Riemannin sarjateoreema

LuK-tutkielma
Sami Määttä
2368326
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2016

Sisältö

Johdanto

Tutkielmassa tutustutaan aluksi lukujonen suppenemisen käsitteeseen, jota tarvitaan sarjan summan määrittelyssä. Tutkielmassa tutustutaan sarjoihin lukuisten esimerkkien avulla, jolloin saadaan kosketuspintaan niiden ominaisuuksiin. Sen lisäksi tarkastellaan vuorottelevia sarjoja, joihin liittyy olennaisesti ehdollinen suppenevuus. Tutkielma kulminoituu Riemannin sarjateoreeman todistukseen, jossa aiemmin mainittuja käsitteitä hyödynnetään. Sarjateoreemalla ei ole juurikaan käytännön käyttökohteita vaan toimii esityksenä ehdollisesti suppenevien sarjojen ominaisuuksista.

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa O. E. Stanaitisin teosta [1] ja sarjan määritelmä on peräisin P. Hästön luentomonisteesta [2]. Riemannin sarjateoreeman todistus pohjautuu J. M. Hyslopin teoksen [3] todistukseen.

1 Lukujonot

Määritelmä 1.1. Olkoon lukujono $\{a_k\} \in \mathbb{R}$ ja $A \in \mathbb{R}$. Lukujonon sanotaan *suppenevan lukuun* A, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_k - A| < \varepsilon, \quad \text{kun } k > n_\varepsilon.$$

Mikäli lukujono ei suppene, niin sanotaan, että se *hajaantuu*.

Jos lukujono suppenee lukuun A, niin merkitään $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A$.

Määritelmä 1.2. Olkoon lukujono $\{a_k\} \in \mathbb{R}$. Lukujonon $\{a_k\}$ sanotaan olevan *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku $A \in \mathbb{R}$, että

$$a_k \leq A \text{ kaikilla } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vastaavasti lukujonon $\{a_k\}$ sanotaan olevan *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku $B \in \mathbb{R}$, että

$$a_k \geq B \text{ kaikilla } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mikäli lukujono on ylhäältä ja alhaalta rajoitettu sanotaan sen olevan *rajoitettu.*

Lemma 1.3. *Olkoon lukujono* $\{a_k\} \in \mathbb{R}$ *suppeneva. Tällöin se on rajoitettu.*

Huomautus 1.4. Lukujono ei välttämättä suppene, vaikka se olisi rajoitettu. Rajoittamaton lukujono ei kuitenkaan suppene.

2 Sarjat

Määritelmä 2.1. Olkoon reaalilukujono $\{a_k\} \in \mathbb{R}$. Muodostetaan sellainen jono S_n, että

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Jos jono S_n suppenee eli on olemassa sellainen $S \in \mathbb{R}$, että

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

niin lukua S sanotaan *sarjan summaksi* ja merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Esitystä $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sanotaan *sarjaksi* ja jonoa S_n sanotaan *sarjan osasummaksi.*

Lemma 2.2. *Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin on olemassa sellainen luku $k_\varepsilon > 0$, että*

$$|a_k| < \varepsilon, \text{ kun } k > k_\varepsilon.$$

Eli $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$

Todistus. Lause on todistettu teoksessa [1] sivulla 42. □

Esimerkki 2.3. Osoitetaan, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ suppenee lukuun 1.

Todistus. Nyt

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Siis sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ osasumma S_n voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Täten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

□

Esimerkki 2.4. Osoitetaan, että *harmoninen sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu.

Todistus. Osoitetaan, että harmonisen sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ osasumma $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ei ole rajoitettu eli se hajaantuu Lemman 1.3 nojalla.
Nyt

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1, \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}, \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

Induktiolla luvulle n voidaan osoittaa, että

$$S_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Nyt $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{n}{2}) = \infty$, joten Lemman 1.3 nojalla S_n ei ole rajoitettu, eikä siten suppene. Tästä taas seuraa, että harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu. □

2.1 Vuorottelevat sarjat

Määritelmä 2.5. Sarjan sanotaan olevan *vuorotteleva sarja*, jos se on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \text{ tai } \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \quad \text{missä } a_k > 0.$$

Huomautus 2.6. Vuorotteleva sarja sisältää äärettömästi positiivisia ja negatiivisia termejä.

Esimerkki 2.7. Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \cdots$$

on vuorotteleva, sillä se on muotoa $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, jossa $a_k = \frac{1}{k}$. Tätä sarjaa kutsutaan *vuorottelevaksi harmoniseksi sarjaksi.*

Lemma 2.8. *Olkoon vuorotteleva harmoninen sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$. *Sarja suppenee lukuun* $\ln 2$ *eli*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Todistus. Lemma on todistettu teoksessa [1] sivuilla 36–38. □

2.2 Ehdollisesti ja itseisesti suppenevat sarjat

Määritelmä 2.9. Olkoon sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Mikäli sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee, niin sanotaan, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee *itseisesti.* Mikäli sarja ei suppene itseisesti, mutta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin sanotaan, että sarja suppenee *ehdollisesti.*

Esimerkki 2.10. Tarkastellaan vuorottelevaa harmonista sarjaa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1) Nyt sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$ Lemman 2.8 nojalla eli se suppenee.

2) Toisaalta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ on harmoninen sarja ja se hajaantuu Esimerkin 2.4 nojalla.

Kohtien 1) ja 2) nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ suppenee ehdollisesti määritelmän 2.9 nojalla.

Lause 2.11. *Olkoon ehdollisesti suppeneva sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Tällöin sarjassa on negatiivisia ja positiivisia termejä.*

Todistus. Olkoon suppeneva sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

1) Oletetaan ensin, että $a_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nyt oletuksesta seuraa, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Lisäksi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, sillä $a_k > 0$. Näin ollen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ siis suppenee itseisesti, eikä ehdollisesti.

2) Oletetaan, että $a_k < 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nyt oletuksen nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Lisäksi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} -a_k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, sillä $a_k < 0$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin myös $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Tällöin se siis suppenee itseisesti.

3) Oletetaan vielä, että $a_k = 0$. Nyt sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |0| = 0$. Siis se suppenee itseisesti.

Täten kohtien 1)-3) nojalla ehdollisesti suppenevassa sarjassa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ täytyy olla sekä positiivisia että negatiivisia termejä. Lisäksi siinä voi olla myös termejä, jotka ovat 0. $\square$

Lemma 2.12. *Ehdollisesti suppenevassa sarjassa* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *on ääretön määrä positiivisia ja negatiivisia termejä.*

Lause 2.13. *Olkoon ehdollisesti suppeneva sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*. Tällöin sen positiivisten termien ja negatiivisten termien erikseen muodostamat sarjat hajaantuvat.*

Todistus. Olkoon ehdollisesti suppeneva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja tämän eräs osasumma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Lauseen 2.11 ja Lemman 2.12 nojalla sarjassa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on äärettömästi positiivisia ja negatiivisia termejä. Olkoon B_{n_1} summa osasumman S_n positiivisista termeistä ja C_{n_2} vastaavasti summa negatiivisista termeistä, missä $n_1 + n_2 = n$. Kummassakin osasummassa voi olla ääretön määrä termejä, jotka ovat 0. Olkoon lisäksi $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Täten $S_n = B_{n_1} + C_{n_2}$ ja $\sigma_n = B_{n_1} + |C_{n_2}| = B_{n_1} - C_{n_2}$, sillä $C_{n_2} \leq 0$. Nyt oletuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ja $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, sillä sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on ehdollisesti suppeneva.

Nyt

$$\begin{aligned}
B_{n_1} &= \frac{1}{2}(2B_{n_1}) = \frac{1}{2}(B_{n_1} + B_{n_1} + C_{n_2} - C_{n_2}) \\
&= \frac{1}{2}(B_{n_1} + B_{n_1} + C_{n_2} + |C_{n_2}|) \\
&= \frac{1}{2}(B_{n_1} + |C_{n_2}| + B_{n_1} + C_{n_2}) \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_n + S_n)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
C_{n_2} =& -\frac{1}{2}(-2C_{n_2}) = -\frac{1}{2}(-C_{n_2} - C_{n_2} + B_{n_1} - B_{n_1}) \\
=& -\frac{1}{2}(|C_{n_2}| - C_{n_2} + B_{n_1} - B_{n_1}) \\
=& -\frac{1}{2}(B_{n_1} + |C_{n_2}| - B_{n_1} - C_{n_2}) \\
=& -\frac{1}{2}(B_{n_1} + |C_{n_2}| - (B_{n_1} + C_{n_2})) \\
=& -\frac{1}{2}(\sigma_n - S_n).
\end{aligned}$$

Siis $B_{n_1} = \frac{1}{2}(\sigma_n + S_n)$ ja $C_{n_2} = -\frac{1}{2}(\sigma_n - S_n)$.
Nyt σ_n oletuksen nojalla hajaantuu, joten myös B_{n_1} ja C_{n_2} hajaantuvat. □

Huomautus 2.14. Lause 2.11 ja Lemma 2.12 ovat seurausta Lauseesta 2.13.

2.3 Riemannin sarjateoreema

Lause 2.15 (Riemannin sarjateoreema). *Olkoon sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ehdollisesti suppeneva. Tällöin sarjan termit voidaan järjestellä uudelleen siten, että sarja suppenee mitä tahansa reaalilukua* $S \in \mathbb{R}$ *kohti.*

Todistus. Ehdollisesti suppenevan sarjan positiivisten ja negatiivisten termien muodostamat sarjat hajaantuvat, joten niitä voidaan uudelleenjärjestelyn avulla valita missä järjestyksessä vain. Tällöin esimerkiksi voidaan lisätä positiivisia termejä siten, että osasumma ylittää halutun luvun ja sitten lisätä negatiivisia termejä, että osasumma alittaa halutun luvun. Tätä menettelyä voidaan jatkaa loputtomasti. Todistus on siis itse asiassa vain menettelykeino, jolla sarja saadaan suppenemaan haluttuun lukuun.

Olkoon sarja $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ehdollisesti suppeneva, $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sarja, joka koostuu sarjan A termeistä a_k, joille $a_k \geq 0$ ja $C = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ sarja, joka koostuu vastaavasti termeistä a_k, joille $a_k < 0$.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $S \in \mathbb{R}$. Todistetaan induktion avulla, että sarja $D = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$, joka saadaan uudelleenjärjestelemällä sarja A, suppenee lukuun S eli, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|D_n - S| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Perusaskel:
Nyt, koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu Lauseen 2.13 nojalla, voidaan muodostaa osasumma $\sum_{k=1}^{n_1} b_k$, jossa luku n_1 on pienin sellainen kokonaisluku, että

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k > S.$$

Määritellään $d_k = b_k$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots, n_1$.
Vastaavasti myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ hajaantuu Lauseen 2.13 nojalla. Täten voidaan valita luku m_1, joka on pienin sellainen kokonaisluku, että

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{m_1} c_k < S,$$

sillä $c_k \leq 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots, m_1$. Määritellään $d_{n_1+k} = c_k$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots, m_1$.

Induktio-oletus:
Oletetaan, että voidaan valita pienimmät sellaiset kokonaisluvut $n_k > n_1$ ja $m_k > m_1$, että

$$\sum_{k=1}^{n_k} b_k + \sum_{k=1}^{m_k} c_k < S.$$

Induktioaskel:
Valitaan pienin sellainen kokonaisluku $n_{k+1} > n_k$, että

$$\sum_{k=1}^{n_{k+1}} b_k + \sum_{k=1}^{m_k} c_k > S.$$

Määritellään $d_{n_k+m_k+k} = b_{n_k+k}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n_{k+1} - n_k$.

Valitaan pienin sellainen kokonaisluku $m_{k+1} > m_k$, että

$$\sum_{k=1}^{n_{k+1}} b_k + \sum_{k=1}^{m_{k+1}} c_k < S$$

$d_{n_{k+1}+m_k+k} = c_{m_k+k}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, m_{k+1} - m_k$.

Nyt siis

$D_{n_1} > S$, $D_{n_1+m_1} < S$, $\ldots$, $D_{n_k+m_k} < S$, $D_{n_{k+1}+m_k} > S$, $D_{n_{k+1}+m_{k+1}} < S$, $\ldots$

edellisten kohtien nojalla.
Nyt luku n_1 on pienin sellainen kokonaisluku, että $D_{n_1} > S$ eli $\sum_{k=1}^{n_1} b_k > S$. Tästä siis seuraa, että $\sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \leq S$. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \leq S < \sum_{k=1}^{n_1} b_k,$$

josta seuraa, että

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1} b_k - S\right| < \left|\sum_{k=1}^{n_1-1} b_k - \sum_{k=1}^{n_1} b_k\right| = |b_{n_1}|.$$

Nyt $b_{n_1} = d_{n_1}$, sillä määriteltiin, että $d_k = b_k$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots, n_1$ eli

$$|D_{n_1} - S| < |d_{n_1}|.$$

Vastaavasti luku m_1 on pienin sellainen kokonaisluku, että $D_{n_1+m_1} < S$ eli $\sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{m_1} c_k = D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1} c_k < S$. Tästä seuraa, että $D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1-1} c_k \geq S$. Täten

$$D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1} c_k < S \leq D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1-1} c_k,$$

joten

$$\left|D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1} c_k - S\right| < \left|D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1} c_k - \left(D_{n_1} + \sum_{k=1}^{m_1-1} c_k\right)\right| = |c_{m_1}|.$$

Nyt $c_{m_1} = d_{n_1+m_1}$, sillä määriteltiin, että $d_{n_1+k} = c_k$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots, m_1$ eli

$$|D_{n_1+m_1} - S| < |d_{n_1+m_1}|.$$

Vastaavasti sama päättely pätee myös luvuille n_{k+1} ja m_{k+1}, joten

$$|D_{n_{k+1}+m_k} - S| < |b_{n_{k+1}}| \text{ ja } |D_{n_{k+1}+m_{k+1}} - S| < |c_{m_{k+1}}|.$$

Koska $b_{n_{k+1}}$ ja $c_{m_{k+1}}$ ovat suppenevan sarjan termejä, niin Lemman 2.2 nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen kokonaisluku n_ε, että

$$|b_{n_{k+1}}| < \varepsilon, \text{ kun } n_{k+1} > n_\varepsilon$$

ja

$$|c_{m_{k+1}}| < \varepsilon, \text{ kun } m_{k+1} > n_\varepsilon.$$

Nyt kaikille sellaisille kokonaisluvuilla n, että $n_k + m_k < n < n_{k+1} + m_{k+1}$ pätee, että

$$|D_n - S| < \max\{|b_{n_{k+1}}|, |c_{m_{k+1}}|\} < \varepsilon.$$

□

Esimerkki 2.16. Tiedetään Lemman 2.8 nojalla, että $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. Nyt siis

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots,$$

joten, kun $\ln 2$ kerrotaan luvulla 2, saadaan sarja

$$2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k}$$

Järjestellään sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k}$ uudelleen, jolloin saada uusi sarja D, jolla on samat termit, mutta eri summa.

$$\begin{aligned}
D &= (2-1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Lähdeluettelo

[1] O. E. Stanaitis: *An Introduction to Sequences, Series and Improper Integrals*. St. Olaf College, Minnesota, 1967.

[2] P. Hästö: *Sarjat ja integraalit -luentomoniste*. Oulun yliopisto, 2011.

[3] J. M. Hyslop: *Infinite Series*. University of Witwatersran, Johannesburg, 1959.