Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti

Pro gradu -tutkielma
Anna-Helena Isopahkala
2314749
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2016

Sisältö

Johdanto

Tutkielman tarkoituksena on ollut tuottaa ajanmukaista ja oppilaan ajattelua tukevaa oppimateriaalia Lukion 2. kurssin avoimeen oppikirjaan. Nykyajan haasteet liittyvät matematiikan osalta teknologian kehitykseen ja uusien innovaatioiden keksimiseen. Opetussuunnitelman mukaisesti matematiikalla on merkittävä rooli muun muassa tieteissä, teknologiassa, taloudessa, yrittäjyydessä, terveydenhuollossa ja turvallisuudessa [1]. Jotta oppilaat voivat ymmärtää, käyttää, hallita ja muokata tekniikkaa, jota ei ole vielä olemassa, täytyy heidän kehittää matemaattista ajatteluaan [2]. Pelkkä laskurutiini ei riitä, vaan opiskelijoiden tulisi saada sellaisia kokemuksia, jotka kehittävät aitoja matemaattisia ajattelutapoja, ja joita he tulevat käyttämään myös koulun ulkopuolella [2].

Oppimateriaalin tavoitteena on siis auttaa oppilaita kehittämään sellaisia matemaattisia ajattelutapoja, joita he tulevat tarvitsemaan jatko-opinnoissa ja työelämässä. Ymmärtämisen lisäksi tavoitteena on, että oppilas osaa myös hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa Opetussuunnitelman mukaisesti [1].

Oppimateriaali on osa avointa Lukion 2.kurssin oppikirjaa: Lausekkeet ja yhtälöt, ja sen aihe on ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti. Opetussuunnitelmasta yhtälöiden algebrallinen ratkaiseminen, ongelmien muotoileminen yhtälöiksi sekä ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen [1] kuuluvat tämän oppimateriaalin sisältöön.

1 Tutkielman rakenne

Tutkielma koostuu kahdesta osasta: oppimateriaalista ja sen perusteluosasta.

1.1 Oppimateriaali

Oppimateriaali on osa Lukion 2. kurssin avointa oppikirjaa: Lausekkeet ja yhtälöt, joka koostuu lyhyen matematiikan osasta, lyhyen ja pitkän matematiikan yhteisestä osasta sekä pitkän matematiikan osasta. Tämän tutkielman materiaali kuuluu kirjan lyhyen matematiikan osaan, jonka sisällysluettelo on esitetty seuraavassa laatikossa.

- Verrannollisuus
  - suhde
  - suoraan verrannollisuus
  - kääntäen verrannollisuus
- Lineaarinen riippuvuus
- Ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti
  - Ensimmäisen asteen yhtälö
  - Yhtälönratkaisu algebrallisesti
  - Yhtälön sovelluksia
- Yhtälöparit
  - Lineaarinen yhtälöpari
  - Graafinen ratkaisumenetelmä
  - Algebralliset ratkaisumenetelmät
    - Sijoitusmenetelmä
    - Eliminointimenetelmä
  - Yhtälöparin sovelluksia

Sisällysluettelon kohta "Ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti" vastaa tutkielman materiaalia.

Kirjassa ennen ensimmäisen asteen yhtälön algebrallista ratkaisua edeltävät lineaarinen riippuvuus, verrannollisuus ja ensimmäisen asteen yhtälön graafinen ratkaiseminen. Algebrallisen yhtälönratkaisun jälkeen kirjassa siirrytään yhtälöpareihin. Jotta siirtymät olisivat sujuvia koko oppikirjassa, on oppimateriaalissa edeltävää asiaa liitetty seuraavaan asiaan samoilla tehtävillä: mallitehtävillä A.5 ja A.13, joita on ratkaistu eri tavoilla. Mallitehtävä A.5 on aiemmin ratkaistu graafisesti suorien avulla lineaarisen riippuvuuden yhteydessä. Nyt se ratkaistaan algebrallisesti muodostaen suorista yhtälö. Mallitehtävä A.13 puolestaan ratkaistaan yhden yhtälön ja muuttujan avulla, mutta yhtälöpareihin siirryttäessä se voidaan ratkaista yhtälöparin avulla. Merkintä **??** tutkielmassa tarkoittaa viittausta aiempiin tai tuleviin oppikirjan materiaaleihin.

Lisäksi valmiin ratkaisun analysointitehtävät, kaverille keksityt esimerkkitehtävät sekä graafisen tutkimiseen ohjaavat tehtävät ovat yhdessä sovittuja tehtävätyyppejä. Tämän tyyppisiä tehtäviä oppimateriaalissa ovat esimerkiksi Pohdinta A.2 c), Pohdinta A.3, jotka ovat kaverille keksittyjä esimerkkitehtäviä, Pohdinta A.9 ja Pohdinta A.12 ovat valmiin ratkaisun analysointitehtäviä ja Pohdinta A.6 ja Tehtävä 6. ohjaavat graafiseen tutkimiseen.

1.2 Perusteluosa

Perusteluosassa (2 Opetusmateriaalin tavoitteet ja toteutus) kerrotaan, mitkä ovat oppimateriaalin tavoitteet ja miten ne toteutuvat oppimateriaalissa. Oppimateriaalin tavoitteet pohjautuvat ensisijaisesti opetussuunnitelmaan. Lisäksi tavoitteisiin sisältyy muiden oppikirjantekijöiden kanssa sovitut yhteiset tavoitteet sekä didaktiseen kirjallisuuteen pohjautuvat tavoitteet.

Kappaleessa 2.1 esitellään Opetushallituksen asettamat tavoitteet ja niiden toteutumista oppimateriaalissa. Opetussuunnitelmaan pohjautuvat tavoitteet ovat yleisiä matematiikan oppimiseen liittyviä tavoitteita sekä kurssikohtaisia, algebralliseen yhtälönratkaisuun liittyviä oppimistavoitteita. Koska opetussuunnitelman tavoitteet sisältyvät myös muihin tavoitteisiin, ja muut tavoitteet yhdistyvät opetussuunnitelman tavoitteisiin, on osa opetussuunnitelman tavoitteista esitetty kappaleissa 2.3 ja 2.4.

Yhteiset tavoitteet 2.4 ovat suurimmaksi osaksi sellaisia, joilla pyritään kehittämään oppilaan matemaattista ajattelua. Ne pohjautuvat Habits of Mind-artikkeliin [2], jossa kerrotaan millaisia matemaattisia ajattelutapoja oppilaille tulisi opettaa. Nämä tavoitteet voidaan yhdistää opetussuunnitelman tavoitteisiin: Matematiikan yleisessä kuvauksessa opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin [1]. Artikkelista [2] on valittu viisi eri ominaisuutta, joita kehittynyt matemaattisen ajattelu vaatii. Oppilaiden halutaan olevan ”säännönmukaisuuksien havainnoitsijoita” (pattern sniffers), ”kokeilijoita” (experimenters), ”kuvailijoita” (describers), ”väitteiden luojia” (conjecturers) sekä ”visualisoijia” (visualizers). Ei voida kuitenkaan vaatia, että oppilaat omaksuisivat nämä taidot yhdellä kurssilla, mutta eri ajattelutapoja voidaan kehittää jatkuvasti, myös muilla kuin matematiikan kursseilla [2]. Tässä oppimateriaalissa painotetaan erityisesti kuvailua ja visualisointia.

Ajattelulla on tärkeä merkitys oppimisen kaikissa vaiheissa, eikä oppiminen etene kohti korkeamman tason prosesseja harjoittelemalla pelkästään yksinkertaisia taitoja [3]. Matemaattista ajattelua ei kuitenkaan määritellä opetussuunnitelmassa [1] eikä artikkelissa [2]. Sen sijaan artikkelissa [2] kuvataan matemaattista ajattelua eri ominaisuuksilla, joita pidetään tyypillisenä ”matemaatikkojen ajattelulle”. Koska matemaattisen ajattelun käsite on keskeinen tavoitteiden kannalta, määritellään se erikseen kappaleessa 2.2.

Didaktiseen kirjallisuuteen pohjautuvat tavoitteet (2.3) liittyvät suurimmaksi osaksi yhtälönratkaisun käsitteelliseen ymmärtämiseen. Didaktisesta tutkimustiedon pohjalta on löydetty yhtälönratkaisuun liittyviä oppimisvaikeuksia ja oppilaiden käsitteellisiä virheitä, joita oppimateriaalin avulla pyritään poistamaan. Didaktisten tutkimustiedon pohjalta tavoitteena on luoda sellaiset tehtävätyypit ja lähestymistavat, jotka tukevat yhtälönratkaisun käsitteellistä ymmärtämistä ja kehittävät oppilaan yhtälönratkaisutaitoa.

Päätavoitteena on saada oppilas ajattelemaan itse ja ymmärtämään yhtälönratkaisuun liittyvät käsitteet sekä soveltamaan niitä erilaisissa ongelmissa, jotka he kokevat merkityksellisiksi.

2 Opetusmateriaalin tavoitteet ja toteutus

2.1 Opetussuunnitelma

Tässä kappaleessa kerrotaan miten Opetushallituksen asettamat tavoitteet ja sisällöt toteutuvat oppimateriaalissa. Kaikkia Opetussuunnitelman tavoitteita ei ole mainittu, sillä niitä tulee myös muiden tavoitteiden yhteydessä.

Kirjassa MAB2-kurssin sisällöt on jaoteltu kappaleessa 1.1 olevan sisällysluettelon mukaisesti. Lyhyen matematiikan keskeisistä sisällöistä ”toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen” eivät näy sisällysluettelossa, sillä ne kuuluvat kirjassa lyhyen ja pitkän matematiikan yhteiseen osaan.

Seuraavassa laatikossa on MAB2:n kurssikohtaiset tavoitteet ja sisällöt, jonka jälkeen perustellaan miten ne näkyvät oppimateriaalin sisällössä.

2. Lausekkeet ja yhtälöt (MAB2)

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä
- ymmärtää lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen polynomifunktion käsitteet
- vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan ja oppii ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

Keskeiset sisällöt

- suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus
- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- yhtälöiden ja yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen
- toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

[1]

Opetussuunnitelman sisällöistä ”yhtälöiden (–) algebrallinen ratkaiseminen”, ”ongelmien muotoileminen yhtälöiksi” ja ”ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen” voidaan katsoa kuuluvaksi tähän oppimateriaaliin. Kurssin tavoitteista yhtälöiden ratkaisutaitojen vahvistaminen ja jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaiseminen suuntautuvat hyvin tähän kokonaisuuteen.

Koska käsitteet täytyy ymmärtää, ennen kuin tietoa voidaan soveltaa [10], on oppimateriaali jaoteltu siten, että aluksi kerrataan yhtälönratkaisuun liittyviä käsitteitä kahdessa ensimmäisessä kappaleessa: ”Ensimmäisen asteen yhtälö” (A.1) ja ”Yhtälönratkaisu algebrallisesti” (A.2). Näiden kappaleiden tarkoituksena on syventää oppilaan käsitteellistä ymmärrystä yhtälönratkaisusta sekä kehittää joustavaa yhtälönratkaisutaitoa. Ongelmanratkaisua ja yhtälöiden muodostamista sanallisista ongelmista ei ole kuitenkaan sijoitettu vain ”Yhtälön sovelluksia”-kappaleeseen(A.3), vaan soveltavia tehtäviä ja arkipäivän ongelmia on myös kahdessa ensimmäisessä kappaleessa. Jos sanalliset ongelmatehtävät sijoitettaisiin aina viimeisiksi tehtäviksi, kaikki oppilaat eivät ehtisi tekemään niitä ja kynnys niiden tekemiseen nousisi. Siksi sanallisia ongelmia on myös alkupään tehtävinä, jotta kaikilla olisi aikaa tehdä niitä.

Kappale A.3 sisältää enemmän sellaisia tehtäviä, joissa pitää yhdistää yhtälöä myös muihin matematiikan käsitteisiin, kuten ensimmäisen asteen polynomifunktioon. Tarkoituksena on, että oppilas oppii itse soveltamaan tietoa, eikä ratkaise ongelmia ulkoa opetelluilla tavoilla. Sen takia erilaisista ongelmista on vähän mallitehtäviä. Funktiokäsite on kuitenkin yksi matematiikan peruskäsitteistä ja se kuuluu MAY1 kurssiin. Näin ollen sitä kerrataan tehtävän 8 ja pohdintatehtävän A.14 avulla kolmannessa kappaleessa. Muuten kolmas kappale koostuu erilaisista ongelmatehtävistä, joissa sovelletaan ensimmäisen asteen yhtälöä.

Seuraavissa laatikossa on otteita Opetussuunnitelman yleisestä matematiikan kuvauksesta. Laatikoiden jälkeen kerrotaan, miten Opetussuunnitelman tavoitteita on toteutettu oppimateriaalissa.

”Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista.” [1] s.129.

Oppimateriaalissa matematiikkaa liitetään oppilaan kokemusmaailmaan arkipäiväisten ongelmien kautta. Arkipäivään liittämisessä matematiikan merkitys korostuu oppilaille, mutta tällöin on huomioitava, että se on oikeasti oppilaan arkipäivää. Käsitteen liittäminen esikoululaisten piirrettyihin tai aikuisten luottokorttimaksuihin ei välttämättä tuo matematiikkaa merkitykselliseksi lukion 1.luokan oppilaille [4]. Esimerkiksi pohdintatehtävässä A.12 tehdään ostoksia internetissä, mikä on suurelle osalle oppilaista arkipäivää. Lisäksi kiinnostavaksi aiheiksi on valittu muun muassa palkkaan (pohdintatehtäväA.14), kustannuksiin (pohdintatehtävä A.12 ja tehtävä11) sekä sisustukseen (tehtävä 2) liittyviä tehtäviä.

”Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä.” [1] s.129.

Oppimateriaalin pohdintatehtävät ohjaavat työskentelemään yksin, parin kanssa sekä koko luokan kanssa yhdessä. Niissä oppilailla on aikaa ajatella itse, mutta sen jälkeen heidän on tarkoitus vertailla päätelmiään toisten kanssa. Pohdintatehtävässä A.3 oppilaat muodostavat toisille tehtäviä, joten sitä ei voi tehdä yksin. Opettajanmateriaalissa ohjataan pohdintatehtävien lisäksi myös kotitehtäviä käymään yhdessä läpi, jotta oppilaat voivat vertailla ratkaisujaan (esimerkiksi tehtävässä 7).

”Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin.” [1] s.129.

Oppitunnin tulisi rakentua pitkälti pohdintatehtävien ympärille, joiden kautta opitaan yhtälönratkaisuun liittyvät käsitteet. Pohdintatehtävissä oppilaat joutuvat perustelemaan käsityksiään muille. Kun oppilas perustelee suullisesti tai kirjallisesti päättelyään, joutuu hän pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä ja reflektoimaan sekä jäsentämään matemaattista ajatteluaan [15]. Opettajanmateriaalissa pohdintatehtävät ohjataan käymään yhdessä läpi niin, että niiden sisältämät tavoitteet täyttyvät ja käsitteisiin liittyvät asiat ymmärretään oikein. Sanallisissa tehtävissä yhtälönratkaisua liitetään enemmän muihin matematiikan käsitteisiin, kuten funktioihin (tehtävä 13) ja lukuihin (tehtävä 12). Myös graafista yhtälönratkaisua liitetään algebralliseen yhtälönratkaisuun pohdintatehtävässä A.10 ja tehtävässä 6.

”Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Tärkeää on myös arvioida apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta.” [1] s.129.

Oppilaan ymmärtämistä voidaan kehittää esittämällä ja käyttämällä käsitteitä eri yhteyksissä [4]. Niinpä oppimateriaalin pohdintatehtävässä A.10 ja tehtävässä 6 käytetään GeoGebraa piirtotyökaluna helpottamassa oppilaan työtä, kun hän yhdistää algebrallista ja graafista yhtälönratkaisua.

2.2 Matemaattinen ajattelu

Muiden oppikirjantekijöiden kanssa asettamamme tavoitteet pohjautuvat ”Habits of Mind”-artikkeliin, jossa kerrotaan millaisia matemaattisia ajattelutapoja oppilaille tulisi opettaa, jotta he voisivat ymmärtää, hallita ja kehittää teknologiaa [2]. Opetuksen tulisi antaa opiskelijoille sellaisia kokemuksia, jotka auttavat ajattelutapojen oppimista ja niiden soveltamista myös koulun ulkopuolella [2]. Myös opetussuunnitelmassa opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin [1]. Matemaattisen ajattelun käsite on laaja, eikä sen määrittely ole yksiselitteistä. Matemaattinen ajattelu on kuitenkin keskeistä oppimateriaalin tavoitteiden kannalta, joten määritellään sitä nyt tähän tutkielmaan sopivalla tavalla.

Kun puhutaan matemaattisesta ajattelusta, liittyy siihen oleellisesti matemaattisen tiedon käsite. Tieto voidaan jakaa käsitteelliseen eli konseptuaaliseen (”conseptual knowledge”) ja menetelmä- eli proseduraaliseen tietoon (”prosedural knowledge”). Konseptuaalinen tieto liittyy matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiseen [4]. Proseduraalinen tieto keskittyy puolestaan ratkaisuprosessin toteuttamiseen eikä se välttämättä edellytä tietoista ymmärtämistä [4]. Esimerkiksi yhtälönratkaisun käsitteelliseen tietoon pohjautuvat ratkaisumenetelmät perustuvat yhtäsuuruuden, muuttujien ja eri operaatioiden ymmärtämiseen.

Joutsenlahden mukaan oppijan matemaattista ajattelua voidaan havainnoida kahdessa prosessissa, käsitteen muodostumisessa ja ongelmanratkaisussa [12]. En kuitenkaan erottaisi prosesseja täysin toisistaan, sillä ongelmanratkaisuprosessissa voidaan muodostaa uusia käsitteitä, ja uusien käsitteiden muodostumisvaihe voi sisältää useitakin ongelmanratkaisuprosesseja. Näveri määrittelee matemaattisen ajattelun prosessit hieman eri tavalla, joka sopii tähän asiayhteyteen. Käsitteen muodostamisprosessin lisäksi Näveri puhuu proseduraalisesta taidosta [3].

Määrittelen matemaattisen ajattelun koostuvan siis kahdesta toisiinsa liittyvistä ajattelutyypistä: konseptuaaliseen tietoon liittyvästä ajattelusta ja proseduraalisesta tietoon liittyvästä ajattelusta. Konseptuaaliseen tietoon liittyvässä ajattelussa käsitteet muodostuvat ja käsitteitä yhdistellään uusien ongelmien ratkaisemiseksi. Proseduraalisen tietoon liittyvässä ajattelussa ratkaisut toteutetaan. Ajattelutyypit ovat sidoksissa toisiinsa, eikä niitä pidä erottaa täysin toisistaan. Konseptuaaliseen tietoon liittyvä ajatteluun voi sisältyä valmiita ratkaisumenetelmiä ja toisaalta ratkaisumenetelmistä voidaan saada tehokkaampia soveltamalla niihin konseptuaalista tietoa. Ymmärtävä ja pysyvä oppiminen on mahdollista silloin, kun konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto liittyvät kiinteästi toisiinsa ja tukevat toistensa muodostumista [3]. Tavoitteena on siis kehittää molempia ajattelutyyppejä.

Oppimateriaalissa proseduraalista taitoa ei kuitenkaan harjoitella opettelemalla ulkoa yhtälöratkaisumenetelmiä tai valmiita ongelmanratkaisutapoja, vaan myös proseduraalisen taidon oppimisessa oppilaan omalla ajattelulla on merkitystä. Jos oppilaan yhtälönratkaisu perustuu saman operaation tekemiseen yhtälön molemmille puolille, eli ajattelee yhtäsuuruuden säilyvän, ratkaisu perustuu yhtälön käsitteeseen eli konseptuaaliseen tietoon. Oppimateriaalissa painotetaan yhtälönratkaisun käsitteellistä puolta ja siihen perustuvaa yhtälönratkaisua. Esimerkiksi ensimmäisten pohdintatehtävien A.1 ja A.2 tarkoituksena on saada oppilas ajattelemaan yhtäläisyyden käsitettä ja luomaan siihen perustuvia yhtälönratkaisutapoja.

Koska proseduurin toistaminen voi vaikeuttaa asian käsitteellistä hahmottamista myöhemmin [3], oppimateriaalissa on vähän ”ratkaise yhtälö”-tyyppisiä, mekaanista suoritusta vaativia tehtäviä ja nekin eroavat ratkaisutavoiltaan toisistaan. Lisäksi valmiita ratkaisumalleja sanallisiin ongelmiin on vähän, sillä tarkoituksena on, että oppilas oppii itse soveltamaan tietoa ja kehittämään ratkaisumenetelmiä. Ongelmanratkaisun ei tule perustua ulkoa opeteltuihin ongelmanratkaisumetodeihin, vaan tarkoituksena on, että oppilaat voivat itse kehittää metodit ajattelun taidoillaan [2].

2.3 Didaktiseen kirjallisuuteen perustuvat tavoitteet

Didaktista kirjallisuutta on käytetty hyödyksi tehtävien suunnitteluun. Kirjoista ja artikkeleista on etsitty oppilaiden käsitteisiin liittyviä ajatusvirheitä sekä käsitteiden muodostumisen aikana ilmeneviä ongelmia. Lisäksi eri artikkeleiden lähestymistapoja yhtälönratkaisun opettamisessa on verrattu keskenään.

2.3.1 Konseptuaalinen tieto yhtälönratkaisussa

Matematiikan omaksumiselle käsitteiden ymmärtäminen on ensimmäinen ja välttämätön ehto ymmärtää, jotta niiden välisiä suhteita voidaan ymmärtää [10]. Yhtälönratkaisussa yhtälön käsite on siis ensimmäinen ehto ymmärtää, ennen kuin siihen liittyviä muita käsitteitä ja niiden välisiä suhteita voidaan ymmärtää. On myös todettu, että oppilaat, jotka ovat kehittyneet ymmärtävässä käsitteellisessä ajattelussa, saavuttavat parhaan proseduraalisen tiedon myöhäisemmässä vaiheessa [3].

Käsitteet voivat olla täysin uusia tai tutulle käsitteelle voidaan oppia uusi merkitys, jolloin käsitteellinen tieto laajenee [4]. Käsitteen muodostamisprosessi ei siis välttämättä toteudu kerralla, vaan se voi jatkua ja käsite tarkentua myöhemmin [3]. Vaikka yhtälönratkaisu onkin oppilaille jo tuttua, voi heillä olla virheellisiä käsityksiä yhtälöstä. Yhtälönratkaisu voi olla muistinvaraista toimintaa, joka on opeteltu keittokirjamaisesti. Jos oppilaat ajattelevat yhtälönratkaisun olevan esimerkiksi ”termien siirtämistä” yhtälön puolelta toiselle, ei yhtäläisyyden käsitettä ole ymmärretty, ja mekaaninen ratkaisu voi olla virheellinen. Tällöin konseptuaalisen tiedon puute voi näkyä proseduraalisessa taidossa, esimerkiksi merkkivirheissä, hitaissa ratkaisutavoissa tai vaikeuksissa muodostaa yhtälö sanallisista ongelmista.

Pelkät proseduraaliset taidot eivät läheskään aina tarjoa tehokkaimpia menetelmiä ratkaisuissa [4], mutta silti monissa oppikirjoissa yhtälönratkaisua opetetaan oppilaille mekaanisesti. Seuraavissa laatikoissa on lainaukset kahden oppikirjan yhtälönratkaisuohjeista.

1. Kirjoitetaan kaikki termit nimittäjien kanssa. Jos termillä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi voidaan merkitä luku yksi.
2. Lavennetaan samannimisiksi.
3. Kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.
4. Sievennetään yhtälöä termejä siirtämällä ja yhdistämällä.
5. Ratkaistaan x jakamalla yhtälön molemmat puolet x:n kertoimella.

[13]

1. Poistetaan tarvittaessa nimittäjät.
2. Poistetaan yhtälön vasemmalta puolelta vakiotermit.
3. Poistetaan yhtälön oikealta puolelta termit, jotka sisältävät muuttujan.
4. Yhdistetään samanmuotoiset termit.
5. Jaetaan yhtälön molemmat puolet muuttujan kertoimella.

[14]

Tällaiset yhtälönratkaisuohjeet ohjaavat proseduurin toistamiseen yhtälönratkaisussa, ja oppilaan oma ajattelu voi jäädä toisarvoiseksi. Kun puhutaan ”termien siirtämisestä” tai ”termien poistamisesta”, voi oppilailla jäädä ymmärtämättä kokonaan, että samat operaatiot tehdään yhtälön molemmille puolille, eikä vain toiselle. Lisäksi yhtälönratkaisu voi olla joskus joustavampaa, kun ohjeita ei noudata vaihe vaiheelta. Jos esimerkiksi tehtävän 7. d)-kohta ratkaistaisiin ohjeella, olisi ratkaisu seuraava:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-6}{2}+5 &= \frac{6x-18}{3} \\
\frac{6x-18}{6}+\frac{30}{6} &= \frac{12x-36}{6} \\
6x-18+30 &= 12x-36 \\
6x-12x &= -36+18-30 \\
-6x &= -48 \\
x &= 8.
\end{aligned}$$

Kuitenkin ilman ohjetta se voidaan ratkaista joustavammin, muokkaamalla aluksi murtolausekkeita:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-6}{2}+5 &= \frac{6x-18}{3} \\
x-3+5 &= 2x-6 \\
x &= 8.
\end{aligned}$$

Yhtäläisyys

Malaty kirjoittaa, että koulumatematiikassa täytyisi tutustua konkreettisten tapausten kautta matemaattisiin ajattelutyyppeihin ja vasta sen jälkeen siirtyä abstraktisemmalle tasolle ja matemaattisten merkkien ja symbolien käyttämiseen. Esimerkiksi yhtäläisyyden symbolin (=) oppiminen ei ole vielä matematiikan omaksumista, vaan pitää ymmärtää mitä yhtäläisyys sanana tarkoittaa [10].

Mutta tarkoittaako matemaattiseen ajatteluun siirtyminen konkretian kautta sitä, että käsitteet pitäisi sitoa näkyviin esimerkkeihin ja erilaisiin malleihin? Yhtälönratkaisua kuvataan monissa oppikirjoissa vaakamallin avulla [14]. Negatiivista massan käsitettä ei kuitenkaan ole olemassa, ja vaakamallilla ei voida täysin kuvata yhtälöä. Liika arkipäiväistäminen voi haitata käsitteiden ymmärtämisessä ja tulla myöhemmin ongelmaksi käsitteiden tarkentuessa [8].

Yhtäläisyys-käsitettä ja yhtäsuuruusmerkin käyttöä korostetaan oppimateriaalissa pohdintatehtävän A.9 a)-kohdan avulla. Siinä oppilaiden täytyy huomata, että lausekkeet eivät ole yhtäpitäviä keskenään. Lisäksi on kerrottu, että kun yhtälöt ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja keskenään, voidaan sitä merkitä ekvivalenssinuolella. Ekvivalenssinuolen käyttöä verrataan aikaisemman mallitehtävän A.7 ratkaisuun. Ekvivalenssinuolella myös Oivan ratkaisu (Pohdintatehtävässä A.9) saadaan korjattua vähillä merkinnöillä. Tämä on huomioitu erikseen opettajanoppaassa.

Pohdinta A.9 Tarkista ja korjaa Oivan ratkaisemat yhtälöt. Mitä Oiva ei ole ymmärtänyt? Keksitkö nopeamman tavan ratkaista?

a) $6x + 7 = 8 = 6x = 8 - 7 = 1$

Opettajanoppaassa sama yhtälö:

$$6x + 7 = 8 \Leftrightarrow 6x = 8 - 7 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Yhtälö ja lauseke

Näverin mukaan oppilailla voivat yhtälöt ja lausekkeet sekoittua keskenään [3]. Opiskelijoilla on vaikeuksia hahmottaa algebrallista lauseketta vastauksena, koska he ovat tottuneet näkemään vastauksen tiettynä lukuarvona [3]. Oppimateriaalissa lausekkeiden ja yhtälöiden sekoittumista pyritään estämään tehtävällä 1, jossa oppilaiden tulee perustella ovatko kohdat a)-e) ensimmäisen asteen yhtälöitä, kun y ja x ovat muuttujia ja k ja b vakioita. Perustellessa oppilaat joutuvat huomaamaan, että b)-kohdassa $(5x+6)$ on lauseke, eikä yhtälö.

Lisäksi lausekkeen ja yhtälön eroa korostetaan huomautuksella:

Huomautus: Kun merkitään kaksi lauseketta yhtä suuriksi, kyseessä on *yhtälö*.

$$\underbrace{y}_{\text{lauseke}} = \underbrace{kx + b}_{\text{lauseke}}$$

Muuttuja

Aritmetiikasta algebraan siirryttäessä muuttujan käsite voi aiheuttaa haasteita oppilaille. Muuttujaan liittyvä käsite ymmärretään usein sellaisena, jota voi muuttaa [4]. Mutta kun oppilaat kohtaavat muuttujan algebran yhteydessä, ymmärtävät he sen sellaisena, jolla on tietty ratkaisu, koska se esitetään usein yksinkertaisesti aritmeettisessa yhtälössä esimerkiksi $x + 7 = 9$ [4]. Matemaattinen muuttujan käsite viittaa yleensä muuttujan arvoon, joka usein on riippuvainen matemaattisesta esitystilanteesta, esimerkiksi yhtälössä yhtälön operaattoreista tai vakioista [4].

Muuttujaan siirtyminen oppimateriaalissa tapahtuu laatikoiden avulla ja myöhemmin laatikot muutetaan muuttujakirjaimiksi L (Pohdinta A.1 ja A.2). Kirjainvalinnalla halutaan oppilaiden ajattelevan, että muuttuja voi olla muukin kuin tyypillisesti käytetty x. Aina x ei ole edes muuttuja, voihan se olla vaikka vakio.

Vakion ja muuttujan välistä eroa huomioidaan tehtävässä 1, jossa täytyy perustella, ovatko yhtälöt tai lausekkeet ensimmäisen asteen yhtälöitä. Esimerkiksi oppilaiden täytyy huomata, että c)-kohdan yhtälö $8 = k^2x + 4$ on ensimmäisen asteen yhtälö, sillä k on vakio ja se voidaan korottaa toiseen potenssiin. f)-kohdassa korostetaan vielä muuttujan ja vakion eroa. Oppilaiden on tarkoitus ymmärtää, että lineaarisessa yhtälössä muuttujat y ja x riippuvat toisistaan, kun taas vakiot k ja b voivat olla mitä tahansa lukuja. Lisäksi vakion ja muuttujan eroa opetellaan tehtävässä 3, kun kysytään millä vakion arvolla yhtälöt ovat tosia.

Tehtävä 1. Ovatko seuraavat ensimmäisen asteen yhtälöitä, kun x ja y ovat muuttujia ja k ja b vakioita? Perustele vastauksesi määritelmän avulla.

a) $5 = 4x^2 + 6$

b) $5x + 6$

c) $0 = y + 5$

d) $y = kx + b$

e) $8 = k^2x + 4$

f) Miten lineaarisen yhtälön $y = kx + b$ muuttujat y ja x eroavat vakioista k ja b?

2.3.2 Aritmetiikan ja algebran välinen kuilu

Monessa tutkimuksessa ja artikkelissa puhutaan aritmetiikan ja algebran välistä ”kuilusta” yhtälönratkaisuun siirryttäessä ([3], [6], [8], [11]). Lisäksi artikkeleissa on tuotu esille, että monilla oppilailla on vaikeuksia ymmärtää algebraa [11].

Filloy ja Rojano määrittelevät aritmeettisen yhtälön olevan muotoa $Ax + B = C$ ja algebrallisen yhtälön $Ax + B = Cx + D$ [6]. Näiden välinen ero tulee esille operaatioiden käytössä. Aritmeettisessa yhtälössä yhtälön vasen puoli edustaa operaatioiden sarjaa, joka on esitetty tunnetuilla (A, B) tai tuntemattomilla (x) luvuilla. Yhtälön oikea puoli (C) on seurausta vasemman puolen suoritetuista operaatioista.

”Didaktiseksi kuiluksi” sanotaan sitä vaihetta aritmetiikan ja algebran välillä, kun oppilaat kohtaavat tuntemattomia tekijöitä yhtälön molemmilla puolilla [6]. Näveri kirjoittaa tarkemmin: ”Kykenemättömyyttä spontaanisti operoida tuntemattomalla eli kynnystä siirtyä algebralliseen tarkasteluun aritmeettisen tarkastelun sijasta pidetään kognitiivisena esteenä, kuiluna aritmetiikan ja algebran välillä” [3].

Oppilaiden on siis vaikea hahmottaa aritmeettista yhtälöä, jossa muuttuja esiintyy yhtälön molemmilla puolilla. Lisäksi heillä on vaikeuksia operoida spontaanisti muuttujalla tai muuttujaa sisältävillä termeillä lukujen sijaan.

Aritmetiikan ja algebran välisen kuilun syytä yhtälönratkaisuun siirryttäessä on tutkittu eri lähestymistapojen kautta [8]. Artikkelissa [8] esitetään kolme eri metodia, miten matematiikan käsitteitä yleensä lähestytään: liittämällä käsite arkipäivän tilanteeseen, mallintamalla käsitettä tai pysymällä matemaattisessa esitystavassa. Arkipäivään liittämisessä on paljon hyviä puolia, siinä matematiikan merkitys korostuu.

Käsitteen mallintamisessa matemaattista esitysmuotoa kuvataan jollain mallilla. Yleisimmin yhtälönratkaisuun yhdistetty malli on vaakamalli [8]. Harvoin mallit voivat kuitenkaan kuvata matemaattista käsitettä täydellisesti. Esimerkiksi yhtälövaa'alla ei voi kuvata realistisesti negatiivista lukua tai muuttujaa, sillä negatiivista massan käsitettä ei ole olemassa [8]. Jos oppilaiden mentaalinen malli yhtälöstä pohjautuu pelkästään yhtälövaakaan, negatiivisen luvun tai muuttujan esiintyminen yhtälössä voi aiheuttaa vaikeuksia yhtälönratkaisun käsitteellisessä ymmärtämisessä [8]. Myös Bushin ja Karpin mukaan negatiiviset luvut tuottavat ongelmia oppilaille yhtälönratkaisussa [9].

Muitakin malleja yhtälönratkaisuun siirryttäessä on, kuten artikkelissa [6] kokeiltu geometrinen malli, jossa pinta-aloilla kuvataan muuttujia ja lukuja. Tällaisella spontaanisti kehitetyllä mallilla on kuitenkin taipumus piilottaa opiskeltava asia: Oppilaiden täytyy aluksi opetella liittämään malli yhtälönratkaisuun ja mallista tulee ennemmin opeteltava asia, jolloin itse muuttujan ja operaatioiden merkitykset voivat jäädä huomioimatta [6]. Lisäksi, jos käsitys yhtälöstä pohjautuu vain johonkin malliin, voi mallin yhdistäminen sanallisiin ongelmiin koitua haasteelliseksi oppilaille [8].

Artikkelissa [8] esitetty kolmas lähestymistapa, matemaattisessa esitysmuodossa pysyminen, havaittiin hyväksi. Algebrallista yhtälönratkaisua lähestyttiin käyttämällä muuttujan tilalla laatikoita, ja mentiin suoraan ”ei-aritmeettiseen” yhtälöön ($Ax + B = Cx + D$). Tällöin oppilaat kohtaavat muuttujat (laatikot) yhtälön molemmilla puolilla ja joutuivat päättelemään laatikossa olevan tuntemattoman luvun. Tehtävässä on sekä negatiivisia lukuja, että muuttujia. Myöhemmin muuttujaan siirryttäessä laatikot korvataan muuttujakirjaimella.

Myös oppimateriaalissa ensimmäisenä pohdintatehtävänä (A.1) on saman tyyppinen laatikkotehtävä. Tarkoituksena on, että oppilaat itse kehittävät yhtälönratkaisutapansa, jotka perustuisivat yhtälön määritelmään, eikä mekaanisten toimitusten muistamiseen. Yksi tehtävän tavoitteista on korostaa muuttujaa liittyvien operaatioiden merkitystä.

Laatikkomallin avulla voidaan aloittaa helpommin muuttujaa koskevilla operaatiolla (ratkaisu A), kun taas formaalissa muodossa aloitetaan monesti lukuja koskevilla operaatioilla (ratkaisu B). Näin pohdintatehtävän A.1 avulla pyritään pienentää oppilaiden kynnystä operoida tuntematonta, mikä on koettu ongelmaksi algebran ja aritmetiikan välillä [6], [3].

Pohdinta A.1

Jokaisessa kohdan laatikoissa on sama tuntematon luku. Selvitä tämä tuntemattoman luvun arvo. Kerro päätelmäsi vaiheineen parille (tai kirjoita vihkoon), ja vertailkaa päättelittekö luvut samalla tavalla.

d) [ ] + [ ] + [ ] + 17 = [ ] + [ ] + [ ] + [ ] − 1

Ratkaisu A

d)

$$
\begin{aligned}
[\ ] + [\ ] + [\ ] + 17 &= [\ ] + [\ ] + [\ ] + [\ ] - 1 \\
17 &= [\ ] - 1 \\
18 &= [\ ]
\end{aligned}
$$

Ratkaisu B

d)

$$
\begin{aligned}
3L + 17 &= 4L - 1 \\
3L &= 4L - 18 \\
-L &= -18 \\
L &= 18
\end{aligned}
$$

Toisessa pohdintatehtävässä A.2 a)-kohdassa pyydetään vertaamaan eroavatko ratkaisut, kun laatikon tilalle vaihdetaan muuttujakirjain L. Vertailun tarkoituksena on saada oppilaat huomaamaan, operoivatko he helpommin luvuilla vai muuttujilla. Lisäksi pohdintatehtävässä A.2 b)- ja c)-kohdissa harjoitellaan yhtälön yhdistämistä sanallisiin ongelmiin, mikä on myös joillekin oppilaille vaikeaa. Tehtävässä (A.2) oppilaat muodostavat itse sanallisia ongelmia annetuista yhtälöistä. Opettajanoppaassa kehotetaan esittämään oppilaiden keksimiä ongelmia luokassa, jolloin muut oppilaat voivat yhdistää sanallisen ongelman takaisin formaaliin yhtälöön.

2.3.3 Joustava yhtälönratkaisu

Yhtälönratkaisu voi olla ajattelua vaativaa tietoista toimintaa tai muistin varaista mekaanista suoritusta [3]. Näverin mukaan joustavassa yhtälönratkaisussa yhdistyy käsitteelliseen ja proseduraaliseen tietoon liittyvää ajattelua [3]. On tärkeää, että oppilas tottuu käyttämään sekä konseptuaalista että proseduraalista tietoa ja näkee, kumpaa tarvitaan kyseisessä tilanteessa [3].

Starin ja Rittle-Johnsonin [5] mukaan joustavilla ratkaisijoilla on parempi käsitteellinen ymmärrys, ja he keksivät useita strategioita aritmeettisiin ongelmiin. Joustava ongelmanratkaisija tietää myös, mitkä strategiat ovat tehokkaimpia. Tehokkaisiin ratkaisutapoihin vaaditaan siis kehittyneempää, konseptuaaliseen tietoon pohjautuvaa matemaattista ajattelua.

Koska joustava yhtälönratkaisu on kehittyneempää yhtälönratkaisua, ja opetussuunnitelman tavoitteissa on yhtälönratkaisutaidon kehittäminen[1], niin painotetaan sitä erityisesti tehtävässä 7. Tehtävän 7. yhtälöt voidaan ratkaista monella eri tavalla.

Tehtävä 7. Ratkaise yhtälöt mahdollisimman monella tavalla ja ympyröi niistä tehokkain tapa. Kirjoita ratkaisun vaiheet näkyviin.

a) $2(x+1)+3(x+1)=10$

b) $3(x+0,57)=12$

c) $4(x+0,8)+5x=4(x+0,8)+12$

d) $\dfrac{2x-6}{2}+5=\dfrac{6x-18}{3}$

Voit kehittä itse lisää tehtäviä arpomalla luvut.

Ratkaisu A

$$\begin{aligned}2(x+1)+3(x+1)&=10\\2x+2+3x+3&=10\\5x+5&=10\\5x&=5\\x&=1\end{aligned}$$

Ratkaisu B

$$\begin{aligned}2(x+1)+3(x+1)&=10\\5(x+1)&=10\\x+1&=2\\x&=1\end{aligned}$$

Jos yhtälönratkaisu on opeteltu proseduurin toistamisella, voi ratkaisu olla tyyppiä A, jossa aluksi poistetaan sulut ja sen jälkeen yhdistetään samanmuotoiset termit. Kehittyneemmässä ratkaisutavassa B oppilas huomaa voivansa jo aluksi yhdistää samanmuotoiset termit ”sulkujen-auki-kertomisen” sijaan ja ratkaisee tehtävän tehokkaammin. Näin ollen ratkaisutapaa B voidaan pitää joustavampana yhtälönratkaisutapana.

Opettajanoppaassa on esimerkit joustavista ratkaisutavoista, ja siinä myös kehotetaan keräämään oppilailta tehtävän 7 erilaisia ratkaisuja taululle. Tällöin oppilaat voivat vertailla ratkaisujaan ja löytää joustavimmat ratkaisutavat.

2.4 Habits of Mind

Valitisimme oppikirjantekijöiden kanssa viisi eri ominaisuutta artikkelista ”Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula” [2], joita kehittynyt matemaattinen ajattelu vaatii. Oppilaiden tulisi olla ”säännönmukaisuuksien havainnoitsijoita” (pattern sniffers), ”kokeilijoita” (experimenters), ”kuvailijoita” (describers), ”väitteiden luojia” (conjecturers) sekä ”visualisoijia” (visualizers). Ei voida kuitenkaan vaatia, että oppilaat omaksuisivat nämä taidot yhdellä kurssilla, mutta eri ajattelutapoja voidaan kehittää jatkuvasti, myös muilla kuin matematiikan kursseilla [2]. Monet näistä tavoitteista löytyvät myös opetussuunnitelmasta. Tässä oppimateriaalinosassa painotetaan erityisesti matemaattista kuvailua ja visualisointia.

2.4.1 Säännönmukaisuuksien havainnointi matematiikan rakenteessa ja kehittyneissä ratkaisustrategioissa

Oppilaiden tulisi olla ”säännönmukaisuuksien havainnoitsijoita” (pattern sniffers) eli heidän tulisi havaita ja hyödyntää yhtäläisyyksiä ja säännönmukaisuuksia matematiikan käsitteissä, laskuissa ja ongelmissa [2]. Myös opetussuunnitelmassa tavoitteena on, että oppilaat kehittävät käsitystään matematiikan loogisesta rakenteesta [1].

Säännönmukaisuuksien havaitseminen voi auttaa käsitteiden oppimisessa. Käsitteitä yhdistää tietyt säännönmukaisuudet, ja niiden yhtäläisyyksien havaitseminen voi johtaa parempaan käsitteenmuodostamiseen. Esimerkiksi ensimmäisen asteen yhtälössä muuttujan asteluku on yksi, mikä erottaa sen korkeamman asteen yhtälöstä. Oppimateriaalissa tämä todetaan esimerkin A.4 avulla.

Esimerkki A.4

a) $6z + 7 = 5$ on ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan z asteluku on yksi.

b) $5x^2 - 3 = 0$ ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan x asteluku ei ole yksi.

c) $x^2 = x^2 + x$ ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan x korkein potenssi on 2.

d) $y^2 = 3x + 2$ on ensimmäisen asteen yhtälö muuttujan x suhteen ja toisen asteen yhtälö muuttujan y suhteen.

Säännönmukaisuuksien havaitseminen voi myös kehittää yhtälönratkaisutaitoa. Esimerkiksi lausekkeiden rakenteellisten säännönmukaisuuksien hyödyntäminen voi johtaa joustavampaan yhtälönratkaisuun. Artikkelissa sanotaankin, että säännönmukaisuuksien havaitseminen auttaa oppilaita löytämään oikoteitä yhtälönratkaisussa, ja johtaa näin tehokkaampiin ratkaisustrategioihin [2]. Oppimateriaalissa lausekkeiden ja yhtälöiden rakenteellisten säännönmukaisuuksien hahmottamista korostetaan muun muassa pohdintatehtävässä A.9, jossa pyydetään keksimään nopeampia ratkaisutapoja valmiiksi ratkaistuihin yhtälöihin. Lisäksi tehtävä 7 ohjaa lausekkeiden rakenteellisten säännönmukaisuuksien hyödyntämiseen, jotta yhtälöt voidaan ratkaista mahdollisimman joustavasti.

2.4.2 Ratkaisujen arvioiminen ja yhtälöiden muodostaminen

Oppilaiden ennakkokäsitykset ongelmien mahdollisista ratkaisuista perustuvat heidän aiempaan tietoon, arvailuun ja kokeiluun [2]. Kun oppilaat ovat ”kokeilijoita” (experimenters), tarkoittaa se heidän aiemman tiedon ja strategioiden sekä erilaisten kokeilujen hyödyntämistä uusien ratkaisujen päättelyssä ja ratkaisujen oikeellisuutta arvioitaessa. Oppimateriaalissa yhtälöä lähestytään pohdintatehtävällä A.1, joka voidaan tehdä kokeilemalla. Kokeileminen voi osoittautua haasteelliseksi ja aikaa vieväksi, joten onkin tarkoitus, että oppilas keksii muita ratkaisutapoja pohdintatehtävään A.1. Lisäksi Pohdintatehtävässä A.12 ratkaisun oikeellisuutta kehotetaan arvioimaan kokeilemalla.

Oppilaiden tulisi olla ”väitteiden muodostajia” (conjecturers) eli muodostaa sellaisia väitteitä, joiden arvelee olevan totta [2]. Heidän tulisi oppia yhdistämään aiemmin omaksuttuja ja todistettuja tietoja, kokeiluja ja päätelmiä, ja niiden pohjalta muodostaa matemaattisia väitteitä [2]. Koska yhtälönratkaisu ja yhtälön käsite ovat jo ennestään tuttua lukiolaisille, väitteiden muodostaminen jää tältä oppimateriaalinosalta vähäiseksi. Sen sijaan yhtälön muodostamista harjoitellaan muunnoksien avulla pohdintatehtävässä A.3. Tehtävän tarkoituksena on korostaa yhtälön käsitteellistä puolta. Samat muunnokset on tehtävä yhtälön molemmille puolille, jotta yhtäsuuruus säilyy.

Pohdinta A.3 Oiva muodosti Ainolle yhtälön määrittelemällä aluksi muuttujan arvon ($P = 7$). Sen jälkeen hän laajensi yhtälöä tekemällä molemmille puolille samat toimenpiteet.

$$\begin{aligned} P &= 7 && \big| +2 \\ P+2 &= 7+2 \\ P+2 &= 9 && \big| \cdot 3 \\ 3\cdot P + 3\cdot 2 &= 3\cdot 9 \\ 3P+6 &= 27 \end{aligned}$$

a) Muodosta itse ensimmäisen asteen yhtälö vastaavalla tavalla, ja anna se kaverille ratkaistavaksi. Yritä tehdä yhtälöstä mahdollisimman hankala.

b) Muodosta uusi yhtälö, keksi siihen sanallinen ongelma, ja anna ongelma kaverille ratkaistavaksi.

Vertailkaa ratkaisuja. Olisitko itse ratkaissut samalla tavalla?

2.4.3 Matemaattinen kuvaileminen ymmärtämisessä ja tiedon jakamisessa

Kun oppilaat ovat ”kuvailijoita” (describers), tarkoittaa se, että he hyödyntävät erilaisia matemaattisia esitystapoja ongelmien ja niiden ratkaisuprosessien kuvailemisessa. Artikkelin [2] mukaan oppilaille tulisi kehittyä tapa kirjoittaa omia ajatuksia, arvailuja, argumentteja, todistuksia, kysymyksiä ja mielipiteitä. Myös opetussuunnitelmassa yleisissä tavoitteissa on sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa [1].

Määrittelen matemaattisen kuvailun tarkoittavan puhuttua kieltä, kirjoitettua kieltä, piirroksia tai matemaattista symbolikieltä. Joutsenlahden mielestä oppilaan ajattelu ei tule tarpeeksi hyvin esille ja matemaattiset ratkaisut esitetään usein tiukasti matemaattisessa muodossa, vaikka ne olisivat soveltavia tehtäviä [15]. Kun oppilas ilmaisee muille omaa ajattelua, hän joutuu pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä ja reflektoimaan sekä jäsentämään matemaattista ajatteluaan [15]. Opettajan on myös helpompi arvioida oppilaan ymmärrystä, kun hän kuulee tai näkee oppilaan päättelyn.

Opettajanoppaassa kehotetaan käymään tehtäviä yhdessä läpi, jotta oppilaat voivat myös verbaalisesti kuvata omia ratkaisujaan. Kuitenkaan suurien opetusryhmien takia kaikki eivät voi kuvailla matemaattista ajattelua suullisesti. Niinpä oppimateriaalissa oppilasta pyydetään perustelemaan päätelmiään kaverille tai kirjoittamaan vihkoon.

Tehtävien kirjallisten tai suullisten perustelemisen tarkoituksena on syventää oppilaan matemaattista ajattelua, erityisesti käsitteen muodostumisen kannalta. Perustellessaan vastauksiaan, oppilas joutuu miettimään ensimmäisen asteen yhtälön käsitettä. Esimerkiksi tehtävässä 1 oppilaiden tulee osata perustella esimerkiksi miksi $5 = 4x^2 + 6$ ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, mutta $8 = k^2x + 4$ on.

Kuvailu voi auttaa myös laskuvirheiden vähentämiseen. Tossavaisen ja Sorvalin mukaan sievennyksen eri välivaiheiden kirjottaminen lisää oppilaan tietoisuutta niistä ratkaisustrategioista, jotka johtavat turvallisimmin oikeaan lopputulokseen [16]. Esimerkiksi tehtävässä 7 pyydetään kirjoittamaan ratkaisujen vaiheet näkyviin. Kun oppilaat kirjoittavat ratkaisunsa välivaiheineen ja perusteluineen vihkoon, on heidän myös helpompi esittää ratkaisut muille.

Oppilailla täytyy olla sellainen käsitteellinen ymmärrys, että he voivat ilmaista ajatteluaan matemaattisilla symboleilla [4], sillä matemaattinen kuvaileminen auttaa välittämään omaa ajattelua [15]. Kuvailemisen taito on siis hyödyllistä oppilaille, kun he tekevät töitä yhdessä ja oppilaiden tulisi ymmärtää, että formaali muoto helpottaa kielellisesti vaikeasti ilmaistujen ongelmien kuvailemisessa. Asiat voidaan ilmaista matemaattisesti lyhyemmin ja havainnollisemmin [2]. Opettajanoppaassa kehotetaan, että oppilaat esittävät toisilleen myös sanallisten ongelmien ratkaisuja esimerkiksi kirjan pohdintatehtävässä A.12. Kun tehtävässä A.12 oppilaat nimeävät muuttujat ja kirjoittavat yhtälöt täsmällisesti, on muiden helpompi ymmärtää ratkaisuja.

Pohdinta A.12 Oiva on tilaamassa kenkiä ruotsalaisesta verkkokaupasta. Hän tarkistaa päivän kruunun kurssin, joka näyttää, että yksi euro vastaa 9,3728 kruunua. Oiva haluaa muuttaa monta eri hintaa kruunuista euroiksi ja kirjoittaa sitä varten yhtälön, jossa E tarkoittaa euroja ja K kruunuja. Nyt Oiva voi sijoittaa yhtälöön kruunut ja saa hinnan euroina. Oivan kirjoittama yhtälö:

$$1E = 9{,}3728K.$$

Onko Oivan yhtälö oikein? Jos ei, niin miten yhtälö täytyisi kirjoittaa?

Vinkki: Selvitä yhtälöllä esimerkiksi kuinka paljon 549 kr olisi euroina?

Pohdintatehtävässä A.12 Oiva on ratkaissut arkipäiväisen ongelman. Yhtälö on muodostettu oikein, jos kirjain E tarkoittaa euroja ja K kruunuja. Yhtälö on muodostettu väärin, jos kirjain E tarkoittaa hintaa euroina ja K on hintaa kruunuina. Jos Oiva sijoittaa kruunun hintoja muuttujan K paikalle, se johtaa väärään tulokseen. Tällöin yhtälö täytyisi kirjoittaa $1K = 9,3728E$, jossa muuttujat K ja E tarkoittavat hintoja.

Pohdintatehtävän A.12 tarkoitus on johtaa oppilaat keskustelemaan ja perustelemaan omaa päättelyä. Kun ratkaisuja ja niihin liittyviä ongelmia käydään yhdessä läpi, oppilaat voivat verrata omaa ajattelua toisten ilmaisuun ja muovata keskustelun avulla sekä omia, että toisten oppilaiden käsityksiä [15]. Lisäksi tehtävän tavoitteena on havainnollistaa formaalin muodon ymmärtämisen tärkeyttä.

2.4.4 Visualisoiminen käsitteiden ja rakenteiden hahmottamisessa

Jotkin asiat ovat luonnostaan visuaalisia (esimerkiksi geometriassa esiintyvät pinta-alat ja tilavuudet) jotkin taas sellaisia, joita voidaan vain ajatustasolla visualisoida ja muodostaa mentaalikuvia [2]. Oppilaiden tulee kehittää taitoa visualisoida sellaisia asioita, jotka eivät ole luonnostaan visuaalisia eli rakentaa mentaalikuvia ja muokata niitä. Myös opetussuunnitelman asettamissa tavoitteissa on, että oppilas ”osaa käyttää kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna” [1].

Vaikka Ramirezin mukaan ei ole tarpeeksi todisteita siitä, miten eri representaatioiden yhdistäminen rakentaa oppilaiden konseptuaalista ymmärtämistä [7], voi yhtälönratkaisun visualisointi graafisesti auttaa käsitteen tarkentumisessa. Capraron ja Joffrionin mukaan konseptuaalista ymmärtämistä voidaan kehittää esittämällä ja käyttämällä käsitteitä eri yhteyksissä [4].

Oppikirjassa tutustutaan aluksi lineaariseen riippuvuuteen ja lineaariseen yhtälöön graafisesti ennen algebrallista yhtälönratkaisua. Niinpä aiemmassa kappaleessa ollutta tehtävää, joka on ratkaistu graafisesti, käytetään hyväksi algebralliseen yhtälönratkaisuun siirryttäessä (Mallitehtävä A.5). Graafisen ja algebrallisen muodon yhdistämisen tarkoituksena on laajentaa oppilaan konseptuaalista ymmärrystä yhtälöstä.

Mallitehtävään A.5 on liitetty GeoGebralla piirretyt kuvat (Kuva 1 ja Kuva 2) ja oppilaiden tulee yhdistää kuvat annettuihin tehtäviin pohdintatehtävässä A.9. Oppilaiden tulee siis huomata, miten suoran kaltevuus riippuu kulmakertoimen arvosta.

Oppilaan käsitteellisen ymmärtämisen lisäksi kuvien avulla on tarkoitus motivoida algebralliseen yhtälönratkaisuun: aina graafinen ratkaisu ei ole tehokkain ratkaisumenetelmä, vaan myös algebrallista menetelmää tarvitaan tarkan tuloksen määrittämiseen.

Mallitehtävä A.5 Kotitehtävä **??** ratkaistiin suorien avulla. Ratkaistaan tehtävä nyt algebrallisesti. Tehtävä on muuten sama, mutta Aino polkee nyt 5 km/h nopeampaa.

Oiva ja Aino lähtevät samaan aikaan kulkemaan kohti keskustaa. Oiva kävelee keskustaan koulusta nopeudella 5 km/h. Aino pyöräilee kotoa keskustaan koulun kautta nopeudella 20 km/h. Matka kotoa keskustaan on 5 kilometriä pidempi kuin koululta keskustaan. Kuinka kaukana koulusta he kohtaavat?

Ratkaisu: Merkitään etäisyyttä koulusta muuttujalla x.
Oivan kävelynopeus on 5 km/h. Koska nopeus $= \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$, niin Oivan kävelymatkaan kuluvaa aikaa voidaan kuvata suoralla

$$t_1 = \frac{x}{5\ \text{km/h}},$$

missä x = Oivan kävelymatka ja t = Oivan matkaan kuluva aika.
Aino pyöräilee 5 km pitemmän matkan kuin Oiva kävelee ja Ainon pyöräilynopeus on 20 km/h. Ainon pyöräilymatkaan kuluvaa aikaa voidaan siis kuvata suoralla

$$t_2 = \frac{5\ \text{km} + x}{20\ \text{km/h}}.$$

Koska Oiva ja Aino kohtaavat samaan aikaan, voidaan suorista muodostaa yhtälö

$$t_1 = t_2$$

$$\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} = \frac{x}{5\ \text{km/h}}.$$

Ratkaistaan tämä yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} &= \frac{x}{5\ \text{km/h}} && \\
\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} &= \frac{4x}{20\ \text{km/h}} && \big| \cdot 20\ \text{km/h} \\
5\ \text{km} + x &= 4x && \big| - x \\
5\ \text{km} &= 3x && \big| : 3 \\
\frac{5}{3}\ \text{km} &= x && \\
x &= 1\frac{2}{3}\ \text{km}. &&
\end{aligned}$$

Pohdinta A.6

1. Kumpi kuvaajista (Kuva 1 vai Kuva 2) vastaa Mallitehtävää A.5 ja kumpi kotitehtävää **??**?

2. Kumman tehtävän ratkaisu on helpompi hahmottaa kuvaajasta? Miksi?
3. Olisitko itse ratkaissut tehtävät piirtämällä vai laskemalla?

Myös pohdintatehtävässä A.10 ja tehtävässä 6 pyydetään ratkaisemaan yhtälöt algebrallisesti, ja sen jälkeen tarkistamaan ratkaisu GeoGebralla graafisesti suorien avulla. Tällöin yhtälöiden graafisten ratkaisujen tulkinta voi auttaa yhtälön ratkaisunjoukon hahmottamisessa. (Kun suorat eivät leikkaa missään pisteessä, yhtälöllä ei ole ratkaisua. Kun suorilla on samat pisteet, yhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla.)

3 Opettajan opas

Tähän oppaaseen on koottu tehtäväkohtaisia tavoitteita, eli sellaisia asioita, joita tehtävien kautta on tarkoitus oppia. Pohdintatehtävistä kerrotaan tarkemmin, jotta niistä saataisiin paras hyöty irti oppitunnilla. Vaikka monet pohdintatehtävät toteutetaan parityöskentelynä, tulee niiden ratkaisut käydä yhdessä läpi virhekäsitysten välttämiseksi. Myös jotkin kotitehtävät vaativat yhteistä ratkaisujen läpikäymistä. Tällöin oppilailla on mahdollisuus vertailla erilaisia ratkaisuja.

Ajankäyttösuunnitelma on suuntaa-antava eli opettajan valittavaksi jää, kuinka painottaa mitäkin kappaletta. Tuntijako on tehty 45 minuutin ja 75 minuutin oppitunneille.

3.1 Ajankäyttösuunnitelma 45 minuutin oppitunneille

Ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti

- Ensimmäisen asteen yhtälö (1)
- Yhtälönratkaisu algebrallisesti (2)
- Yhtälön sovelluksia (2)

3.2 Ajankäyttösuunnitelma 75 minuutin oppitunneille

Ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti

- Ensimmäisen asteen yhtälö (1)
- Yhtälönratkaisu algebrallisesti (1)
- Yhtälön sovelluksia (1)

3.3 Ensimmäisen asteen yhtälö

Pohdinta A.1

- Tarkoituksena on korostaa, että ennestään tutut yhtälönratkaisustrategiat perustuvat yhtälön molempien puolien yhtäsuuruuden säilymiseen. Oppilaat voivat itse konstruoida yhtälönratkaisutapoja.
- Tehtävä rohkaisee operoimaan helpommin muuttujilla (laatikoilla) kuin Pohdinta A.2. Esimerkiksi d)-kohta voidaan laatikoiden avulla päätellä vähentämällä aluksi molemmilta puolilta kolme laatikkoa (muuttujaa).

$$\begin{aligned} [\,] + [\,] + [\,] + 17 &= [\,] + [\,] + [\,] + [\,] - 1 \\ 17 &= [\,] - 1 \\ 18 &= [\,] \end{aligned}$$

- vastaukset: a) 35 b) 23 c) 2 d) 18

Pohdinta A.2

- Oppilaita voi pyytää esittämään erilaisia ratkaisuja kaikille ja pohtia yhdessä, miten ratkaisut eroavat Pohdinta A.1:stä. Nyt oppilaat ehkä operoivat helpommin luvuilla kuin muuttujilla tai muuttujaa sisältävillä termeillä. (Vrt. esimerkiksi d)-kohdan ratkaisua.)

$$\begin{aligned} 3L + 17 &= 4L - 1 \\ 3L &= 4L - 18 \\ -L &= -18 \\ L &= 18 \end{aligned}$$

- Tarkoituksena on korostaa, että muuttujaa voi merkitä muullakin kuin x:llä.
- Lisäksi oppilaiden tulisi huomata, miten yhtälöillä voidaan kuvata sanallisia ongelmia.
- Jos oppilaat keksivät esimerkkejä c)-kohtaan, voivat he lukea niitä ääneen, jolloin muut oppilaat päättelevät, mikä yhtälö on kyseessä.

Pohdinta A.3

- Tarkoituksena on oppia muodostamaan yhtälö. (Miten muuttujalla kertominen ja jakaminen vaikuttavat yhtälöön?)

- Yhtälön muodostamisessa ja ratkaisussa muunnokset on tehtävä yhtälön molemmille puolille jotta yhtälöiden yhtäpitävyys säilyy.
- Oppilaat voivat muodostaa yhtälön myös parin kanssa, jolloin toinen pari ratkaisee.
- Oppilaat voivat kirjoittaa keksimänsä yhtälöt taululle jolloin kaikki voivat ratkaista ja vertailla niitä. (Miten yhtälöt eroavat toisistaan? Mikä on vaikein? Millä muuttujaa on merkitty? ...)

Tehtävä 1.

- Tehtävän tarkoitus on korostaa lausekkeen ja yhtälön eroa sekä vakion ja muuttujan eroa.

Ratkaisut:

a) ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan (x) asteluku on 2.

b) ei ole yhtälö, vaan lauseke.

c) on ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan (y) asteluku on 1.

d) on ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujien (x, y) asteluvut ovat 1.

e) on ensimmäisen asteen yhtälö, jos $k \neq 0$, sillä muuttujan (x) asteluku on 1. Huomaa, että k ei ole muuttuja, vaan vakio, joten sen asteluku voi olla muukin kuin 1. Jos $k = 0$, niin yhtälö ei ole ensimmäisen asteen yhtälö.

f) Muuttujat y ja x riippuvat toisistaan, kun taas k ja b voivat olla mitä tahansa lukuja.

Tehtävä 4.

- Oppilaiden tulee huomata, että yhtälö on ratkaistu oikein.
- Kertolasku koskee koko sulkulauseketta, on siis joustavaa ratkaista yhtälö jakamalla molemmat puolet aluksi 3:lla.
- Oppilailta voi kysellä vaihtoehtoisia ratkaisuja ja vertailla mikä on heidän mielestään paras ratkaisutapa. Kuinka moni kertoisi aluksi sulkujen sisällä olevan lausekkeen 3:lla?

$$3\left(x + \frac{3}{5}\right) = 12$$
$$3x + \frac{9}{5} = 12$$

3.4 Yhtälönratkaisu algebrallisesti

Pohdinta A.6

- Tarkoituksena on huomata että graafinen ratkaisutapa ei ole aina paras ratkaisutapa, vaan myös algebrallista ratkaisutapaa tarvitaan.
- Tehtävään liittyvässä keskustelussa tulee käydä ilmi:

  a) Kuva 1 vastaa mallitehtävää A.5 ja kuva 2 kotitehtävää 22.

  b) Mallitehtävässä ratkaisu on vaikeampi hahmottaa kuvaajasta, sillä x-akseli on jaoteltu 0,5 km:n välein, mutta suorat leikkaavat kohdassa $x = 1\frac{2}{3}$ km toisin kuin kotitehtävässä suorat leikkaavat kohdassa $x = 2\frac{1}{2}$ km. Mallitehtävän A.5 algebrallinen ratkaisutapa on nopeampi, jos apuvälineitä ei ole käytössä.

Pohdinta A.9

- Tarkoituksena on oppia yhtäsuuruusmerkin merkitys ja huomata, miten yhtälöitä voi ratkaista joustavasti.
- Tehtävään liittyvässä keskustelussa tulee käydä ilmi:

  a) Yhtäsuuruus ei ole vastauksen merkki, vaan se tarkoittaa, että yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolella olevat lausekkeet ovat yhtä suuria. Ekvivalenssilla tarkoitetaan, että yhtälöt ovat yhtäpitäviä.

  $$6x + 7 = 8 \Leftrightarrow 6x = 8 - 7 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

  b) Yhtälönratkaisussa muunnokset on tehtävä yhtälön molemmille puolille, jotta yhtäsuuruus säilyy. Oikean ratkaisun voi tarkistaa sijoittamalla.

  c) Joustavampi ratkaisutapa:

  $$\begin{aligned} 7(x+3) &= 5(x+3) - 2(x+3) - (x+3) + 4 \\ 7(x+3) &= 2(x+3) + 4 \\ 5(x+3) &= 4 \\ x + 3 &= \frac{4}{5} \\ x &= -2\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Pohdinta A.10.

- Tarkoituksena on korostaa, että ratkaisu ei ole aina vain yksi reaaliluku.
- Algebrallisen ja graafisen tulkinnan yhdistäminen voi auttaa ymmärtämisessä.

  a) Yhtälöllä ei ole ratkaisua. Suorat eivät leikkaa missään pisteessä.

b) Yhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla, $x \in \mathbb{R}$. Suorat ovat samat eli ne leikkaavat jokaisessa pisteessä.

Tehtävä 7.

- Tarkoituksena on, että oppilas vertailee ratkaisuja, ja löytää joustavimman tavan ratkaista
- Oppilailta tulee kerätä erilaisia ratkaisuja taululle, jotta niitä voidaan vertailla.
- Esimerkkejä joustavista ratkaisutavoista:

a) Muuttujan vaihto ja yhdistäminen

$$\begin{aligned} 2(x+1)+3(x+1) &= 10 \\ 5(x+1) &= 10 \\ x+1 &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

b) Jaetaan molemmat puolet 3:lla

$$\begin{aligned} 3(x+0,57) &= 12 \\ x+0,57 &= 4 \\ x &= 3,43 \end{aligned}$$

c) Vähennetään molemmilta puolilta $4(x+0,8)$

$$\begin{aligned} 4(x+0,8)+5x &= 4(x+0,8)+12 \\ 5x &= 12 \\ x &= \frac{12}{5} \\ x &= 2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

d) Muokataan aluksi murtolausekkeita.

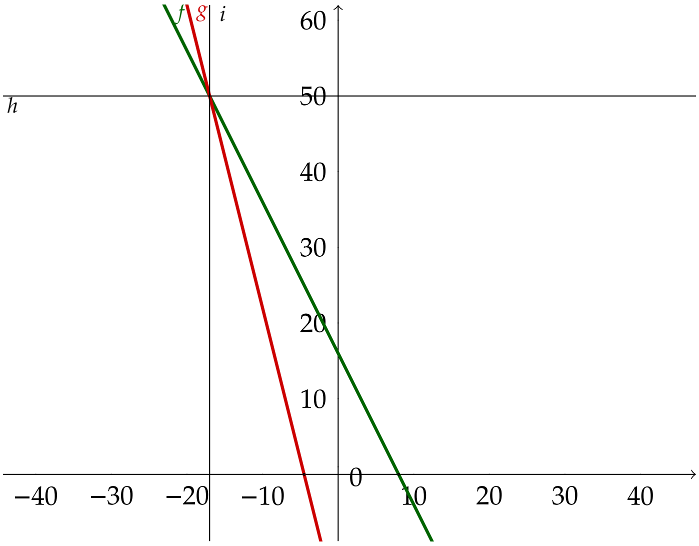
$$\begin{aligned} \frac{2x-6}{2}+5 &= \frac{6x-18}{3} \\ x-3+5 &= 2x-6 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Tehtävä 8.

- Tehtävän tarkoituksena on kerrata funktion käsitettä.
- Tehtävää tarkistettaessa kannattaa ottaa huomioon graafinen tarkastelu esimerkiksi piirtämällä funktiot GeoGebralla:

a) Funktioiden nollakohdat voidaan määrittää funktioiden kuvaajista. ($f(x) = 0$ kun $x = 8$ ja $g(x) = 0$ kun $x = -4\frac{1}{2}$)

b) Funktiot saavat yhtä suuret arvot, kun ne leikkaavat. Niinpä funktioiden leikkauskohdan pisteen koordinaateista saadaan vastaukset b) ja c) kohtiin ($x = -17$, $f(-17) = 50$, $g(-17) = 50$).



3.5 Yhtälön sovelluksia

Pohdinta A.12

- Tarkoituksena on saada oppilaat keskustelemaan ja perustelemaan omaa päättelyä sekä arvioimaan ratkaisun oikeellisuutta. Tehtävää voi pohtia aluksi yksin tai parin kanssa ja sen jälkeen yhdessä.
- Tavoitteena on, että oppilaat harjaantuvat perustelutaidossa ja huomaavat kuinka formaali muoto auttaa omien päätelmien perustelussa.
- Opettaja voi pyytää oppilaita kirjoittamaan perusteluita (yhtälöitä ja muuttujien nimeämistä) taululle. Tällöin myös muut oppilaat ymmärtävät perusteluja paremmin.
- Tehtävään liittyvässä keskustelussa tulee käydä ilmi:
  - Yhtälö on muodostettu oikein, jos kirjain E tarkoittaa euroja ja K kruunuja. Tällöin K:n ja E:n paikalle ei kuitenkaan voi sijoittaa hintoja.
  - Yhtälö on muodostettu väärin, jos kirjain E tarkoittaa hintaa euroina ja K on hintaa kruunuina. Tällöin yhtälö täytyisi kirjoittaa $1K = 9,3728E$, jossa muuttujat K ja E tarkoittavat hintoja. Jos hintoja kokeillaan sijoittaa yhtälöön $1K = 9,3728E$, saadaan oikea tulos.
  - Sanallisissa tehtävissä on oleellista, että muuttujan merkitys määritellään selkeästi.

Pohdinta A.14

- Tarkoituksena on kerrata funktio-käsitettä.

  a) $f(0) = 1120 + 12 \cdot 0 = 1120$

  b) 12 €

  c) $f(84) = 1120 + 12 \cdot 84 = 2128$

  d)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3040 \\ 3040 &= 1120 + 12x \\ x &= \frac{3040 - 1120}{12} \\ x &= 160\,€ \end{aligned}$$

Tehtävät 10. ja 11.

- Tehtävien tarkoituksena on vaikuttaa oppilaiden ennakkokäsityksiin sanallisista ongelmista: vaikka ongelma on monimutkaisesti ilmastu, voi matemaattinen ratkaisu olla yksinkertainen.

- Tehtävä 10 on monimutkaisesti kerrottu ongelma ja sisältää ratkaisun kannalta ylimääräistä tietoa. Sen ratkaisu on kuitenkin yksinkertainen.
- Tehtävä 11 on lyhyesti kerrottu ongelma, mutta ratkaisu on haasteellisempi, kuin tehtävän 10 ratkaisu.
- Ratkaisut:

10.

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{5}x - (3-1) &= x - 6 \\ x - \frac{1}{5}x - 2 &= x - 6 \\ -\frac{1}{5}x &= -4 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

11. Ainon, Toivon ja Oivan kulkeman matkan hinta on 12,90 €. Tästä matkasta Aino, Toivo ja Oiva maksavat jokainen $\frac{12{,}90\,€}{3} = 4{,}30\,€$
Toivon ja Oivan kulkeman matkan hinta on 18,70-12,90 € = 5,80 €. Tästä matkasta Toivo ja Oiva maksavat molemmat lisäksi $\frac{5{,}80\,€}{2} = 2{,}90\,€$
Oivan yksin kulkeman matkan hinta on 26,50-18,70 € = 7,80 €, joten Oivan matkan hinnaksi tulee 4,30 € + 2,90 € + 7,80 € = 15,00 €
Vastaus: Aino on siis 4,30 € ja Toivo 4,30 € + 2,90 € = 7,20 € velkaa Oivalle.

Tehtävä 12.

Ratkaisu:

Merkitään pienintä parillista lukua $2n$. Toinen parillinen luku on $2n + 2$ ja kolmas $2n + 2 + 2$. Saadaan

$$\begin{aligned} 2n + (2n + 2) + (2n + 2 + 2) &= 42 \\ 6n + 6 &= 42 \\ 6(n + 1) &= 42 \\ n + 1 &= 7 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Luvut ovat siis $2 \cdot 6$, $2 \cdot 6 + 2$ ja $2 \cdot 6 + 2 + 2$ eli 12, 14 ja 16.

Viitteet

[1] Opetushallitus *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki, Opetushallitus, 2015.

[2] Cuoco, A., Goldenberg, E. P. ja Mark, J. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. The Journal of Mathematical Behavior, 15, 375–402, 1996.

[3] Näveri L. *Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Helsingin yliopisto, 2009.

[4] Capraro, M., Joffrion, H. *Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols?*. Reading Psychology, 27:147–164, 2006.

[5] Star J.R., Rittle-Johnson B. *Flexibility in problem solving: The case of equation solving* Elsevier, Learning and Instruction, 2008.

[6] Filloy, E. Rojano, T. *Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra*.The Learning o.f Mathematics 9, Montreal Quebec Canada, 1989.

[7] Ramirez, A. *A Cognitive approach to solving systems of linear equations*. ProQuest LLC, Ph.D. Dissertation, Illinois State University, 2009.

[8] Susan, E., Pirie, B., Lyndon M. *The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations*. Educational Studies in Mathematics 34: 159–181, 1997.

[9] Bush S., Karp, K.*Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review*.Journal of Mathematical Behavior 32, 613–632, 2013.

[10] Malaty, G. Opetushallitus *Johdatus matematiikan rakenteeseen*. Yliopistopaino, Helsinki, 2003.

[11] Attorps, I. *Mathematics teachers' conceptions about equations. Väitöskirja*. Helsinki, 2006.

[12] Joutsenlahti, J *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä, Väitöskirja*. Tampere, 2005.

[13] Hemmo, Vahviainen, Taskinen, Ekonen *Sigma 1, Lausekkeet ja yhtälöt*. Tammi, Helsinki, 2002.

[14] Ekonen, Hassinen, Heiskanen, Hemmo, Kaakinen, Tahvanainen, Taskinen *Yhteinen tekijä, Lukion matematiikka 1, Luvut ja lukujonot*. Sanoma Pro Oy, Helsinki, 2016.

[15] http://www.joutsenlahti.net/Languaging.pdf

[16] Tossavainen, T., Sorvali T. *Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka*. http://www.tieteessatapahtuu.fi/038/tossavainensorvali.pdf.

A Ensimmäisen asteen yhtälö algebrallisesti

On olemassa monenlaisia tilanteita, joissa haluaisimme saada selville jonkin tuntemattoman luvun arvon. Kuinka paljon joutuu maksamaan 18 euron ja 7 kilometrin taksimatkasta, jos jakaa laskun kaverin kanssa, jonka matka on kaksi kilometriä lyhempi? Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1:3 ja halutaan 6,0 litraa mehua? [S93/1] Monet sanalliset ongelmat ratkeavat yhtälöiden avulla. Ongelma täytyy vain ensin muotoilla yhtälöksi. Lähdetään nyt ratkaisemaan ongelmia yhtälöiden avulla.

A.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Pohdinta A.1 Jokaisessa kohdan laatikoissa on sama tuntematon luku. Selvitä tämä tuntemattoman luvun arvo. Kerro päätelmäsi vaiheineen parille (tai kirjoita vihkoon), ja vertailkaa päättelittekö luvut samalla tavalla.

a) $[\ ] + [\ ] + 18 = [\ ] + 53$

b) $[\ ] + [\ ] - 14 = [\ ] + 9$

c) $[\ ] + [\ ] + [\ ] + 7 = -[\ ] + 15$

d) $[\ ] + [\ ] + [\ ] + 17 = [\ ] + [\ ] + [\ ] + [\ ] - 1$

e) Perustele, miksi yhtälönratkaisu toimii?

Pohdinta A.2 a) Muuta Pohdinta A.1:n laatikot muuttujakirjaimiksi L (esimerkiksi $L + L + 18 = L + 53$) ja ratkaise yhtälöt. Kirjoita yhtälönratkaisun vaiheet näkyviin. Eroavatko vaiheet aiemmasta päättelystäsi?

b) Ainolla ja Oivalla oli saman verran rahaa. Aino osti kaksi kirjaa ja sai 18 € takaisin, Oiva yhden kirjan ja sai 53 € takaisin. Kirjat olivat samanhintaisia. Kuinka paljon yksi kirja maksoi?

c) Keksi parin kanssa vähintään yksi arkipäiväinen esimerkki yhtälöistä b)-d). Millaisia esimerkkejä luokkakaverit keksivät?

Kun yhtälö on tosi, yhtäsuuruusmerkin molemmat puolet ovat yhtä suuria. Tällöin yhtälöä muodostaessa ja ratkaistaessa samat muunnokset on tehtävä yhtälön molemmille puolille.

Pohdinta A.3 Oiva muodosti Ainolle yhtälön määrittelemällä aluksi muuttujan arvon ($P = 7$). Sen jälkeen hän laajensi yhtälöä tekemällä molemmille puolille samat toimenpiteet.

$$\begin{aligned} P &= 7 && \big| + 2 \\ P + 2 &= 7 + 2 \\ P + 2 &= 9 && \big| \cdot 3 \\ 3 \cdot P + 3 \cdot 2 &= 3 \cdot 9 \\ 3P + 6 &= 27 \end{aligned}$$

a) Muodosta itse ensimmäisen asteen yhtälö vastaavalla tavalla, ja anna se kaverille ratkaistavaksi. Yritä tehdä yhtälöstä mahdollisimman hankala.

b) Muodosta uusi yhtälö, keksi siihen sanallinen ongelma, ja anna ongelma kaverille ratkaistavaksi.

Vertailkaa ratkaisuja. Olisitko itse ratkaissut samalla tavalla?

Yhtälö on *ensimmäisen asteen yhtälö*, jos sen muuttujan asteluvun korkein potenssi on 1. Jos yhtälössä on useampi muuttuja, niin se voi olla ensimmäisen asteen yhtälö jonkin muuttujan suhteen ja toisen ei.

Esimerkki A.4 a) $6z + 7 = 5$ on ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan z asteluku on yksi.

b) $5x^2 - 3 = 0$ ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan x asteluku ei ole yksi.

c) $x^2 = x^2 + x$ ei ole ensimmäisen asteen yhtälö, sillä muuttujan x korkein potenssi on 2.

d) $y^2 = 3x + 2$ on ensimmäisen asteen yhtälö muuttujan x suhteen ja toisen asteen yhtälö muuttujan y suhteen.

1. Ovatko seuraavat ensimmäisen asteen yhtälöitä, kun x ja y ovat muuttujia ja k ja b vakioita? Perustele vastauksesi määritelmän avulla.

a) $5 = 4x^2 + 6$

b) $5x + 6$

c) $0 = y + 5$

d) $y = kx + b$

e) $8 = k^2x + 4$

Miten lineaarisen yhtälön $y = kx + b$ muuttujat y ja x eroavat vakioista k ja b?

2. Kolme 1,6 m leveää taulua halutaan kiinnittää 9,0 m pitkälle seinälle tasavälein niin, että uloimmaisten taulujen etäisyys nurkista on 0,5 m. Kuinka leveä väli taulujen väliin on jätettävä? (Vinkki: Piirrä tilanteesta kuva.)

3. a) Millä vakion b arvolla yhtälö $2 + bx = 3x + 2$ on tosi?

b) Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti:

$$\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}.$$

Millä a:n arvolla saadaan kuitenkin oikea tulos? [S93/2a]

4. Onko seuraava yhtälö ratkaistu oikein? Olisitko itse ratkaissut tällä tavalla?

$$\begin{aligned}
3\left(x + \frac{3}{5}\right) &= 12 \\
x + \frac{3}{5} &= \frac{12}{3} \\
x &= 4 - \frac{3}{5} \\
x &= 3\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

A.2 Yhtälönratkaisu algebrallisesti

Kappaleessa **??** perehdyttiin lineaarista riippuvuutta kuvaavaan suoraan

$$y = kx + b.$$

Tässä k:lla merkitään suoran kulmakerrointa ja b:llä suoran leikkauskohtaa y-akselilla. Symbolit x ja y tulkitaan toisistaan riippuviksi muuttujiksi ja k ja b vakioiksi.

Yhtälöitä ratkaistiin graafisesti piirtämällä suorat ja tarkastelemalla niiden leikkauskohtaa. Samat tehtävät voidaan ratkaista myös algebrallisesti.

Huomautus: Kun merkitään kaksi lauseketta yhtä suuriksi, kyseessä on *yhtälö*.

$$\underbrace{\quad y \quad}_{\text{lauseke}} = \underbrace{kx + b}_{\text{lauseke}}$$

Mallitehtävä A.5 Kotitehtävä **??** ratkaistiin suorien avulla. Ratkaistaan tehtävä nyt algebrallisesti. Tehtävä on muuten sama, mutta Aino polkee nyt 5 km/h nopeampaa.

Oiva ja Aino lähtevät samaan aikaan kulkemaan kohti keskustaa. Oiva kävelee keskustaan koulusta nopeudella 5 km/h. Aino pyöräilee kotoa keskustaan koulun kautta nopeudella 20 km/h. Matka kotoa keskustaan on 5 kilometriä pidempi kuin koululta keskustaan. Kuinka kaukana koulusta he kohtaavat?

Ratkaisu: Merkitään etäisyyttä koulusta muuttujalla x.
Oivan kävelynopeus on 5 km/h. Koska nopeus = $\frac{\text{matka}}{\text{aika}}$, niin Oivan kävelymatkaan kuluvaa aikaa voidaan kuvata suoralla

$$t_1 = \frac{x}{5\ \text{km/h}},$$

missä x = Oivan kävelymatka ja t = Oivan matkaan kuluva aika.
Aino pyöräilee 5 km pitemmän matkan kuin Oiva kävelee ja Ainon pyöräilynopeus on 20 km/h. Ainon pyöräilymatkaan kuluvaa aikaa voidaan siis kuvata suoralla

$$t_2 = \frac{5\ \text{km} + x}{20\ \text{km/h}}.$$

Koska Oiva ja Aino kohtaavat samaan aikaan, voidaan suorista muodostaa yhtälö

$$t_1 = t_2$$

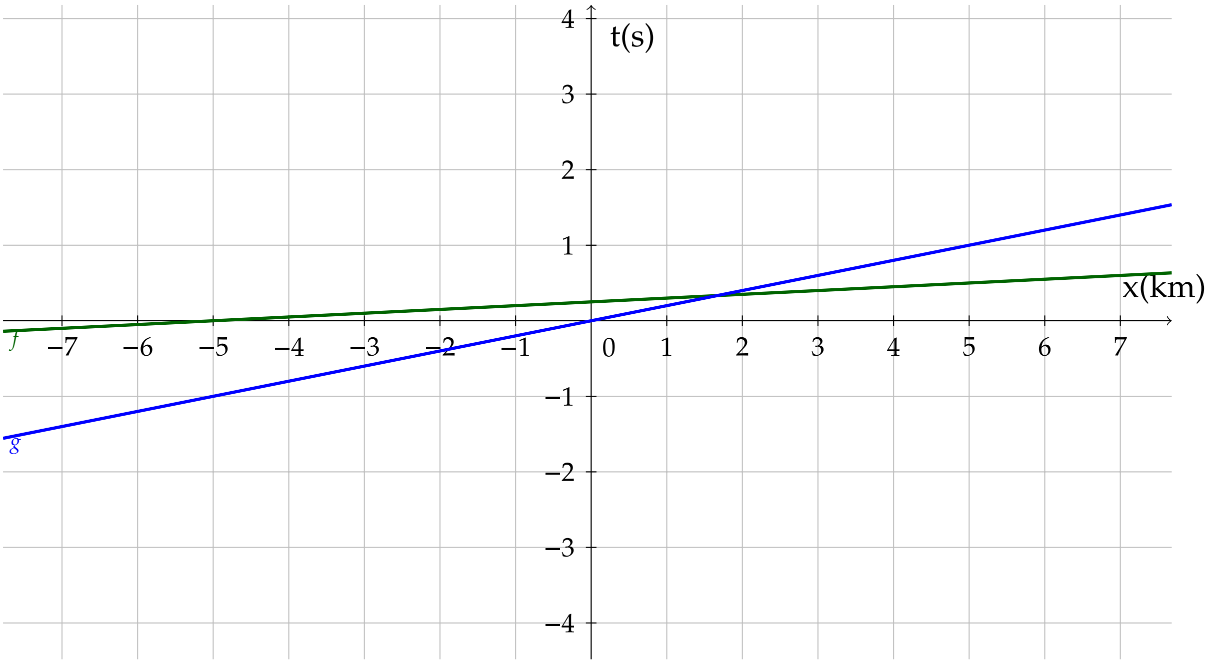
$$\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} = \frac{x}{5\ \text{km/h}}.$$

Ratkaistaan tämä yhtälö:

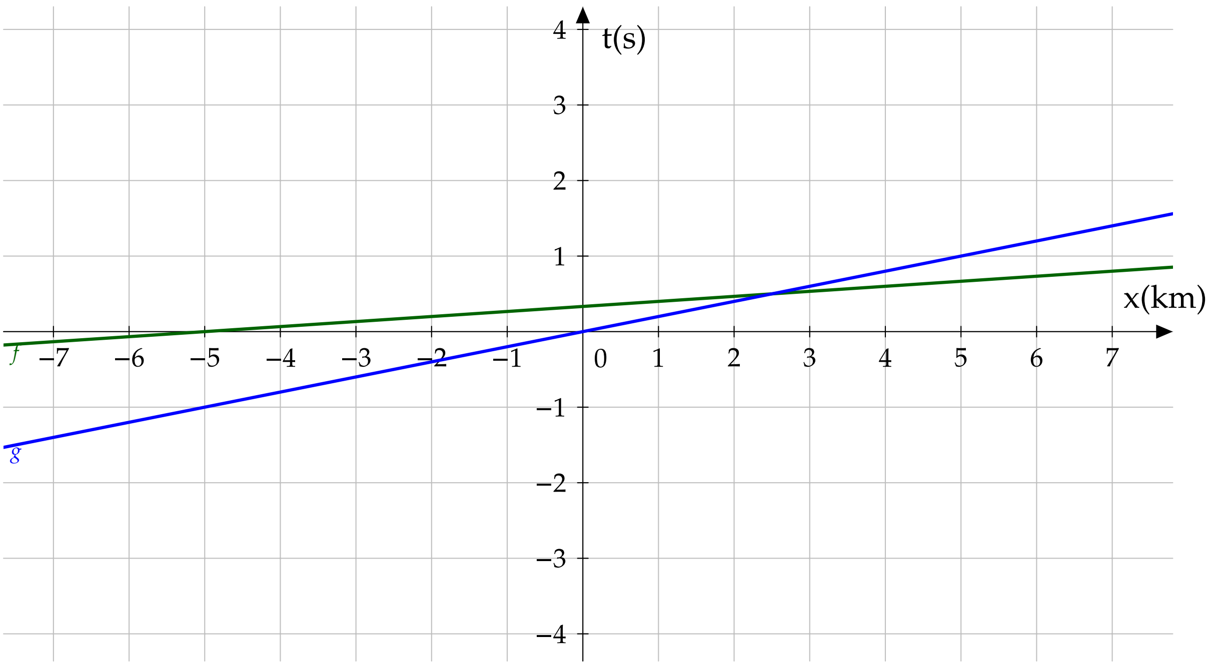
$$\begin{aligned}
\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} &= \frac{x}{5\ \text{km/h}} \\
\frac{5\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} + \frac{x}{20\ \text{km/h}} &= \frac{4x}{20\ \text{km/h}} && \Big| \cdot 20\ \text{km/h} \\
5\ \text{km} + x &= 4x && \Big| -x \\
5\ \text{km} &= 3x && \Big| : 3 \\
\frac{5}{3}\ \text{km} &= x \\
x &= 1\frac{2}{3}\ \text{km}.
\end{aligned}$$

Suorat t_1 ja t_2 ovat piirretty GeoGebran avulla. Huomaa, että akselit ovat nyt matkan ja ajan mukaan määritettyjä (x-akseli ja t-akseli).

Kuva 1



Kuva 2



Pohdinta A.6 a) Kumpi kuvaajista (Kuva 1 vai Kuva 2) vastaa Mallitehtävää A.5 ja kumpi kotitehtävää **??**?

b) Kumman tehtävän ratkaisu on helpompi hahmottaa kuvaajasta? Miksi?

c) Olisitko itse ratkaissut tehtävät piirtämällä vai laskemalla?

Määritelmä: Jokainen muuttujan arvo, joka toteuttaa yhtälön, on yhtälön *ratkaisu*. Yhtälön ratkaisuja kutsutaan myös yhtälön *juuriksi*.

Ensimmäisen asteen yhtälö ratkaistaan muokkaamalla se yksinkertaisimpaan yhtäpitävään muotoon niin, että yhtäsuuruus säilyy, jolloin saadaan yhtälön ratkaisu.

Mallitehtävä A.7 Ratkaise yhtälö $8k + 7 = 5k - 2$.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
8k + 7 &= -5k - 2 \\
8k + 7 - 7 &= -5k - 2 - 7 && \big| \text{Vähennetään molemmilta puolilta 7.} \\
8k &= -5k - 9 \\
8k + 5k &= -5k - 9 + k && \big| \text{Lisätään molemmille puolille } 5k. \\
13k &= -9 && \big| \text{Yhdistetään termit.} \\
\frac{13k}{13} &= -\frac{9}{13} && \big| \text{Jaetaan molemmat puolet 13.} \\
k &= -\frac{9}{13}
\end{aligned}
$$

Koska yhtälöä on muokattu yksinkertaisimpaan yhtäpitävään muotoon, täytyy $8k + 7 = -5k - 2$ olla yhtäpitävä $k = -\frac{9}{13}$ kanssa. Tarkistetaan yhtälön ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
8k + 7 &= -5k - 2 && \big| \text{Sijoitetaan yhtälöön ratkaistu } k\text{:n arvo } k = -\frac{9}{13}. \\
8 \cdot \left(-\frac{9}{13}\right) + 7 &= (-5) \cdot \left(-\frac{9}{13}\right) - 2 \\
-\frac{72}{13} + 7 &= \frac{45}{13} - 2 \\
-\frac{72}{13} + \frac{91}{13} &= \frac{45}{13} - \frac{26}{13} \\
\frac{19}{13} &= \frac{19}{13} \\
19 &= 19
\end{aligned}
$$

Muuttujan arvolla $k = -\frac{9}{13}$ yhtälö on tosi. Siis $k = -\frac{9}{13}$ on yhtälön ratkaisu.

Lisätietoa: Kun yhtälöt ovat yhtäpitäviä keskenään, voidaan sanoa että ne ovat *ekvivalentteja*. Yhtäpitävillä yhtälöillä on sama ratkaisu. Yhtäpitävyyttä merkitään *ekvivalenssinuolella* $\Leftrightarrow$.

Esimerkki A.8 Mallitehtävän A.7 ratkaisu voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$8k + 7 = -5k - 2 \Leftrightarrow 8k + 5k = -2 - 7 \Leftrightarrow 13k = -9 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{13}.$$

Pohdinta A.9 Tarkista ja korjaa Oivan ratkaisemat yhtälöt. Mitä Oiva ei ole ymmärtänyt? Keksitkö paremman tavan ratkaista?

a) $6x + 7 = 8 = 6x = 8 - 7 = 1$

b)

$$\begin{aligned} 5x + 4 &= 3 - 2x \\ 5x - 2x &= 3 + 4 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 7(x+3) &= 5(x+3) - 2(x+3) - (x+3) + 4 \\ 7x + 21 &= 5x + 15 - 2x - 6 - x + 3 + 4 \\ 7x - 5x + 2x + x &= 15 - 6 + 3 + 4 - 21 \\ 5x &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Pohdinta A.10 Ratkaise yhtälöt

a) $k + 5 = k + 7$

b) $3(x + 1) = 3x + 3$

Tutki onko päättelemäsi ratkaisu oikein piirtämällä suorat $k + 5$, $k + 7$, $3(x + 1)$ ja $3x + 3$ GeoGebralla.

Yhtälön toteutuminen ei aina riipu yhtälön muuttujasta, kuten edellä olevassa pohdintatehtävässä A.10 huomattiin. Joskus yhtälö voi toteutua kaikilla muuttujan arvoilla ja joskus yhtälö ei toteudu millään muuttujan arvolla.

Määritelmä:
Kun yhtälön ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa reaaliluku, kyseessä on *identtisesti tosi yhtälö.*
Kun yhtälön ratkaisuksi ei kelpaa mikään reaaliluku, kyseessä on *identtisesti epätosi yhtälö.*

Esimerkki A.11

1. Yhtälön $x+2=x+2 \Leftrightarrow 2=2$ ratkaisuksi käyvät kaikki reaaliluvut, joten se on identtisesti tosi yhtälö. Yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa lyhyesti $x \in \mathbb{R}$.
2. Yhtälö $x+2=x+3 \Leftrightarrow 2=3$ ei toteudu millään x:n arvolla, joten se on identtisesti epätosi yhtälö. Yhtälöllä ei siis ole ratkaisua.

5. Oiva ja Aino lähtevät samaan aikaan kulkemaan kohti keskustaa. Oiva kävelee koulusta keskustaan nopeudella 5 km/h. Aino pyöräilee kotoa keskustaan koulun kautta nopeudella 20 km/h. Matka kotoa keskustaan on 5 kilometriä pitempi kuin koululta keskustaan. Kuinka kauan kestää, että Aino saa Oivan kiinni? (Ratkaise algebrallisesti, ilman teknisiä apuvälineitä.)

Vinkki: Katso mallitehtävää A.5.

6. Ratkaise yhtälöt. Tarkista vastaus graafisesti GeoGebran avulla.

a) $2x+3=5x-9$

b) $2(3x+4)=6x+8$

c) $2(3x+4)=6x-5$

7. Ratkaise kukin yhtälö mahdollisimman monella tavalla ja ympyröi niistä tehokkain tapa. Kirjoita ratkaisun vaiheet näkyviin.

a) $2(x+1)+3(x+1)=10$

b) $3(x+0{,}57)=12$

c) $4(x+0{,}8)+5x=4(x+0{,}8)+12$

d) $\dfrac{2x-6}{2}+5=\dfrac{6x-18}{3}$

Voit kehittää itse lisää tehtäviä arpomalla luvut.

8. a) Määritä funktioiden $f(x)=-2x-16$ ja $g(x)=-4x-18$ nollakohdat. Miten funktioiden nollakohdat voidaan määrittää funktioiden kuvaajista?

b) Millä muuttujan arvolla funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ arvot ovat yhtä suuret? Miten funktioiden kuvaajista voidaan lukea tämä kysytty muuttujan arvo?

c) Mitkä ovat funktioiden arvot kyseisellä muuttujan arvolla?

9. Kotimaisen meetvurstin rasvapitoisuus on 36 painoprosenttia. Kuinka monta prosenttia rasvaa meetvurstista pitää vähentää, jotta tuotteen uudeksi rasvapitoisuudeksi tulee 30 painoprosenttia? [s15/7]

A.3 Ensimmäisen asteen yhtälön sovelluksia

Pohdinta A.12 Oiva on tilaamassa kenkiä ruotsalaisesta verkkokaupasta. Hän tarkistaa päivän kruunun kurssin, joka näyttää, että yksi euro vastaa 9,3728 kruunua. Oiva haluaa muuttaa monta eri hintaa kruunuista euroiksi ja kirjoittaa sitä varten yhtälön, jossa E tarkoittaa euroja ja K kruunuja. Nyt Oiva voi sijoittaa yhtälöön kruunut ja saa hinnan euroina. Oivan kirjoittama yhtälö:

$$1E = 9{,}3728K.$$

Onko Oivan yhtälö oikein? Jos ei, niin miten yhtälö täytyisi kirjoittaa?

Vinkki: Selvitä yhtälöllä esimerkiksi kuinka paljon 549 kr olisi euroina?

Mallitehtävä A.13 Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1 : 3 ja halutaan 6,0 litraa mehua? [s93/1]

Ratkaisu: Merkitään tiivisteen määrää muuttujalla x. Tällöin veden määrä on $3x$. Koska halutaan 6 litraa mehua, täytyy tiivisteen ja veden määrän olla 6 litraa. Voidaan siis muodostaa yhtälö

$$\begin{aligned} x + 3x &= 6\text{ l} \\ 4x &= 6\text{ l} \\ x &= \frac{6}{4}\text{ l} = \frac{3}{2}\text{ l} = 1{,}5\text{ l} \end{aligned}$$

Huomaa, että l on yhtälössä litran yksikkö eikä muuttuja.
Eli tiivistettä tarvitaan 1,5 l ja vettä tarvitaan $3 \cdot 1{,}5$ l $= 4,5$ l.

Edellisen Mallitehtävän A.13 voi ratkaista myös yhtälöparin avulla. Tehtävä on uudestaan "Yhtälöparin sovelluksia"**??** kappaleessa (tehtävä**??**), joten kokeile ratkaista se silloin yhtälöparin avulla.

Pohdinta A.14 Funktio $f(x) = 1120 + 12x$ kuvaa puhelinmyyjän kuukausipalkkaa (€) kuukauden aikana myytyjen puhelinliittymien määrän x funktiona. Selvitä lausekkeesta

a) Mikä on peruspalkka, jonka myyjä saa vaikkei myy yhtään puhelinliittymää.

b) Kuinka suuri on yhdestä puhelinliittymän myynnistä saatava korvaus?

c) Mikä on kuukausipalkka, jos myytyjä puhelinliittymiä on kuukaudessa kertynyt 84?

d) Kuinka monta puhelinliittymää pitää myydä, että palkka olisi 3400 €?

10. Matematiikan ryhmä päätti järjestää tutustumisillan nyyttäri-periaatteella. Puolet oppilaista aikoi tuoda makeaa ja puolet suolaista purtavaa. Sopivaa iltaa mietittäessä ilmeni kuitenkin ongelma. Mikään viikonpäivä ei käynyt kaikille. Niinpä oppilaat äänestivät ja illaksi valittiin saman viikon perjantai, vaikka viidesosalle luokan oppilaista se ei sopinut.

Perjantaina kolme ryhmän oppilasta puuttui koulusta. He olivat tulleet kipeiksi, eivätkä sen takia päässeet tutustumisiltaan. Yksi heistä oli kuitenkin ilmoittanut jo aikaisemmin äänestyksen yhteydessä, ettei pääse tulemaan. Muut ilmoittautuneet saapuivat paikalle. Lopulta kuusi oppilasta puuttui. Kuinka monta oppilasta matematiikan ryhmässä oli kaiken kaikkiaan?

11. Tutustumisillan loputtua kolme oppilasta, Aino, Toivo ja Oiva soittivat taksin. He päättivät jakaa taksilaskun taksimittarin lukemien suhteessa. Kun taksi saapui Ainon kotipihaan, hintaa oli kertynyt 12,90 euroa. Toivon kotipihassa lukema oli 18,70 euroa ja lopulta Oivan kotona 26,50 euroa. Oiva maksoi 26,50 euron taksimaksun. Kuinka paljon Aino ja Toivo jäivät Oivalle velkaa?

12. Kolmen peräkkäisen parillisen luvun summa on 42. Mitkä ovat nämä parilliset luvut?

13. Vuonna 2014 pääomatulojen veroprosentti on 40 000 euroon saakka 30 ja sen yli menevältä osalta veroprosentti on 32.

a) Muodosta lauseke $f(x)$ pääomatuloveron suuruudelle, kun pääomatulo x on yli 40 000 euroa vuodessa.

b) Laske veron määrä, kun pääomatuloja on 41 700,23 euroa vuodessa.

c) Kun yksityishenkilö saa osinkotuloa pörssiyhtiön osakkeista, niin veronalainen osuus on 85 % osinkotuloista. Tästä osuudesta maksetaan pääomatuloveroa yllä mainitun säännön mukaisesti. Kuinka monta prosenttia veroa henkilö maksaa osinkotulostaan, kun osingon määrä on 41 700,23 euroa? [S15/14]

Vastaukset

1.

a) on

b) ei

c) on

d) on

e) on, jos $k \neq 0$

2. 60 cm

3.

a) $b = 3$

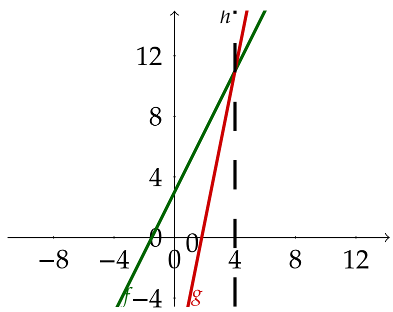
b) $a = -12$

4. Ei ole

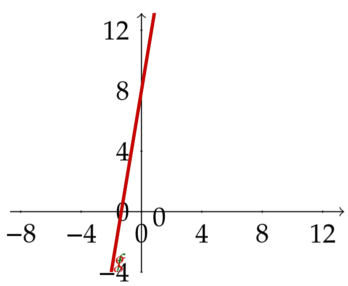
5. 20 min (Katso mallitehtävää A.5.)

6.

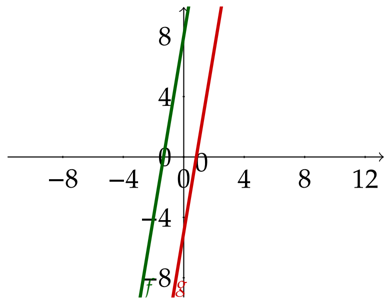
a) $x = 4$



b) $x \in \mathbb{R}$



c) ei ratkaisua



7.

a) $x = 1$

b) $x = 3,43$

c) $x = 2\frac{2}{5}$

d) $x = 8$

8.

a) $f(x) = 0$ kun $x = 8$ ja $g(x) = 0$ kun $x = -4\frac{1}{2}$

b) $x = -17$

c) $f(-17) = 50$ $g(-17) = 50$

9. 24%
10. 20 oppilasta
11. Aino on 4,30 € ja Toivo on 7,20 € velkaa Oivalle.
12. 12, 14 ja 16
13.

a) $f(x) = 0,30 \cdot 40000 + 0,32 \cdot (x - 40000) = 0,32x - 800$, kun $x > 40000$

b) $f(41700,23) \approx 12544,07$ (€)

c) $25,5\%$