Derivaattaluvut ja Dini derivaatat

LuK-tutkielma
Helmi Glumoff
2434483
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2016

Sisältö

Johdanto

Derivaatta on yksi analyysin keskeisimpiä työkaluja, jolla on paljon sovelluksia funktion kulkuun liittyvissä teorioissa. Kuitenkaan, derivaattaa ei aina ole olemassa. Joillain funktioilla derivaatta on olemassa vain tietyissä pisteissä, toisilla ei yhdessäkään. Tällaisiin tilanteisiin on kehitetty korvikkeita derivaatalle. Korvikkeiden avulla voidaan kuvata sellaistenkin funktioiden kulku, joilla ei ole olemassa tavallista derivaattaa.

Tässä Luk-tutkielmassa käsittelen yhtä tällaista derivaatan korviketta, Dini derivaattaa. Se on yksinkertainen ja kätevä derivaatan korvike. Dini derivaatta on myös erittäin monikäyttöinen, sillä se on olemassa jokaisessa pisteessä jokaiselle avoimella välillä määritellylle funktiolle. Työn teorian ja todistusten ymmärtämiseksi on hyvä tuntea analyysin tavallisimpia käsitteitä, kuten derivaatta, funktion jatkuvuus ja monotonisuus. Lähes kaikki tutkielman ymmärtämiseksi tarvittavat määritelmät ja lauseet on kuitenkin esitetty ensimmäisessä kappaleessa, joten pohjaksi ei välttämättä tarvitse muuta kuin matemaattisen tekstin ja ajattelun ymmärtämistä.

Tutkielman ensimmäisessä kappaleessa määrittelen myöhempiä todistuksia ja lauseita varten tarpeellisia käsitteitä. Toisessa kappaleessa olen määritellyt työn varsinaisen aiheen mukaiset käsitteet ja esittänyt niihin liittyviä lemmoja. Viimeisessä kappaleessa on useita esimerkkejä funktioiden Dini derivaatoista ja kaksi lausetta todistuksineen. Lemman 2.8 todistuksen sekä esimerkin 3.3 olen keksinyt itse.

Dini derivaatta on nimetty italialaisen matemaatikon Ulisse Dinin (1845-1918) mukaan. Hän tutki erityisesti funktioiden jatkuvuutta, derivaattoja, derivaatan olemassaolon ehtoja, sarjoja ja äärellisiä integraaleja. Dini oli yksi suurimpia mestareita teorioiden yleistämisessä ja vastaoletusten rakentamisessa. Hän todisti tarkasti lauseita, jotka oli siihen mennessä pystytty osoittamaan vain epätäsmällisin keinoin.

1 Taustaa

Tässä LuK-tutkielmassa keskitytään reaalilukujen analyysiin, joten määritelmien ja esimerkkien funktiot on määritelty $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.1. Olkoon funktio f määritelty välillä I ja $x_0 \in I$. Funktion f derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa tai saa arvon ∞ tai $-\infty$. Mikäli funktion derivaatta on äärellinen, funktio on *derivoituva* pisteessä x_0. Yleensä, kun sanotaan, että derivaatta on olemassa, tarkoitetaan sen olevan äärellinen.

Vaikka funktio f ei olisi derivoituva pisteessä x_0, voi erotusosamäärän raja-arvo saada toispuoleisia arvoja.

Määritelmä 1.2. Olkoon funktio f määritelty välillä I ja $x_0 \in I$. Funktion f oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

kun toispuoleinen raja-arvo on olemassa. Samoin funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Huomautus 1.3. Funktion f derivaatta pisteessä x_0 on olemassa jos ja vain jos

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Määritelmä 1.4. Olkoon funktio f määritelty välillä I. Olkoon x_1 ja x_2 sellaiset pisteet väliltä I, että $x_1 < x_2$.

(1) Jos kaikille x_1 ja x_2 pätee $f(x_1) \leq f(x_2)$, funktio f on *kasvava* välillä I.

(2) Jos kaikille x_1 ja x_2 pätee $f(x_1) < f(x_2)$, funktio f on *aidosti kasvava* välillä I.

(3) Jos kaikille x_1 ja x_2 pätee $f(x_1) \geq f(x_2)$, funktio f on *vähenevä* välillä I.

(4) Jos kaikille x_1 ja x_2 pätee $f(x_1) > f(x_2)$, funktio f on *aidosti vähenevä* välillä I.

Lause 1.5 (Bolzano-Weierstrassin lause)**.** *Jokaisella rajoitetulla lukujonolla, on suppeneva osajono.*

Todistus. Lauseen [1, Theorem 2.39] nojalla, jokaisella lukujonolla on monotoninen osajono. Tällainen osajono on siis sekä monotoninen, että rajoitettu ja siten suppeneva. $\square$

2 Määritelmät

Esimerkki 2.1. Olkoon $f(x) = |x| \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan funktion f derivoituvuutta pisteessä $x_0 = 0$. Erotusosamääräksi saadaan

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Siten

$$f'_+(0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

ja

$$f'_-(0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Funktiolla f on siis erisuuret oikean- ja vasemmanpuoleiset derivaatat pisteessä $x_0 = 0$, joten funktio f ei ole derivoituva pisteessä $x_0 = 0$.

Aina funktiolla ei kuitenkaan ole edes toispuoleisia derivaattoja.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \begin{cases} |x||\cos x^{-1}|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Koska $|\cos x^{-1}| \leq 1$ kaikilla $x \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

joten funktio f on jatkuva pisteessä $x = 0$. Selvästi nähdään, että f on jatkuva kaikissa muissa pisteissä $x \in \mathbb{R}$, joten f on jatkuva funktio. Funktion f heilahteleva käyttäytyminen johtaa siihen, että molemmilla jonoilla

$$\{x : |\cos x^{-1}| = 1\} \text{ ja } \{x : |\cos x^{-1}| = 0\}$$

raja-arvo, kun x lähestyy nollaa, on nolla. Täten myös jonoilla

$$\{x : f(x) = |x|\} \text{ ja } \{x : f(x) = 0\}$$

on raja-arvona nolla. Erotusosamäärän tarkastelu osoittaa, että

$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1, \text{ kun taas } \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

eli funktiolla f ei ole olemassa oikeanpuoleista derivaattaa f'_+ pisteessä $x = 0$. Samoin voidaan osoittaa, ettei funktiolla f ole vasemmanpuoleista derivaattaa.

Derivaatalla on tärkeä rooli analyysissä, minkä vuoksi on kehitetty korvikkeita tilanteisiin, joissa derivaattaa ei ole olemassa. Yksi yksinkertaisimmista tällaisista derivaatan korvikkeista on Dini-derivaatta. Dini-derivaatta on olemassa jokaisessa pisteessä jokaiselle funktiolle, joka on määritelty avoimella välillä. Määritellään aluksi funktion derivaattaluku.

Määritelmä 2.3. Luku $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ on funktion f derivaattaluku, jos on olemassa sellainen lukujono $h_k \to 0$, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = \alpha.$$

Huomautus 2.4. Jos f on derivoituva pisteessä x, niin sillä on tasan yksi derivaattaluku, joka on sen derivaatta $f'(x)$.

Määritelmä 2.5. Luku $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ on funktion f oikeanpuoleinen derivaattaluku, jos on olemassa sellainen lukujono $h_k \to 0$, missä $h_k > 0$, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = \alpha.$$

Vastaavasti luku α on funktion f vasemmanpuoleinen derivaattaluku, jos on olemassa samat ehdot täyttävä lukujono $h_k < 0$.

Dini derivaattoja kutsutaan myös äärimmäisiksi toispuoleisiksi derivaattaluvuiksi. Dini derivaattoja on olemassa neljä: ylempi ja alempi oikeanpuoleinen ja ylempi ja alempi vasemmanpuoleinen Dini derivaatta.

Määritelmä 2.6. Funktion f oikeanpuoleiset Dini derivaatat pisteessä x ovat

$$\begin{aligned} D^+f(x) = \sup\{\alpha \in [-\infty,\infty] \,|\, &\alpha \,\text{on funktion}\, f \,\text{oikeanpuoleinen} \\ &\text{derivaattaluku pisteessä}\, x\} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} D_+f(x) = \inf\{\alpha \in [-\infty,\infty] \,|\, &\alpha \,\text{on funktion}\, f \,\text{oikeanpuoleinen} \\ &\text{derivaattaluku pisteessä}\, x\}. \end{aligned}$$

Vastaavasti määritellään funktion f vasemmanpuoleiset Dini derivaatat pisteessä x

$$\begin{aligned} D^-f(x) = \sup\{\alpha \in [-\infty,\infty] \,|\, &\alpha \,\text{on funktion}\, f \,\text{vasemmanpuoleinen} \\ &\text{derivaattaluku pisteessä}\, x\} \end{aligned}$$

ja

$$D_-f(x) = \inf\{\alpha \in [-\infty, \infty] \mid \alpha \text{ on funktion } f \text{ vasemmanpuoleinen derivaattaluku pisteessä } x\}.$$

Sovitaan, että jos $A \subset [-\infty, +\infty]$ ei ole ylhäältä rajoitettu, niin $\sup A = +\infty$. Vastaavasti, jos $A \subset [-\infty, +\infty]$ ei ole alhaalta rajoitettu, niin $\inf A = -\infty$.

Osoitetaan seuraavaksi, että määritelmä (2.6) on hyvin asesettu.

Lemma 2.7. *Funktiolla f on jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$ ainakin yksi oikeanpuoleinen derivaattaluku. Vastaavasti funktiolla f on jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$ ainakin yksi vasemmanpuoleinen derivaattaluku.*

Todistus. Valitaan sellainen mielivaltainen jono $x_k > x$, että $x_k \to x$. Tarkastellaan jonoa

$$\alpha_k = \frac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x}.$$

Jos jono $(\alpha_k)_k$ on rajoitettu, sillä on Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla suppeneva osajono $(\alpha_{k_m})_m$. Tällöin

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} \alpha_{k_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{f(x_{k_m}) - f(x)}{x_{k_m} - x}$$

on funktion f oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x. Jos $(\alpha_k)_k$ ei ole ylhäältä rajoitettu, sillä on sellainen osajono $(\alpha_{k_m})_m$, että $\alpha_{k_m} \to +\infty$, jolloin $+\infty$ on funktion f oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x. Jos (α_k) ei ole alhaalta rajoitettu, vastaavasti $-\infty$ on funktion f oikeanpuolinen derivaattaluku pisteessä x.

Vasemmanpuoleisen derivaattaluvun olemassaolon todistus on analoginen oikeanpuoleiselle. □

Lemma 2.8. *Funktion f oikeanpuoleiset Dini derivaatat pisteessä $x = x_0$ ovat samat jos ja vain jos funktiolla f on oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä $x = x_0$ eli $D^+f(x) = D_+f(x) = f'_+$. Vastaava yhteys pätee vasemmanpuoleiselle derivaatalle.*

Todistus. "$\Leftarrow$" Olkoon α funktion f oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0. Tällöin erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Huomautuksen 2.4 nojalla luku α on funktion oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x_0. Tällöin Dini-derivaatan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}D^+f(x) = \sup\{\alpha \in [-\infty,\infty] \,|\, \alpha \,\text{on funktion}\, f \,\text{oikeanpuoleinen}\\ \text{derivaattaluku pisteessä}\, x\} = \alpha\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}D_+f(x) = \inf\{\alpha \in [-\infty,\infty] \,|\, \alpha \,\text{on funktion}\, f \,\text{oikeanpuoleinen}\\ \text{derivaattaluku pisteessä}\, x\} = \alpha.\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Olkoon α funktion f ylempi ja alempi oikeanpuoleinen Dini derivaatta pisteessä x_0. Tällöin α on Dini derivaatan määritelmän nojalla funktion f oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x_0. Oikeanpuoleinen derivaattaluku on nyt yksikäsitteinen, jolloin Huomautuksen 2.4 nojalla α on funktion f oikeanpuoleinen derivaatta. $\square$

Lemma 2.9. *Lemman 2.8 mukaisesti pätee myös seuraava yhteys.*

$$D^+f(x) = D_+f(x) = \infty$$

jos ja vain jos

$$\lim_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \infty.$$

Vastaavasti pätee myös, että

$$D^-f(x) = D_-f(x) = -\infty$$

jos ja vain jos

$$\lim_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = -\infty.$$

3 Esimerkkejä ja lauseita

Esimerkki 3.1. Määritetään Dini-derivaatat funktiolle $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pisteessä $x = 0$.

Funktio f on jatkuva kaikkialla $\in \mathbb{R}$. Nyt

$$\sin\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

ja

$$\sin\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\cdot\pi.$$

Tällöin on olemassa lukujonot

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi} \to 0$$

ja

$$y_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\pi} \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Tällöin $f(x_k) = |x_k| = x_k$ ja $f(y_k) = 0$. Täten

$$\limsup_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{x_k} = 1.$$

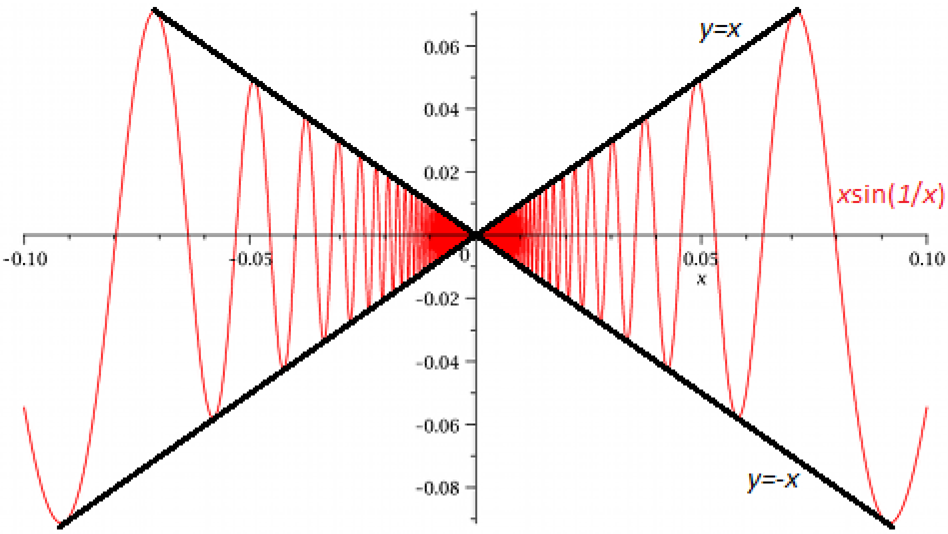
Toisaalta jokaiselle lukujonolle (x_k), jolle $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ pätee

$$\frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} = \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) \leq 1.$$

Tästä seuraa, että $D^+(0) = D^-(0) = 1$. Vastaavasti, koska

$$\frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} = \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) \geq -1,$$

niin $D_+(0) = D_-(0) = -1$.



Kuva 1: Funktion $x \sin(1/x)$ kuvaaja

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan funktiota

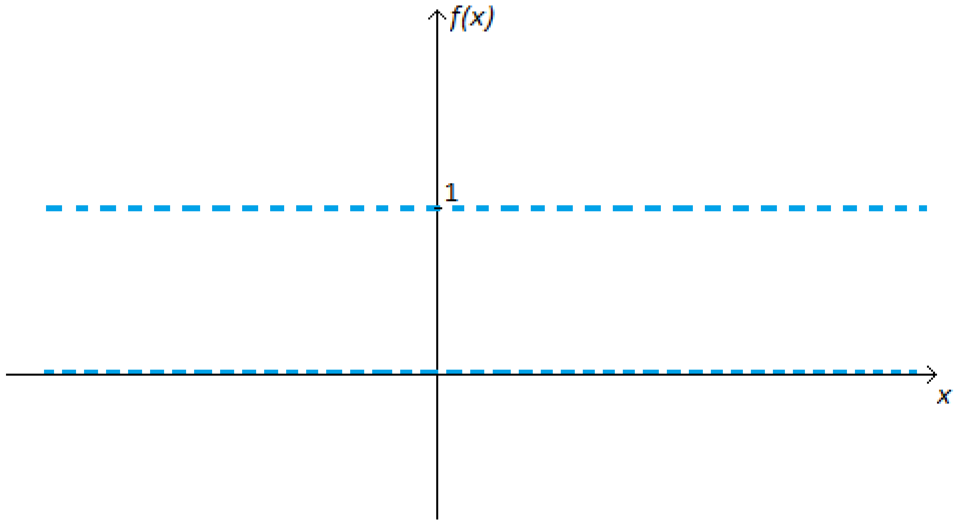
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritetään funktion Dini derivaatat. Kaikilla rationaaliluvuilla x

$$D^+f(x) = 0,\ D_+f(x) = -\infty,\ D^-f(x) = \infty \text{ ja } D_-f(x) = 0.$$

Dini derivaatat kaikille irrationaalisille luvuille x ovat

$$D^+f(x) = \infty,\ D_+f(x) = 0,\ D^-f(x) = 0 \text{ ja } D_-f(x) = -\infty.$$



Kuva 2: Esimerkin 3.2 funktion $f(x)$ kuvaaja.

Dini derivaattojen avulla on helppo selvittää, onko funktiolla derivaatta pisteessä x_0. Derivaatta on olemassa jos ja vain jos kaikki neljä Dini derivaattaa ovat samat pisteessä x_0. Tämä on seuraus Lemmasta 2.8.

Esimerkki 3.3. Määritetään Dini derivaatat funktiolle $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pisteessä $x = 0$. Kun lähestytään nollaa positiiviselta puolelta $x > 0$, niin

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Joten

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty.$$

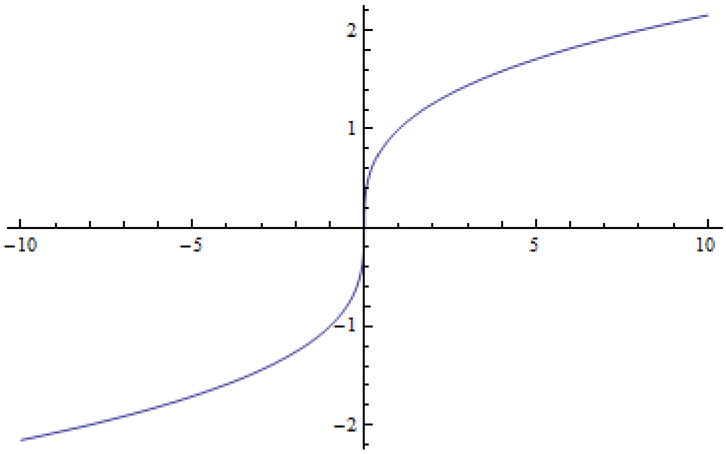
Kun nollaa lähestytään negatiiviselta puolelta $x < 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Joten

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty.$$

Täten lemman (2.9) nojalla $D^+f(0) = D_+f(0) = \infty$ ja $D^-f(0) = D_-f(0) = \infty$.



Kuva 3: Funktion $\sqrt[3]{x}$ kuvaaja

Lause 3.4. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos $D^+f(x) > 0$ jokaisessa pisteessä $x \in [a, b[$, niin f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että funktio f on kasvava. Tämä osoitetaan vastaoletuksella. Jos f ei ole kasvava välillä $[a, b]$, on olemassa pisteet c ja d, joilla $a \leq c < d \leq b$ ja $f(c) > f(d)$.

Olkoon y mielivaltainen piste välillä $]f(d), f(c)[$. Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, sillä on väliarvo-ominaisuus. Lauseen [1, Theorem 5.52] nojalla on olemassa sellainen piste $t \in]c, d[$, että $f(t) = y$. Täten joukko $\{x : f(x) = y\} \cap [c, d]$ on epätyhjä.

Olkoon $x_0 = \sup\{x : c \leq x \leq d \text{ ja } f(x) = y\}$. Nyt $f(d) < y$ ja f on jatkuva, mistä seuraa, että $x_0 < d$. Siten $f(x) < y$, kun $x \in]x_0, d]$. Lisäksi, koska f on jatkuva, joukko $\{x : f(x) = y\}$ on suljettu, joten $f(x_0) = y$.

Tämä kuitenkin edellyttäisi, että $D^+f(x_0) \leq 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $D^+f(x) > 0$ kaikilla $x \in [a, b[$ kanssa. Tämä ristiriita osoittaa, että f on kasvava.

Nyt osoitetaan, että funktio f on aidosti kasvava. Jos f ei ole aidosti kasvava, on oltava jokin alaväli, jossa f on vakio. Jokaisessa pisteessä tällaisella välillä funktion f derivaatta olisi $f'(x) = 0$. Tällöin ei olisi mahdollista, että $D^+f(x) > 0$ näissä pisteissä. Funktio f on siis aidosti kasvava välillä $[a, b]$. □

Huomautus 3.5. Vastaavasti, lauseen 3.4 mukaisesti funktio f on aidosti kasvava, jos $D^-f(x) > 0$ kaikissa pisteissä x. Jos taas $D_+f(x) < 0$ kaikissa pisteissä x tai jos $D_-f(x) < 0$ kaikissa pisteissä x, niin funktio f on aidosti vähenevä.

Lause 3.6. *Jos funktio f on jatkuva ja a ja b ovat funktion f oikeanpuoleisia derivaattalukuja pisteessä x, niin jokainen luku $c \in [a, b]$ on funktion f oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x.*

Todistus. Olkoon a ja b ovat funktion derivaattalukuja pisteessä x. Tällöin on olemassa lukujonot $a_k \to x$ ja $b_k \to x$ ja $a_k > x$ ja $b_k > x$. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(a_k) - f(x)}{a_k - x} = a$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(b_k) - f(x)}{b_k - x} = b.$$

Nyt jokaiselle luvulle c, jolle pätee $a < c < b$, on voimassa

$$(1) \lim_{k\to\infty} \frac{f(a_k) - f(x)}{a_k - x} < c$$

ja

$$(2) \lim_{k\to\infty} \frac{f(b_k) - f(x)}{b_k - x} > c.$$

Olkoon $g(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Kohdista (1) ja (2) seuraa, että $g(a_k) < c$ ja $g(b_k) > c$. Koska g on jatkuva, on olemassa lukujono $z_k \in]a_k, b_k[$, jolle $g(z_k) = c$. Nyt $z_k \to x$ ja $z_k > x$. Täten

$$\frac{f(z_k) - f(x)}{z_k - x} = c,$$

jolloin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k) - f(x)}{z_k - x} = c.$$

Joten c on funktion oikeanpuoleinen derivaattaluku pisteessä x. □

Lähdeluettelo

[1] Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson: Elementary Real Analysis; Second edition, 2008.

[2] Kuva 1: http://i.stack.imgur.com/NLp4s.png

[3] Kuva 3: http://i.stack.imgur.com/dClDP.png

[4] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Dini.html