Symmetriat ja säilymislait

Onni Veteläinen

2437668

LuK-tutkielma

Fysiikan laitos

Oulun yliopisto

Kevät 2017

Sisältö

Johdanto **1**

1 Symmetriat ja säilymislait klassisessa mekaniikassa **2**
1.1 Liikemäärän säilyminen 2
1.2 Energian säilyminen 3
1.3 Noetherin teoreema 4

2 Symmetriat ja säilymislait kvanttimekaniikassa **9**
2.1 Pyörimismäärän säilyminen 11
2.2 Liikemäärän säilyminen 13
2.3 Energian säilyminen 14
2.4 Pariteetti 15

3 Yhteenveto **16**

4 Lähdeluettelo **17**

Johdanto

Tutkielman tarkoituksena on tarkastella säilymislakien ja symmetrioiden välistä yhteyttä perehtymällä aihetta käsittelevään kirjallisuuteen. Kappaleessa 1 tarkastellaan aihetta klassisesti ja sen tärkein tulos on Noetherin teoreema. Kappale 1 perustuu pääosin teokseen [1]. Kappaleessa 2 tarkastellaan symmetrioita ja säilymislakeja kvanttimekaniikassa. Yleisin tapa käsitellä symmetrioita kvanttimekaniikassa on ryhmäteoria. Koska ryhmäteoria ei ole minulle entuudestaan tuttu, katson tällaisen formalismin olevan tämän työn laajuuden ulkopuolella. Kappaleen 2 esitys symmetrioista perustuu sen sijaan pääosin teokseen [2].

Säilymislakien ja symmetrioiden yhteyden käsittelemiseksi on syytä määritellä symmetria. Arkipäiväinen käsitys symmetriasta liittyy peileihin ja tietynlaisiin geometrisiin objekteihin. Intuitiivisesti esine on symmetrinen, jos se näyttää samalta kun sen oikea ja vasen puoli vaihdetaan keskenään. Joillakin esineillä esiintyy erityistä symmetriaa, esimerkiksi kuutio on symmetrinen yhdeksänkymmenen asteen rotaatioiden suhteen. Pallo taas on symmetrinen mielivaltaisten ja infinitesimaalisten rotaatioiden suhteen keskipisteensä ympäri. Yleisesti esineen voidaan siis sanoa olevan symmetrinen, jos sille voidaan tehdä jotain ilman, että se näyttää erilaiselta.

Tämä määritelmä voidaan liittää myös fysikaalisiin lakeihin hieman abstraktimmin. Systeemin voidaan sanoa olevan symmetrinen, jos se näyttää samalta ennen ja jälkeen jonkin operaation, siis jos se säilyy operaatiossa fysikaalisesti muuttumattomana. Tällöin on syytä ajatella, että jotkin systeemin tilan määrittävät suureet säilyvät operaatiossa. Näin ilmaistuna symmetrioiden ja säilymislakien välinen yhteys tuntuu jo varsin luontevalta

Motivaationi tämän aiheen valintaan oli halu selvittää, voidaanko säilymislait johtaa joistakin perusperiaatteista. Usein tuntuu siltä, että säilymislait oletetaan lähes aksiomaattisesti fysiikan lakien lähtökohdiksi. Tämä on ilmeisesti ollut historiallinen näkemys aiheesta [3]. Yleisimmät ja tärkeimmät säilymislait; energia, liikemäärä ja pyörimismäärä, ovat varsin intuitiivisia ja arkielämän kokemuksissa havaittavia. Yleinen kiinnostus aihetta kohtaan heräsi vasta 1900-luvulla suhtellisuusteorian ja kvanttimekaniikan kehittyessä. Kvanttimekaniikassa säilymislakeja on olemassa energian, liikemäärän ja pyörimismäärän säilymislakien lisäksi lukuisia, joiden fysikaalinen merkitys ei ole itsestäänselvä tai intuitiivinen [2]. Nämäkin säilymislait voidaan kuitenkin johtaa symmetriaperiaatteista, joten symmetriaperiaatteet ovat tärkeä osa modernia fysiikkaa.

1 Symmetriat ja säilymislait klassisessa mekaniikassa

Johdannossa pohdittiin symmetriaa käsitteenä ja päädyttiin seuraavanlaiseen määritelmään: systeemi on symmetrinen jonkin operaation suhteen, jos se säilyy fysikaalisesti muutumattomana operaatiossa. Aiheen täsmälliseen käsittelyyn tarvitaan matemaattinen esitys tälle määritelmälle.

Vaikutusintegraali sisältää informaation systeemin aikakehityksestä:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt. \tag{1}$$

Systeemi on symmetrinen jonkin transformaation suhteen, jos vaikutusintegraalin arvo säilyy samana transformaatiossa [1]:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = S_2 = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q'(t), \dot{q}'(t), t)dt. \tag{2}$$

Tällöin myös Lagrangen funktion $L = T - V$, missä T on kineettinen energia ja V potentiaalienergia, tulee säilyä [1]:

$$L_1 = L(q(t), \dot{q}(t), t) = L_2 = L(q'(t), \dot{q}'(t), t). \tag{3}$$

Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan eräitä mahdollisia transformaatioita.

1.1 Liikemäärän säilyminen

Minimoimalla vaikutusintegraali voidaan johtaa Euler-Lagrangen yhtälöt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{4}$$

Yhtälössä esiintyvä termi $\partial L/\partial \dot{q}_i = p_i$ on yleistettyä koordinaattia q_i vastaava kanoninen liikemäärä. Jos Lagrangen funktio ei eksplisiittisesti riipu koordinaatista q_i, niin yhtälön oikea puoli $\partial L/\partial q_i = 0$ eli systeemi on symmetrinen kyseisen koordinaatin translaatioiden suhteen. Tällöin saadaan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = 0, \tag{5}$$

eli systeemin symmetrisyys jonkin koordinaatin muutosten suhteen johtaa koordinaattia vastaavan kanoonisen liikemäärän säilymiseen.

Koordinaatteja, joista Lagrangen funktio ei riipu eksplisiittisesti, sanotaan syklisiksi. Suoraviivaisen liikkeen tapauksessa x-koordinaatin syklisyys johtaa liikemäärän x-komponentin säilymiseen. Jos koordinaatti kuvaa systeemin rotaatiota, kyseisen koordinaatin syklisyys johtaa liikemäärän säilymiseen pyörimisakselin suhteen.

Tarkastellaan esimerkiksi varatun hiukkasen liikettä pitkän tasaisesti varatun tangon läheisyydessä. Käytetään tilanteen kuvaamisen sylinterikoordinaatistoa (r, θ, z), missä r on etäisyys z-akselista ja θ on kiertokulma z-akselin ympäri. Asetetaan z-akseli tankoa pitkin. Tällöin potentiaalienergia on etäisyyden funktio ja systeemin Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r). \tag{6}$$

Systeemi on symmetrinen z- ja θ-koordinaattien muutosten suhteen koordinaattien syklisyyden vuoksi. Lagrangen funktio on selvästi riippuvainen muuttujasta r, joten r ei ole syklinen koordinaatti. Säilyviksi suureiksi saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{7}$$

eli liikemäärä z-suunnassa, sekä

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{8}$$

eli pyörimismäärä z-akselin ympäri.

1.2 Energian säilyminen

Olkoon $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ Lagrangen funktio, joka riippu paikasta q, paikan aikaderivaatasta $\dot{q}$ ja mahdollisesti ajasta t. Tällöin Lagrangen funktion kokonaisderivaatta ajan suhteen on

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{9}$$

Käytetään Euler-Lagrangen yhtälöitä

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{10}$$

Saadaan, että

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}, \tag{11}$$

missä $\dot{q}_i = dq_i/dt$. Tulon derivoimissäännön perusteella saadaan, että

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{12}$$

$$\to \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{13}$$

missä vasemmalla puolella suluissa oleva termi on Hamiltonin funktio, joka vastaa systeemin kokonaisenergiaa

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{14}$$

Siispä

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{15}$$

Nyt jos systeemin Lagrangen funktio ei eksplisiittisesti riipu ajasta t, eli $\partial L/\partial t = 0$, nähdään että systeemin kokonaisenergian aikaderivaatta on nolla. Toisin sanoen systeemin symmetrisyys ajan muutosten suhteen johtaa systeemin kokonaisenergian säilymiseen.

1.3 Noetherin teoreema

Emmy Noetherin vuonna 1918 julkaisema teoreema (alkuperäisen julkaisun käännös [5]) luo symmetrioiden ja säilymislakien välille yleisen yhteyden. Noetherin teoreema voidaan johtaa seuraavasti [1].

Tarkastellaan seuraavanlaista systeemin transformaatiota:

$$\begin{aligned} &t \to t' = t + \delta t \\ &q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \delta q_i(t), \end{aligned} \tag{16}$$

missä δt voi olla ajasta riippuva suure ja δq_i voi ajan lisäksi riippua muista paikkakoordinaateista q_j. Yllä oleva q_i:n transformaatio siis kuvaa q_i:n muutosta sekä ajan ja paikan suhteen. Määritellään vielä koordinaattien muutos irrallisena ajan t transformaatiosta:

$$q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \bar{\delta} q_i(t). \tag{17}$$

Oletetaan lisäksi, että kyseiset transformaatiot ovat hyvin pieniä, toisin sanoen δt ja δq_i ovat infinitesimaalisia.

Mikä tahansa transformaatio voidaan rakentaa suuresta määrästä pieniä peräkkäisiä transformaatioita, joten on perusteltua tarkastella vain infinitesimaalista tapausta.

Nyt oletetaan, että tarkasteltava systeemi on symmetrinen yllä olevan transformaation suhteen. Tällöin systeemin vaikutusintegraalin arvo ja Lagrangen funktio säilyvät samana, eli

$$\int_{t_1'}^{t_2'} L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'), t')dt' = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt, \tag{18}$$

$$L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'), t') = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t). \tag{19}$$

Tutkitaan vaikutusintegraalien erotusta

$$\int_{t_1'}^{t_2'} L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'), t')dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt = 0. \tag{20}$$

Ensimmäisessä integraalissa t' on sidottu muuttuja, joten se voidaan uudelleennimetä t:ksi. Integrointivälin muutos kuitenkin säilyy. Saadaan

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt = 0. \tag{21}$$

Muokataan hieman ensimmäistä integraalia. Merkitään $L' = L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t)$ notaation keventämiseksi.

$$\begin{aligned}\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L'dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L'dt - \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L'dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L'dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L'dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} L'dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L'dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L'dt.\end{aligned} \tag{22}$$

Täten vaikutusintegraalien erotus voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} L'dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L'dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L'dt - \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [L' - L]dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L'dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L'dt = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Koska transformaatiot ovat infinitesimaalisia, voidaan approksimoida ensimmäisen termin integrandia seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
L' - L &= L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \\
&= L(q_i(t) + \bar{\delta} q_i(t), \dot{q}_i(t) + \bar{\delta}\dot{q}_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \\
&= L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) + \bar{\delta} q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \\
&= \bar{\delta} q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \delta L
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) dt = 0. \tag{25}
$$

Kaksi viimeistä termiä ovat integraaleja, joiden integrointiväli on infinitesimaalinen. Niiden ensimmäisen kertaluvun approksimaatio on

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \bar{\delta} q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt = \delta t_1 L(t_1) + \delta t_1 \bar{\delta} q_i \frac{\partial L(t_1)}{\partial q_i} + \delta t_1 \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L(t_1)}{\partial \dot{q}_i} = \delta t_1 L(t_1). \\
&\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \delta t_2 L(t_2) - \delta t_1 L(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \delta t L(t) \Big|_{t1}^{t2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\big(\delta t L(t)\big) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{\delta} q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt}\big(\delta t L\big) \right) dt = 0.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Käytetään Euler-Lagrangen yhtälöitä ensimmäiseen termiin, saadaan

$$
\int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{\delta} q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \bar{\delta}\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt}\big(\delta t L\big) \right) dt = 0, \tag{27}
$$

josta tulon derivoimissäännöön perusteella saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i \right) + \frac{d}{dt}\big(\delta t L\big) \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + \delta t L \right) dt = 0.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Transformaatioiden määritelmistä 16 ja 17 nähdään, että $\bar{\delta} q_i$ voidaan kirjoittaa δq_i:n avulla ensimmäisen asteen approksimaationa.

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i'(t) - \bar{\delta} q_i = q_i'(t') - \delta q_i(t) \\ \Rightarrow \bar{\delta} q_i &= \delta q_i + q_i'(t) - q_i'(t') \\ &= \delta q_i - \delta t \frac{dq_i'}{dt} = \delta q_i - \delta t \frac{dq_i}{dt} - \delta t \frac{d\bar{\delta} q_i}{dt} \\ &= \delta q_i - \delta t \dot{q}_i. \end{aligned} \tag{29}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön 28, jolloin saadaan että

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i - \delta t \dot{q}_i) + \delta t L \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left((L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i - H \delta t \right) dt = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

missä $p_i = \partial L / \partial q_i$ on yleistetyn koordinaatin q_i kanoninen liikemäärä ja H on systeemin Hamiltonin funktio, tai kokonaisenergia.
Kehitetään vielä vähän transformaatioidemme määritelmää. Kirjoitetaan δt ja δq_i infinitesimaalisien parametrien $\epsilon_r, r = 1, 2, 3, ..., R$, avulla.

$$\begin{aligned} \delta t &= \epsilon_r X_r \\ \delta q_i &= \epsilon_r \Psi_{ri}, \end{aligned} \tag{31}$$

missä X_r ja Ψ_{ri} ovat transformaatiota kuvaavia funktioita. Transformaatiot ovat siis lineaarisia parametrien ϵ_r suhteen. Nyt

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(p_i \epsilon_r \Psi_{ri} - H \epsilon_r X_r \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_r \frac{d}{dt} \left(p_i \Psi_{ri} - H X_r \right) dt = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Integroitinväli on mielivaltainen, joten integrandin täytyy olla nolla kaikkialla. Parametrit ϵ_r ovat myös mielivaltaisia, joten

$$\frac{d}{dt} \left(p_i \Psi_{ri} - H X_r \right) = 0. \tag{33}$$

Siispä suluissa oleva termi on systeemin liikevakio. Määrittelemäämme transformaatiota vastaa siis R kappaletta säilyviä suureita.

Yllä esitetyssä johdossa oletimme, että systeemin symmetriatransformaatiot ovat jatkuvia ja differentoituvia. Noetherin teoreema sanoo, että tällaiseen transformaatioon liittyy välttämättä säilyvä suure. Vaikka systeemi olisi symmetrinen jonkin transformaation suhteen, jos transformaatio ei täytä näitä kriteerejä, ei Noetherin teoreeman nojalla voida sanoa liittyykö siihen säilymislakia. Tällaisia transformaatioita ovat kaikki diskreetit transformaatiot, esimerkiksi inversio. Inversiota käsitellään kappaleessa 2.4, jossa nähdään, että systeemin inversiosymmetriaan liittyy pariteetin säilyminen. On myös olemassa diskreettejä symmetrioita joihin ei liity säilymislakeja, sekä säilymislakeja joihin ei liity mitään symmetriaa [1].

Tehdään vielä pari nopeaa laskua ja tarkistetaan, että kappaleiden 1.1 ja 1.2 tuloksiin päädytään myös Noetherin teoreemaa käyttämällä. Olkoon systeemi symmetrinen x-akselin translaatioiden suhteen. Tällöin transformaatiot ovat seuraavanlaiset:

$$\begin{aligned} &\delta t = 0 \Rightarrow X_r = 0 \\ &\delta q_i = \epsilon_1 \delta_{i1} \Rightarrow \Psi_{ri} = \delta_{i1}\delta_{r1}. \end{aligned} \tag{34}$$

Noetherin teoreeman nojalla saadaan yksi säilyvä suure

$$\frac{d}{dt}\left(p_i\delta_{i1}\delta_{r1} - H\cdot 0\right) = \frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_1}{dt} = 0. \tag{35}$$

Eli liikemäärän x-komponentti säilyy. Aikatranslaatiolle transformaatio on:

$$\begin{aligned} &X_r = \delta_{r1} \\ &\Psi_{ri} = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Saadaan säilyvä suure

$$\frac{d}{dt}\left(p_1\cdot 0 - H\delta_{r1}\right) = \frac{dH}{dt} = 0. \tag{37}$$

Systeemin kokonaisenergia säilyy. Saimme siis Noetherin teoreeman avulla molemmat aikaisemmat tulokset.

2 Symmetriat ja säilymislait kvanttimekaniikassa

Kvanttimekaniikassa systeemin tilaa kuvaa tilavektori $|\Psi\rangle$ Hilbertin avaruudessa. Mitattavia suureita kuvaavat hermiittiset operaattorit, joiden ominaisarvot ovat mahdollisia mittausten tuloksia, esimerkiksi energialle $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

Tarkastellaan tilaa $|\Psi_1\rangle$, joka ajan kuluessa muuttuu tilaksi $|\Psi_2\rangle$. Siis

$$\hat{U}(t)|\Psi_1\rangle = |\Psi_2\rangle, \tag{38}$$

missä $\hat{U}(t)$ on aikaevoluutio-operaattori, joka vastaa jonkin ajan t odottamista. Olkoon myös jokin operaatio $\hat{Q}$ siten, että

$$\hat{Q}|\Psi_1\rangle = |\Psi_1'\rangle \tag{39}$$

$$\hat{Q}|\Psi_2\rangle = |\Psi_2'\rangle. \tag{40}$$

Jos systeemi on symmetrinen operaation $\hat{Q}$ suhteen, ei ole väliä millä ajan hetkellä operaatio suoritetaan. Siten

$$\hat{U}\hat{Q}|\Psi_1\rangle = \hat{U}|\Psi_1'\rangle = |\Psi_2'\rangle. \tag{41}$$

Toisaalta

$$\hat{Q}\hat{U}|\Psi_1\rangle = \hat{Q}|\Psi_2\rangle = |\Psi_2'\rangle. \tag{42}$$

Siispä

$$\hat{Q}\hat{U}|\Psi_1\rangle = \hat{U}\hat{Q}|\Psi_1\rangle. \tag{43}$$

Koska $|\Psi_1\rangle$ on vain jokin mielivaltainen tilavektori, voidaan sanoa

$$\hat{Q}\hat{U} = \hat{U}\hat{Q}, \tag{44}$$

eli operaattorit $\hat{Q}$ ja $\hat{U}$ kommutoivat

$$[\hat{U}, \hat{Q}] = 0. \tag{45}$$

Aikaevoluutio-operaattori $\hat{U}$ voidaan esittää Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ avulla seuraavasti [2]:

$$\hat{U}(t) = 1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar}. \tag{46}$$

Tällöin on helppo nähdä, että myös Hamiltonin operaattori kommutoi operaattorin $\hat{Q}$ kanssa.

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = 0. \tag{47}$$

Tämä on symmetriaehto kvanttimekaaniselle systeemille operaation $\hat{Q}$ suhteen [2].

Symmetrian määritelmän mukaan systeemin tulisi olla fysikaalisesti identtinen ennen ja jälkeen operaation, jos systeemi on symmetrinen kyseisen operaation suhteen. Tarkastellaan tilaa, jolle pätee

$$\hat{Q}|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle = |\psi'\rangle. \tag{48}$$

Siis kun jokin operaatio $\hat{Q}$ tehdään tilalle $|\psi\rangle$, saadaan uusi tila, joka on vain entinen tila kerrottuna jollain vaiheella. Oletetaan että vaihe-ero on täysin imaginäärinen, eli δ on reaaliluku. Tilat $|\psi\rangle$ ja $|\psi'\rangle$ ovat tällöin fysikaalisesti samat ja siten symmetriset operaation $\hat{Q}$ suhteen.

Olkoon tilalla $|\psi_1\rangle$ tämä kyseinen ominaisuus, että symmetriaoperaattori $\hat{Q}$ vain kertoo sen luvulla $e^{i\delta}$. Ajan hetkellä $t = 0$:

$$\hat{Q}|\psi_1\rangle = e^{i\delta}|\psi_1\rangle. \tag{49}$$

Oletetaan, että ajan t kuluttua $|\psi_1\rangle$ on kehittynyt tilaan $|\psi_2\rangle$.

$$\hat{U}(t)|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle. \tag{50}$$

Osoitetaan, että operaatio $\hat{Q}$ aiheuttaa myös tilalle $|\psi_2\rangle$ vain imaginäärisen vaihemuutoksen, eli tämä systeemin ominaisuus säilyy:

$$\hat{Q}|\psi_2\rangle = e^{i\delta}|\psi_2\rangle. \tag{51}$$

Koska systeemi on symmetrinen operaation $\hat{Q}$ suhteen, $\hat{Q}$ kommutoi aikaevoluutio-operaattorin $\hat{U}$ kanssa:

$$\hat{Q}|\psi_2\rangle = \hat{Q}\hat{U}(t)|\psi_1\rangle = \hat{U}(t)\hat{Q}|\psi_1\rangle. \tag{52}$$

Nyt $\hat{Q}|\psi_1\rangle = e^{i\phi}|\psi_1\rangle$, ja koska luku $e^{i\delta}$ kommutoi operaattoreiden kanssa, saadaan

$$\hat{Q}|\psi_2\rangle = \hat{U}e^{i\delta}|\psi_1\rangle = e^{i\delta}\hat{U}|\psi_1\rangle = e^{i\delta}|\psi_2\rangle. \tag{53}$$

Siis jos $\hat{Q}$ kertoo tilan luvulla $e^{i\delta}$, tämä ominaisuus pätee myöhemminkin. Tämä tilan ominaisuus siis säilyy.

2.1 Pyörimismäärän säilyminen

Noetherin teoreeman perusteella tiedämme, että klassisessa mekaniikassa pyörimismäärän säilyminen liittyy systeemin rotaatiosymmetriaan. Tehdään klassisen fysiikan pohjalta arvaus ja aloitetaan pyörimismäärän säilymislain etsiminen rotaatio-operaattorin tarkastelusta. Tarkastellaan rotaatiota z-akselin ympäri ja oletetaan, että systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia tai vähintään että ulkoiset voimat ovat z-akselin suuntaisia. Tällöin systeemi voisi olla symmetrinen z-akselin ympäri kiertämisen suhteen.

Rotaatio, tai translaatio, jota tarkastellaan seuraavassa osiossa, voidaan tulkita kahdella tavalla. Voidaan katsoa, että systeemiä fyysisesti liikutetaan avaruudessa tai vaihtoehtoisesti tehdään koordinaatistomuunnos. Näiden kahden tulkinnan välillä on merkkiero, systeemin liikuttaminen x-akselin suuntaisesti s metriä vastaa koordinaatiston siirtämistä $-s$ metriä x-akselia pitkin. Rotaation tapauksessa systeemin kiertäminen 90 astetta positiiviseen suuntaan jonkin akselin ympäri vastaa koordinaatiston kiertämistä negatiiviseen suuntaan 90 astetta saman akselin ympäri. Joissain tapauksissa tämä ero on varsin triviaali, esimerkiksi jos tarkasteltava systeemi on kaukana avaruudessa ja sen ympäristö on jokseenkin tyhjä. Jos tarkasteltava systeemi onkin laboratoriossa, täytyy myös sen ympäristö siirtää translaatiossa, muuten systeemi saattaisi siirtyä esimerkiksi seinän sisään, joka ei selvästikään ole symmetrinen operaatio systeemin kannalta. Tässä tapauksessa voisi olla helpompaa sanoa, että koordinaatisto siiryy ja systeemi pysyy paikallaan avaruudessa. Tässä ns. materiaalitulkinnassa täytyy myös varmistaa, että liikuttaminen ei häiritse systeemiä. Katsotaan kuitenkin näissä tarkasteluissa itse systeemin siirtyvän avaruudessa, sillä tämä tuntuu intuitiivisemmalta tulkinnalta ja oletetaan, että juuri mainitut komplikaatiot eivät päde. Oletetaan siis, että tapa jolla systeemiä liikutetaan ei muuten häiritse systeemiä ja systeemin ympäristö liikkuu systeemin mukana.

Oletetaan nyt, että tila $|\psi\rangle$ on symmetrinen z-akselin ympäri kiertämisen suhteen. Tällöin symmetrian määritelmän mukaan rotaatio-operaattori $\hat{R}_z$ siis kommutoi Hamiltonin kanssa, ja tilalle pätee

$$\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle, \tag{54}$$

missä δ on reaalinen ja ϕ on kierretty kulma. Jos tilaa kierretään kahdesti kulman ϕ verran

$$\hat{R}_z(\phi)\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = \hat{R}_z(\phi)e^{i\delta}|\psi\rangle = e^{i\delta}\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = e^{i2\delta}|\psi\rangle, \tag{55}$$

joka on sama asia kuin kiertäminen kerran kulman 2ϕ verran.

$$\hat{R}_z(2\phi)|\psi\rangle = \hat{R}_z(\phi)\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = e^{i2\delta}|\psi\rangle. \tag{56}$$

Lisäksi mikä tahansa kulma ϕ voidaan jakaa sopivaan määrään hyvin pieniä kulmia ϵ: $\phi = n\epsilon$. Tällöin kulman ϕ kiertäminen vastaa kulman ϵ verran kiertämistä n kertaa, eli

$$\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = \hat{R}_z(n\epsilon) = [\hat{R}_z(\epsilon)]^n|\psi\rangle = e^{in\delta_\epsilon}|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle. \tag{57}$$

Kokonaisvaihemuutos δ on siis suoraan verrannollinen lukuun n:

$$\delta = n\delta_\epsilon. \tag{58}$$

Koska n määrää kierretyn kulman suuruuden, $\phi = n\epsilon$, δ on suoraan verrannollinen kierrettyyn kulmaan ϕ:

$$\delta = n\delta_\epsilon = \phi\frac{\delta_\epsilon}{\epsilon} = m\phi. \tag{59}$$

Merkitään $m = \delta_\epsilon/\epsilon$. Koska δ_ϵ ja ϵ ovat dimensiottomia, m on vain jokin reaaliluku. Huomataan myös, että m ei riipu mitenkään kulmasta ϕ.

Tilalle pätee siis

$$\hat{R}_z(\phi)|\psi\rangle = e^{im\phi}|\psi\rangle. \tag{60}$$

Aiemmin osoitettiin, että tämä systeemin ominaisuus säilyy. Erityisesti reaaliluku m, joka ei riipu kulmasta ϕ, on säilyvä luku, siis systeemin liikevakio. On siis osoitettu, että systeemin rotaatiosymmetria johtaa säilyvään suureeseen m. Tiedämme, että klassisesti pyörimismäärän säilyminen liittyy rotaatiosymmetriaan, joten kenties m vastaa jollain tavalla pyörimismäärää.

Rotaatio-operaattori voidaan määritellä infinitesimaalisille rotaatioille seuraavasti [2]:

$$\hat{R}_z(\Delta\phi) = 1 + \frac{i}{\hbar}\hat{J}_z\Delta\phi, \tag{61}$$

missä $\hat{J}_z$ on pyörimismääräoperaattorin z-komponentti ja $\Delta\phi$ on kierretty kulma. On perusteltua tarkastella vain infinitesimaalisia rotaatioita, sillä mikä tahansa kulma voidaan rakentaa sopivasta määrästä pieniä rotaatioita. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\hat{R}_z(\Delta\phi)|\psi\rangle = (1 + \frac{i}{\hbar}\hat{J}_z\Delta\phi)|\psi\rangle = e^{im\Delta\phi}|\psi\rangle. \tag{62}$$

Kirjoitetaan auki $e^{im\Delta\phi}$:

$$e^{im\Delta\phi}|\psi\rangle = (\cos(m\Delta\phi) + i\sin(m\Delta\phi))|\psi\rangle. \tag{63}$$

Koska $\Delta\phi$ on infinitesimaalinen, $\cos(m\Delta\phi) \to 1$ ja $\sin(m\Delta\phi) \to m\Delta\phi$

$$(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{J}_z\Delta\phi)|\psi\rangle = (1 + im\Delta\phi)|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{J}_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle. \tag{64}$$

Siis $m\hbar$ on pyörimismäärän z-komponentin $\hat{J}_z$ ominaisarvo. Pyörimismäärän z-komponenttia mitatessa saadaan $m\hbar$, joka on pyörimismäärän z-komponentin suuruus. Tämä on luvun m fysikaalinen merkitys ja sellaisessa tilanteessa, jossa systeemi on symmetrinen rotaatioiden suhteen, luku m eli pyörimismäärä säilyy.

2.2 Liikemäärän säilyminen

Vastaavalla päättelyllä kuin pyörimismäärän tapauksessa päädytään liikemäärän säilymiseen. Noetherin teoreeman perustella tiedetään, että liikemäärän säilyminen johtuu systeemin translaatiosymmetriasta. Katsotaan päteekö tämä myös kvanttimekaniikassa. Käsitellään suoraviivaista liikettä x-akselia pitkin ja määritellään translaatio-operaattori infinitesimaalisille translaatioille seuraavasti [2]:

$$\hat{D}_x(a) = 1 + \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x a, \tag{65}$$

missä $\hat{p}_x$ on liikemääräoperaattorin x-komponentti ja a on etäisyys jonka verran systeemi (tai vaihtoehtoisesti koordinaatisto) siirtyy x-akselia pitkin. Jos systeemille ei tee mitään, eli $a = 0$, operaattori redusoituu identiteettimatriisiksi.

Oletetaan systeemin olevan symmetrinen translaation suhteen, jolloin $\hat{D}_x$ kommutoi Hamiltonin kanssa, ja systeemille pätee

$$\hat{D}_x|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle. \tag{66}$$

Jälleen vaihemuutoksen δ voidaan sanoa olevan verrannollinen liikuttuun matkaan a, sillä mikä tahansa translaatio voidaan rakentaa sarjasta infinitesimaalisia translaatioita. Merkitään $\delta = ka$, missä k on reaaliluku.

$$\hat{D}_x|\psi\rangle = e^{ika}|\psi\rangle. \tag{67}$$

Tiedetään, että tämä systeemin ominaisuus säilyy, jolloin matkasta a riippumaton reaaliluku k on systeemin liikevakio. Noetherin teoreeman perusteella voidaan jo arvata, että k kuvaa liikemäärää.

$$\hat{D}_x(\Delta x)|\psi\rangle = (1 + \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\Delta x)|\psi\rangle = e^{ik\Delta x}|\psi\rangle, \tag{68}$$

josta jälleen pienten kulmien approksimaatiolla saadaan

$$(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\Delta x)|\psi\rangle = (1 + ik\Delta x)|\psi\rangle \tag{69}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_x|\psi\rangle = k\hbar|\psi\rangle.$$

Liikemääräoperaattorin ominaisarvoksi saadaan $k\hbar$ eli k:n fysikaalinen tulkinta on liikemäärän x-komponentin suuruus, ja se säilyy jos systeemi on symmetrinen x-akselin translaatioiden suhteen.

2.3 Energian säilyminen

Jälleen klassisessa mekaniikassa Noetherin teoreema liittää energian säilymisen ja aikasymmetrian toisiinsa, joten etsitään energian säilymislakia aikaevoluutiota tarkastelemalla. Oletetaan, että systeemi on symmetrinen ajan muutosten suhteen, eli aikaevoluutio-operaattori $\hat{U}(t)$ aiheuttaa tilalle vain imaginaarisen vaihemuutoksen. Voidaan esimerkiksi ajatella, että systeemissä tapahtuu jokin fysikaalinen prosessi ajan hetkellä $t = 0$. Systeemi on symmetrinen ajan suhteen, jos prosessi tapahtuisi samalla tavalla, vaikka se olisikin alkanut jollain myöhemmällä ajan hetkellä t. Kappaleiden 2.1 ja 2.2 kaltaisen perustelun nojalla on selvää, että operaattorin $\hat{U}(\tau)$ aiheuttama vaihemuutos δ on verrannollinen odotettuun aikaan τ. Voidaan kirjoittaa

$$\hat{U}(\tau)|\psi\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau)|\psi\rangle = e^{-i\omega\tau}|\psi\rangle, \tag{70}$$

missä ω on tavanomaisesti määritelty negatiivisella merkillä [2]. Jälleen tiedetään, että ω on systeemin liikevakio. Tarkastelemalla infinitesimaalisia ajan muutoksia τ, kirjoittamalla auki $e^{-i\omega\tau}$ ja käyttämällä pienten kulmien approksimaatiota, saadaan

$$\hat{H}|\psi\rangle = \omega\hbar|\psi\rangle. \tag{71}$$

Hamiltonin operaattorin ominaisarvoksi saadaan $\omega\hbar$, joka on systeemin energia ja säilyvä suure, jos systeemi on symmetrinen ajan muutosten suhteen.

2.4 Pariteetti

Tarkastellaan seuraavaksi systeemin symmetriaa inversion suhteen. Määritellään inversio-operaattori $\hat{P}$: inversio muuttaa jokaisen koordinaatin vastakkaismerkkiseksi, siis

$$x \to -x \tag{72}$$

$$y \to -y \tag{73}$$

$$z \to -z. \tag{74}$$

Inversio on siis ikään kuin peilaamisen yleistys, mutta tason sijaan inversio täytyy määritellä vain jonkin pisteen suhteen, jonka läpi inversio tapahtuu. Edellä käsitellyt symmetriat ovat vastanneet klassisia tuloksia, translaatiosymmetria johtaa liikemäärän säilymiseen, rotaatiosymmetria pyörimismäärän säilymiseen ja aikasymmetria energian säilymiseen. Inversio on systeemin diskreetti muunnos, eikä sitä siten voida Noetherin teoreeman avulla tutkia, mutta intuitio sanoo, että jos systeemi on symmetrinen inversion suhteen, niin operaation tulisi aina palauttaa sama tila johon se operoi. Osoitetaan nyt, että näin ei tapahdu.

Oletetaan systeemin olevan symmetrinen inversion suhteen, tällöin inversio-operaattori $\hat{P}$ kommutoi Hamiltonin kanssa ja tilalle pätee

$$\hat{P}|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle = |\psi'\rangle, \tag{75}$$

jossa δ on jokin reaaliluku. Jos operoidaan toisen kerran, niin ollaan palattu alkutilanteeseen:

$$\hat{P}\hat{P}|\psi\rangle = \hat{P}|\psi'\rangle = |\psi\rangle. \tag{76}$$

Toisaalta

$$\hat{P}\hat{P}|\psi\rangle = \hat{P}e^{i\delta}|\psi\rangle = (e^{i\delta})^2|\psi\rangle. \tag{77}$$

Täytyy siis olla, että

$$(e^{i\delta})^2 = 1 \Rightarrow e^{i\delta} = \pm 1. \tag{78}$$

Inversio-operaatio voi siis palauttaa alkuperäisen tilan, tai sitten alkuperäisen tilan mutta negatiivisena. Tätä systeemin ominaisuutta sanotaan pariteetiksi, ja se on säilyvä ominaisuus, jos systeemi on inversiosymmetrinen [2, 4]. Tiloja joille inversio antaa plusmerkin sanotaan parillisiksi (even) ja miinusmerkkisiä sanotaan parittomiksi (odd). Pariton tila pysyy parittomana ja parillinen tila pysyy parillisena.

Monet fysiikan lait ovat symmetrisia inversion suhteen, esimerkiksi perusvuorovaikutuksista sähkömagnetismi, gravitaatio ja vahva vuorovaikutus. Tämä ei ole yllättävää. On varsin intuitiivista ajatella, että kaikki toimisi samalla tavalla hypoteettisessa "peilimaailmassa." Kuitenkin 1960-luvulla huomattiin, että heikko vuorovaikutus ei ole inversiosymmetrinen. Toisin sanoen sellaisten prosessien, joissa tapahtuu β-hajoamista, peilikuva ei tapahdu luonnossa. Operaatio, jonka suhteen kaikki tunnetut luonnonlait ovat symmetrisiä, on TCP-operaatio, jossa inversion lisäksi käännetään ajan suunta ja vaihdetaan kaikki hiukkaset niiden antihiukkasiksi [4].

3 Yhteenveto

Fysiikassa säilymislait voidaan johtaa systeemin symmetriaominaisuuksista. Klassisessa mekaniikassa vaikutusintegraalin invarianssista johdettiin Noetherin teoreema, jonka mukaan systeemin jokaista derivoituvaa symmetriatransformaatiota vastaa jokin säilyvä suure. Kvanttimekaniikassa operaation symmetriaehdoksi saatiin operaation kommutointi Hamiltonin operaattorin kanssa. Kuten klassisessa mekaniikassa, kvanttimekaniikassa energian, liikemäärän ja pyörimismäärän säilymislait saatiin systeemin aika-, translaatio- ja rotaatiosymmetrioista. Kvanttimekaniikassa on myös sellaisia diskreettejä operaatioita, joita ei voida käsitellä klassisesti Noetherin teoreeman avulla. Inversiosymmetria on esimerkki tällaisesta, ja siihen liittyvää säilyvää ominaisuutta kutsutaan pariteetiksi.

4 Lähdeluettelo

[1] Goldstein H. Classical mechanics. 2. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley; 1980.

[2] Feynman RP, Leighton RB, Sands M. The Feynman lectures on physics. Vol. 3, Quantum mechanics. Reading, Mass.: Addison-Wesley; 1965.

[3] Wigner EP. SYMMETRY AND CONSERVATION LAWS. Proc Natl Acad Sci U S A 1964 -05;51(5):956-965.

[4] Griffiths D. Introduction to elementary particles. New York: Harper & Row; 1987.

[5] Noether E. Invariant variation problems. Transport Theory and Statistical Physics 1971;1(3):186-207.