/article/10.1007/s10758-011-9177-y (25.5.2015)
6. Anthony, Glenda ja Burgess, Tim: 2014. *Solving Linear Equations.* Algebra Teaching around the World, Series Preface 2014, s. 17-37. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6209-707-0_2 (25.5.2015)
7. Britt, Murray S. ja Irwin, Kathryn C:2007. *Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study.* ZDM 2008, Vol. 40, Issue 1, s. 39-53. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-007-0064-x (25.5.2015)
8. Brown, David E.: 2013. *Students' Conceptions as Dynamically Emergent Structures.* Science & Education 2014, Vol. 23, Issue 7, s. 1463-1483. http://link.springer.com/article/10.1007/s11191-013-9655-9 (25.5.2015)
9. Graham, Alan T.; Pfannkuch, Maxine ja Thomas, Michael O. J.: 2009. *Versatile thinking and the learning of statistical concepts.* ZDM 2009, Vol. 41, Issue 5, s. 681-695. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0210-8 (25.5.2015)
10. Higgins, Joanna: 2004. *Equipment-in-use in the Numeracy Development Project: Its Importance to the Introduction of Mathematical Ideas.* Ministry of Education, Numeracy Compendium, s. 89-96. http://www2.nzmaths.co.nz/numeracy/References/comp_higgins3.pdf (25.5.2015)
11. Irwin, Kathryn C. ja Britt, Murray S.: 2005. *The Algebraic Nature of Students' Numerical Manipulation in the New Zealand Numeracy Project.* Educational Studies in Mathematics 2005, Vol. 58, Issue 2, s. 169-188. http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-2755-y (25.5.2015)
12. Kieren, Thomas; Pirie, Susan ja Calvert, Lynn Gordon: 1999. *Growing Minds, Growing Mathematical Understanding: Mathematical Understanding, Abstraction and Interaction.* Proceedings of the Annual Meeting of the North American. Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Snowbird, Utah, October 18-21, 2001).Volume 1 [and] Volume 2, s.209-231.

13. Logan, Tracy; Lowrie, Tom ja Diezmann, Carmel M.: 2014. *Co-thought gestures: Supporting students to successfully navigate map tasks.* Educational Studies in Mathematics 2014, Vol. 87, Issue 1, s. 87-102. http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-014-9546-2 (25.5.2015)
14. Martin, Lyndon C.: 2008. *Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory.* The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 27, Issue 1, 2008, s.64-85, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312308000059 (25.5.2015)
15. Martin, Lyndon ja Pirie, Susan: 2003. *Making images and noticing properties: The role of graphing software in mathematical generalisation.* Mathematics Education Research Journal 2003, Vol. 15, Issue 2, s. 171-186. http://link.springer.com/article/10.1007/BF03217377 (25.5.2015)
16. Martin, Lyndon C. ja Towers, Jo: 2014. *Growing mathematical understanding through Collective Image Making, Collective Image Having, and Collective Property Noticing*. Educational Studies in Mathematics 2015, Vol. 88, Issue 1, s. 3-18. http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-014-9552-4 (25.5.2015)
17. Meel, David E.: 1998. *Honors Students' Calculus Understandings: Comparing Calculus&Mathematica and Traditional Calculus Students.* CBMS Issues in Mathematics Education 1998, Vol. 7, s. 163-215.
18. Meel, David E.:2003. *Models and Theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOS Theory.* CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 12, 2003, s. 132-181.
19. Nason, Rod; Chalmers, Chris ja Yeh, Andy: 2012. *Facilitating growth in prospective teachers' knowledge: teaching geometry in primary schools.* Journal of Mathematics Teacher Education 2012, Vol. 15, Issue 3, s. 227-249. http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-012-9209-0 (25.5.2015)
20. Pirie, Susan ja Kieren, Thomas: 1989. *A Recursive Theory of Mathematical Understanding.* For the Learning of Mathematics 9, 3 (November 1989) FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada, s.7-11.
21. Pirie, Susan ja Kieren, Thomas: 1994. *Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?* Educational Studies in Mathematics, 26, s.165-190.
22. Pirie, Susan ja Martin, Lyndon: 1997. *The Equation, the Whole Equation and Nothing But the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations.* Educational Studies in Mathematics 1997, Vol. 34, Issue 2, s. 159-181. http://link.springer.com/article/10.1023/A:1003051829991 (25.5.2015)
23. Pirie, Susan ja Martin, Lyndon: 2000. *The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding.* Mathematics Education Research Journal 2000, Vol. 12, No.2, s.127-146. http://link.springer.com/article/10.1007/BF03217080 (25.5.2015)
24. Scataglini-Belghitar, Giovanna ja Mason, John: 2011. *Establishing Appropriate Conditions: Students Learning to Apply a Theorem.* International Journal of Science and Mathematics Education 2012, Vol. 10, Issue 4, s. 927-953. http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-011-9305-0 (25.5.2015)
25. Tait-McCutcheon, Sandi; Drake, Michael ja Sherley, Brenda: 2011. *From direct instruction to active construction: teaching and learning basic facts.*

Mathematical Education Research Journal 2011, Vol. 23, Issue 3, s. 321-345. http://link.springer.com/article/10.1007/s13394-011-0018-z (25.5.2015)

26. Thom, Jennifer S. ja Pirie, Susan E.B.: 2002. *Problems, perseverance, and mathematical residue.* Educational Studies in Mathematics 2002, Vol. 50, Issue 1, s. 1-28. http://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1020507300013 (25.5.2015)
27. Towers, Jo: 2002. *Blocking the growth of mathematical understanding: A challenge for teaching.* Mathematics Education Research Journal 2002, Vol. 14, Issue 2, s.121-132. http://link.springer.com/article/10.1007/BF03217357 (25.5.2015)
28. Towers, Jo ja Martin, Lyndon C.:2014. *Enactivism and the study of collectivity.* ZDM, April 2015, Vol. 47, Issue 2, s. 247-256. http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-014-0643-6 (25.5.2015)
29. von Glasersfeld, Ernst:1987. *Learning as a constructive activity.* AntiMatters 2 (3) 2008, s.33-49. http://anti-matters.org/articles/73/public/73-66-1-PB.pdf (25.5.2015)
30. Warren, Elizabeth: 2006. *Comparative Mathematical Language in the Elementary School: A Longitudinal Study.* Educational Studies in Mathematics 2006, Vol. 62, Issue 2, s. 169-189. http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-4627-5 (25.5.2015)
31. Wright, Vince: 2013. *Frequencies as proportions: Using a teaching model based on Pirie and Kieren's model of mathematical understanding.* Mathematics Education Research Journal 2014, Vol. 26, Issue 1, s. 101-128. http://link.springer.com/article/10.1007/s13394-014-0118-7 (25.5.2015)