Rollen lause polynomeille

LuK-tutkielma
Anna-Helena Hietamäki
27193766
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2015

Sisältö

1 Johdanto

Rollen lauseen nimi tulee tyypillisesti lauseen julkaisijan nimestä. Michel Rolle määritteli lauseen ensimmäisenä vuonna 1691.

Yleensä Rollen lauseeseen törmää matematiikassa analyysin puolella. Rollen lause onkin yksi erikoistapaus differentiaalilaskennan väliarvolauseesta. Sitä myös hyödynnetään differentiaalilaskennan väliarvolauseen todistuksessa [2].

Tutkielmassa lähestyn Rollen lausetta algebrallisesti, mikä on harvinaisempi lähestymistapa.

Algebrallinen lähestymistapa edellyttää algebran perusteiden, muun muassa kompleksilukujen ja polynomien hallintaa, sillä esitän ja todistan Rollen lauseen reaalikertoimisilla polynomeilla. Kompleksilukuja tarvitaan toisen asteen polynomin juuria ja niiden lukumääriä tutkittaessa.

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa Maurice Mignotten kirjoittamaa kirjaa: Mathematics for Computer Algebra [1].

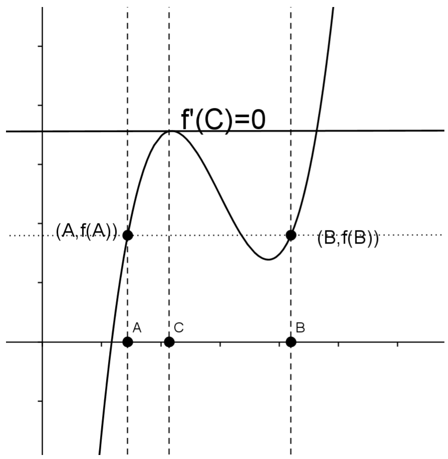
Jotta lukijan on helpompi hahmottaa algebrallisesti polynomeilla esitetyn Rollen lauseen eron analyysissä esiintyvästä lauseesta, esitän Rollen lauseen jo aluksi kahdella tavalla. Ensimmäinen muoto on analyysistä tuttu, ja toinen muoto on se, johon palataan tutkielmani loppupuolella. Tutkielma ensisijainen tavoite on todistaa Rollen lause 3.3.

1.1 Rollen lause analyysissä

Lause 1.1 (Rollen lause analyysissä)**.** *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Jos funktio saa saman arvon suljetun välin $[a, b]$ päätepisteissä a ja b, niin funktion derivaatta saa arvon 0 jossain avoimen välin $]a, b[$ pisteessä c. Formaalisti tämä voidaan kirjoittaa:*

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\ c \in\,]a, b[\, : f'(c) = 0.$$

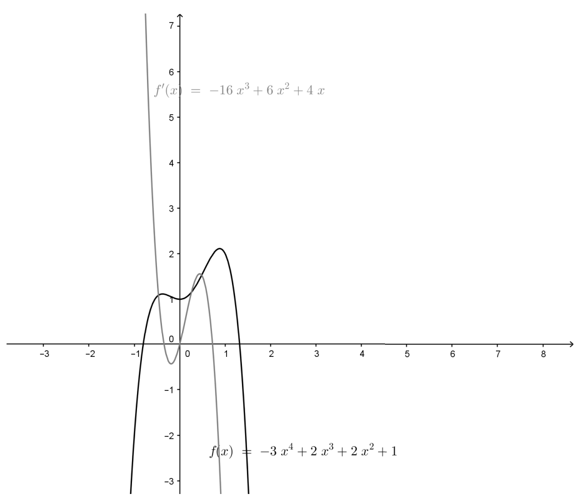
Analyysissä esiintyvä Rollen lauseen geometrinen tulkinta: oletuksista seuraa, että funktion f kuvaajalla on ainakin yksi vaakasuora tangentti (kulmakerroin on nolla).



Kuva 1: Rollen lause analyysissä.

1.2 Rollen lause algebrassa

Lause 1.2 (Rollen lause)**.** *Olkoon funktio f reaalikertoiminen polynomi, ja olkoon a ja b, $a < b$ kaksi peräkkäistä funktion f reaalista juurta. Tällöin funktion f derivaatalla on pariton määrä juuria avoimella reaalisella välillä $]a, b[$.*



Kuva 2: Rollen lause algebrassa.

1.3 Tutkielman sisältö

Tässä kappaleessa 1.3 kerron koko tutkielman sisällöstä eli esitiedoista, joita tarvitaan Rollen lauseen todistukseen, Rollen lauseen todistuksen päävaiheista ja esimerkeistä, joilla olen lausetta havainnollistanut.

Kappaleessa 2 esitän tarvittavia tuloksia Rollen lauseen todistukseen. Siinä määritellään reaalikertoiminen polynomi. Osoitan kappaleessa muun muassa, että jaoton reaalikertoiminen polynomi voidaan lausua sellaisten reaalikertoimisten polynomien tulona, jotka ovat ensimmäistä tai toista astetta. Tämä perustuu parillisten (polynomin asteluku on parillinen) ja parittomien polynomien (polynomin asteluku on pariton) juurien lukumäärän tutkimiseen. Tätä polynomin muotoa käytetään lopulta Rollen lauseen todistuksessa.

Kappale 3 on tutkielman kannalta merkittävin osa, sillä siinä esitän ja todistan Rollen lauseen. Todistuksessa tutkitaan polynomifunktioiden juurten lukumäärää, ja siksi ennen Rollen lausetta määrittelen polynomin väliarvoihin liittyvää lauseen. Väliarvoihin liittyvän lauseen todistuksessa sekä Rollen lauseen todistuksessa viittaan aiempiin esitietoihin. Näin ollen lukijan kannattaa tutustua esitietoihin ennen varsinaista Rollen lauseen todistusta. Rollen lauseen väitteen hahmottamisessa ja konkretisoinnissa voi myös auttaa Johdannossa 1.2 esitetty kuva.

Kappaleessa 4 on esimerkkejä Rollen lauseeseen liittyen. Olen ottanut siihen kaksi mallifunktiota, joilla konkretisoin Rollen lausetta. Visuaalisen hahmottamisen tueksi esimerkkeihin on liitetty kuvaajat tutkittavista polynomifunktioista ja niiden derivaatoista. Esimerkeissä on huomioitu myös sellainen polynomifunktio, jolla on kaksinkertainen nollakohta 4.2. Tätä ei korostettu lähdeteoksessa [1], ja siksi lauseen soveltaminen tällaiseen funktioon on perusteltu kaksinkertaisen nollakohdan avulla. Kuvaajassa kaksinkertainen nollakohta tarkoittaa ”satulapistettä”.

2 Esitietoja

2.1 Reaalikertoimisten polynomien juurten lukumäärä

Lause 2.1 (Algebran peruslause)**.** *Jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla, jonka asteluku on vähintään yksi, on ainakin yksi kompleksinen juuri.*

Seuraus 2.2. *Jokaisella reaalikertoimisella polynomilla, jonka asteluku on vähintään yksi, on ainakin yksi reaalinen tai kompleksinen juuri.*

Oletetaan seuraava fakta tunnetuksi:

Fakta 1. Kaikille positiivisille reaaliluvuille y löytyy sellainen reaaliluku x, että $x^2 = y$. Siis kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla on olemassa neliöjuuret.

Lemma 2.3. *Olkoon a, b ja c kunnan K alkioita, ja a ei ole nolla. Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellainen $t \in K$, että $b^2 - 4ac = t^2$. Tällöin yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on vähintään yksi juuri kunnassa K.*

$$x = \frac{-b \pm t}{2a}$$

Kaava antaa kaksi juurta, jos $t \neq 0$ ja yhden kaksinkertaisen juuren, jos $t = 0$.

Todistus. Nyt yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$, missä a ei ole nolla, voidaan täydentää neliöön:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \\ \iff & x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \\ \iff & x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \\ \iff & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Oletuksen $b^2 - 4ac = t^2$ nojalla saadaan

$$x = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{t^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm t - b}{2a} = \frac{-b \pm t}{2a}.$$

Siis toisen asteen polynomin juuret ovat muotoa

$$x = \frac{-b \pm t}{2a}.$$

□

Osoitetaan, että Faktasta 1 ja Lemmasta 2.3 seuraa, että kaikilla kompleksiluvuilla on olemassa neliöjuuret. Eli kompleksiluvuille z on olemassa sellainen kompleksiluku w, että $w^2 = z$.

Lemma 2.4. *Kaikilla kompleksiluvuilla on neliöjuuret.*

Todistus. Olkoon $z = a + ib$ kompleksiluku, missä a ja b ovat reaalilukuja. Olkoon lisäksi toisen asteen yhtälö muotoa

$$x^2 - ax - \frac{b^2}{4} = 0. \tag{1}$$

Nyt yhtälön diskriminantti

$$D = (-a)^2 - 4\left(-\frac{b^2}{4}\right) = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Lemman 2.3 nojalla yhtälöllä on ratkaisut

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ ja } \beta = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Koska $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$, niin $\alpha \geq 0$ ja $\beta \leq 0$. Koska α ja β ovat reaalilukuja, niin Faktan 1 nojalla voidaan kirjoittaa $\alpha = u^2$ ja $-\beta = v^2$, jollain $u, v \in \mathbb{R}$. Nyt

$$w^2 = (u + iv)^2 = u^2 + 2iuv - v^2. \tag{2}$$

Koska

$$-u^2v^2 = -(\alpha(-\beta)) = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right) = \frac{a^2 - (a^2 + b^2)}{4} = -\frac{b^2}{4},$$

niin

$$uv = \frac{b}{2} \iff 2uv = b. \tag{3}$$

Lisäksi

$$u^2 - v^2 = \alpha - (-\beta) = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = a. \tag{4}$$

Sijoittamalla yhtälöt (3) ja (4) yhtälöön (2) saadaan

$$w^2 = u^2 + 2iuv - v^2 = u^2 + ib - v^2 = a + ib.$$

Koska $z = a + ib$, niin saadaan

$$w^2 = z.$$

Siis kompleksiluvulle z on olemassa sellainen kompleksiluku w, että $w^2 = z$. Toisin sanoen kompleksiluvuilla on neliöjuuret. $\square$

Koska kompleksiluvuilla on neliöjuuret, Lemmasta 2.3 seuraa, että kaikilla toisen asteen kompleksikertoimisilla polynomeilla on kaksi kompleksista juurta (tai yksi kaksikertoiminen juuri).

Seuraus 2.5. *Kaikilla toisen asteen kompleksikertoimisilla polynomeilla on kaksi kompleksista juurta.*

2.2 Reaalikertoiminen polynomi

Lemma 2.6. *Reaalikertoimiset polynomit, jotka ovat jaottomia reaalilukujen kunnassa, ovat ensimmäisen asteen polynomeja tai toisen asteen polynomeja, joilla on negatiivinen diskriminantti.*

Todistus. Olkoon P jaoton reaalikertoiminen polynomi. Jos polynomilla P on olemassa reaalinen juuri α, niin silloin $X-\alpha$ on reaalikertoiminen polynomi, joka on polynomin P tekijä. Koska P on jaoton, voidaan kirjoittaa $P = X-\alpha$. Jos P:llä ei ole reaalista juurta, niin sillä on Lauseen 2.1 nojalla kompleksinen juuri. Jos reaalikertoimisen polynomin P juuri on kompleksiluku z_0 eli $P(z_0)=0$, niin silloin myös tämän liittoluku $\bar{z}_0$ on polynomin P juuri eli $P(\bar{z}_0)=0$.
(Perustelu: Olkoon polynomi $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Nyt jos polynomilla on kompleksinen juuri z_0, niin $\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = 0$. Nyt myös $\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}_0^k = 0$. Koska polynomi P on reaalikertoiminen, niin $\sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}_0^k = 0$. Toisin sanoen siis $P(\bar{z}_0)=0$.)
Olkoon nämä kompleksiset juuret $z_0 = a+ib$ ja $\bar{z}_0 = a-ib$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja $b \neq 0$. Siten polynomi

$$(X-a-ib)(X-a+ib) = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$$

on reaalikertoiminen ja jakaa polynomin P. Täten se on yhtä kuin polynomi P. Lisäksi polynomin diskriminantti on negatiivinen:

$$(-2a)^2 - 4(a^2+b^2) = -4b^2 < 0.$$

Tästä nähdään, että kaikki reaalikertoimiset polynomit, jotka ovat jaottomia reaalilukujen kunnassa, ovat ensimmäisen asteen polynomeja tai toisen asteen polynomeja, joilla on negatiivinen diskriminantti. □

Nyt reaalikertoiminen polynomi voidaan esittää Lemman 2.6 nojalla seuraavasti:

Seuraus 2.7. *Reaalikertoiminen polynomi $f(x)$ voidaan lausua sellaisten reaalikertoimisten polynomien tulona, jotka ovat ensimmäistä tai toista astetta:*

$$f(X) = c\prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(X^2 + \beta_j X + \gamma_j) \tag{5}$$

Huomautus 2.8. Toisen asteen polynomi on kyseessä silloin, kun polynomin nollakohdat ovat kompleksilukuja. Ne ovat tällöin pareittain toistensa kompleksikonjugaatteja. Toisen asteen polynomin diskriminantti on siis negatiivinen eikä tekijäpolynomeja voida enää jakaa ensimmäisen asteen polynomeiksi.

3 Rollen lause

Rollen lauseen todistuksessa tutkitaan reaalikertoimisten polynomifunktioiden juurten lukumääriä, joten ennen Rollen lauseen todistusta esitän lauseen polynomien väliarvoista, jossa tutkitaan polynomifunktion juurten lukumäärää jollain välillä.

3.1 Lause reaalikertoimisen polynomin väliarvoista

Lause 3.1. *Olkoon f reaalikertoiminen polynomi ja olkoon a ja b sellaisia reaalilukuja, että $a < b$, ja että polynomin f arvot pisteissä a ja b eivät ole nollia eli $f(a) \neq 0$ ja $f(b) \neq 0$. Jos $f(a)f(b)$ on positiivinen, niin polynomifunktiolla f on parillinen määrä juuria avoimella välillä $]a, b[$. Jos $f(a)f(b)$ on negatiivien, niin polynomifunktiolla f on pariton määrä juuria avoimella välillä $]a, b[$.*

(Juurten lukumäärässä otetaan juurten kertaluvut huomioon.)

Todistus. Käytetään todistuksessa Seurauksen 2.7 mukaista polynomin esitystä

$$f(X) = c\prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(X^2 + \beta_j X + \gamma_j),$$

missä vasemmanpuoleisilla polynomeilla on reaaliset juuret ja oikeanpuoleiset polynomit ovat jaottomia reaalilukujen kunnassa. Olettaen, että $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ovat polynomin juuret avoimella välillä $]a, b[$, saadaan

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{a - \alpha_1}{b - \alpha_1} \cdots \frac{a - \alpha_k}{b - \alpha_k} \prod_{i=k+1}^{m} \frac{a - \alpha_i}{b - \alpha_i} \prod_{j=1}^{n} \frac{a^2 + \beta_j a + \gamma_j}{b^2 + \beta_j b + \gamma_j}.$$

Nyt kaikki toiseen asteen polynomit saavat tällaisessa hajotelmassa vain positiivisia arvoja jokaisessa pisteessä, sillä toisen asteen polynomeilla ei ole juuria, ja näillä polynomeilla toisen asteen kerroin on positiivinen:

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{a^2 + \beta_j a + \gamma_j}{b^2 + \beta_j b + \gamma_j} > 0.$$

Koska α_i ei ole välillä $]a, b[$, kun $i = k+1 \ldots m$, niin $a - \alpha_i$ ja $b - \alpha_i$ ovat saman merkkisiä, joten

$$\prod_{i=k+1}^{m} \frac{a - \alpha_i}{b - \alpha_i} > 0.$$

Lisäksi huomataan, että

$$\frac{a-\alpha_1}{b-\alpha_1}\cdots\frac{a-\alpha_k}{b-\alpha_k}<0, \text{kun } k \text{ on pariton}$$

ja

$$\frac{a-\alpha_1}{b-\alpha_1}\cdots\frac{a-\alpha_k}{b-\alpha_k}>0, \text{kun } k \text{ on parillinen,}$$

koska $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ ovat polynomin juuria välillä $]a,b[$. Näin saadaan, että

$$f(a)f(b)<0, \text{kun } k \text{ on pariton ja}$$

$$f(a)f(b)>0, \text{kun } k \text{ on parillinen.}$$

Siis, jos $f(a)f(b)$ on positiivinen, niin polynomifunktiolla f on parillinen määrä juuria avoimella välillä $]a,b[$ ja jos $f(a)f(b)$ on negatiivien, niin polynomifunktiolla f on pariton määrä juuria avoimella välillä $]a,b[$ □

Seuraus 3.2. *Olkoon f reaalikertoiminen polynomi ja olkoon a ja b kaksi reaalilukua siten, että $a<b$, ja lisäksi $f(a)f(b)<0$. Tällöin polynomilla f on vähintään yksi juuri avoimella välillä $]a,b[$.*

Tämä on tavallisten jatkuvien funktioiden väliarvolause sovellettuna nyt polynomeille.

3.2 Rollen lause ja sen todistus

Lause 3.3 (Rollen lause)**.** *Olkoon funktio f reaalikertoiminen polynomi, ja olkoon a ja b, $a<b$ kaksi peräkkäistä funktion f reaalista juurta. Tällöin funktion f derivaatalla on pariton määrä juuria avoimella reaalisella välillä $]a,b[$.*

Todistus. Olkoon m juuren a kertaluku. Tällöin polynomi f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(X)=(X-a)^m g(X),$$

missä $g(a)\neq 0$.

Nyt polynomin f derivaatta on

$$f'(X)=m(X-a)^{m-1}g(X)+(X-a)^m g'(X).$$

Kun valitaan tarpeeksi pieni reaaliluku h, joka ei ole nolla, voidaan estimoida

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} &= \frac{h^m g(a+h)}{mh^{m-1}g(a+h)+h^m g'(a+h)}\\ &= \frac{h}{m+h\frac{g'(a+h)}{g(a+h)}}\\ &\approx \frac{h}{m}\end{aligned}$$

Perustellaan tämä arvio. Valitaan sellainen δ, että $g(a+h)\neq 0$ silloin, kun h on suljetulla välillä $[-\delta,\delta]$. Koska $g(a+h)\neq 0$ on jatkuva funktio ja $g'(a+h)$ on jatkuva funktio, niin $\frac{g'(a+h)}{g(a+h)}$ on jatkuva funktio, joka saavuttaa maksimin M silloin, kun h on suljetulla välillä $[-\delta,\delta]$. Tämä voidaan kirjoittaa $\left|\frac{g'(a+h)}{g(a+h)}\right| < M$, kaikilla $h\in[-\delta,\delta]$. Valitsemalla $|h| < \frac{1}{2M}$ saadaan

$$\left|h\frac{g'(a+h)}{g(a+h)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Nyt jos h on positiivinen ja tarpeeksi pieni, niin

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = \frac{h}{m+h\frac{g'(a+h)}{g(a+h)}} \approx \frac{h}{m} > 0 \iff f(a+h)f'(a+h) > 0.$$

Jos h on negatiivinen ja tarpeeksi pieni, niin

$$\frac{f(a-h)}{f'(a-h)} = \frac{h}{m-h\frac{g'(a-h)}{g(a-h)}} \approx \frac{h}{m} < 0 \iff f(a-h)f'(a-h) < 0.$$

Koska a ja b, $a<b$ ovat polynomifunktion $f(x)$ kaksi peräkkäistä juurta, niin saadaan

$$f(x)f'(x) > 0, \text{ kun } x-a>0 \quad \text{ja} \quad f(x)f'(x) < 0, \text{ kun } x-b<0.$$

Koska funktio f ei koskaan saavuta arvoa nolla avoimella välillä $]a,b[$ (a ja b ovat kaksi peräkkäistä polynomifunktion f:n juurta) ja polynomifunktio f ei vaihda merkkiä avoimella välillä $]a,b[$ Seurauksen 3.2 nojalla, niin kaikilla tarpeeksi pienillä positiivisilla reaaliluvuilla h saadaan

$$f'(a+h)f'(b-h) < 0.$$

Lauseen 3.1 nojalla funktion derivaatalla on siis pariton määrä juuria avoimella välillä $]a,b[$.

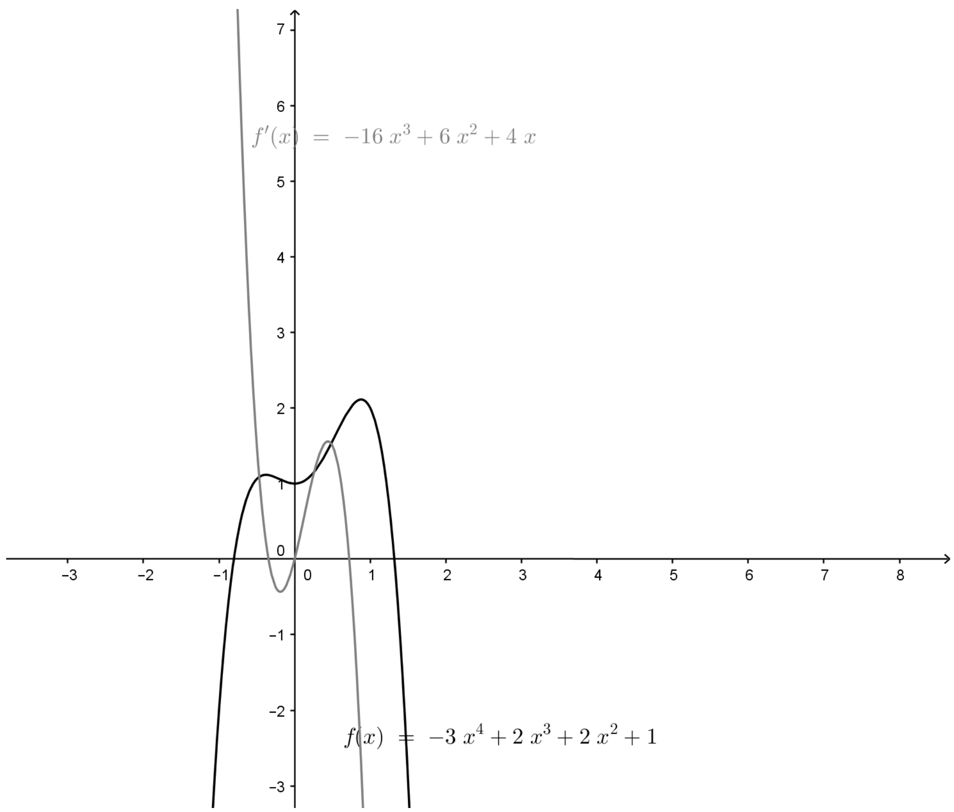
□

4 Esimerkkejä

Esimerkki 4.1. Tutkitaan reaalikertoimista polynomia

$$f(x) = -3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1.$$

Polynomin $f(x)$ derivaatta on $f'(x) = -16x^3 + 6x^2 + 4x$, ja polynomin $f(x)$ juuret ovat $a \approx -0,8$ ja $b \approx 1,32$.



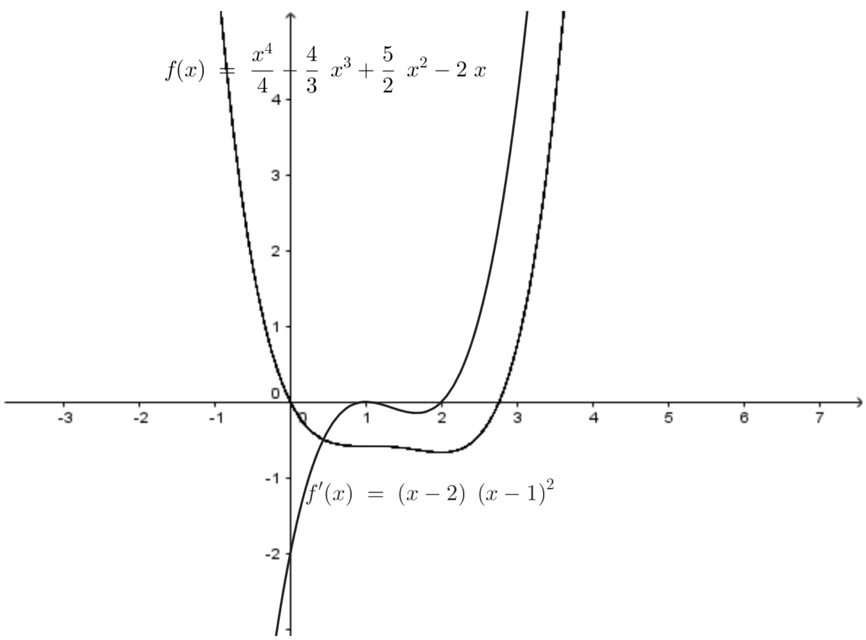
Kuva 3: Esimerkki 1.

Rollen lauseen mukaan reaalikertoimisen polynomin $f(x)$ derivaatalla $f'(x)$ pariton määrä juuria avoimella välillä $]a, b[$. Valitaan nyt tutkittavaksi väliksi $]a, b[$ ja osoitetaan, että derivaattafunktion $f'(x)$ saa parittoman määrän juuria tällä välillä. Derivaattafunktion $f'(x)$ juuret ovat $x = \frac{-\sqrt{73}+3}{16} \approx -0,35, x = 0$ ja $x = \frac{\sqrt{73}+3}{16} \approx 0,72$, joten ne sijaitsevat suljetulla välillä $[a, b]$. Näin ollen polynomifunktion $f(x) = -3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$ derivaatalla $f'(x) = -16x^3 +$

$6x^2 + 4x$ on pariton määrä juuria (tarkalleen kolme juurta) kahden peräkkäisen funktion $f(x)$ juuren a ja b välillä.

Kuvassa 3 on esitetty graafisesti esimerkkifunktiot, josta näkyy juurten lukumäärät.

Esimerkki 4.2. Tutkitaan nyt reaalikertomista polynomia $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$, jonka derivaatta on $f'(x) = (x-2)(x-1)^2$. Polynomin $f(x)$ juuret



Kuva 4: Esimerkki 2.

ovat $a = 0$ ja $b = \frac{1380384180131}{500000000000} \approx 2,76$. Rollen lauseen mukaan polynomin $f(x)$ derivaatalla $f'(x)$ on pariton määrä juuria polynomin kahden peräkkäisen juuren välillä eli avoimella välillä $]a, b[$. Valitaan siis tutkittavaksi väliksi $]a, b[$ ja osoitetaan, että derivaattafunktion $f'(x)$ saa parittoman määrän juuria tällä välillä.

Nyt derivaattafunktion juuret ovat $x = 1$ ja $x = 2$ eli kaksi erillistä juurta. $x = 1$ on kuitenkin derivaatan kaksinkertainen nollakohta, eli kaksinkertainen juuri. Kuvassa 4.2. tämä näkyy derivaattafunktion satulapisteenä. Voidaan siis sanoa, että derivaatalla on kolme juurta avoimella välillä $]a, b[$. Näin ollen Rollen lause on tosi myös polynomeilla, joiden derivaatalla on moninkertainen juuri, kunhan kertaluku huomioidaan juurten lukumäärää laskettaessa.

Lähdeluettelo

[1] Mignotte, Maurice: *Mathematics for Computer Algebra.* Springer, New York, 1992.

[2] Lind, Tapio: *Pro gradu: Raja-arvon määritelmä ja sovelluksia.* Tampereen yliopisto, 2009.