Jaksollisen signaalin spektri

LuK-tutkielma
Topi Suviaro
2257699
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2015

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käydään läpi Fourier-sarjaa ja jaksollisen signaalin muuttamista spektrin muotoon sen avulla. Fourier-sarja on matemaattinen menetelmä, jolla signaali voidaan esittää sinimuotoisten komponenttien summana. Spektrissä signaali on taajuustasossa. Jaksollisella signaalilla ja sen spektrin analysoinnilla on useita käyttötarkoituksia ja käytännön sovelluksia. Fourier-sarjan avulla signaalin muuttamista spektrimuotoon voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi valoa tai ääntä analysoitaessa.

1 Jaksollisuudesta

Tässä työssä käsitellään jaksollisen funktion spektriä, joten määritellään ensin jaksollisen funktion käsite. Havainnollisesti jaksollinen funktio on funktio, joka saa samoja arvoja tietyn jakson välein. Funktion kuvaaja esiintyy samanlaisena tietyn jakson välein. Muodollinen jaksollisuuden määritelmä on seuraava.

Määritelmä 1.1. Funktio g on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku T niin, että

$$g(t) = g(t + T) \tag{1}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Pienintä positiivista lukua T, jolle (1) toteutuu kaikilla $t \in \mathbb{R}$ sanotaan funktion g perusjaksoksi.

Fourier'n sarja eli Fourier-sarja on tapa, jolla voidaan esittää jokin jaksollinen funktio trigonometristen sini- ja kosinifunktioiden avulla äärettömänä summana. Sinimuotoiset funktiot eli sini- ja kosinifunktiot ovat keskenään identtisiä, mutta niillä on vaihe-ero $\frac{\pi}{2}$, sillä

$$\sin(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2}).$$

Signaalin aaltomuodolla kuvataan signaalin käyttäytymistä aikatasossa eli ajan funktiona. Sinimuotoinen signaali toimii perustana kaikkien signaalien taajuussisällön käsittelyssä, sillä periaatteessa mikä tahansa signaali voidaan esittää sinimuodossa olevien signaalien summana.
Sinimuotoinen signaali on muotoa

$$A\sin(\omega t + \phi) = A\sin(2\pi f t + \phi)$$

tai

$$A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(2\pi f t + \phi).$$

Sinimuotoinen signaali värähtelee yhdellä kulmataajuudella ω ja perussuureet ovat
$f = 1/T$,
$T =$ jakson pituus [s],
$f =$ taajuus [Hz],
$\omega = 2\pi f$,
$\omega =$ kulmataajuus [rad],
$T = 2\pi/\omega$,
$A_i =$ amplitudi,
$f_i =$ taajuus,
$\phi_i =$ vaihe.
Käytännössä jaksollinen signaali voidaan esittää kosinisignaalien summana valitsemalla kosinisignaalit sopivasti. Esimerkiksi funktio g voidaan siis esittää muodossa

$$\begin{aligned} g(t) &\sim \sum A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \\ &= A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \dots. \end{aligned}$$

missä merkinnällä $\sim$ tarkoitetaan, että funktio g ei välttämättä yhdy sarjaesitykseen jokaisella t:n arvolla.
Termien lukumäärä summalausekkeessa riippuu esitettävästä signaalista ja esitystarkkuudesta.

2 Spektristä

Spektri tarkoittaa mitattavan suureen jakautumista komponentteihin taajuuden tai energian suhteen. Spektrianalyysiä käytetään esimerkiksi fysiikassa ilmiöiden tulkitsemiseen. Jaksollisen signaalin tapauksessa spektri saadaan aaltomuodon Fourier-sarjasta. Fourier-sarja on tapa esittää jaksollinen funktio trigonometristen sini- ja kosinifunktioiden avulla sarjakehitelmänä eli äärettömänä summana.
Määritellään Fourier-sarja muodollisesti seuraavaksi.

Määritelmä 2.1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-jaksollinen funktio. Sarjaa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})),$$

missä

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(\frac{2\pi nt}{T}) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ja

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

sanotaan funktion f Fourier-sarjaksi. Kertoimia a_n ja b_n sanotaan funktion f Fourier-kertoimiksi.

Huomautus 2.2. Määritelmässä 2.1 ei ole oleellista, minkä välin yli funktio integroidaan, sillä T-jaksolliselle funktiolle

$$\int_0^T f(x)dx = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x)dx$$

mille tahansa $t_0 \in \mathbb{R}$.

Fourier-sarjan määritelmän avulla voidaan määritellä työn pääkäsitteet amplitudispektri ja vaihespektri.

Määritelmä 2.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-jaksollinen funktio. Joukkoa

$$\{(\frac{k}{T}, \sqrt{a_k^2 + b_k^2})|k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

missä luvut a_k ja b_k ovat funktion f Fourier-kertoimia, sanotaan funktion f amplitudispektriksi.

Määritelmä 2.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-jaksollinen funktio. Joukkoa

$$\{(\frac{k}{T}, \phi_k)|k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

missä $\phi_k = \arctan(b_k/a_k)$ ja luvut a_k ja b_k ovat funktion f Fourier-kertoimia, sanotaan funktion f vaihespektriksi. Kiinnitetään vaihekulma $\phi_k = \arctan(b_k/a_k) \in]-\pi, \pi]$ seuraavasti.

1. $\phi_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$, jos $b_k \geq 0$ ja $a_k > 0$,
2. $\phi_k \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, jos $b_k \geq 0$ ja $a_k < 0$,
3. $\phi_k \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, jos $b_k < 0$ ja $a_k < 0$,
4. $\phi_k \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, jos $b_k < 0$ ja $a_k > 0$.

   Lisäksi sovitaan, että

5. $\phi_k = \frac{\pi}{2}$, jos $b_k > 0$ ja $a_k = 0$,

6. $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$, jos $b_k < 0$ ja $a_k = 0$.

Jos $a_k = b_k = 0$, niin tällöin ϕ_k ei ole määritelty.

Amplitudispektri liittää kuhunkin taajuuteen kyseisellä taajuudella värähtelevän kosinisignaalin amplitudin. Vastaavasti vaihespektri liittää kuhunkin taajuuteen kyseisellä taajuudella värähtelevän kosinisignaalin vaihekulman. Jaksollisen signaalin spektri on luonteeltaan diskreetti eli koostuu erillisistä komponenteista, joiden taajuudet saadaan signaalin perustaajuuden $f_0 = 1/T$ harmonisina monikertoina $f_n = n/T$. Fourier-sarja koostuu siis perustaajuudella ja sen monikerroilla värähtelevistä sini- ja kosinikomponenteista.

Esimerkki 2.5. Olkoon $f(t) = 3\sin(2\pi 2t)$. Lasketaan funktion $f(t)$ amplitudispektri.

Ratkaisu: Koska funktio

$$f(t) = 3\sin(2\pi 2t)$$

on muotoa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})),$$

missä

$$\begin{aligned} T &= 1, \\ b_2 &= 3, \\ a_k &= 0 \text{ kaikilla } k, \end{aligned}$$

niin funktion $f(t) = \sin(2\pi 2t)$ Fourier-sarja on funktio itse. Näiden nojalla funktio

$$f(t) = 3\sin(2\pi 2t)$$

voidaan esittää Fourier-sarjana

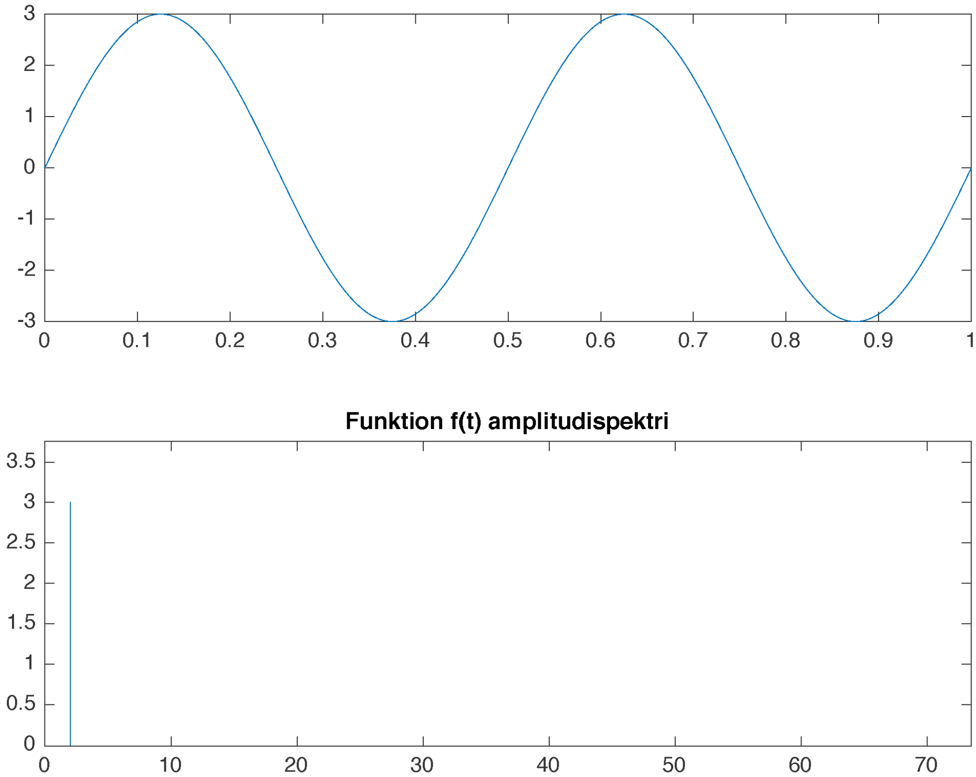
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)).$$

Määritelmän 2.3 nojalla amplitudispektriksi saadaan

$$\{(2,3)\} \cup \{(k,0)|k \neq 2\}.$$

Parametri $a_k = 0$ kaikilla k ja ainoa nollasta poikkeava parametri b_k on b_2. Määritelmän 2.4 kohdan 5 perusteella $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$. Määritelmän 2.4 nojalla vaihespektriksi saadaan

$$\{(2, \frac{\pi}{2})\}.$$



Kuva 1: Funktio f(t):n kuvaaja ja amplitudispektri.

Esimerkki 2.6. Olkoon $f(t) = \sin(2t) + 3\sin(5t) + 4\cos(5t)$.
Lasketaan funktion $f(t)$ amplitudi ja vaihespektri.

Ratkaisu:
Jaetaan funktio $f(t)$ kahteen osaan värähtelevän kulmataajuuden mukaan eli olkoon $f_1(t) = \sin(2t)$ ja $f_2(t) = 3\sin(5t) + 4\cos(5t)$. Lasketaan ensin funktion $f_1(t) = \sin(2t)$ spektrit. Sijoitetaan luvut paikalleen aiemmin esiteltyyn amplitudispektrin kaavaan, jolloin saadaan amplitudispektriksi

$$\{(\frac{2}{2\pi}, \sqrt{0^2 + 1^2})\} = \{(\frac{1}{\pi}, 1)\}.$$

Vaihespektri saadaan vastaavasti ja tehdään sijoitus, josta saadaan, että

$$\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}, \arctan(\frac{1}{0}) = \frac{\pi}{2}.$$

Vaihespektri on siis

$$\{(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2})\}.$$

Lasketaan sitten funktion $f_2(t)$ amplitudi- ja vaihespektri.
Koska $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, voidaan

$$f_2(t) = 3\sin(5t) + 4\cos(5t)$$

kirjoittaa muodossa

$$f_2(t) = 5 \cdot (\frac{3}{5} \cdot \sin(5t) + \frac{4}{5} \cdot \cos(5t)).$$

Merkitään $x = 5t$ ja ratkaistaan y yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos(y) = \frac{4}{5} \\ \sin(y) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

ja käytetään kosinin yhteenlaskukaavaa

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

josta saadaan, että $f_2(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_2(t) = 5 \cdot \cos(5t - \phi),$$

missä

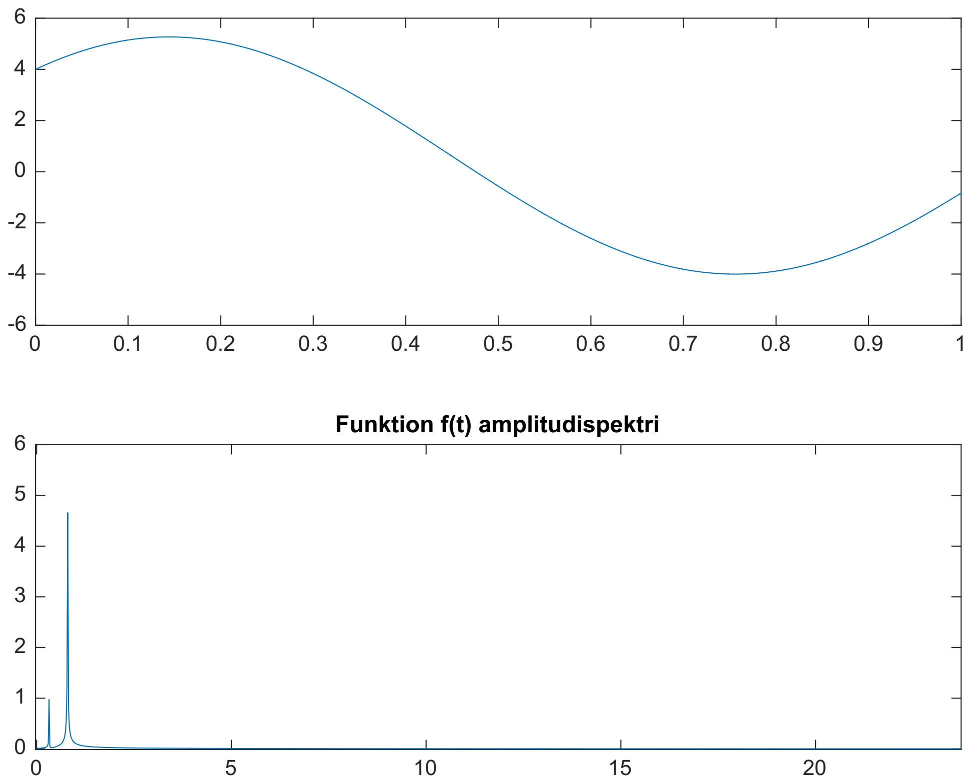
$$\phi = \arctan\frac{3}{4}.$$

Tästä saadaan, että komponentin $f_2(t)$ amplitudi on 5 ja vaihe on $\phi = \arctan\frac{3}{4}$. Funktion f amplitudispektriksi saadaan edellisestä

$$\{(\frac{2}{2\pi},1)\} \cup \{(\frac{5}{2\pi},5)\} \cup \{(\frac{k}{2\pi},0) | k \neq 2,5\}$$

ja vaihespektriksi

$$\{(\frac{2}{2\pi},\frac{\pi}{2})\} \cup \{(\frac{5}{2\pi},\arctan\frac{3}{4})\}.$$



Kuva 2: Funktio f(t):n kuvaaja ja amplitudispektri. Kuvan amplitudispektrissä näkyvät epätarkkuudet johtuvat käytetystä piirto-ohjelmasta, joka laskee spektrin Fourier-muunnoksen avulla.

Esimerkki 2.7. Olkoon

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

Lasketaan funktion f Fourier-sarja ja määrätään amplitudi- ja vaihespektri.

Ratkaisu: Funktio on muotoa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n(\sin(nx)).$$

Lasketaan ensin kerroin a_0, joksi saadaan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |x| dx = \pi,$$

jonka jälkeen kerroin

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\bigg/_{\!0}^{\pi} \frac{x\sin(nx)}{n} - \int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx] = \frac{2}{\pi}\bigg/_{\!0}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2} \\ &= \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}, \end{aligned}$$

ja lopuksi kerroin

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx) dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi}[\bigg/_{\!-\pi}^{0} \frac{x\cos(nx)}{n} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}dx] + \frac{1}{n}[\bigg/_{\!0}^{\pi}\frac{-x\cos(nx)}{n} + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx] \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{\pi(-1)^n}{n} - \bigg/_{\!-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{n^2}] + \frac{1}{\pi}[\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \bigg/_{\!0}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi}\frac{-\pi(-1)^n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Jokainen pariton luku n on muotoa $n = 2k + 1$ jollakin $k = 0, 1, 2, \ldots$, joten $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Parillisilla n:n arvoilla $a_n = 0$, kun $n \geq 1$ ja $b_n = 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$

Amplitudispektri on

$$\{(\frac{2n+1}{2\pi}, \frac{4}{\pi(2n+1)^2})|n = 0, 1, \ldots\} \cup \{(\frac{2n}{2\pi}, 0)|n = 1, 2, \ldots\}.$$

Vaihespektriä tarkastellessa huomataan, että nyt $a_{2n+1} < 0$ ja $b_{2n+1} = 0$. Määritelmän 2.3 perusteella $\phi_{2n+1} \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ja yksikköympyrän perusteella tästä seuraa, että $\phi_{2n+1} = \pi$.
Vaihe ϕ_{2n} ei ole määritelty millään luvun n arvolla.
Näin ollen vaihespektri on

$$\{(\frac{2n+1}{2\pi}, \pi)|n = 0, 1, \ldots\}.$$

2.1 Symmetrian vaikutuksesta Fourier-sarjaan

Fourier-sarjan kertoimien laskeminen yksinkertaistuu, jos funktio on parillinen tai pariton. Esimerkin 2.7 funktio oli parillinen ja kertoimien a_n laskemisessa hyödynnettiin parillisuutta. Parillisuutta voidaan hyödyntää yleisemminkin. Jokaiselle T-jaksolliselle parilliselle funktiolle g saadaan kerroin

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

sillä kosini on parillinen ja kahden parillisen funktion tulo on parillinen. Vastaavasti, koska sini on pariton ja parittoman funktion tulo parillisen funktion kanssa on pariton, saadaan kertoimiksi

$$b_n = 0.$$

Jos funktio g on pariton, eli $g(-t) = -g(t)$ kaikilla t, niin edellä esitetyn päättelyn mukaan kertoimiksi saadaan

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Parittomalle funktiolle $a_n = 0$ kaikilla n.
Parilliselle funktiolle $g(-t) = g(t)$ kaikilla t, josta kertoimeksi a_0 saadaan

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} g(t)dt.$$

Vastaavalla tavalla kertoimeksi a_n saadaan

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt.$$

Parittomalle funktiolle saadaan nollakertoimet

$$a_0 = 0 \text{ ja}$$
$$a_n = 0$$
sekä kerroin
$$b_n = 2\cdot\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} g(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt$$

Esimerkki 2.8. Olkoon

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun} -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{kun} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lasketaan funktion g Fourier-sarja.

Ratkaisu: Valitaan $T = 2\pi$ ja jatketaan g 2π-jaksolliseksi. Funktio g on pariton, joten edellä esitetyn nojalla kertoimet a_n ovat nollia kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Kertoimiksi b_n saadaan

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin nx dx,$$

koska $g(x)\sin nx$ on parillinen. Tämän nojalla

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\Big/_{0}^{2} \cos nx = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Koska $\cos n\pi = (-1)^n$ niin seuraa, että

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

on auki kirjoitettuna

$$(b_n) = \frac{4}{\pi}(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots).$$

Koska $\cos n\pi = (-1)^n$, niin

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Nähdään, että kertoimet b_n ovat nollia parillisilla n:n arvoilla. Kertoimista b_n saadaan jono $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{4}{\pi}\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots\right)$.
Fourier-sarja on siis

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots)$$

eli

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Aiemmassa esimerkissä 2.7 symmetriaa olisi voitu käyttää hyväksi siten, että funktion f Fourier-sarjan sinikertoimet eli kertoimet b_n menevät nollaksi parillisuuden nojalla. Tällöin kertoimia ei olisi tarvinnut laskea, koska funktion symmetrisyys varmistaa kertoimien b_n nollautumisen kaikilla n:n arvoilla.

Lähdeluettelo

[1] Antti Koivumäki: *Johdatus tietoliikennesignaalien Fourier-analyysiin* `http://users.metropolia.fi/~koiva/S2015/TV14K-Integr/040_johdatus.tietoliikennesignaalien.Fourier-analyysiin.pdf`

[2] Antti Kosonen: *Signaalien taajuusanalyysi* `https://noppa.lut.fi/noppa/opintojakso/bl40a0400/materiaali/luentokalvot_4.pdf`

[3] Jyrki Laitinen: *Signaalit aika- ja taajuustasossa* `http://www.oamk.fi/~jyrkila/0405/tl5231/tl5231.fourier.pdf`

[4] Seppo Seikkala: *Signaalit ja järjestelmät* `http://www.ee.oulu.fi/~ssa/sig/`