Käyrän kaarevuus ja kierevyys

LuK-tutkielma
Rechardt Juha
Opiskelijanumero 2435589
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2017

Sisältö

1 Johdanto

Tämän työn tarkoitus on kertoa lukijalle, miten hän voi itse oppia määrittämään käyrälle kaarevuuden tasossa tai kaarevuuden ja kierevyyden avaruudessa. Aluksi määritellään muutamia asioita ja käydään läpi lauseita, joita tullaan tarvitsemaan myöhempien kappaleiden teorioissa.Tämän jälkeen käsitellään erillisissä kappaleissa ensin käyrää tasossa ja sen jälkeen käsittellään käyrää avaruudessa.

Työssä on käytetty kahta kirjaa [1] ja [2], joiden tiedot on tarkemmin ilmoitettu työn lopussa. Kirjoista kerättyä informaatiota on pyritty esittämään lukijalle mahdollisimman selkeässä järjestyksessä ja muodossa josta se olisi helpompi ymmärtää. Pääosin todistukset ovat lähes suoraan otettu kirjoista kuten myös esimerki 5.1, mutta muuten teksti on tehty siten, että suoraa lainaamista ei tekstissä ole. Kappaleessa 2.1 olevat säännöt olen itse todistanut.

Jotta lukijalle olisi helpompaa ymmärtää työn sisältöä on suositeltavaa, että hän hallitsee vektorien ja vektorikenttien käsitteet sekä perustiedot derivoinnista. Näiden asioiden yleinen hallitseminen ja ymmärtäminen edesauttavat tekstin lukemista.

2 Esitietoja

2.1 Derivointi polulla

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli. Nyt polku α on jatkuva kuvaus joukolta I reaalilukuavaruudelle $\mathbb{R}^n$, jossa luku n on sellainen, että se kuulu luonnollisiin lukuihin $\mathbb{N}$. Vektorikenttä $\vec{X}$ polulla α on jatkuva kuvaus joukolta I reaalilukuavaruudelle $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, missä vektorikenttä $\vec{X}(t)$ pisteessä t voidaan esittää polun $\alpha(t)$ pisteessä t komponenttifunktioina. Tämä kuvaa komponenttifunktioita jotka alkavat komponenttifunktiosta X_1 ja päättyät komponenttifnktioon X_n, eli

$$\vec{X}(t) = (\alpha(t); X_1(t), ..., X_n(t)).$$

Jos jokainen komponenttifunktio $X_i(t)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva, sanotaan, että vektorikenttä $\vec{X}$ on C^∞-vektorikenttä polulla α.

Polulla α olevan vektorikentän derivaatta on

$$\dot{\vec{X}}_{(t)} = \big(\alpha(t); \frac{dX_1(t)}{dt}, ..., \frac{dX_n(t)}{dt}\big).$$

Polun nopeusvektorikenttä $\dot{\alpha}$ on muotoa

$$\dot{\alpha}(t) = \big(\alpha(t); \frac{d\alpha_1(t)}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\big).$$

Vastaavasti kiihtyvyysvektorikenttä on muotoa

$$\ddot{\alpha}(t) = \big(\alpha(t); \frac{d^2\alpha_1(t)}{dt}, ..., \frac{d^2\alpha_n(t)}{dt}\big).$$

Seuraavaksi käsitellään muutamia sääntöjä ja todistetaan ne. Säännöt voidaan todentaa derivoimisen avulla. Vektorin yläpuolella oleva piste kuvaa tavallista derivointia reaaliarvoiselle funktiolle, siis

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}.$$

Säännöt:

1. $\dot{(\vec{X} + \vec{Y})}\ (t) = \dot{\vec{X}}\ (t) + \dot{\vec{Y}}\ (t)$

2. $\dot{(f\vec{X})}(t) = f\dot{\vec{X}}(t)$, luku f vastaa jotain vakiota.

3. $(\vec{X} \cdot \vec{Y})^{\cdot}\,(t) = \dot{\vec{X}}(t) \cdot \vec{Y}(t) + \vec{X}(t) \cdot \dot{\vec{Y}}(t)$, missä $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ on tavallinen pistetulo.

Todistus. Ensimmäinen kohdan todistus. Vektorit $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$ ovat deriovoituvia pisteessä t niin

$$\frac{(\vec{X}+\vec{Y})(t+h) - (\vec{X}+\vec{Y})(t)}{h} = \frac{\vec{X}(t+h) + \vec{Y}(t+h) - \vec{X}(t) + \vec{Y}(t)}{h}$$

$$= \frac{\vec{X}(t+h) - \vec{X}(t)}{h} + \frac{\vec{Y}(t+h) - \vec{Y}(t)}{h} \to \dot{\vec{X}}(t) + \dot{\vec{Y}}(t), h \to 0.$$

Toisen kohdan todistus

$$\frac{(f\vec{X})(t+h) - (f\vec{X})(t)}{h} = \frac{f\vec{X}(t+h) - f\vec{X}(t)}{h}$$

$$f\frac{(\vec{X})(t+h) - (\vec{X})(t)}{h} \to f\dot{\vec{X}}(t), h \to 0.$$

Kolmannen kohdan todistus

$$\frac{(\vec{X} \cdot \vec{Y})(t+h) - (\vec{X} \cdot \vec{Y})(t)}{h}$$

$$= \frac{\vec{X}(t+h) \cdot \vec{Y}(t+h) - \vec{X}(t) \cdot \vec{Y}(t+h) + \vec{X}(t) \cdot \vec{Y}(t+h) - \vec{X}(t) \cdot \vec{Y}(t)}{h}$$

$$\frac{\vec{X}(t+h) - \vec{X}(t)}{h} \cdot \vec{Y}(t+h) + \vec{X}(t) \cdot \frac{\vec{Y}(t+h) - \vec{Y}(t)}{h} \to \dot{\vec{X}}(t) \cdot \vec{Y}(t) + \vec{X}(t) \cdot \dot{\vec{Y}}(t).$$

□

2.2 Ristitulo

Määritelmä 2.1. Jos jossakin avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä p on kaksi tangenttivektoria $\vec{v}$ ja $\vec{w}$, niiden ristitulo saa aikaan tangenttivektorin, joka voidaan esittää matriisina

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Lasketaan yllä olevan matriisin determinantti ensimmäisen rivin suhteen.

$$det(\vec{v} \times \vec{w}) = (-1)^{1+1}\vec{e}_1 det \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2}\vec{e}_2 det \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\vec{e}_3 det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1(v_2w_3 - v_3w_2) - \vec{e}_2(v_1w_3 - v_3w_1) + \vec{e}_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

Determinantin perimmäinen tarkoitus on ilmaista, että ristitulo tangenttivektorien $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ välillä on lineaarinen kummallekin tangenttivektorille $\vec{v}$ ja $\vec{w}$, sekä täyttää vuorotteluehdon

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}.$$

Siitä seuraa erityisesti, että tangenttivektorin v ristitulo itsensä kanssa on nolla.

Lemma 2.2. *Vektoreiden $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ keskenään otettu ristitulo on sellainen, että se on kohtisuorassa vektoreihin $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ nähden ja vektoreiden ristitulon pituudeksi saadaan seuraavaa*

$$\| \vec{v} \times \vec{w} \|^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2.$$

Todistus. Tehdään vektoreiden $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ ristitulon ja pistetulon kaavasta $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ matriisiesitys

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Lasketaan determinantti kolmannen rivin suhteen

$$det(v \cdot (v \times w)) = (-1)^{1+1}w_1 det \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2}w_2 det \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}w_3 det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= w_1(v_2v_3 - v_3v_2) - w_2(v_1v_3 - v_3v_1)$$

$$= w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 - w_3 \cdot 0 = 0$$

Matriisin determinantiksi saadaan nolla, koska sen ensimmäinen ja toinen rivi ovat samat. Tästä seuraa se, että vektoreiden ristitulo on ortogonaalinen. Lasketaan seuraavaksi vektoreiden ristitulon pituus seuraavasti

$$(vv)(ww) - (vw)^2 = (\sum v_i{}^2)(\sum w_j{}^2) - (\sum v_iw_i)^2$$

$$= \sum_{i,j} {v_i}^2 {w_j}^2 - (\sum {v_i}^2 {w_i}^2 + 2 \sum_{i<j} v_i w_j v_j w_j)$$

$$= \sum_{i \neq j} {v_i}^2 {w_j}^2 - 2 \sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j.$$

Avataan summa

$$\big((v_{i1}w_{j2})^2 + (v_{i2}w_{j1})^2 + (v_{i1}w_{j3})^2 + (v_{i3}w_{j1})^2 + (v_{i2}w_{j3})^2 + (v_{i3}w_{j2})^2 + \ldots + (v_{in}w_{jn+1}\big)$$

$$-2\big((v_{i1}v_{j2}w_{i1}w_{j2}) + (v_{i1}v_{j3}w_{i1}w_{j3}) + (v_{i2}v_{j3}w_{i2}w_{j3}) + \ldots + (v_{in}v_{jn+1}w_{in}w_{jn+1})\big)$$

Toisaalta

$$\| \vec{v} \times \vec{w} \| = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \Sigma {c_i}^2$$

$$= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2$$

Avaamalla potenssin saamme saman vastauksen minkä saimme yläpuolelle

$$= (v_2w_3 - v_3w_2)(v_2w_3 - v_3w_2) + (v_3w_1 - v_1w_3)(v_3w_1 - v_1w_3)$$

$$+(v_1w_2 - v_2w_1)(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= \big((v_2w_3)^2 + (v_3w_2)^2 - 2(v_2v_3w_2w_3)\big) + \big((v_3w_1)^2 + (v_1w_3)^2 - 2(v_1v_3w_1w_3))\big)$$

$$+\big((v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 - 2(v_1v_2w_1w_2)\big)$$

$$= \big((v_2w_3)^2 + (v_3w_2)^2 + (v_3w_1)^2 + (v_1w_3)^2 + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2\big)$$

$$-2\big((v_2v_3w_2w_3) + (v_1v_3w_1w_3) + (v_1v_2w_1w_2)\big)$$

Muuttamalla hieman järjestystä saadaan

$$= \big((v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + (v_1w_3)^2 + (v_3w_1)^2 + (v_2w_3)^2 + (v_3w_2)^2\big)$$

$$-2\big((v_1v_2w_1w_2) + (v_1v_3w_1w_3) + (v_2v_3w_2w_3),$$

joka on verrattavissa edellä ilmoitettuun pituuteen

$$\sum_{i \neq j} {v_i}^2 {w_j}^2 - 2 \sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j.$$

$\square$

2.3 Suunnistus

Seuraavaksi määritellään pinnalle suunnistus.Tämä saadaan määritettyä pinnassa olevien vektorikenttien avulla seuraavasti.

Määritelmä 2.3. Pinnan S suunnistus n-ulotteiselle pinnalle on sen C^∞-yksikkönormaalivektorikenttä. Suunnistetuksi pinnaksi sanotaan pintaa, joka on varustettu suunnistuksella $\vec{N}$.

Lause 2.4. *Olkoon nyt $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ n-ulotteinen pinta, joka on myös polkuyhtenäinen. Täten pinnalle S on olemassa tasan kaksi yksikkönormaalivektorikenttää $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$, jotka ovat C^∞-yksikkönormaalivektorikenttiä. Lisäksi pätee, että yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{X}$ on yhtäsuuri kuin negatiivinen yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{Y}$. Toisin sanoen $\vec{X}(p) = -\vec{Y}(p)$.*

Todistus. Olkoon nyt fuktio f kuvaus reaalilukuavaruudelta $\mathbb{R}^{n+1}$ reaalilukuavaruudelle $\mathbb{R}$ sellainen C^∞-kuvaus, että pinta S on fuktion f alkukuva pisteessä c, joka kuuluu reaalilukuihin $\mathbb{R}$, sekä funktion f ensimmäisen derivaatan tulee olla erisuuri kuin nolla jokaisessa pisteessä x, joka kuuluu joukolle S. Tällöin voidaan merkitä,

$$\vec{N}_1(p) := \frac{\bigtriangledown f(p)}{\parallel \bigtriangledown f(p) \parallel}.$$

Vektorikenttä $\vec{N}$ on pinnan S yksikkönormaalivektorikenttä. Kuten on myös yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}_2$, joka on negatiivinen yksikkönormaalivektorikenttä $-\vec{N}_1$.

Lauseen pääväite on se, että ei ole olemassa kolmatta yksikkönormaalivektorikenttää $\vec{N}_3$. Jos näin olisi yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}_3$ tulisi olla kohtisuorassa pinnan S tangenttia kohti pisteessä p josta seuraisi, että olisi olemassa jokin luku $g(p)$ siten, että

$$\vec{N}_3(p) = g(p)\vec{N}_1(p).$$

Edellä olleesta saadaan, että piste $g(p)$ on sama asia kuin yksikkönormaalivektorikenttien $\vec{N}_3(p)$ ja $\vec{N}_1(p)$ tulo. Piste $g(p)$ on siis näin ollen joko plus tai miinus yksi. Koska kuva $g(S)$ on jatkuva polkuyhtenäisellä joukolla S niin kuvakin on polkuyhtenäinen. Tästä seuraa, että funktio g on vakio. Siis yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}_3$ on, joko yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}_1$ tai yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}_2$. □

3 Käyrä tasossa ja Frenet'n kaavat tasokäyrälle

Seuraavaksi käydään läpi kuinka tasossa olevasta käyrästä on mahdollista määrittää käyrän kaarevuus derivaattaa apuna käyttäen, sekä määritetään Frenet'n kaavat tasolle.

Olkoon polku α $\mathbb{C}^{\infty}$-polku. Polku α on kuvaus joukolta I reaalilukuavaruudelle $\mathbb{R}^2$. Lisäksi jokaisessa polun α pisteessä t olevan nopeusvektorikentän $\dot{\alpha}$ pituus on yksi. Toisin sanoen $\| \dot{\alpha}(t) \| = 1$. Merkitään nyt yksikkötangenttivektorikenttä $\vec{T}(t)$ vastaamaan nyt polun nopeusvektorikenttä $\dot{\alpha}(t)$ pisteessä t. Olkoon myös yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}$, joka kulkee pitkin polkua α ja on kohtisuorassa nopeusvektorikentän $\dot{\alpha}$ vastaan jokaisessa pisteessä t, joka kuuluu joukkoon I.

Koska jokaisessa pisteessä t yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}$ on pituudeltaan yksi, niin yksikkönormaalivektorikentän derivaatta $\dot{\vec{N}}$ on yksikkönormaalivektorikentän $\vec{N}$ kanssa kohtisuorassa, toisin sanoen, koska

$$\vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = 1,$$

niin tämän derivaatan tulee olla 0, eli

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t)) = \dot{\vec{N}}(t) \cdot \vec{N}(t) + \vec{N}(t) \cdot \dot{\vec{N}}(t),$$

joten

$$\vec{N}(t) \cdot \dot{\vec{N}}(t) = 0.$$

Näin ollen täytyy olla olemassa jokin luku κ(t), joka kuuluu reaalilukuihin $\mathbb{R}$, joka kuvaisi ajan hetkellä t polun α kaarevuutta siten, että

$$\dot{\vec{N}} = -\kappa(t)\vec{T}(t). \tag{1}$$

Määritelmä 3.1. Määritellään luku $\kappa(t)$ siten, että se on polun α kaarevuusluku pisteessä t, joka kuuluu polulle α.

Koska yksikkötangenttivektorikenttän pituus on jokaisessa pisteessä t yksi, kun piste t kuuluu joukkoon I, yksikkötangenttivektorikenttä $\vec{T}$ on kohtisuorassa oman derivaattavektorikenttänsä $\dot{\vec{T}}$ kanssa. Toisin sanoen yksikkötangenttivektorikenttä on sama asia kuin yksikkönormaalivektorikenttä $\vec{N}(t)$, jota kerrotaan jollain luvulla λ, joka kuuluu reaalilukuihin $\mathbb{R}$. Koska yksikkötangenttivektorin $\vec{T}(t)$ tulo yksikkönormaalivektorin $\vec{N}(t)$ kanssa on nolla jokaisessa pisteessä t, niin

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{T} \cdot \vec{N}) = \dot{\vec{T}} \cdot \vec{N} + \vec{T} \cdot \dot{\vec{N}}.$$

Siten

$$\dot{\vec{T}}(t) \cdot \vec{N}(t) = -\vec{T}(t) \cdot \dot{\vec{N}}(t) = -\vec{T}(t) \cdot (-\kappa(t)\vec{T}(t))$$
$$= \kappa(t)\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = \kappa(t).$$

Toisaalta

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t)) = 2\dot{\vec{T}}(t) \cdot \vec{T}(t),$$

joten

$$\dot{\vec{T}}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{N}(t).$$

Koska

$$\dot{\vec{T}}(t) \cdot \vec{N}(t) = \lambda(t)\vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = \lambda(t),$$

niin

$$\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}. \tag{2}$$

Yhdistämällä edellä olleet kaavat (1) ja (2) saadaan Frenet'n kaavat polulle α,

$$\begin{cases} \dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} \\ \dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N} \end{cases}.$$

4 Käyrä avaruudessa ja Frenet'n kaavat avaruuskäyrälle

Seuraavaksi esitetään, kuinka voidaan ilmaista avaruudessa olevasta käyrästä sen kaarevuus ja kierevyys.

Tapa, jolla edellisessä kappaleessa määritettiin kaarevuus tasokäyrälle, ei sellaisenaan sovellu avaruuskäyrän kaarevuuden määrittämiseen. Tämä johtuu siitä, että tangentin ortogonaalikomplementti on kaksiulotteinen. Tangentin ortogonaalikomplementti vastaa avaruuskäyrän normaalia.

Olkoon polku α kuvaus joukolta I reaaliavaruudelle $\mathbb{R}^3$, sekä polun α nopeusvektorikenttä $\dot{\alpha}$ pituudeltaan yksi. Siis $\parallel \dot{\alpha}(t) \parallel = 1$ kaikilla pisteillä t, jotka kuuluvat joukolle I. Oletetaan, että polun kiihtyvyys $\ddot{\alpha}$ on eri suuri kuin nolla kaikissa pisteissä t joukossa I. Siis polun α toinen derivaatta ei saa olla nolla. Koska

$$0 = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t)) = 2\ddot{\alpha}(t) \cdot \alpha(t),$$

niin pisteessä t polun ensimmäinen derivaatta $\dot{\alpha}(t)$ on kohtisuorassa polun toisen derivaatan $\ddot{\alpha}$ kanssa.

Määritellään seuraavaksi,että

$$\vec{N}(t) = \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\| \ddot{\alpha}(t) \|}$$

on polun α päänormaali ja

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

on polun sivunormaali. Polun kaarevuus $\kappa(t)$ määritellään tangentin avulla

$$\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t). \tag{3}$$

Nyt

$$\dot{\vec{B}}(t) = \lambda_1\vec{T}(t) + \lambda_2\vec{N}(t) + \lambda_3\vec{B}(t)$$

Koska sivunormaalin $\vec{B}$ pituus on yksi $\| \vec{B}(t) \| = 1$ niin se on kohtisuorassa omaa derivaattaansa $\dot{\vec{B}}(t)$ vastaan. Näin ollen $\lambda_3 = 0$, jolloin

$$\dot{\vec{B}}(t) = \lambda_1\vec{T}(t) + \lambda_2\vec{N}(t)$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}}(t) &= \frac{d}{dt}(\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)) \\ &= \dot{\vec{T}}(t) \times \vec{N}(t) + \vec{T}(t) \times \dot{\vec{N}}(t) \\ &= \vec{T}(t) \times \dot{\vec{N}}(t) \end{aligned}$$

Koska $\vec{T}(t) \times \dot{\vec{N}}(t)$ on kohtisuorassa yksikkötangenttivektorikenttää $\vec{T}(t)$ vastaan lemmen 2.2 nojalla, on $\lambda_1 = 0$.

Siis

$$\dot{\vec{B}}(t) = \lambda_2 \cdot \vec{N}(t).$$

Polun α kierevyyttä merkitään kierevyysluvulla $\tau(t)$, joka on nyt $\tau(t) = -\lambda_2$. Toisin sanoen

$$\dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t) \cdot \vec{N}(t) \tag{4}$$

Lemman 2.2 nojalla sivunormaali $\vec{B}(t)$ on kohtisuorassa sekä normaalin $\vec{N}(t)$, että tangentin $\vec{T}(t)$ kanssa. Lisäksi sivunormaalin $\vec{B}(t)$ pituus $\| \vec{B}(t) \|$ on yksi.

Toisaalta

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t),$$

josta derivoimalla saadaan

$$\dot{\vec{N}}(t) = \dot{\vec{B}}(t) \times \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \times \dot{\vec{T}}(t)$$

Sijoitetaan tunnetut $\dot{\vec{T}} = \kappa(t)\vec{N}(t)$ ja $\dot{\vec{B}}(t) = -\tau(t)\vec{N}(t)$.

$$\begin{aligned} &= -\tau(t)\vec{N}(t) \times \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \times \kappa(t)\vec{N}(t) \\ &= \tau(t)\vec{T}(t) \times \vec{N}(t) + \vec{N}(t) \times \kappa(t)\vec{B}(t) \\ &= \tau(t)\vec{B}(t) + \kappa(t)\vec{T}(t). \end{aligned}$$

Täten yksikkönormaalivektorin deivaatta $\dot{\vec{N}}$ voidaan ilmaista muodossa

$$\dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \tag{5}$$

Kaavoista (3), (4) ja (5) saadaan avaruudessa $\mathbb{R}^3$ Frenet'n kaavat

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}} &= \kappa\vec{N} \\ \dot{\vec{N}} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \dot{\vec{B}} &= -\tau\vec{N}. \end{aligned}$$

Lause 4.1. *Polku β on täsokäyrä, jos ja vain jos sen kierevyys τ on nolla ja kaarevuusluku κ on aidosti suurempaa kuin nolla.*

Todistus. Aluksi oletetaan, että käyrä β on tasokäyrä, jolta löytyy jotkin pisteet p ja q siten, että voimme esittää käyrän pisteen $\beta(t)$ ja pisteen p erotuksen ristitulo pisteen q kanssa, joka tuottaa tulokseksi nollan, siis

$$(\beta(s) - p) \cdot q = 0,$$

jokaisella pisteellä s. Derivoimalla edellä olevaa saamme

$$\dot{\beta}(s) \cdot (q) = \ddot{\beta}(s) \cdot (q) = 0$$

Näin ollen voimme sanoa, että piste q on aina ortogonaalinen yksikkötangenttivektorin $\vec{T}$ kanssa siis myös polun ensimmäisen derivaatan $\dot{\beta}$ kanssa. Lisäksi se on myös ortogonaalinen yksikköpäänormaalivektorin $\vec{N}$ kanssa, joka tarkoittaa samaa asiaa kuin yksikkösivunormaalivektorin derivaatan derivaattaa

$\ddot{\beta}$, joka sitten jaetaan kaarevuusluvulla κ, siis $\ddot{\beta}/\kappa$. Myös yksikkösivunormaalivektori $\vec{B}$ on ortogonaalinen yksikkönormaalivektorin $\vec{N}$ ja yksikkötangenttivektorin $\vec{T}$ kanssa. Tämä siksi, koska yksikkösivunormaalivektorin pituus on yksi. Sen derivaattaksi saadaan nolla ja kierevyys on näin myös nolla.

Toisaalta kun kierevyysluku τ on nolla ja yksikkösivunormaalivektorin derivaatta $\dot{\vec{B}}$ on nolla. Silloin yksikkösivunormaalivektori $\vec{B}$ on yhdensuuntainen ja avaruudessa $\mathbb{R}^3$ se voidaan nyt tunnistaa pisteeksi. Nyt asetamme niin, että käyrä β on taso joka kulkee käyrän nollapisteen $\beta(0)$ kautta. Lisäksi se olisi kohtisuorassa yksikkösivunormaalivektorin kanssa. Todistetaan tämä siten, että esitetään se funktiona

$$f(s) = (\beta(s) - \beta(0)) \cdot \vec{B},$$

josta derivoimalla

$$\frac{df}{ds} = \dot{\beta} \cdot \vec{B} = \vec{T} \cdot \vec{B} = 0,$$

Huomataan, että selvästi fuktion f arvo nollassa on nolla. Siitä seuraa

$$(\beta(s) - \beta(0)) \cdot \vec{B}.$$

Tästä seuraa, että käyrä β on kokonaan halutulla tasolla ja se on kohtisuorassa omaan päänormaaliinsa nähden. $\square$

5 Esimerkki

Seuraavaksi käydään läpi esimerkki aiheeseen liittyen.

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan ruuviviivaa eli spiraalia

$\alpha(t)$=$(a\cos t,\ a\sin t,\ b\ t)$, $a > 0$, $b > 0$.

Tässä

$$\parallel \dot{\alpha} \parallel = \sqrt{a^2 + b^2} =: c.$$

Jos

$$\beta(t) := \alpha(t/c) \text{ on } \parallel \dot{\beta}(t) \parallel = 1.$$

Siis

$$\vec{T}(t) = \dot{\beta}(t) = (\beta(t); (-\frac{a}{c}\sin\frac{t}{c}, -\frac{a}{c}\cos\frac{t}{c}, \frac{b}{c})),$$

$$\vec{N}(t) = \ddot{\beta}(t) / \parallel \ddot{\beta}(t) \parallel = (\beta(t); (-\cos\frac{t}{c}, -\sin\frac{t}{c}, 0)),$$

ja $\kappa(t)$=$\parallel \ddot{\beta}(t) \parallel$=$a/b^2$. Koska

$$\vec{T} = (\beta(t); (\frac{b}{c}\sin\frac{t}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{t}{c}, \frac{a}{c})),$$

on

$$\dot{\vec{B}}(t) = (\beta(t); \frac{b}{c^2}\cos\frac{t}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{t}{c}, 0)),$$

joten

$$\tau(t) = b/c^2.$$

Lähdeluettelo

[1] A. Lehtonen: *Differentiaaligeometria*. Jyväskylä 1993 (sivut 59-60, 72-73 ja 87-95)

[2] B. O'Neill: *Elementary Differential geometry Second edition*. 2006 (sivut 49, 58-60 ja 64-65)