Jäniksistä numeroihin – Fibonaccin luvuista

LuK-tutkielma
Antti Kaasila
2117506
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2017

Sisältö

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee Fibonaccin lukuja, niiden historiaa sekä ominaisuuksia. Luvussa 1 on katsaus matemaatikko Fibonaccin elämään sekä Fibonaccin lukujen taustaan. Luvussa 2 käydään läpi lukujen määrittely ja niihin liittyviä ominaisuuksia. Tutkielmassa käytettyihin teoksiin on viitattu niitä vastaavien osioiden alussa.

Työssä käytetyllä merkinnällä $\mathbb{N}$ tarkoitetaan ei-negatiivisten kokonaislukujen joukkoa $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Merkintä $\mathbb{C}$ tarkoittaa kompleksilukujen joukkoa ja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ samaa joukkoa ilman nollaa. Lukijan oletetaan tuntevan matriisit ja niiden laskutoimitukset. Lisäksi lukijalle on eduksi, jos hän tuntee lukuteorian perusteita.

1 Historiaa

Tämän luvun ensimmäinen osa käsittelee Fibonaccin elämää ja toinen osa Fibonaccin lukujen taustaa. Luku perustuu Alwyn Francis Horadamin artikkeliin *Eight Hundred Years Young* [1] sekä Nicolai N. Vorobievin teokseen *Fibonacci Numbers* [5, s. 1–3].

1.1 Fibonaccin elämä

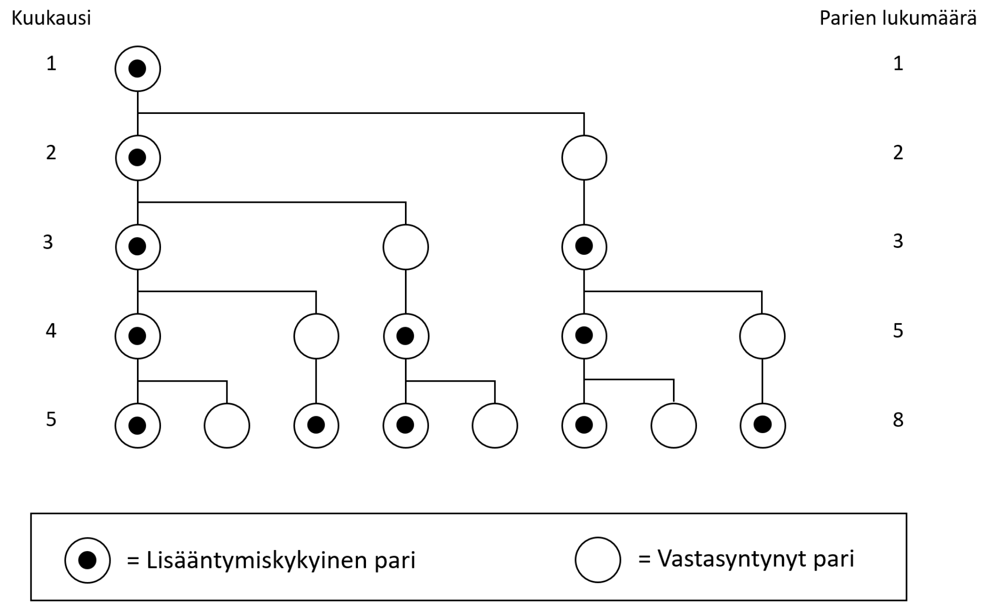
Fibonaccin elämästä on hyvin vähän tietoa. Hänen tarkkaa syntymäaikaansa ei tiedetä, mutta hän syntyi noin vuonna 1175 Pisan kaupungissa Italiassa. Syntymänimeltään hän oli Leonardo Pisano (Pisalainen), mutta hän käytti elämänsä aikana paljon muitakin nimiä. Tunnetuin niistä on Fibonacci, joka on lyhennetty sanoista *filus Bonacci*, 'Bonaccin poika'. Syntymäaikansa lisäksi myös hänen tarkka kuolinaikansa on tuntematon, eikä kuolinsyytäkään tiedetä. Kuitenkin viimeisin maininta hänestä on Pisan kaupungin asiakirjoissa vuodelta 1240.

Fibonaccin tärkein teos on vuonna 1202 valmistunut *Liber Abaci* (joskus *Liber Abbaci*). Siinä hän muun muassa esitteli intialaisarabialaiset numerot (nykyisin käytössä oleva kymmenjärjestelmä). Esimerkkien avulla hän näytti tämän numerojärjestelmän ylivertaisuuden tuohon aikaan käytössä olleisiin roomalaisiin numeroihin verrattuna. Tästä huolimatta uusi numerojärjestelmä ei saanut kannatusta vielä tuohon aikaan. Tämän lisäksi *Liber Abaci* sisältää paljon pulmatehtäviä, joista yksi toimi Fibonaccin lukujen pohjana.

1.2 Fibonaccin lukujen historia

Liber Abacissa Fibonacci esitti ongelman, joka tunnetaan nimellä *Rabbit Problem* eli jänisongelma. Ongelman asettelu on suomeksi seuraavanlainen: Aidatulla alueella on yksi jänispari. Kuinka monta jänisparia on vuoden kuluttua, kun jokainen pari synnyttää joka kuukausi uuden parin, joka alkaa synnyttämään toisena kuukautena syntymästään?

Ongelman ratkaisu etenee siten, että ensimmäisenä kuukautena jänispareja on yksi eli vain alkuperäinen. Ensimmäisen kuukauden jälkeen syntyy toinen pari, joten toisena kuukautena pareja on kaksi. Toisen kuukauden jälkeen alkuperäinen on synnyttänyt toisen uuden parin, mutta ensimmäisenä syntynyt pari ei ole vielä synnyttänyt, joten kolmantena kuukautena pareja on kolme. Kolmannen kuukauden jälkeen sekä alkuperäinen että ensimmäisenä syntynyt pari ovat synnyttäneet uudet parit, mutta toisena syntynyt pari ei ole, joten neljäntenä kuukautena parien kokonaismäärä on viisi. Neljännen kuukauden jälkeen kolme paria (alkuperäinen, ensimmäisenä syntynyt ja toisena syntynyt pari) on synnyttänyt uudet parit, joten viidentenä kuukautena jänispareja on yhteensä kahdeksan. Kuvassa 1 sivulla 4 on esitetty jänisparien syntyminen graafisesti näiden viiden ensimmäisen kuukauden osalta.



Kuva 1: Jänisparien lukumäärän kehitys

Tässä vaiheessa havaitaan, että joka kuukausi parien määrä on kasvanut sen verran, kuin mitä pareja oli yhteensä kaksi kuukautta aiemmin, koska kaikki nämä parit ovat tällöin lisääntymiskykyisiä. Näin ollen jokaisen kuukauden parien lukumäärä saadaan *laskemalla kahden edellisen kuukauden lukumäärät yhteen* ($1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$, $\ldots$). Siis viidennen kuukauden jälkeen viisi paria on synnyttänyt uusia pareja, eli kuudentena kuukautena pareja on $5+8 = 13$. Jatkamalla parien laskemista samalla logiikalla voidaan todeta, että seitsemäntenä kuukautena pareja on $8+13 = 21$, kahdeksantena $13 + 21 = 34$, yhdeksäntenä $21 + 34 = 55$, kymmenentenä $34 + 55 = 89$, yhdentenätoista $55 + 89 = 144$ ja kahdentenatoista $89 + 144 = 233$. Näin ollen lopulliseksi vastaukseksi kysymykseen saadaan, että vuoden *jälkeen*, eli kolmantenatoista kuukautena, jänispareja on yhteensä $144 + 233 = 377$ kappaletta.

Edellä lasketut parien lukumäärät muodostavat lukujonon, jota kutsutaan *Fibonaccin lukujonoksi* ja sen termejä *Fibonaccin luvuiksi*. Fibonacci ei tosin itse nimennyt tätä lukujonoa, vaan sen teki ranskalainen Édouard Lucas vasta 1860-luvulla. Huomautettakoon, että joissain lähteissä alkuperäisen ongelman vastaukseksi annetaan 233 paria. Tämä johtuu siitä oletuksesta, että ensimmäinenkin jänispari tulisi lisääntymiskykyiseksi vasta toisena kuukautena. Lukujono alkaisi tällöin 1, 1, 2, 3, ... Lisäksi lukujen teoriaa käsitellessä tämän jonon alkuun lisätään joissain yhteyksissä vielä 0, joka luonnollisesti sopii lukujonon luonteeseen $(0 + 1 = 1)$. Tässä tutkielmassa nolla on otettu mukaan lukujonoon.

2 Fibonaccin lukujen ominaisuuksia

Tässä luvussa käydään läpi Fibonaccin lukuihin liittyvää teoriaa. Alun määrittelyjen jälkeen esitellään lukuihin liittyvä matriisiesitys, lukujen generoiva sarja sekä funktio ja lopuksi laajennetaan lukujono myös negatiivisille indekseille. Ensimmäinen luku 2.1 perustuu Tapani Matala-ahon luentomonisteeseen *802328A Lukuteorian perusteet* [2, s. 69–71]. Lause 2.3 on Kenneth H. Rosenin teoksesta *Elementary Number Theory and its Applications* [3, s. 21–22].

2.1 Perusteita

Määritelmä 2.1. Merkitään Fibonaccin lukuja kirjaimella f. Tällöin ne määritellään rekursiivisesti asettamalla $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ kun } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Huomautus 2.2. Joissain yhteyksissä Fibonaccin luvut määritellään siten, että $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ ja $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, kun $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Lause 2.3. *Fibonaccin lukujonon termien summalle on voimassa yhtälö*

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1, \text{ aina kun } n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Arvolla $n = 0$ saadaan $\sum_{i=0}^{0} f_i = 0$ joka on sama kuin $f_{0+2} - 1 = f_2 - 1 = 1 - 1 = 0$, joten lause pätee tällöin. Tehdään induktio-oletus, että lause pätee jollain arvolla $n = k$, eli

$$\sum_{i=0}^{k} f_i = f_{k+2} - 1.$$

Nyt arvolla $n = k + 1$ saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} f_i = \left(\sum_{i=0}^{k} f_i\right) + f_{k+1} &\overset{ind.ol}{=} (f_{k+2} - 1) + f_{k+1} = (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1 \\ &\overset{(1)}{=} f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1.\end{aligned}$$

Täten lause pätee myös arvolla $n = k + 1$. Induktioperiaatteen nojalla lause on tosi. $\square$

Tutkitaan nyt Fibonaccin lukujen mukaista rekursiota

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \tag{2}$$

jossa myös $n \in \mathbb{N}$. Ratkaistaan nyt rekursio (2) yritteellä $u_n = x^n$, jossa $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin saadaan

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n,$$

joten

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Käytetään näille ratkaisuille merkintöjä

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{sekä} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Koska α ja β ovat ratkaisuja, niin pätee

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \quad \text{ja} \quad \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n. \tag{3}$$

Lause 2.4. *Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$. Tällöin*

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

on rekursion (2) *ratkaisu.*

Todistus. Voidaan laskea käyttämällä yhtälöitä (3), että

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} = a(\alpha^{n+1} + \alpha^n) + b(\beta^{n+1} + \beta^n) \\ &= a\alpha^{n+1} + a\alpha^n + b\beta^{n+1} + b\beta^n = a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1} + a\alpha^n + b\beta^n \\ &= F_{n+1} + F_n, \end{aligned}$$

joten F_n toteuttaa rekursioyhtälön (2). □

Lause 2.5. *Fibonaccin luvut voidaan esittää niin sanotun Binet'n kaavan avulla muodossa*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Todistus. Lauseen 2.4 todistuksesta nähdään, että $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, joten F_n toteuttaa Fibonaccin lukujen määritelmän (1). Tämän perusteella voidaan todeta, että Fibonaccin luvut ovat Lauseessa 2.4 esitettyä muotoa

$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n. \tag{4}$$

Yhtälössä (4) olevat vakiot a ja b saadaan ratkaistua, kun sijoitetaan Määritelmän 2.1 luvut $f_0 = 0$ ja $f_1 = 1$ yhtälöön. Tällöin ensimmäisestä sijoituksesta saadaan

$$f_0 = a\alpha^0 + b\beta^0 = a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

Tämän avulla saadaan toisesta sijoituksesta

$$\begin{aligned} f_1 &= a\alpha^1 + b\beta^1 = a\alpha + b\beta = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2} = a\frac{1}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} + b\frac{1}{2} - b\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= a\frac{1}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} - a\frac{1}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} = a\frac{\sqrt{5}}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} = a\sqrt{5} = 1. \end{aligned}$$

Näin ollen
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$
joten
$$\begin{aligned} f_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

□

2.2 Matriisiesitys

Fibonaccin luvut voidaan liittää myös matriiseihin ja niiden avulla todistaa luvuille eri ominaisuuksia. Tässä luvussa käsiteltävä matriisiesitys on esitetty Kenneth H. Rosenin teoksessa *Elementary Number Theory and its Applications* [3, s. 27]. Tarkempi käsittely on Tapani Matala-ahon luentomonisteesta *802328A Lukuteorian perusteet* [2, s. 72–74].

Määritelmä 2.6. Määritellään matriisi $\mathbb{F}$ siten, että
$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan nyt matriisin $\mathbb{F}$ potensseja. Tällöin
$$\begin{aligned} \mathbb{F}^2 = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{F}^3 = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ja

$$\mathbb{F}^4 = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} f_5 & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Tästä nähdään, että matriisien alkioiksi tulee Fibonaccin lukuja.

Sovitaan nyt, että $f_{-1} = 1$, jolloin yhtälö $f_1 = f_0 + f_{-1}$ pätee ja noudattaa Määritelmää 2.1. Matriisien neutraalialkio on $\mathbb{I}$, joka 2x2-matriisien tapauksessa on

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tätä kutsutaan *identiteettimatriisiksi.* Näin ollen matriisi korotettuna potenssiin nolla tuottaa identiteettimatriisin. Tällöin

$$\mathbb{F}^0 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ f_0 & f_{-1} \end{pmatrix}.$$

Täten myös tapaus $n = 0$ on linjassa sen havainnon kanssa, että matriisin $\mathbb{F}$ potenssien alkioiksi tulee Fibonaccin lukuja ja että luvut ovat tietyssä järjestyksessä. Todistetaan seuraavassa lauseessa, että tämä todellakin pätee kaikille matriisin $\mathbb{F}$ positiivisille kokonaislukupotensseille.

Lause 2.7. *Olkoon*

$$\mathbb{F}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tällöin $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}^n$, *kun* $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Tapaukset $n = 0$ ja $n = 1$ ovat todistettuina edellä. Tehdään nyt induktio-oletus, että lause pätee jollain arvolla $n = k$ eli

$$\mathbb{F}_k = \mathbb{F}^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}^{k+1} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^{k} &\overset{ind.ol}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot f_{k+1} + 1 \cdot f_k & 1 \cdot f_k + 1 \cdot f_{k-1} \\ 1 \cdot f_{k+1} + 0 \cdot f_k & 1 \cdot f_k + 0 \cdot f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_k + f_{k-1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix} = \mathbb{F}_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Induktioperiaatteen nojalla lause pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Nyt lauseen (2.7) avulla voidaan todistaa Fibonaccin luvuille päteviä ominaisuuksia.

Lause 2.8. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Tällöin Fibonaccin luvuille pätee, että*

$$f_{n+m+1} = f_{n+1}f_{m+1} + f_n f_m, \tag{5}$$

$$f_{2m+1} = f_{m+1}^2 + f_m^2 \tag{6}$$

ja

$$f_{2m} = f_m(f_{m+1} + f_{m-1}). \tag{7}$$

Todistus. Lauseen 2.7 identiteetin mukaan

$$\mathbb{F}_{n+m} = \mathbb{F}^{n+m} = \mathbb{F}^n \mathbb{F}^m = \mathbb{F}_n \mathbb{F}_m,$$

jolloin

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+m+1} & f_{n+m} \\ f_{n+m} & f_{n+m-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+1}f_{m+1} + f_n f_m & f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1} \\ f_n f_{m+1} + f_{n-1} f_m & f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nyt yhtälö (5) saadaan suoraan vertaamalla matriisien alkioita. Kun yhtälöön (5) sijoitetaan $n = m$, niin

$$f_{m+m+1} = f_{m+1}f_{m+1} + f_m f_m,$$

eli

$$f_{2m+1} = f_{m+1}^2 + f_m^2.$$

Näin saadaan yhtälö (6). Kun yhtälöön (5) sijoitetaan $n = m - 1$, niin

$$f_{m-1+m+1} = f_{m-1+1} f_{m+1} + f_{m-1} f_m,$$

joten

$$f_{2m} = f_m f_{m+1} + f_{m-1} f_m = f_m (f_{m+1} + f_{m-1}).$$

Täten saadaan yhtälö (7). □

Lause 2.9. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin Fibonaccin luvuille pätee, että*

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Todistus. Otetaan Lauseen 2.7 yhtälöstä $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}^n$ determinantit molemmin puolin. Tällöin

$$\det \mathbb{F}_n = \det(\mathbb{F}^n) = (\det \mathbb{F})^n,$$

joten

$$\begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n.$$

Tästä determinantin määrittelyn nojalla saadaan, että

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n f_n = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1)^n,$$

eli

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

□

2.3 Generoiva sarja ja funktio

Äärettömän lukujonon *generoiva sarja* tarkoittaa sitä, että lukujono voidaan esittää sarjana siten, että jonon luvut ovat äärettömän potenssisarjan kertoimia. Edelleen generoivan sarjan termit muodostavat lukujonon *generoivan* *funktion*, joka joissain tapauksissa voidaan sieventää hyvinkin yksinkertaiseen muotoon (vrt. suppeneva geometrinen sarja).

Generoiva sarja ja funktio voidaan konstruktoida myös Fibonaccin luvuille. Tämä luku perustuu Tapani Matala-ahon luentomonisteeseen *802328A Lukuteorian perusteet* [2, s. 76–77] ja Joseph H. Silvermanin teokseen *A Friendly Introduction to Number Theory* [4, s. 355–361].

Määritelmä 2.10. Sarja

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{8}$$

on Fibonaccin lukujen generoiva sarja.

Lause 2.11. *Sarja* (8) *voidaan esittää rationaalifunktiona*

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Tämä on Fibonaccin lukujen generoiva funktio.

Todistus. Otetaan ensin sarjan (8) kaksi ensimmäistä termiä erilleen summalausekkeesta, ja muutetaan sitten sarjan summausindeksiksi $k = n + 2$. Tällöin sarja saadaan muotoon

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k + f_1 z^1 + f_0 z^0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{n+2} + f_1 z + f_0.$$

Nyt tähän lausekkeeseen voidaan käyttää Määritelmän 2.1 rekursiota (1) summalausekkeen sisällä sekä sijoittaa tunnetut arvot $f_0 = 0$ ja $f_1 = 1$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_{n+1} + f_n\right) z^{n+2} + 1 \cdot z + 0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+2} + z \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n + z. \end{aligned}$$

Muutetaan nyt summausindeksiksi $n = k$, jolloin saadaan

$$F(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1}z^{k+1} + z^2\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k + z.$$

Nyt saadun lausekkeen toisessa termissä esiintyy alkuperäinen sarja (8). Myös ensimmäisen termin sarja on myös muuten sama kuin alkuperäinen, mutta sen summasta puuttuu ensimmäinen termi f_0. Näin ollen voidaan lauseke muuttaa muotoon

$$F(z) = z(F(z) - f_0) + z^2F(z) + z.$$

Nyt $f_0 = 0$, joten lauseke voidaan supistaa muotoon

$$(1 - z - z^2)F(z) = z,$$

josta saadaan ratkaistua generoiva funktio

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

□

2.4 Laajennus negatiivisiin indekseihin

Fibonaccin luvut voidaan määritellä myös negatiivisille indekseille. Luku perustuu Tapani Matala-ahon luentomonisteeseen *802328A Lukuteorian perusteet* [2, s. 78–79]. Lauseen 2.12 todistus on kirjoittajan itse kehittämä.

Kun rekursiivisessa palautuskaavassa $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ sallitaan myös negatiiviset indeksit, saadaan

$$\begin{aligned}
f_1 = f_0 + f_{-1} &\Rightarrow f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1,\\
f_0 = f_{-1} + f_{-2} &\Rightarrow f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1,\\
f_{-1} = f_{-2} + f_{-3} &\Rightarrow f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2,\\
f_{-2} = f_{-3} + f_{-4} &\Rightarrow f_{-4} = f_{-2} - f_{-3} = -1 - 2 = -3
\end{aligned}$$

ja niin edelleen. Huomautuksena mainittakoon, että matriisiesityksen yhteydessä annettu arvo $f_{-1} = 1$ on sama, joka saadaan tässä laskemalla. Silloinen valinta ei siis ollut täysin mielivaltainen. Nyt sijoittamalla rekursioon $k = -n$ saadaan

$$f_{-n+2} = f_{-n+1} + f_{-n} \Leftrightarrow f_{-n} = -f_{-(n-1)} + f_{-(n-2)}. \tag{9}$$

Lause 2.12. *Kun Fibonaccin luvut laajennetaan negatiivisiin indekseihin, pätee näille yhtälö*

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Tapaus $n = 0$ on triviaali, joten olkoon $n = 1$. Nyt rekursiosta (9) saadaan

$$f_{-1} = -f_{-(1-1)} + f_{-(1-2)} = -f_0 + f_1 = -0 + 1 = 1$$

ja

$$(-1)^{1+1} f_1 = (-1)^2 \cdot 1 = 1,$$

eli lause pätee arvolla $n = 1$. Koska nyt tiedetään, että väite pätee arvoilla $n = 0$ ja $n = 1$, voidaan tehdä induktio-oletus, että lause pätee kaikilla arvoilla n, joille $2 \leq n \leq k$. Tällöin rekursion (9) ja induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} f_{-(k+1)} &\overset{(9)}{=} - f_{-k+1-1} + f_{-(k+1-2)} = -f_{-k} + f_{-(k-1)} \\ &\overset{ind.ol}{=} - (-1)^{k+1} f_k + (-1)^{(k-1)+1} f_{k-1} = -1 \cdot (-1)^{k+1} f_k + (-1)^k f_{k-1} \\ &= (-1)^{k+2} f_k + (-1)^2 \cdot (-1)^k f_{k-1} = (-1)^{k+2} f_k + (-1)^{k+2} f_{k-1} \\ &= (-1)^{k+2} (f_k + f_{k-1}) = (-1)^{k+2} f_{k+1} = (-1)^{(k+1)+1} f_{k+1}. \end{aligned}$$

Näin ollen väite pätee myös arvolla $n = k + 1$. Lause on tosi induktioperiaatteen nojalla. □

Nyt Lauseen 2.12 avulla lauseet 2.7, 2.8 ja 2.9 voidaan laajentaa pätemään kaikille kokonaisluvuille. Näiden lauseiden todistus kuitenkin sivutetaan tässä työssä.

3 Lopuksi

Vaikka Fibonaccin luvut ja niiden määrittely ovat näennäisesti hyvin yksinkertaisia käsitteitä, liittyy niihin kuitenkin paljon ominaisuuksia. Tässä työssä näitä ominaisuuksia on käyty läpi hyvin suppeasti, ja esimerkiksi lukujen jaollisuuteen liittyvät seikat sekä lukujen yhteys geometriaan on jätetty käsittelemättä. Asiasta enemmän kiinnostuneet voivat tutustua tarkemmin Lähdeluettelon teoksiin.

Lähdeluettelo

[1] Horadam A. F. *Eight Hundred Years Young*. The Australian Mathematics Teacher 31, 1975, s.123–134. Haettu Internet-osoitteesta: `http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html`.

[2] Matala-aho T. *802328A Lukuteorian perusteet* -luentomoniste. Oulun yliopisto, 2015. Haettu Internet-osoitteesta: `http://cc.oulu.fi/~tma/LTP2016.html`.

[3] Rosen K. H. *Elementary Number Theory and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1993.

[4] Silverman J. H. *A Friendly Introduction to Number Theory*. Pearson, New Jersey, 1997.

[5] Vorobiev N. N. *Fibonacci Numbers*. Birkhäuser, Basel 2002.