Kolmion merkilliset pisteet ja ympyrään liittyvien suorien geometria lukion matematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Reka Veres
1995318
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto

Syksy 2017

Sisältö

Johdanto

Käsitys siitä, mitä matematiikan osa-alueita ja miten opetettuna, koulumatematiikan pitäisi sisältää, on muuttunut ajan myötä. Vielä vuosikymmeniä sitten haluttiin opettaa jotain pysyvää ja yleisesti tärkeää. Nykyään käsitys opetettavien asioiden tärkeydestä muuttuu nopeasti. Konkreettista tietoa olennaisemmiksi ovat tulleet tiedon käyttöarvo ja sovellettavuus. Koulumatematiikkaan kohdistuvia odotuksia ja vaatimuksia on muuttanut paljon myös matematiikan käyttötapa; itse matematiikkakin on muuttunut. Teorioiden ja laskurutiinien ulkoa opettelu ja esimerkiksi perinteinen tapa piirtää ovat menettäneet merkitystään. Niitä ovat korvanneet muun muassa laskimet ja tietokoneohjelmistot. Oppisisältöjen hallinnan lisäksi vähintään yhtä tärkeänä ovat itseohjautuvuus, aloitteellisuus ja sosiaaliset taidot. Myös syvällisemmän ymmärtämisen merkitys on korostunut entisestään. Matematiikan oppimisessa oman tekemisen tulisi syrjäyttää tiedon passiivinen vastaanottaminen. Itse tekemällä saavutetaan todennäköisemmin ymmärtämiseen perustuva osaaminen. Syvällisemmän ymmärtämisen olennaisuus korostuu, kun tietoa halutaan soveltaa uusissa tilanteissa tai kun tuotetaan itse uutta tietoa ja mallinnetaan sitä matemaattisesti. Kun mekaaninen suorittaminen tapahtuu tietotekniikan avulla, on tärkeää tietää, mistä löytää tarvittavan tiedon ja välineet ongelmanratkaisuun. Yhdessä tekeminen tukee oppilaiden opiskelua ja valmentaa työelämässäkin tärkeitä sosiaalisia taitoja varten.

Koska matematiikan opetuksen on muututtava, myös oppikirjojen luonnetta on mietittävä uudestaan. Tämä Pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston matematiikan laitoksen Avoin oppikirja -projektia, jonka tarkoituksena on tuottaa verkossa avoimesti julkaistava oppikirja käytettäväksi lukion matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän MAA3- ja MAB3-kursseilla. Sähköinen oppimateriaali perustuu uuteen, 1.8.2016 käyttöönotettuun, opetussuunnitelmaan. Tässä oppilaslähtöisessä oppikirjassa opiskelijat pääsevät rakentamaan itse uutta tietoa lukuisten pohdintatehtävien avulla.

Projektiryhmään kuului Oulun yliopistosta kolmen ohjaajan lisäksi seitsemän matematiikan pääaineopiskelijaa, joista jokaisen tehtävänä oli laatia opetusmateriaali itsenäisesti hänelle määrätyn MAA3- ja MAB3-kurssien aihekokonaisuuden pohjalta. Projektiryhmä teki aluksi tiivistä yhteistyötä ja kokoontui säännöllisin väliajoin yhtenäisen rakenteen ja ulkoasun varmistamiseksi sekä ideoiden vaihtamiseksi. Projektiryhmän kanssa sovittiin yhteinen rakenne pitkän ja lyhyen matematiikan oppimäärille. Projektiryhmän laatima geometrian oppikirja sisältää luvut *Suorakulmaisen kolmion trigonometria, Geometriset suureet, Symmetria ja yhdenmuotoisuus, Tasogeometria* sekä *Avaruusgeometria*. Tämän tutkielman sisältämä oppimateriaali, *Kolmion merkilliset pisteet ja ympyrään liittyvien suorien geometria*, kuuluu lukuun *Tasogeometria* ja se päättää kaikki tasogeometriaan liittyvät aihealueet. Tutkielma alkaa perusteluosiolla, jossa esitetään oppikirjan tavoitteet ja perustellaan oppimateriaaliin liittyvät valinnat tieteellisillä tutkimuksilla ja artikkeleilla. Tutkielma jatkuu opettajan oppaalla, jossa esitetään ajankäyttösuunnitelma, alalukujen tavoitteet sekä pohdintatehtävien tarkoitus, ratkaisut ja mahdolliset eriyttämiskeinot. Opetusmateriaali on tutkielman lopussa liitteenä (A) ja se sisältää myös oppikirjassa esiintyvien harjoitustehtävien vastaukset.

1 Oppikirjan tavoitteet

Oppikirjan tavoitteet määräytyvät uuden opetussuunnitelman ja projektiryhmän asettamien tavoitteiden perusteella. Ensin käydään läpi ensin Opetushallituksen määräämiä yleisiä tavoitteita lukio- ja matematiikan opetukselle, matematiikan pitkälle oppimäärälle sekä erityisesti kurssille *Geometria*. Sen jälkeen tarkastetaan projektiryhmän kanssa oppikirjalle sovitut tavoitteet, jotka pohjautuvat osittain artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Lopuksi esitetään oppikirjan sisältämät perinteiset ja uudet tehtävätyypit, joista jälkimmäisistä sovittiin projektiryhmän kanssa artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* pohjalta.

1.1 Opetussuunnitelma

1.8.2016 otettiin käyttöön uudet lukion opetussuunnitelman perusteet, joihin on asetettu lukio-opetuksen yleisiksi tavoitteiksi, että opiskelija saa monipuolisia kokemuksia uuden tiedon ja osaamisen rakentamisesta - kuten myös tutkivasta oppimisesta- sekä kehittää soveltamis- ja ongelmanratkaisutaitojaan. Opetussuunnitelman mukaan opiskelijan tulee ymmärtää tieteen- ja taiteenaloille ominaista kieltä sekä osata tuottaa ja tulkita erilaisia tekstejä. Opetuksen tulee ohjata opiskelijaa syventämään ymmärrystään tieto- ja viestintäteknologiasta sekä käyttämään sitä tarkoituksenmukaisesti niin itsenäisessä kuin yhteisöllisessäkin työskentelyssä. Lukio-opetuksen tehtävänä on myös rakentaa yhteisöllisyyttä ja osallisuutta vahvistamalla vuorovaikutus-, yhteistyö- ja ilmaisutaitoja. Opiskelijan tulee saada mahdollisuuksia osaamisen jakamiseen, vertaisoppimiseen, ratkaisujen yhdessä ideointiin ja tuottamiseen sekä luovaan ongelmanratkaisuun ja ajatteluun.

Tässä tutkielmassa käsiteltävässä oppimateriaalissa edellä luetellut tavoitteet täyttyvät esimerkiksi tutkivan oppimisen mallia käyttämällä oppitunneilla, jolloin opiskelijan kokemus uuden tiedon rakentamisesta laajenee ja ongelmanratkaisutaito vahvistuu. Pohdintatehtävissä opiskelijan on laadittava sanallisia ja kirjoitettuja perusteluja ongelmiin, jolloin hän oppii käyttämään matematiikalle ominaista kieltä ja tuottamaan matemaattisia tekstejä. Vertaisoppimiseen, yhteistyöhön ja yhteisöllisyyteen liittyvät tavoitteet täyttyvät luonnollisesti paritöiden muodossa sekä parien esitellessä pohdintojensa tulokset koko oppilasryhmälle. Tietoteknologiaa otetaan mukaan oppitunneille dynaamisen matematiikkaohjelman muodossa. Ohjelman avulla opiskelijat ratkaisevat pohdintatehtävät ja osan harjoitustehtävistä.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa on määritelty matematiikan yleiset tavoitteet, joiden mukaan "matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja". Tavoitteissa on asetettu, että opetuksessa tulee käyttää vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Opetustilanteet tulee järjestää siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan hänen taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen. Opiskelijaa tulee kannustaa kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin sekä harjaannuttaa käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen, tutkimisen ja ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa tulee hyödyntää muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja.

Aiemmin esitettyjen näkökulmien lisäksi tässä tutkielmassa käsitelty oppimateriaali on rakennettu melkein kokonaan *havaintojen teko – kysymysten asettelu – oletusten teko - päätelmien teko – perustelu* -mallin mukaan. Geometrian luonteesta johtuen opiskelija käyttää jatkuvasti ja myös itse piirtää kuvia ja piirroksia sekä käsin että dynaamisella matematiikkaohjelmalla. Piirtämisen tärkeyden korostamiseksi esitetään esimerkiksi "etsi ja korjaa-tyyppisessä pohdinnassa A.12 virheellinen ratkaisu, jossa virheen taustalla on myös kuvan puuttuminen ratkaisusta. Luovan ongelmanratkaisun ääreen opiskelija pääsee pohdintatehtävissä, joissa on ratkaistava käytännön ongelmia (esimerkiksi A.1 ja A.5).

Lukion opetussuunnitelman perusteissa on asetettu tavoitteet erikseen myös pitkään matematiikkaan. Pitkän oppimäärän tehtävänä on antaa matemaattinen yleissivistys ja jatko-opintojen edellyttämät matemaattiset valmiudet. Opiskelijan tulee saada tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta ja näkemään matemaattinen tieto loogisena rakenteena. Nämä tavoitteet toteutuvat esimerkiksi oppimateriaalin sisältämien todistusten kautta, joilla yksittäisistä havainnoista tehdyt päätelmät osoitetaan tosiksi yleisellä tasolla. Täten opiskelija oppii sen matematiikalle perustavanlaatuisen ominaisuuden, että matemaattinen tieto perustuu täsmällisiin todistuksiin eikä yksittäisiin havaintoihin. Pitkän oppimäärän tavoitteiden mukaan opiskelija "rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin". Opiskelijan tulee ymmärtää ja osata käyttää matematiikan kieltä sekä keskustella matematiikasta. Hänen tulee myös oppia arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä. Nämä tavoitteet toteutuvat oppimateriaalin lukuisissa pohdinta- ja harjoitustehtävissä, esimerkiksi tutkivaan oppimiseen perustuvissa sekä ratkaisumenetelmän kriittistä arviointia vaativissa tehtävissä, ja lisäksi paritöiden muodossa, jolloin opiskelija harjaannuttaa myös taitoaan keskustella matematiikasta. Tutkivan oppimisen mallia käyttämällä ja todistuksia laatimalla täyttyy lisäksi tavoite, jonka mukaan opiskelija "harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä". Lisäksi opiskelija "harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita"aitoihin tilanteisiin pohjautuvien pohdintojen avulla (esimerkiksi A.1, A.2 ja A.33) sekä "käyttää tarkoituksenmukaisia teknisiä apuvälineitä"dynaamisen matematiikkaohjelman, GeoGebran muodossa.

Opetussuunnitelmassa on lisäksi asetettu MAA3 *Geometria* -kurssin tavoitteiksi, että opiskelija

- harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita
- osaa ratkaista geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden

ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa

- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

Oppikirjan luvun *Tasogeometria* tässä tutkielmassa käsitellyssä osassa toteutuu erinomaisesti geometrista tietoa käsittelevien lauseiden muotoilemiseen, perustelemiseen ja käyttämiseen liittyvä tavoite, kuten myös geometristen ongelmien ratkaisemiseen liittyvä tavoite käyttäen hyväksi kuvioiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta ja Pythagoraan lausetta. Monen pohdinta- ja harjoitustehtävän ratkaisu onnistuu yhteneviä ja yhdenmuotoisia kolmioita hyväksi käyttäen. Teknisten apuvälineiden käyttö liittyy koko oppimateriaaliin kuvioita tutkiessa ja geometriaan liittyviä sovellusongelmia ratkaistaessa.

1.2 Yleiset ja *Habits of mind* -tavoitteet

Opetussuunnitelmassa asetettujen tavoitteiden lisäksi oppikirjan projektiryhmä sopi muutamia yhteisiä tavoitteita oppikirjalle. Yleisiksi tavoitteiksi päätettiin, että asiat on aina perusteltava ja matemaattisen perustelun on pohjauduttava määritelmiin sekä aiemmin todistettuihin tietoihin. Oppikirjan tässä tutkielmassa käsitellyssä oppimateriaalissa nämä tavoitteet toteutuvat luonnollisesti todistamalla lauseina pohdinnoissa tehdyt havainnot yleisellä tasolla tosiksi. Lisäksi ratkaisun kriittistä arviointia tarvittavissa pohdinnoissa ja harjoitustehtävissä (kuten A.32, tehtävät 10 ja 3) korostetaan täsmällisen perustelun tärkeyttä.

Yleisten tavoitteiden lisäksi valittiin muutamia yhteisiä tavoitteita artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Artikkelissa pohditaan matematiikan opetuksen luonnetta: millaista sen pitäisi olla, jotta se täyttäisi tulevaisuuden ongelmien asettamat vaatimukset, joita emme edes tunne tällä hetkellä. Artikkelissa todetaan, että opetussuunnitelmia tulisi laatia ja opetusta järjestää muuttamalla prioriteetteja, jolloin opetettavia aihealueita ja oppilaiden tuloksia tärkeämmät olisivat ne "habits of mind", joita ihmiset käyttävät tuottaessaan kyseisiä tuloksia. Tämä tarkoittaa sitä, että ajattelun tavat ja ongelmanratkaisussa käytettävät heuristiikat ovat konkreettisia opetettavia aihealueita ja tuloksia tärkeämpiä. Oppilaiden tulisi kehittää sellaisia ongelmanratkaisuheuristiikkoja, jotka ovat käyttökelpoisia monessa eri tilanteessa. Opiskellessaan matematiikkaa oppilaiden tulisi osallistua luoviin, keksiviin ja tutkiviin prosesseihin kuten oikeat matematiikot; heidän tulisi kokea virheellisiä lähtökohtia, laskutapoja ja ratkaisuja sekä ongelmien erityistapauksia. Oppilaiden tulisi käyttää matemaatikkojen tapaan oikeita matemaattisia metodeja, jolloin jos heiltä kysytään: "mitä matematiikka on", heidän vastauksensa olisi "tapa ratkaista ongelmia"eikä "laskutoimitusten suorittamista".

Habits of mind -tyyppinen opetussuunnitelma tarjoaa oppilaille mahdollisuuden kokeilla ja tutkia itse. Se rakentuu sellaisten matemaattisten ajattelutapojen, joita oppilailla toivotaan olevaan, pohjalta. Niiden mukaan oppilaiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä ("pattern sniffers"), kokeilijoita ("experimenters"), kuvailijoita ("describers"), askartelijoita ("tinkerers"), keksijöitä ("inventors"), visualisoijia ("visualizers"), otaksumien muodostajia ("conjecturers") ja arvaajia ("guessers"). Geometrian oppikirjaan valittiin näistä tavoitteista kolme. Oppilaiden tulisi olla:

Säännönmukaisuuksien etsijöitä, jolloin he pyrkivät löytämään toistuvia kuvioita matemaattisista ongelmista ja niiden ratkaisuista. Tässä oppikirjan osassa esimerkiksi monen pohdinnan ja harjoitustehtävän ratkaisuun päästään yhdenmuotoisten tai yhtenevien kolmioiden avulla. Ongelmiin liittyviä piirroksia tarkastellessaan opiskelijan tulisi huomata tämä asia toistuvana seikkana.

Kokeilijoita, jolloin opiskelijan saatua jokin ongelma ratkaistavakseen hänen tulisi alkaa "leikkiä"sen kanssa kokeillen ratkaisustrategioita, jotka osoittautuivat hyödyllisiksi aiemmin, sekä erilaisia ajatuksia. Täten hänelle kehittyisi kyky tarkastella kriittisesti kokeellisia tuloksia sekä tietoisuus siitä, että kokeilemisen mahdollisuudet matematiikassa ovat kuitenkin rajoitettuja (tällä viitataan todistamisen tarpeeseen).

Opiskelija kokeilijana –tavoite toteutuu jatkuvasti oppikirjan tässä tutkielmassa käsitellyssä osassa tutkivan oppimisen malliin pohjautuvien pohdintojen kautta. Tutkimiseen käytetään apuna dynaamista matematiikaohjelmaa GeoGebra. Se on ilmainen ja monipuolinen "työvälinepaketti", joka sopii sekä opettajan havainnollistamisvälineeksi että oppilaan työvälineeksi. Sitä voidaan parhaimmillaan käyttää mallintamiseen sekä tutkivan ja keksivän oppimisen apuna. Se tukee erityisen hyvin oppilaan itsenäistä työskentelyä ja tuo matematiikan oppimiseen nykyteknologian tarjoaman vuorovaikutteisen dynaamisuuden. Tärkeänä aspektina matematiikan oppimisen kannalta GeoGebra sitoo tiedon erilaiset esitystavat, kuten numeerisen, graafisen ja symbolisen, yhdeksi vuorovaikutteiseksi kokonaisuudeksi [15]. GeoGebra on lisäksi yksi vuodesta 2019 lähtien sähköistyvissä matematiikan ykioppilaskirjoituksissa käytettävistä ohjelmistoista [5], joten opiskelijoiden on tärkeää oppia käyttämään sitä. Koska tässä tutkielmassa käsitelty oppimateriaali on tasogeometriaan liittyvien aihealueiden loppuosassa, oletetaan GeoGebran käytön perusteiden olevan jo tutut opiskelijoille.

Kuvailijoita, jolloin opiskelijan tulisi osata kuvailla tarkkaan matemaattisten prosessien eri vaiheita. Sitä varten hänen on käytettävä matematiikan kieltä, joka sisältää arkikielen sanojen lisäksi matemaattisia käsitteitä ja symboleita. Kuvailemalla sitä, mitä on tekemässä, myös asian ymmärtäminen syvenee. Opiskelijan tulisi osata väitellä matemaattisesta ongelmasta, selittää kaverille ja vakuuttaa hänet tarkoilla perusteluilla siitä, että jokin ratkaisu on oikea, kysyä kysymyksiä toisilta ja kommentoida toisten töitä. Opiskelijan tulisi lisäksi kehittää tapa kirjoittaa ylös ajatuksiaan, väitteitään ja laatimiaan todistuksia. Kirjallisten ja sanallisten kuvailujen laatiminen omista toimenpiteistään on tärkeää silloin, kun yhteisön osana käsittelee ongelmaa.

Tämä tavoite näkyy oppimateriaalin pohdinta- ja harjoitustehtävissä, joissa pyydetään perusteluja. Perustelujen laatiminen tapahtuu sekä sanallisesti, kun opiskelija selittää kaverilleen ideoitaan ja näkemyksiään, että kirjallisesti, kun todistukset ja ratkaisumenetelmät kirjoitetaan ylös.

1.3 Tehtävätyypit

Oppikirja sisältää pohdinta- ja harjoitustehtäviä sekä malliesimerkkejä, joista kullakin on oma tarkka tarkoituksensa oppimisprosessissa. Tehtävien tekoon voidaan käyttää

GeoGebraa tai perinteisesti kynää ja paperia. Pohdintatehtävistä suurin osa pohjautuu tutkivan oppimisen malliin, ja niiden on tarkoitettu kehittävän opiskelijan itsenäistä ja kriittistä ajattelua, ongelmanratkaisu- ja perustelutaitoja, yhteistyökykyä, tiedonhakutaitoa ja kommunikointia - sekä selittämistä että toisten kuuntelua - matematiikan kieltä käyttäen. Pohdintatehtävät on tarkoitus käydä läpi paritöinä oppitunnilla. Harjoitustehtävät tehdään kotitehtävinä tai myös tunnilla ja niiden tarkoitus on syventää opiskelijan ymmärrystä sekä vakiinnuttaa hänen osaamistaan. Mallitehtävät ovat oppimisprosessin olennaisia elementtejä, sillä opiskelija tutustuu niiden avulla ajatusmalleihin ja ongelmanratkaisustrategioihin.

Kaikki edellä mainitut oppimateriaalissa esiintyvät tehtävätyypit voidaan jaotella myös erilaisen näkökulman perusteella sen mukaan, minkä tyyppistä tekemistä ne vaativat. Perinteisten, laskutaitoja harjoittavien tehtävien lisäksi oppimateriaali sisältää geometrisia konstruktio-, ongelmanratkaisu- ja todistustehtäviä sekä kolme uutta tehtävätyyppiä. Jälkimmäisiä valittiin yhdessä projektiryhmän kanssa artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* perusteella. Kyseisessä artikkelissa pohditaan, millainen matematiikan opetus takaa aikaa kestävää osaamista, jota pystytään käyttämään myös ei-rutiinitilanteissa. Artikkelissa esitetään, että tarkoitukseen sopiva opetus edellyttää oppilaalta aktiivista ja interaktiivista toimintaa, johon sisältyy keskusteluja, ideoiden selittämistä, opiskelutovereiden haastaamista kysymyksillä sekä ratkaisutapojen ja tulosten jakaminen yhteisössä. Lisäksi sopiva opetus antaa oppilaalle mahdollisuuden tutkia ongelmaa itse ennen kun hän saa tukea ja apua. Silloin oppilas joutuu pärjäämään aiempien tietojensa varassa ja itse rakentaa uutta tietoa opettajan ohjauksella. Seuraavaksi esitetään oppikirjaan valitut uudet tehtävätyypit.

Luokitteleminen ("classifying mathematical objects"): oppilas oppii tarkastelemaan huolella, erottelemaan ja tunnistamaan tarkastelun kohteena olevien objektien ominaisuuksia. Samalla määritelmien osaaminen syvenee ja matemaattisen kielen käyttö kehittyy. Tässä oppimateriaalissa luokittelemista vaativia tehtäviä on yhden kappaleen verran kunkin alaluvun harjoitustehtävissä (12 ja 16). Niissä oppilas joutuu käymään läpi kolmion merkillisten pisteiden kaikki ominaisuudet sekä miettimään eri tasokuvioiden ja ympyrän keskinäisiä suhteita.

Väitteen arvioiminen ("evaluating mathematical statements"): oppilas päättää, onko jokin väite tosi aina, joskus tai ei milloinkaan. Tämän tehtävätyypin avulla oppilasta rohkaistaan mm. esimerkkien ja vastaesimerkkien keksimiseen sekä väittelemiseen oman näkemyksen perustelemiseksi ja puolustamiseksi. Silloin, kun oppilas puolustaa omaa näkemystään asiasta, hän joutuu ajattelemaan syvällisesti. Tässä oppimateriaalissa on yksi tämäntyyppinen harjoitustehtävä (23), jossa on koottu kattavasti väitteitä oppimateriaalin molempien alalukujen tietoihin liittyen.

Päättelyssä esiintyvien virheiden analysointi ja korjaaminen ("analysing/correcting mistakes in reasoning") eli "etsi ja korjaa-tyyppiset tehtävät: opiskelija vertaa eri ratkaisuja, tunnistaa virheet ja selittää, mistä ne johtuvat. Lisäksi hän tiedostaa, että ongelmaan on olemassa eri ratkaisutapoja, ja osaa kehittää oman tapansa ongelman ratkaisemiseksi. Tämä tehtävätyyppi asettaa oppilaan kriittisen arvioijan sekä neuvonantajan rooliin. Löytääkseen virheen oppilaan on käytettävä vaihtoehtoisia ajattelutapoja. Tutkielman oppimateriaalissa tämä tehtävätyyppi esiintyy runsaimmin sekä pohdinnoissa (A.12, A.32, A.33) että harjoitustehtävissä (5, 10, 15 ja 18). Niissä on vertailtava eri ratkaisuja samaan ongelmaan, löydettävä päättelyvirheitä sekä puuttuvia perusteluja.

Ongelmanratkaisu- ja todistustehtävien (esim. tehtävät 14, 19, 21 ja 22) käyttöä perustellaan yksityiskohtaisemmin kappaleessa 1.2.1 yleisissä perusteluissa. Geometriset konstruktiotehtävät ovat kautta aikojen kuuluneet geometriaan ja ne ovat edelleen tärkeitä esimerkiksi käytännön elämään pohjautuvina ongelmanratkaisutehtävinä (pohdinnat A.1 ja A.5, harjoitustehtävät 1, 2, 3, 6, 7, 8 ja 9). Laskutaitoja harjoittavat perus- ja vaativammat tehtävät (3, 4, 11, 13, 17 ja 20) ovat matematiikan jokaisen aihealueen olennaisia osia, sillä laskurutiinin kehittyminen on ehdoton tekijä matemaattisen osaamisen saavuttamiseksi [7].

2 Oppimateriaalin perustelu

2.1 Yleinen perustelu

Tämän tutkielman oppimateriaali sisältää luvun *Tasogeometria* kaksi alalukua, joista molemmat on jaettu edelleen kappaleisiin. Alaluku *Kolmion merkilliset pisteet* sisältää kappaleet *Keskinormaalien leikkauspiste, Kulmanpuolittajien leikkauspiste* ja *Mediaanien leikkauspiste*, kun taas alaluku *Ympyrään liittyvien suorien geometria* koostuu kappaleista *Ympyrän tangentti* ja *Kehäkulma*. Tutkielman tässä luvussa perustellaan oppimateriaalin sisältö yleisellä tasolla ja myös kappalekohtaisesti. Oppimateriaali löytyy liitteenä tutkielman lopusta (A). Oppimateriaalin perustelemiseksi käytetään tieteellisiä artikkeleita, jotka käsittelevät esimerkiksi matemaattiseen todistamiseen, matematiikaohjelman GeoGebra käyttöön, tutkivaan oppimiseen, oppijoiden ajattelustrategioihin ja matemaattisiin tehtävätyyppiin liittyviä tutkimuksia. Pohdintatehtävien kuvaukset, niiden tavoitteet ja ratkaisut löytyvät tutkielman luvusta 2.

Oppikirjan aiemmissa luvuissa on jo käsitelty kolmioon ja ympyrään liittyvät olennaisimmat käsitteet ja niihin liittyvät tärkeimmät ominaisuudet kuten suorat, kulmat, suora- ja vinokulmainen kolmio sekä niiden trigonometria, ympyrä, sektori, pituus, piiri, pinta-ala, yhteneväisyys ja yhdenmuotoisuus. Tässä tutkielmassa esitelty oppimateriaali on jatke geometrian oppikirjan edellisiin aiheisiin ja käyttää niistä opittuja tietoja.

Geometrian oppimiseen liittyy useita vaikeuksia. Huomattava moni oppilas epäonnistuu geometrian käsitteiden ymmärtämisessä, jolloin geometrinen todistamis- ja ongelmanratkaisukyky ei kehity riittävästi. Erityisesti oppilaiden todistamiseen liittyvät taidot osoittautuivat tutkimusten mukaan heikoiksi. Puuteellinen ymmärtäminen aiheuttaa oppilaiden keskuudessa pelkoa ja luovuttamista geometrian suhteen, mikä väistämättä johtaa heikkoihin suorituksiin. On tunnistettu useita tekijöitä, joilla voidaan selittää, miksi geometrian oppimista koetaan vaikeaksi. Tällaisia ovat esimerkiksi geometriaan liittyvä kielenkäyttö, visualisoinnin taito ja riittävän tehokkaiden ohjeiden puuttuminen. Perinteisissä lähestymistavoissa geometrian opetuksessa korostuu enemmän se, kuinka paljon oppilas pystyy opettelemaan ulkoa ja vähemmän se, kuinka hyvin hän osaa ajatella ja perustella [6], [11]. Tämän seurauksena hän kohtaa vaikeuksia silloin, kun muistettua tietoa pitäisi soveltaa uudessa tilanteessa. Oppilaille olisi annettava enemmän aikaa geometristen käsitteiden ymmärtämiseen. [11]

Doganin ja Icelin (2011) mukaan opetuksen perinteiset keinot (piirrokset paperilla ja kynällä liitutaululle) eivät riitä geometrisen osaamisen edellyttämien kykyjen saavuttamiseksi. Tällaisiksi kyvyiksi lasketaan esimerkiksi kyky kriittiseen ajatteluun, perustelemiseen, mielikuvituksen käyttämiseen ja asioiden tarkastelemiseen useasta näkökulmasta.

Ratkaisuiksi yllä esitettyihin ongelmiin tarjoutuvat esimerkiksi dynaamiset matematiikkaohjelmat, jotka ovat muuttamassa matematiikan opetuksen luonnetta. Koska geometrian ymmärtämisessä eräs ratkaiseva tekijä on oikeanlainen visualisointi, tähän oppimateriaaliin otetaan mukaan ja käytetään runsaasti dynaamista matematiikkaohjelmaa GeoGebra. Se toisaalta mahdollistaa oppimisprosessissa paljon enemmän kuin pelkkää visualisointia. Opiskelijat pääsevät tutkimaan, tekemään konjektuureja, kokeilemaan, laatimaan selityksiä ja ylipäätään kommunikoimaan yhteistyössä toistensa kanssa matemaattisesta aiheesta; erityisesti geometrian lauseiden ymmärtäminen helpottuu [1]. Eri tutkimuksissa huomattiin, että GeoGebran käytöllä oli huomattavia parantavia vaikutuksia oppilaiden oppimiseen, saavutuksiin ja motivaatioon [6], [20], [21]. Seloraji ja Leong (2017) huomauttivat, että tutkimukseen osallistuneet oppilaat kaikista taitoryhmistä olivat halukkaita käyttämään jatkossakin GeoGebraa oppiakseen matematiikkaa. Myös heikoimmat oppilaat paransivat tuloksiaan GeoGebraa käyttäen. Dogan ja Icel (2011) huomasivat lisäksi, että dynaamisen matematiikkaohjelman käytöllä oli myös pitkäaikaisia vaikutuksia. GeoGebraa käyttäen opitut tiedot säilyivät huomattavasti paremmin oppilaiden pitkäaikaismuistissa ja he kykenivät soveltamaan niitä helpommin myös myöhemmissä vaiheissa. Tietokoneen käyttö auttoi oppilaita muistamaan paremmin tietoja ja suorittamaan laskuja oikein. Geometrisen ajattelun kehittymisessä oppilas lähtee kuvion havainnoimisesta ja tunnistamisesta, jatkaa sen ominaisuuksien tunnistamisella ja lopuksi ymmärtää yhteyden kuvion ominaisuuksien ja aksiomaattisen kontekstin välillä [11]. Dynaamista matematiikkaohjelmaa käyttäen kuvion havainnoiminen ja sen ominaisuuksien tutkiminen on huomattavasti helpompaa ja monipuolisempaa. Oppilas pääsee saattamaan tiettyjä ominaisuuksia omistavaa kuviota moneen eri muotoon, mikä syventää hänen ymmärrystään asiasta. Toistuvien tutkimustehtävässä kertyneiden kokemusten kautta ongelmanratkaisutaito ja ideoiden omaksumisen kyky paranevat [11].

Konstruoidessaan dynaamisesti geometrisia kuvioita oppilas tekee toimenpiteitä, kuten venyttäminen, pyörittäminen, peilaaminen, muuntaminen, mittaaminen, joiden aikana hän pystyy tekemään paljon havaintoja ja parantamaan mielikuvitustaan, jolloin abstraktien asioiden oppiminen helpottuu. Dynaamisella ohjelmalla konstruoinnin vaiheet edellyttävät oikean tuloksen aikaansaamiseksi syvällistä käsitteellistä ajattelua ja kaikkien tarvittavien ominaisuuksien huomioon ottamista. Kun tällainen korkeatasoinen ajattelu saavutetaan, vasta silloin kuvioiden konstruointi onnistuu. Se tarkoittaa puolestaan sitä, että oppilas on saavuttanut syvällistä ymmärrystä asiasta ja korkeantasoista oppimisen kykyä. Perinteisillä kynä-paperi- menetelmillä tämän tavoitteen saavuttaminen on hankalampaa. [6]

Matematiikkaohjelman dynaamisuus tarkoittaa myös sitä, että tietoa – piirrosta ja kuviota – voidaan jatkuvasti muuttaa tarkasteltavana olevan ominaisuuden muuttumatta, jolloin oppilaan on mahdollista nopeasti erottaa olennaiset tekijät epäolennaisista. Määrittelevät ominaisuudet korostuvat ja kuviot alkavat “elää” oppilaan mielessä. Täten oppimiseen syntyy olennainen laadullinen muutos. [15]

Kaikista yllä mainituista seikoista huolimatta tämän tutkielman sisältämä oppimateriaali on mahdollista käydä läpi myös kynällä, harpilla ja piirtokolmiolla. Oppimateriaalin sisältämiä paperille piirrettyjä kuvia voi käyttää tutkimustehtävien pohdintaan ja ratkaisemiseen.

Dynaamisen matematiikaohjelman käytöllä geometrian tunneilla on havaittu olevan myös kääntöpuoli, joka koskee matemaattista todistamista. Joidenkin tutkimusten mukaan oppilaiden sellainen asenne herättää huolta, että tutkimustehtävistä saadut yksittäiset havainnot ja tulokset riittävät todistamaan asian yleisesti päteväksi, eli heille syntyy väärä käsitys matemaattisen totuuden luonteesta. Kun oppilas pääsee konstruoimaan omia empiirisiä näyttöjään, häneltä saattaa hävitä motivaatio todistaa asia deduktiivisesti ja loogisesti päättelemällä eikä hän enää ymmärrä todistuksen merkitystä. On toisaalta sellaisiakin tutkijoita, joiden mielestä ei koulumaailmassakaan ole ylitsepääsemätöntä ristiriitaa empiirisen tiedonsaannin ja todistamisen välillä. Heidän mielestään dynaamiset matematiikkaohjelmat ovat tärkeitä työkaluja induktiivisen ajattelun kehittämiseksi, ja induktiivinen ajattelu on puolestaan tärkeä kyky matematiikassa. [1]

Tämän tutkielman oppimateriaalissa todistamisella on tärkeä rooli sinä mielessä, että pohdintatehtävissä tehdyt havainnot lausutaan myöhemmin lauseina ja todistetaan tosiksi. Oppimateriaali sisältää sellaisiakin lauseita, joiden todistaminen on jätetty opiskelijoille harjoitustehtäviksi. Todistuksen tärkeydestä ja mahdollisuuksista koulumatematiikassa on tehty lukuisia tutkimuksia. Aksoyin ym.(2010) mukaan todistamisen tärkein anti koulumatematiikalle on siinä, että se auttaa oppilaita ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Otaksumilla on tärkeä rooli sinä mielessä, että niitä ensin epäillään todeksi, ja kun ne on todistettu, niistä tulee lause. Matemaattisessa todistamisessa täsmällisen päättelyn käytöllä on ollut Chazanin (1993) mukaan suuri vaikutus siihen, että matematiikka on saavuttanut merkittävän aseman länsimaailman kulttuurissa. Koulumaailmassa ei kuitenkaan kiinnitetä riittävää huomiota todistamiseen eikä oteta huomioon sitä perustavanlaatuista eroa, joka on todistamisen ja empiirisen näytön välillä. Ottenin ym. (2014) mukaan pätevien argumenttien rakentaminen ja toisten perustelujen kriittinen arviointi ovat perustavanlaatuisia kykyjä, joita oppilaiden tulisi kehittää kaikilla opintojen tasoilla. Päättelemisen ja todistamisen tulisi olla painopiste matematiikan opetuksessa kouluvuosien aikana alusta loppuun saakka. He mainitsevat tarpeellisuuden periaatteesta standardina ainedidaktiikalle: se tarkoittaa matemaattisen aiheen esittämistä sillä tavalla, että oppilaat ymmärtäisivät todistamisen älyllisen tarpeellisuuden sen sijaan, että he tulkitsisivat todistamista silkkana pakollisena ja tarpeettomana tehtävänä.

Stylianidesin (2007) mukaan todistaminen on matemaattisen ymmärtämisen perusta. Se on perustavanlaatuinen tekijä matemaattisen osaamisen kehittymisessä sekä matemaattisen tiedon kommunikoinnissa. "Intellectual honesty- ja "continuity- periaatteiden nojalla tulisi noudattaa matemaattisen päättelyn oikeita käytäntöjä jo alakoulusta lähtien ottaen huomioon oppilaiden matemaattisten valmiuksien tason ja kunnioittaen sitä. Todistamisen periaatteiden mukaan empiirinen havainto ei käy todistukseksi edes alakoulussa. Stylianides esittää lisäksi, että koululuokassa opettaja toimii matemaattisen yhteisön edustajana, joten hänellä on vastuu hyväksyä oppilaan argumentteja todistukseksi tai jättää hyväksymättä. Opettajalla on samalla vastuu siitä, että hän kertoo oppilaille ja saa heidät vakuuttumaan siitä, miksi toiset argumentit käyvät todistukseksi ja toiset eivät. Tämän tutkielman oppimateriaalissa onkin ehdotettu, että pohdintatehtävien läpikäymisen ja havaintojen tekemisen jälkeen käytäisiin opettajajohtoisesti yhdessä läpi oikeat ratkaisut sekä niiden todistukset, jotta opiskelijoilla ei jäisi asiasta väärinkäsityksiä.

Aksoyin ym.(2010) mukaan tavoitteena on osata hyödyntää dynaamisia matematiikkaohjelmia myös todistamisessa. Jos opiskelijoille tarjotaan opettajan ohjauksen ohella huolellisesti suunniteltuja tehtäviä sekä sellainen oppimisympäristö, joka teknisten apuvälineiden läsnäollessa edistää sekä konjektuurien tekoa että deduktiivista päättelyä, silloin opiskelijat pystyvät hyödyntämään tehokkaasti dynaamisia matematiikkaohjelmia myös todistamistaitonsa kehittämiseksi. Opettajan rooli korostuu entisestään silloin, kun matematiikkaa opiskellaan dynaamista matematiikkaohjelmaa käyttäen. Oppilaiden tutkiessa tiettyä konjektuuria jatkuvien vaihtelujen kautta opettajan on kysyttävä, miksi he luulevat jonkin havainnon olevan yleisesti tosi, ja on haastettava oppilaita selittämään väitteitään. Oppilaiden tekemien tutkimustehtävien on hyvä sisältää kolme aspektia: kommunikaatio, tutkimus ja selittäminen. [1]

Tämän tutkielman sisältämässä oppimateriaalissa on pyritty suunnittelemaan mahdollisimman monta pohdintatehtävää edellä esiteltyjen tavoitteiden mukaisesti. Esimerkkinä voidaan mainita pohdinnat A.1 ja A.2, joissa tavoitteena on löytää kolmesta pisteestä yhtä etäällä oleva piste sekä huomata sen yhteys kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteeseen. Opiskelija ohjataan muutamilla tarkkaan mietityillä kysymyksillä ratkaisun löytämiseen. Kun opiskelija tutkii GeoGebran avulla kahdesta pisteestä yhtä etäällä olevien pisteiden muodostaman käyrän ominaisuuksia ja selittää näkemyksiään parilleen tai kirjoittaa ne ylös, hän on yhtä aikaa muodostamassa todistusta lauseeseen "piste on janan keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun se on yhtä etäällä janan päätepisteistä".

Aksoyin ym. (2010) mukaan De Villiers (1998) ehdotti, että todistaminen sisältäisi kolme vaihetta: selitys / todistaminen, tutkiminen / uusien ratkaisujen löytäminen ja tarkistus (silloin, kun väitteen totuusarvosta ollaan jo vakuuttuneita). Tämän tutkielman sisältämässä oppimateriaalissa sovelletun tutkivan oppimisen periaatteiden mukaan järjestys kuitenkin muuttuu: ensin tutkitaan ja tarkistetaan, sitten todistetaan (selittäminen kuuluu aina kaikkiin vaiheisiin). Tutkimustulosten perusteella GeoGebran käyttö geometrian tunneilla osoittautui hyödylliseksi tarkistusvaiheessa ja vähemmän hyödylliseksi todistamis- ja uusien ratkaisujen löytämisvaiheessa [1]. Siten tässä oppimateriaalissa lauseen lausuminen ja sen todistaminen deduktiivisesti päättelemällä tapahtuu aina jälkikäteen; GeoGebraa käytetään prosessin alussa tutkimiseen, havaintojen ja niistä johtuvien johtopäätösten tekoon sekä tarkistamiseen. Tutkimustulokset lisäksi osoittivat, että GeoGebran käyttö ei kehittänyt oppilaiden geometrista ymmärrystä perinteisiä opetusmenetelmiä paremmin silloin, kun se sisälsi vain staattisia kuvia [1]. Hyödyllinen vaikutus syntyi nimenomaan siitä, että oppilas itse konstruoi ja tutki asiaa dynaamisesti. Tämän tutkielman oppimateriaalin GeoGebralla tutkituissa tehtävissä opiskelija ei vain rakenna piirroksia itse, vaan hän voi aina tarttua kuvaan tietyistä pisteistä ja raahaamalla niitä pääsee seuraamaan asiaa kuvan eri muodoissa ja mittasuhteissa. On opettajan vastuulla laatia sellaisia tehtäväsarjoja, joita läpikäydessään opiskelijat pystyvät linkittämään empiiriset havainnot deduktiiviseen päättelyyn. Tästä oppimateriaalista esimerkkinä edellä mainittuun voidaan mainita mallitehtävän A.26, jossa on laskettava kehäkulman ja puoliympyrän sisältämän kehäkulman suuruus, vaikka pohdintatehtävissä A.24 ja A.25 tehtyjen havaintojen nojalla olisi mahdollista ilmoittaa kulmien arvot suoraan ilman laskutoimituksia.

Tässä tutkielmassa käsitelty oppimateriaali sopii hyvin tutkivan oppimisen mallin käytäntöihin. Tutkiva oppiminen on konstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalta luotu malli, jossa oppilaat tutkivat itse jotakin ongelmaa ilman, että heille on ennalta opetettu asiasta kaikkia tarvittavia tietoja [24]. Tutkivassa oppimisessa korostuu matemaattisen tiedon tuottamiseksi tarvittava luovuus ja lisäksi matematiikan opiskelusta tulee hauskempaa. Se on nykyajan tehokkaimpina pidettyjä ja monimutkaisimpia oppimismalleja, jonka monet asiantuntijat uskovat valmentavan oppilaita parhaiten tulevaisuuden työelämän asettamiin vaatimuksiin kuten itseohjautuvuuteen, tiimityöskentelyyn, monimutkaisten ongelmien ratkaisemiseen ja uudessa tilanteessa tiedon soveltamiseen liittyviin taitoihin. Tässäkin opetusmallissa opettajan rooli on tärkeä; hän toimii ikään kuin tutkivan oppimisen sydämenä. Opettaja luo sopivan korkeatasoisen oppimisympäristön, johon kuuluu mm. hänen tarjoamansa oikea-aikainen ohjaus ja asiantuntijuus. [7]

Matemaattisten tutkimustehtävien merkitys löytyy siitä, että niiden ratkaiseminen vaatii tiedon lisäksi ymmärtämistä ja ongelmanratkaisutaitoa. Jälkimmäinen vaatii puolestaan joustavaa ajattelua ja siten luovuutta, joka on taas divergentin ja loogisen ajattelun tavoitteellinen yhdistelmä. Matemaattisissa tutkimustehtävissä on olennaista erilaisten ratkaisukeinojen keksiminen ja siten luovuuden harjaannuttaminen. Tutkimustehtävät ovat avoimia tehtäviä, joiden alkutilanne on annettu (sitä sanotaan kontekstin luomiseksi), mutta tehtävän sisältämää ongelmaa voi lähestyä eri tavoin. Oikeita ratkaisuja on useampia ja oppilaan on mahdollista muotoilla uusia kysymyksiä. Tutkivan oppimisprosessin edetessä oppilaiden tietämys aiheesta syvenee ja haarautuu asteittain siten, että ensin he itse asettavat tutkittavaan aiheeseen liittyviä kysymyksiä, vastaavat niihin intuitiivisesti (kysymyksiin vastaamista sanotaan työskentelyteorioiden muodostamiseksi) ja myös arvioivat kriittisesti omia selityksiään ja teorioitaan. Sitten he etsivät uusia tietoja ja kehittävät niiden perusteella tarkentavia kysymyksiä, joihin vastaavat taas uutta tietoa etsimällä. [7]

Tutkivan oppimisen eräs tärkeä aspekti on yhteistoiminnallisuus sekä siihen liittyvä kommunikointi ja yhteistyö oppilaiden kesken. Barronin ym.(2008) mukaan ryhmätyö auttaa yksilöllistä opiskelua monenlaisten sosiaalisten vuorovaikutusten kautta kuten oivalluksien jakaminen, ongelman ratkaisun yritykset erilaisten näkökulmien ja argumenttien pohjalta, yksilön henkilökohtainen selitys asiasta, toisten strategioiden huomioiminen, toisten selitysten kuunteleminen ja kriittisten näkökulmien esille tuominen. Tutkimukset osoittavat, että ryhmätöiden avulla opiskelleet oppilaat suoriutuvat yleensä huomattavasti paremmin ongelmanratkaisutilanteista kuin ne, jotka ovat opiskelleet itsenäisesti. Suorituksen taso riippuu kuitenkin vahvasti myös siitä, kuinka hyvä ja tehokas ryhmän jäsenten yhteistyö oli. Opettajan rooli korostuu myös tässä tilanteessa: perustamalla oikeita ryhmätyöskentelykäytäntöjä hän on vastuussa siitä, kuinka tavoitteellisesti ryhmän jäsenten yhteistyö sujuu. Hänen tulee havaita ryhmän jäsenten välisiä vuorovaikutuksia ja keskusteluja sekä tarjota oikea-aikaista tukea ja palautetta ryhmätyön kehittämistä varten. Tietotekniset työkalut voivat olla hyödyllisiä työskentelytapojen vakiinnuttamisessa ja tuottavien yhteistoiminnallisten vuorovaikutusten tukemisessa. Tutkimukset myöntävät myös sen tosiasian, että yhteistoiminnallisen ja tutkivan oppimisen toteuttaminen voi olla käytännössä haastavaa. [2]

Matematiikan opiskelussa on yleensä hankalampaa toteuttaa ryhmätyötä, mutta parityö sen sijaan soveltuu monenlaisiin tilanteisiin. Siten tämän tutkielman oppimateriaalissa onkin suositeltu kunkin pohdintatehtävän ratkaiseminen parityönä. Pohdintatehtävät eivät käsittele yleensä kovin laajoja tutkittavia aiheita, ja myös niihin tavoiteltu vastaus on yksikäsitteinen, mutta ongelman ratkaisukeinoja ja niihin liittyviä selityksiä voi olla useampia. Syvällisempiä pohdintoja, joissa opiskelijan itse pitää konstruoida myös kuva, ovat A.1-2, A.5-6, A.10 ja A.18. Muissa pohdintatehtävissä opiskelijalla on vähemmän piirrettävää ja hänen on lähinnä havainnoitava jokin säännönmukaisuus annetussa tilanteessa. Näiden havaintojen itsenäisen perustelemisen yleisellä tasolla katsotaan kuitenkin ylittävän useimpien oppilaiden valmiudet vielä tässä vaiheessa (esimerkiksi pohdintojen A.9, A.13, A.16 ja A.24 tapauksessa), siksi todistus esitetään suoraan kirjassa tai sitä ei esitetä lainkaan.

Tutkivaan oppimiseen on havaittu liittyvän myös mahdollisia haittapuolia. Tutkivaa matematiikkaa sovellettaessa on esimerkiksi mahdollista, että opiskelun painottuessa liian voimakkaasti asioiden ymmärryksen vahvistamiseen ja keksimiseen laskutaidot jäävät puutteellisiksi. Hyvin olennaista tutkivaa matematiikkaa harjoitettaessa onkin opettajan näkemys sekä aiheenvalinnassa että tasapainon löytämisessä mekaanisen laskutaidon ja tutkivan oppimisprosessin välillä [24]. Tässä tutkielmassa käsiteltävän oppimateriaalin aihealueet soveltuvat hyvin tutkivan oppimisen käyttöön. Edellä mainittu tasapaino pyrittiin luomaan siten, että lauseisiin johtavia havaintoja tehdään pohdintatehtävissä tutkivan oppimisen avulla, mutta malli- ja harjoitustehtävissä keskitytään yhtä paljon myös laskutaitoihin.

Kirschner ym. (2006) esittävät tutkimuksessaan huomattavasti ankarampaa kritiikkiä konstruktivistiselle oppimiskäsitykselle ja siihen juurtuneelle tutkivalle oppimiselle. Heidän mukaansa moni tutkimus, joka pohjautuu ihmisen kognitiiviseen rakenteeseen, asiantuntijan ja noviisin väliseen eroon sekä kognitiiviseen taakkaan liittyviin tietoihin, on osoittanut, että edellä mainituille oppimiskäsityksille ominainen minimaalinen ohjeistus ei toimi koululuokassa, sillä se ei tuota toivottuja tuloksia. Heidän mukaansa minimaalinen ohjeistus oppimisprosessin aikana on vähemmän tehokasta kuin tarkkoihin ohjeisiin pohjautuvat opetusmenetelmät. Tarkkojen ohjeiden merkitys hiipuu vasta siinä vaiheessa, kun oppilaalle muodostuu riittävän vahvaan ja korkeatasoiseen osaamiseen pohjautuva sisäisen ohjauksen taito. Heidän mukaansa suurin osa kaikenikäisistä oppijoista osaa konstruoida uutta osaamista siinä tapauksessa, että heille annetaan riittävästi tietoja ja ohjeita, eikä ole näyttöä sille, että minimaalisella tiedonmäärällä heidän kykynsä rakentaa uutta tietoa paranisi. He mainitsevat Morenon (2004) tutkimustuloksista, joiden mukaan tutkivan oppimisen mallilla opiskelleet oppilaat eivät saavuttaneet korkeampaa osaamisen tasoa eivätkä osanneet soveltaa tietoja uudessa tilanteessa paremmin kuin ne oppilaat, jotka opiskelivat tarkan ohjauksen ja runsaiden esimerkkien parissa. Perusteluna näihin tutkimustuloksiin on käytetty kognitiivisen taakan teoriaa, jonka nojalla vapaa tutkimus- ja keksimistyö monimutkaisessa kontekstissa rasittaa sen verran työmuistia, että se on noviisin tapauksessa haitallista oppimiselle. He jatkavat siten, että noviisien tapauksessa oikeita ongelmanratkaisumenetelmiä esittelevien esimerkkien tutkiminen näyttää olevan ylivoimaisesti hyödyllisempää kuin ratkaisun keksiminen alusta lähtien itse. Selityksenä tähän esitetään, että työmuistin kuormitus vähenee tutkimalla valmiita ratkaisumenetelmiä, sillä silloin työmuistin voimavaroja voi keskittää keksimisen sijaan nimenomaan ratkaisumenetelmän vaiheiden välisten loogisten yhteyksien ymmärtämiseen. He mainitsevat vastakkainasetteluna myös Wickensin konstruktivistisen argumentin, joka sai myöhemmin paljon seuraajia ja jonka mukaan tarkkojen ohjeiden liiallinen määrä matematiikan opiskelussa voi tuottaa hyviä välittömiä tuloksia mutta samalla haitata oppilaan kykyä tuottaa oikeita ratkaisuja ongelmiin myöhemmässä vaiheessa. [13]

Osa tässä tutkielmassa käsitellyn oppimateriaalin aihepiireistä on oletettavasti jo peruskoulusta asti tuttua opiskelijoille, esimerkiksi keskuskulman, kehäkulman, kulmanpuolittajan, keskinormaalin ja mediaanin käsitteet. Uusia aiheita ovat mm. kolmion merkilliset pisteet, kolmion ja ympyrän keskinäinen suhde, kulmanpuolittaja- ja mediaanilause, tangenttikulma ja jännekulmio. Edellä esitellyt tutkivan oppimisen haittapuoliin liittyvät näkökulmat tässä tutkielmassa käsitellyn oppimateriaalin pohdintatehtävissä huomioon ottamalla on opiskelijan tutkimistyötä ohjattu toivottavaan suuntaan muutamalla tarkkaan mietityllä ohjeella ja kysymyksellä. Siitä huolimatta opiskelijalla on aina mahdollisuus keksiä omia ratkaisutapojaan, jotka johtavat oikeaan tulokseen; tähän viittaa sellainen ohjauksen sanankäyttö, että "voit edetä esimerkiksi tällä tavalla".

2.2 Kolmion merkilliset pisteet

2.2.1 Keskinormaalien leikkauspiste

Alaluvun *Kolmion merkilliset pisteet* kappaleessa *Keskinormaalien leikkauspiste* käydään läpi janan keskinormaaliin, kolmion keskinormaalien leikkauspisteeseen ja kolmion ympäri piirrettyyn ympyrään liittyvät käsitteet ja ominaisuudet.

Oppimateriaali alkaa pohdinnalla A.1, jonka tarkoituksena on johdatella opiskelijoita janan keskinormaalin konstruointiin ja sen ominaisuuksien tunnistamiseen sekä kolmion keskinormaalien leikkauspisteen löytämiseen tutkivan oppimisen avulla. Pohdintatehtävässä opiskelijat ratkaisevat parityönä käytännön ongelman, jossa on löydettävä kolmesta talosta, jotka eivät sijaitse samalla suoralla, yhtä kaukana oleva piste. Ongelman ratkaisemista matematiikkaohjelma GeoGebran appletin avulla.

Kun opiskelijat ovat saaneet jo oletettavasti selville pohdinnassa A.1 kahdesta pisteestä yhtä etäällä olevien pisteiden muodostaman käyrän ominaisuudet, määritellään kyseinen käyrä janan keskinormaalina. Seuraavaksi kerrotaan myös, mitä tarkoittaa kolmion ympäri piirretty kolmio. Jälkimmäisen määrittelyn tarkoituksena on yhdistää kolmion keskinormaalien leikkauspiste kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteeseen, mikä tapahtuu pohdinnassa A.2. Siinä ei tutkita uutta asiaa, vaan tarkoitus on koota yhteen edellisistä havainnoista ja määritelmistä johtuvia johtopäätöksiä, jotka implikoivat, että kolmion keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä ja tämä piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

Tässä vaiheessa opiskelijalla on jo tiedossa kaikki asiat, joita tässä kappaleessa oli tarkoitus tutkia ja päätellä. Seuraavaksi siirrytään oikeiden matemaattisten käytäntöjen mukaisesti lauseiden muodostamiseen ja niiden todistamiseen. Lauseet muodostetaan pohdinnoissa tehtyjen havaintojen ja johtopäätösten nojalla.

Todistetaan lause A.3, jonka mukaan piste on janan keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun se on yhtä etäällä janan päätepisteistä. Lauseessa A.4 lausutaan, että kolmion keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä ja tämä piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Oppimateriaalissa ei kuitenkaan esitetä kaikkien lauseiden todistuksia, vaan osa jätetään opiskelijoille harjoitustehtäviksi, kuten myös lauseen A.4 todistus.

2.2.2 Kulmanpuolittajien leikkauspiste

Alaluvun *Kolmion merkilliset pisteet* kappaleessa *Kulmanpuolittajien leikkauspiste* käydään läpi kulman puolittajaan, kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteeseen ja kolmion sisään piirrettyyn ympyrään liittyvät käsitteet ja ominaisuudet. Siinä tutustutaan lisäksi kulmanpuolittajalauseeseen ja opitaan sen pohjalta analysoimaan valmiita ratkaisuja.

Johdattelu alkaa pohdinnalla A.5, jonka tarkoituksena on johdattaa opiskelijoita kulman puolittajan konstruointiin ja sen ominaisuuksien tunnistamiseen sekä kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteen löytämiseen tutkivan oppimisen avulla. Pohdintatehtävässä opiskelijat ratkaisevat parityönä käytännön ongelman. Siinä esiintyy kolme kylää, jotka eivät sijaitse samalla suoralla, ja niitä yhdistävä kolme suoraa tietä. On löydettävä kolmesta tiestä yhtä kaukana oleva piste. Ongelman ratkaisemista suositellaan matematiikkaohjelma GeoGebran appletin avulla.

Kun opiskelijat ovat saaneet jo oletettavasti selville pohdinnassa A.5 kahdesta toisensa leikkaavasta janasta yhtä etäällä olevien pisteiden muodostaman käyrän ominaisuudet, määritellään kyseinen käyrä kulman puolittajana. Seuraavaksi kerrotaan myös, mitä tarkoittaa kolmion sisään piirretty kolmio. Jälkimmäisen määrittelyn tarkoituksena on yhdistää kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteeseen, mikä tapahtuu pohdinnassa A.6. Siinä ei tutkita uutta asiaa, vaan tarkoitus on koota yhteen edellisistä havainnoista ja määritelmistä johtuvia johtopäätöksiä, jotka implikoivat, että kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä ja tämä piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Tässä vaiheessa opiskelijalla on jo tiedossa kaikki asiat, joita tässä kappaleessa oli tarkoitus tutkia ja päätellä. Seuraavaksi siirrytään oikeiden matemaattisten käytäntöjen mukaisesti lauseiden muodostamiseen ja niiden todistamiseen. Lauseet muodostetaan pohdinnoissa tehtyjen havaintojen ja johtopäätösten nojalla.

Lausutaan ensin lause A.7, jonka mukaan piste on janan kulmapuolittajalla täsmälleen silloin, kun se on yhtä etäällä kulman kyljistä. Tämän lauseen todistus jätetään opiskelijoille harjoitustehtäväksi. Heidän pitäisi kyetä laatimaan todistus esimerkiksi edellisen lauseen A.3 todistusta mallina käyttäen. Oppimateriaalissa todistetaan lause A.8, sillä opiskelijoille voi olla liian hankalaa itse laatia todistus tähän lauseeseen. Lauseessa todetaan, että kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä ja tämä piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Tutustutaan tässä vaiheessa myös kulmanpuolittajalauseeseen, vaikka se ei liity aiheeseen "kolmion merkilliset pisteet", mutta liittyy kuitenkin kolmion kulmanpuolittajiin. Tutustuminen voidaan aloittaa pohdintatehtävällä A.9, jossa on tarkoitus seurata GeoGebran appletin avulla kolmion eri sivujen ja niiden osien suhteita. Opiskelijan tulee huomata, mitkä suhteet pysyvät keskenään yhtä suurina silloin, kun kolmion kärkipisteitä siirretään mielivaltaisiin kohtiin. Koska tässä pohdinnassa opiskelijan ei tarvitse tehdä erityisiä älyllisiä oivalluksia, vaan pitää huomata tietty säännönmukaisuus, sen yli voidaan hypätä ja tutustua suoraan kulmanpuolittajalauseeseen.

Tässä kohtaa oppimateriaalia kuuluu ylöspäin eriyttävä pohdinta A.10. Sen tarkoituksena on, että opiskelija kokoaa kolmion kahteen merkilliseen pisteeseen liittyvät tietonsa ja keksii sellaisen kolmion, jossa kyseiset merkilliset pisteet yhtyvät. Oikeiden matemaattisten käytäntöjen mukaisesti opiskelijan tulee perustella parilleen, miksi merkilliset pisteet yhtyvät hänen keksimässään kolmiossa. Silloin, kun oppilas perustelee asioita selittämällä, hänen ymmärryksensä asiasta syvenee ja myös matematiikan oppimisen kommunikointiin liittyvä tavoite toteutuu. Tämä pohdinta ei liity kulmanpuolittajalauseeseen, mutta se kuitenkin laitettiin tähän kohtaan siitä syystä, että se erottaisi lauseeseen johtavan pohdinnan itse lauseesta. Koko oppimateriaalissa pyrittiin erottamaan pohdinnat ja niistä seuraavat lauseet toisistaan, jotta pohdinnan vastaus ei olisi näkyvissä välittömästi pohdinnan jälkeen.

Seuraavaksi esitetään kulmanpuolittajalause A. 11 sekä sen todistus.

Pohdinta A.12 perustuu kulmanpuolittajalauseeseen ja siinä opiskelijan on tarkoitus arvioida kriittisesti kahta ratkaisua samaan tehtävään. Tavoitteena on, että hän huomaa geometriatehtävää ratkaistaessa piirtämisen tärkeyden ja lisäksi sen, että kulmanpuolittajalauseen kaavassa esiintyvää verrantoa voidaan käyttää useammalla tavalla kirjoitettuna muttei millä tavalla vaan. Pohdinnan b)-kohdan ratkaisutapa on oikein, joten se toimii myös malliesimerkkinä tähän aiheeseen.

2.2.3 Mediaanien leikkauspiste

Alaluvun *Kolmion merkilliset pisteet* kappaleessa *Mediaanien leikkauspiste* käydään läpi kolmion mediaaneihin ja niiden leikkauspisteeseen liittyvät käsitteet ja ominaisuudet.

Kappale alkaa pohdinnalla A.13, jonka tarkoituksena on johdatella opiskelijoita kolmion keskijanan käsitteeseen sekä keskijanojen leikkauspisteen ominaisuuksiin tutkivan oppimisen avulla. Pohdinnan alussa kerrotaan, mitä tarkoittaa painopiste, joka on myös valmiiksi merkitty kolmioon. Opiskelijoiden on tarkoitus saada selville käyttämällä GeoGebran applettia, että painopiste sijaitsee kolmen mediaanin leikkauspisteessä ja lisäksi, että se jakaa kunkin mediaanin suhteessa $2:1$ kolmion kärjestä lukien. Mediaanin eli keskijanan käsite määritellään vasta jälkikäteen, ja pohdinnassa riittää, jos opiskelija huomaa, että kolmion kärjestä lähtevä ja painopisteen kautta kulkeva jana puolittaa vastakkaisen sivun.

Kun painopisteen ominaisuuksiin liittyvät havainnot on jo tehty, lausutaan ne lauseen muodossa. Tässä tapauksessa todistus on kuitenkin sivuutettava, sillä se vaatii ylimääräisiä ja opiskelijoille tuntemattomia tietoja.

Mallitehtävässä A.15 kootaan yhteen ja sovelletaan erityistapauksessa kolmion merkillisiin pisteisiin liittyvät ominaisuudet. Tähän mallitehtävään liittyy aikaisempi pohdinta A.10, jossa tehtävänä oli keksiä sellainen kolmio, jossa kaksi merkillistä pistettä – keskinormaalien ja kulmanpuolittajien leikkauspisteet – yhtyy. Ne opiskelijat, jotka kävivät läpi pohdinnan A.10, selvittivät jo, ett ä kyseinen kolmio on tasasivuinen. Tämän mallitehtävän ratkaisemiseksi on otettava huomion myös kolmas merkillinen piste eli mediaanien leikkauspiste. Mallitehtävä on sen verran tehty hankalammaksi, että siinä opetellaan laskemaan yleisesti muuttujilla eikä konkreettisilla lukuarvoilla.

2.3 Ympyrään liittyvien suorien geometria

2.3.1 Ympyrän tangentti

Alaluvun *Ympyrään liittyvien suorien geometria* kappaleessa *Ympyrän tangentti* tutustutaan ympyrän ja suoran keskinäisiin suhteisiin sekä tangentin ominaisuuksiin. Lisäksi käydään läpi ulkopuolisesta pisteestä ympyrälle piirrettyihin tangentteihin liittyvät ominaisuudet ja näkemiskulman käsitteen.

Tangentin käsitteeseen johdattelu aloitetaan pohdintatehtävällä A.16, jonka kynällä ja paperilla tehtävä versio eroaa jokseenkin dynaamisen matematiikkaohjelman avulla tehtävästä versiosta. Molempien tapauksessa opiskelijan on tarkoitus tutkia, miten ympyrän kehällä olevan pisteen kautta kulkeva suoran ja samaan kehällä olevaan pisteeseen piirretyn säteen välinen kulma vaikuttaa ympyrän ja suoran yhteisten pisteiden lukumäärään. Tavoitteena on, että opiskelija huomaa, että silloin, kun kyseinen kulma on suorakulma, yhteisten pisteiden lukumäärä on yksi eli suora sivuaa ympyrää. Kun taas kulman arvo on eri kuin 90^o, ympyrällä ja suoralla on aina kaksi yhteistä pistettä eli suora on ympyrän sekantti. GeoGebraa käyttäen tutkimalla voi olla hieman haastavampaa huomata suoran kulman ja yhden yhteisen pisteen yhteyttä, eli opiskelijan on oltava tarkkaavaisempi kuin siinä tapauksessa, että hän piirtäisi paperille valmiiksi suoran kulman kehällä olevaan pisteeseen.

Kun ympyrän yhdessä tai kahdessa pisteessä leikkaava suora on jo tutkittu, määritellään sen pohjalta tangentin käsite ja lausutaan pohdinnassa tehty havainto lauseena (A.17), jonka mukaan ympyrää yhdessä pisteessä sivuava suora on aina kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tämän lauseen todistus sivutetaan hankaluutensa vuoksi.

Kun tangentin käsite on jo määritelty ja sen ominaisuudet ovat tiedossa, jatketaan tutkimalla ulkopuolisesta pisteestä ympyrälle piirrettäviin tangentteihin liittyviä ominaisuuksia pohdinnassa A.18. Opiskelijan on tarkoitus havaita, että ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää aina kaksi tangenttia ympyrälle ja että tangenttien muodostaman kulman ja vastaavan keskuskulman summa on aina 180^o. Hänen tulisi lisäksi tehdä havainto tangenttijanojen pituuksiin liittyen. Opiskelijan tulee perustella havaintonsa deduktiivisesti päättelemällä noudattaen oikeita matemaattisia käytäntöjä.

Ennen kuin muodostetaan määritelmä ja lauseet edellisessä pohdinnassa tehtyjen havaintojen perusteella, opiskelijat voivat käydä läpi myös pohdinnan A.19, joka on tarkoitettu lähinnä eriyttämiseen. Siinä heidän tulee piirtää kaikki mahdolliset tangentit kahdelle toisiaan leikkaamattomalle ympyrälle, joista kumpikaan ei ole toisen sisässä. GeoGebran työkaluja käyttäen tämä toimenpide onnistuu helposti. Opiskelijoiden on lisäksi pohdittava, mitä tarkoittaa se, että kaksi ympyrää näyttää yhtä suurelta jostain pisteestä katsottuna ja miten tämä liittyy ympyröiden yhteisiin tangentteihin. Tästä hankalammasta aspektista johtuen pohdinta on tarkoitettu ylöspäin eriyttämiseen ylöspäin.

Pohdinnassa A.18 tehtyjen havaintojen nojalla määritellään seuraavaksi kahden tangenttisuoran muodostaman tangenttikulman eli näkemiskulman käsite. Viimeistään tässä vaiheessa opiskelijan olisi tarkoitus ymmärtää, että ympyrän / pallon suuruus jostain pisteestä katsottuna liittyy tangenttikulmaan, joka muodostuu siitä pisteestä ympyrää/palloa katsottaessa. Asian selkeyttämistä varten esimerkissä A.20 esitetään Kuun näkemiskulma Maapallon pinnalla olevasta pisteestä katsottuna.

Lauseissa A.21 ja A.22 lausutaan pohdinnassa A.18 tehdyt havainnot, jotka implikoivat, että tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180^o sekä tangenttikulman kyljet mitattuina kärjestä sivuamispisteisiin ovat yhtä pitkät. Koska näiden lauseiden todistaminen tapahtuu helposti käyttämällä apuna yhteneviä kolmioita, ne jätetään harjoitustehtäviksi. Tässä oppimateriaalissa suurin osa lauseiden todistuksista ja harjoitustehtävissä esiintyvistä todistuksista onnistuu yhtenevien tai yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Jos oppilas tajuaa kokeilla samaa menetelmää samankaltaisessa tilanteessa, niin {Habits of mind -tavoitteissa esitetty {oppilaan tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijä -tavoite toteutuu.

Kappaleen lopuksi mallitehtävässä A.23 on esitetty laskuesimerkki tangenttikulmaan liittyen. Siinä lasketaan etäisyyttä kahden pallon/ympyrän yhtä suurten näkemiskulmien pohjalta. Niin kuin tähänkin asti jokaisen aihepiirin tapauksessa, esimerkkilaskuihin ja -todistuksiin tutustuminen katsotaan tärkeäksi ehdoksi opiskelijan tehokasta oppimista tavoiteltaessa.

2.3.2 Kehäkulma

Alaluvun *Ympyrään liittyvien suorien geometria* kappaleessa *Kehäkulma* tutustutaan kehäkulman käsitteeseen ja käydään läpi keskuskulman ja kehäkulman keskinäiseen suhteeseen liittyvät ominaisuudet.

Tämä kappale aloitetaan poikkeuksellisesti suoraan kehäkulman määritelmällä, jonka jälkeen pohdinnassa A.24 opiskelijan tulee havaita samaa ympyrän kaarta vastaavien kehä- ja keskuskulman suuruuksien välinen yhteys. Pohdinnan kohta a) on tarkoitettu tutkittavaksi vain GeoGebran avulla, sillä siinä on seurattava kulmien astelukuja. Kohdassa b) opiskelijan on tarkoitus käyttää kohdan a) havaintoa ja päätellä, että ympyrän kehän useaan eri kohtaan piirretyt kehäkulmat ovat yhtä suuret, jos niitä vastaa samaa keskuskulma. Kohdassa c) opiskelija tarkistaa kohdassa b) tehdyt johtopäätökset GeoGebran appletin avulla.

Heti seuraavaksi pohdinnassa A.25 tutkitaan kehäkulman erityistapausta, jossa kehäkulma sisältyy puoliympyrään. Tarkoituksena on, että opiskelija ensin päättelee laskemalla edellisten havaintojen pohjalta kehäkulman olevan suora kulma ja sen jälkeen tarkistaa tuloksen mittaamalla kulman. Tämä pohdinta ei siis toimi tutkivana oppimisena, vaan siinä ensin päätellään ja sen jälkeen tarkistetaan niin kuin De Villiers (1998) ehdotti, että todistamisen rakenteen tulisi ollakin [1].

Mallitehtävän A.26 tarkoituksena on kehä- ja keskuskulmaan liittyvän laskumenetelmän mallintamisen [13] lisäksi vahvistaa opiskelijan tietoisuutta siitä, että yksittäisiä havaintoja ei voida käyttää yleisinä totuuksina ennen kuin ne todistetaan [22], [19], [3], [1]. Koska mallitehtävä on heti pohdintojen jälkeen ja ennen aiheeseen liittyvien lauseiden todistuksia, tehtävässä esiintyvän kahden kehäkulman suuruus on laskettava eikä niitä voida päätellä pelkkien keskuskulmien suuruuksista.

Ennen kyseisten lauseiden lausumista ja todistamista otetaan mukaan vielä yksi pohdinta (A.27), joka on tarkoitettu eriyttämiseen. Siinä nopeammat opiskelijat voivat kehäkulman suuruutta käyttämällä miettiä ehdon sille, että nelikulmio on jännekulmio. GeoGebran appletista on tähän tehtävään apua.

Kun kaikki aiheeseen liittyvät havainnot on tehty, lausutaan ja todistetaan niihin liittyvät kolme lausetta, joiden mukaan kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta (A.28), samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret (A.29) ja puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora (A.30).

Mallitehtävän A.31 tarkoituksena on syventää opiskelijan ymmärrystä kehä- ja keskuskulmaan liittyvistä laskutavoista. Lisäksi tehtävässä päätellään ehto sille, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, eli tämä mallitehtävä on yhteydessä eriyttävään pohdintaan A.27. Mallitehtävästä käy ilmi myös, että lauseen todistamisen jälkeen kehäkulman suuruus voidaan ilmoittaa suoraan vastaavan kaaren asteluvun puolikkaana.

Kappale sisältää lopuksi vielä kaksi pohdintaa. Niistä ensimmäinen (A.32) on "etsi virhe ja korjaa-tehtävä. Sen tarkoituksena on, että opiskelija oppii tarkastelemaan huolellisesti, mikä on kehäkulmaa vastaava keskuskulma ja ympyrän kaari. Tehtävässä on sekä väärin että oikein pääteltyjä kohtia, ja siten opiskelijalta vaaditaankin erityistä tarkkavaisuutta.

Viimeinen pohdinta A.33 liittyy puoliympyrän sisältämään kehäkulmaan ja siinä opiskelijan pitää arvioida kriittisesti käytännön ongelmaan esitettyä vaillinaista ratkaisuehdotusta sekä jatkaa sitä johdonmukaisesti.

Kappaleen viimeisen esimerkin tarkoituksena on korostaa 90-asteisen kehäkulman ominaisuutta, joka tuli jo esille pohdinnan A.33 ratkaisun yhteydessä ja joka implikoi, että yhdistämällä 90-asteisen kehäkulman kylkien erilliset päätepisteet saadaan ympyrän halkaisija. Vertailun vuoksi esitetään myös kehäkulma, jonka suuruus on eri kuin 90^o. Yhdistämällä tällaisen kulman kylkien erilliset päätepisteet saadaan ympyrän jänne eikä halkaisijaa.

3 Opettajan opas

Tämä tasogeometrian aihealue soveltuu hyvin tutkivan oppimisen mallin käyttöön. Opiskelija voi rakentaa itse uutta tietoa kokeilemalla, havaitsemalla ja perustelemalla havaintonsa todeksi loogisesti päättelemällä. Pohdintatehtävissä tehdyt havainnot lausutaan lauseina sekä todistetaan. Osa lauseista on jätetty opiskelijoille todistettaviksi harjoitustehtävinä. Opiskelija ohjataan tutkimustyönsä aikana muutamilla tarkkaan mietityillä kysymyksillä vastauksen löytämiseen, mutta hän voi yhtä hyvin käyttää omia ratkaisumenetelmiään. Tutkivan oppimisen mukainen sosiaalinen ulottuvuus toteutuu, kun opiskelija tutkii aihetta parityönä, ja parit esittävät pohdintojensa tuloksia koko ryhmälle.

Opettajan opas sisältää ajankäyttösuunnitelman, kappaleiden tärkeimmät tavoitteet ja vinkkejä oppikirjassa esiintyvien pohdintatehtävien käsittelyyn oppitunnilla.

Pohdintatehtävien osalta esitetään niiden opetukselliset tavoitteet, oikeat ratkaisut sekä eriyttämisen ja oppimismenetelmiin liittyvät mahdollisuudet. Pohdintatehtävät on tarkoitus tehdä teknisiä apuvälineitä käyttäen kuten matematiikkaohjelmalla GeoGebra, mutta niitä voi tarvittaessa ratkaista perinteisin keinoin viivoitinta, harppia ja piirtokolmiota apuna käyttäen. Osa pohdintatehtävistä on tarkoitettu eriyttämiseen ja niitä voi jättää opetuksesta kokonaan pois; tämä jää opettajan harkittavaksi käytettävissä olevan ajan ja oppilaiden osaamistason huomioon ottaen. Pohdintatehtävät on tarkoitettu parityöhön. Pohdintatehtävien ratkaisut on suositeltavaa käydä yhteisesti läpi, jotta oppilaille ei jäisi vääriä käsityksiä.

3.1 Tuntijako

Ajankäyttösuunnitelma on laadittu 45 minuutin oppitunneille ja se on vain suuntaa-antava.

- 1×45 min Keskinormaalien- ja kulmanpuolittajien leikkauspiste
- 1×45 min Kulmanpuolittajalause ja mediaanien leikkauspiste
- 1×45 min Ympyrän tangentti
- 1×45 min Kehäkulma

3.2 Kolmion merkilliset pisteet

Tämän alaluvun tavoitteena on, että opiskelija

- oppii uutta asiaa tutkimalla, löytämällä itse ratkaisut ongelmatilanteisiin
- ymmärtää, mitä merkitystä on kahdesta, kolmesta, neljästä pisteestä yhtä kaukana olevien pisteiden joukolla

- ymmärtää, mitä merkitystä on kahdesta, kolmesta, neljästä suorasta yhtä kaukana olevien pisteiden joukolla
- ymmärtää kolmion painopisteen ja mediaanien yhteyden
- oppii, miten edellä mainitut pistejoukot kohtaavat toisensa kolmiossa
- osaa yhdistää kolmion merkillisiä pisteitä kolmion ja ympyrän keskinäisiin suhteisiin
- oppii kolmion kulmanpuolittajiin liittyviä eri ominaisuuksia
- oppii analysoimaan kriittisesti valmiita ratkaisuja

Pohdinta A.1

Pohdinnat A.1 ja A.5 voidaan jakaa yhtä aikaa tehtäväksi opiskelijapareille. Toiset parit ratkaisevat pohdinnan A.1 ja toiset pohdinnan A.5. Lopuksi esitetään molempien pohdintatehtävien ratkaisut luokalle.

Tässä pohdinnassa opiskelija tutustuu tutkimalla janan keskinormaalin käsitteeseen, vaikka sitä ei vielä välttämättä mainita tällä nimellä tässä vaiheessa. Lisäksi hänen olisi tarkoitus havaita, että kolmion keskinormaalit kohtaavat samassa pisteessä, joka on yhtä kaukana kolmion kaikista kärkipisteistä.

Tutkimus voidaan tehdä esimerkiksi seuraavasti: edetään pistepareittain, eli ensin etsitään pisteitä, jotka ovat yhtä etäällä pisteistä A ja B, sitten pisteitä, jotka ovat yhtä etäällä esim. pisteistä B ja C. Yhdistämällä kukin saatu pistejoukko päädytään kahteen suoraan. Tässä vaiheessa opiskelijan pitäisi huomata, että suorat ovat kohtisuorassa janoja AB ja BC vastaan ja myös puolittavat niitä. Lisäksi opiskelijan olisi hyvä hoksata, että suorien leikkauspiste on yhtä kaukana kolmion kaikista kärkipisteistä. Kolmannen janan keskinormaali voidaan käyttää tarkistamiseen: leikkaako se muut keskinormaalit samassa pisteessä?

Jos tehtävää ratkaistaan perintesin keinoin, opiskelijaa voi ohjaistaa löytämään kahdesta pisteestä yhtä kaukana olevia pisteitä esim. harpilla. Jos opiskelija käyttää GeoGebraa, tehtävän helpottamiseksi on merkitty applettiin joitakin pisteistä A ja B yhtä kaukana olevia pisteitä. Opiskelijan on jatkossa tarkoitus hoksata, että muiden pisteparien tapauksessa hän joko käyttää suoraan janan keskinormaalin piirtotyökalua tai löytää yhtä kaukana olevia pisteitä perinteisen menetelmän tapaan toisensa leikkaavia samansäteisiä ympyröitä piirtäen.

Pohdinta A.2

Tämä pohdinta on jatke pohdinnalle A.1 ja sen tarkoituksena on yhdistää kolmion keskinormaalien leikkauspiste kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteeseen.

Kohdassa a) opiskelijan on tarkoitus lausua ääneen, mitä hän on mahdollisesti havainnut jo pohdinnassa A.1 (tai nyt viimein hoksata): että kolmion keskinormaalit kohtaavat samassa pisteessä.

Kohdassa b) opiskelijan on tarkoitus yhdistää kolmion kärjistä yhtä kaukana oleva piste kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteeseen. Tätä varten opiskelija ohjataan piirtämään ympyrä, jonka keskipisteenä on keskinormaalien leikkauspiste ja säteenä leikkauspisteen etäisyys kolmion kärkipisteestä.

Pohdinta A.5

Pohdinnat A.5 ja A.1 voidaan jakaa yhtä aikaa tehtäväksi opiskelijapareille. Toiset parit ratkaisevat pohdinnan A.5 ja toiset pohdinnan A.1. Lopuksi esitetään molempien pohdintatehtävien ratkaisut luokalle.

Tässä pohdinnassa opiskelija tutustuu tutkimalla kulmanpuolittajan käsitteeseen, vaikka sitä ei vielä välttämättä mainita tällä nimellä tässä vaiheessa. Lisäksi hänen olisi tarkoitus havaita, että kolmion kulmanpuolittajat kohtaavat samassa pisteessä, joka on yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista.

Tutkimus voidaan tehdä esimerkiksi seuraavasti: edetään sivupareittain eli ensin etsitään pisteitä, jotka ovat yhtä etäällä kolmion sivuista AB ja AC, sitten pisteitä, jotka ovat yhtä etäällä esim. sivuista AB ja BC. Yhdistämällä kukin saatu pistejoukko päädytään kahteen suoraan. Tässä vaiheessa opiskelijaa tarvittaessa ohjataan huomaamaan, että suorat ovat kulmanpuolittajia. Lisäksi opiskelijan olisi hyvä hoksata, että niiden leikkauspiste on yhtä kaukana kolmion kaikista kolmesta sivusta. Tätä varten opiskelija ohjataan piirtämään kulmanpuolittajien leikkauspisteestä kohtisuorat janat kolmion kutakin sivua vastaan. Kolmannen kulman kulmanpuolittaja voidaan käyttää tarkistamiseen: leikkaako se muut kulmanpuolittajat samassa pisteessä?

Jos tehtävää ratkaistaan perinteisin keinoin, opiskelijaa voi ohjata löytämään kahdesta janasta yhtä kaukana olevia pisteitä harpilla. Jos opiskelija käyttää GeoGebraa, tehtävän helpottamiseksi on merkitty applettiin joitakin sivuista AB ja AC yhtä kaukana olevia pisteitä. Opiskelijan on jatkossa tarkoitus hoksata, että muiden sivuparien tapauksessa hän joko käyttää suoraan kulmanpuolittajan piirtotyökalua tai löytää kahdesta sivusta yhtä kaukana olevia pisteitä samansäteisiä ja toisensa leikkaavia ympyränkaaria piirtäen.

Pohdinta A.6

Tämä pohdinta on jatke pohdintaan A.5 ja sen tarkoituksena on yhdistää kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteeseen.

Kohdassa a) opiskelijan on tarkoitus lausua ääneen, mitä hän on mahdollisesti havainnut jo pohdinnassa A.5 (tai nyt viimein hoksata): että kolmion kulmanpuolittajat kohtaavat samassa pisteessä.

Kohdassa b) on tarkoitus opiskelijan yhdistää kolmion sivuista yhtä kaukana oleva piste kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteeseen. Tätä varten opiskelija ohjataan piirtämään ympyrä, jonka keskipisteenä on kulmanpuolittajien leikkauspiste ja säteenä leikkauspisteen etäisyys kolmion sivusta.

Pohdinta A.9

Tämä pohdinta tehdään vain GeoGebran appletilla ja sen tarkoituksena on johdattaa opiskelijaa kulmanpuolittajalauseeseen seuraamalla GeoGebraan merkittyjen janojen suhteiden muutosta kolmion kärkipisteitä siirrettäessä. Tavoitteena on, että opiskelija huomaa, mitkä ovat ne suhteet, joiden arvot ovat aina yhtä suuret keskenään. Tarkoituksena on lisäksi, että hän havaintojensa perusteella muodostaa ainakin yhden verrannon, joka esitetään myöhemmin kulmanpuolittajalauseessa.

Koska pohdinta ei vaadi opiskelijalta erityisempää älyllistä ponnistelua, se voidaan jättää pois opetusmateriaalista kokonaan. Esimerkiksi nopeammat opiskelijat voivat tutustua siihen ja muodostaa itse kulmanpuolittajalauseen lausekkeen.

Pohdinta A.10

Tämä pohdinta on tarkoitettu lähinnä eriyttämiseen ylöspäin ja se liittyy mallitehtävään A.15.

Kohdassa a) opiskelijan pitäisi saada vastaukseksi tasasivuinen kolmio eikä ole muita kolmiotyyppejä, joissa merkilliset pisteet yhtyisivät.

Kohdassa b) opiskelijan on perusteltava edellisen kohdan tulos. Perustelussa voidaan edetä niin, että piirretään aluksi kulmanpuolittajat ja todistetaan, että ne ovat samalla sivujen keskinormaalit. Todistus tapahtuu yhtenevien kolmioiden avulla sks-yhtenevyyslausetta käyttäen: kulmanpuolittaja jakaa kolmion kahteen yhtenevään osakolmioon. Siitä seuraa, että kulmanpuolittaja puolittaa vastaisen sivun ja lisäksi leikkaa sen $\frac{180^o}{2} = 90^o$ asteen kulmassa.

Perustelussa voidaan lähteä liikkeelle myös siitä, että yhdistetään kolmion kärki vastaisen sivun keskipisteeseen. Nyt sss-yhtenevyyslauseen nojalla osakolmiot ovat yhtenevät, mistä seuraa, että mediaani puolittaa kärkikulman ja lisäksi leikkaa vastaisen sivun $\frac{180^o}{2} = 90^o$ asteen kulmassa.

Pohdinta A.12

Pohdintatehtävän tarkoituksena on valmiin ratkaisun kriittinen arviointi. Virheen löytämisen ja korjaamisen lisäksi opiskelija kokee, että ongelmiin voi löytyä erilaisia oikeita ratkaisutapoja.

Pohdinnassa on esitetty kulmanpuolittajalauseeseen liittyvä tehtävä ja sen kaksi erilaista ratkaisua. Ensimmäinen ratkaisu on virheellinen ja opiskelijan on tarkoitus löytää virhe ja selittää, mistä se johtuu sekä laskea oikea vastaus. Toinen ratkaisumalli on oikein, mutta se mahdollisesti poikkeaa opiskelijan ratkaisusta, sillä kulmanpuolittajalauseen verranto on kirjoitettu eri muotoon. Tässä tilanteessa opiskelijan pitäisi selittää, miksi tämä erilainenkin ratkaisu kelpaa.

a) Nikon ratkaisussa verranto on kirjoitettu opitun kaavan mukaisesti oikein, mutta siihen on sijoitettu termit vääriin kohtiin. Virhe voi johtua muun muassa siitä, että Niko ei ole piirtänyt kuvaa tilanteesta. Kuvan avulla hän olisi voinut huomata sivujen oikean sijainnin (pidempi osa osista x ja y sijaitsee samalla puolella kuin pidempi sivu sivuista a ja b). Sijoittaminen on siis oikein esimerkiksi muodossa $\frac{x}{x+3} = \frac{8}{12}$, jolloin saadaan vastaukseksi oikeat positiiviset luvut osien x ja y pituudeksi.

Tässä kohdassa on syytä korostaa opiskelijoille kuvan piirtämisen tärkeyttä aina geometriatehtäviä tehtäessä.

b) Eliaksen ratkaisu kelpaa, sillä kulmanpuolittajalauseen verranto $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ voidaan kirjoittaa $ay = bx$ välivaiheen kautta myös muotoon $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Pohdinta A.13

Pohdinnan tavoitteena on, että opiskelija havaitsee kolmion kärkipisteestä lähtevän ja painopisteen kautta kulkevan janan leikkaavan vastaisen sivun sen keskipisteessä. Toisin sanoen hänen on havaittava, että painopiste on keskijanojen leikkauspisteessä, vaikka keskijanaa ei vielä välttämättä tällä nimellä mainita. Lisäksi tavoitteena olisi, että opiskelija huomaa painopisteen jakavan mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.

Applettiin on valmiiksi merkitty painopisteen lisäksi kolmion sivujen pituudet. Tavoitteena on, että opiskelija osaisi siitä päätellä, että hänen tulisi mitata muitakin kolmion janojen pituuksia, jolloin esimerkiksi kolmion sivun keskipiste tulee esille. Opiskelijan tulee laittaa myös mediaanien painopisteen jakamien osien pituudet näkyviin, jolloin hänen olisi huomattava, että toinen osa on kaksi kertaa pitempi kuin toinen.

Pohdintatehtävän voi suunnitella myös toiseen suuntaan: annetaan opiskelijalle tehtäväksi tutkia, miten kolmion mediaanit leikaavat toisensa ja mikä ominaisuus niiden leikkauspisteellä on.

3.3 Ympyrään liittyvien suorien geometria

Tämän alaluvun tavoitteena on, että opiskelija oppii

- uutta asiaa tutkimalla, löytämällä itse ratkaisut ongelmatilanteisiin
- tangentin käsitteen ja sen ominaisuudet
- tangenttikulman eli näkemiskulman käsitteen
- kehäkulman käsitteen ja siihen liittyvät ominaisuudet
- puoliympyrän sisältämän kehäkulman käsitteen
- analysoimaan kriittisesti valmiita ratkaisuja

Pohdinta A.16

Pohdinnan tarkoituksena on johdattaa opiskelija havaitsemaan ympyrää sivuavan suoran ominaisuus: että se on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tutkimisessa edetään päinvastaiseen suuntaan: ympyrän kehälle merkittyyn pisteeseen piirretään ensin säde ja sitten suora, joka kulkee kyseisen pisteen kautta ja on kohtisuorassa sädettä vastaan. Opiskelijan on tarkoitus havaita, että kohtisuoruudesta johtuen suoralla ja ympyrällä on ainoastaan yksi yhteinen piste.

Seuraavaksi havaitaan, että mikäli ympyrän kehällä olevan pisteen kautta kulkevan suoran ja pisteeseen piirretyn säteen välinen kulma on eri kuin 90^o, ympyrällä ja suoralla on kaksi yhteistä pistettä.

GeoGebraa käyttäen tutkimus voidaan suorittaa myös eri tavalla. Applettiin on merkitty piste A ympyrän kehälle, pisteeseen A on piirretty säde sekä suora, joka kulkee pisteen A kautta. Tarttumalla suoran pisteeseen P ja sen jälkeen pyörittämällä suoraa pisteen A ympäri, opiskelijan on tarkoitus huomata, että suoralla ja ympyrällä voi olla yksi tai kaksi yhteistä pistettä. Tavoitteena on myös, että opiskelija huomaa, että silloin, kun yhteisiä pisteitä on yksi, eli suora sivuaa ympyrää, suoran ja säteen muodostama kulma on suorakulma. Kahden yhteisen pisteen tapauksessa kulman arvo on jokin muu kuin 90^o.

Pohdinta A.18

Pohdinnan tavoitteena on johdatella opiskelija huomaamaan ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä ympyrälle piirrettyjen tangenttien ominaisuudet. Piirtämällä mahdolliset kaksi tangenttia sekä säteet niiden sivuamispisteisiin ympyrän kehällä, opiskelijan on tarkoitus huomata, että tällä tavalla muodostuneen nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180^o. Tähän tulokseen päästään helposti, kun lasketaan yhteen vastakkaisten suorien kulmien asteluvut ($2 \cdot 90^o = 180^o$) ja saatu arvo vähennetään nelikulmion kulmien summasta ($360^o - 180^o = 180^o$). Lisäksi, yhdistämällä ulkopuolinen piste ympyrän keskipisteeseen, nelikulmio jakaantuu ssk-yhtenevyyslauseen nojalla kahteen yhtenevään kolmioon. Siitä johtuen ulkopuolisen pisteen ja sivuamispisteiden väliset etäisyydet ovat yhtä suuret.

a) Kaksi tangenttia.

b) Muodostavat nelikulmion.

c) Nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180^o.

d) Nelikulmiolla on kaksi sivuparia, joissa sivut ovat yhtä pitkät (toisen sivuparin tapauksessa vierekkäiset sivut ovat ympyrän säteitä).

e) Perustelu on esitetty ylempänä.

Pohdinta A.19

Tämä pohdinta on tarkoitettu lähinnä eriyttämiseen. Mallitehtävä A.22 perustuu pohdinnan havaintoihin, mutta mallitehtävän voi ratkaista myös suoraan ilman pohdintatehtävän läpikäyntiä.

Pohdinnan tavoitteena on piirtää ympyröille neljä yhteistä tangenttia. Opiskelijan on tarkoitus hoksata, että näkökulmien yhtäsuuruus tietystä pisteestä tarkoittaa sitä, että ympyrät näyttävät yhtä suurilta kyseisestä pisteestä. Tehtävän ympyröiden tapauksessa löytyy kaksi tällaista pistettä: toinen ympyröiden välistä ja toinen pienemmän ympyrän toiselta puolelta tangenttiparien leikkauspisteiden kohdista.

Pohdinta A.24

Pohdintatehtävässä tutkitaan kehäkulman suuruutta vastaavaan keskuskulman suuruuteen verrattuna. Tämä on oppimateriaalin ainoa pohdintatehtävä, joka on tarkoitettu vain GeoGebralla tehtäväksi, siitä syystä, että siinä on seurattava eri kulmien suuruuksia.

Kohdassa a) opiskelija piirtää keskuskulman ja sitä vastaavan yhden kehäkulman sekä laittaa näkyviin niiden asteluvut. Siirtämällä pisteitä ympyrän kehää pitkin hänen on tarkoitus huomata, että kehäkulman suuruus on aina puolet vastaavan keskuskulman suuruudesta.

Kohdassa b) opiskelija pohtii annetun kuvan avulla, mitkä ovat kehäkulmien suuruudet, kun yhden kehäkulman asteluku tunnetaan. Hänen on tarkoitus hoksata, että jos eri kehäkulmia vastaa sama keskuskulma, niin kehäkulmien on oltava yhtä suuret.

Kohdassa c) on tarkoitus tarkistaa kohdan b) tulos GeoGebran avulla. Kohdan a) ympyrään piirretään vielä yksi kehäkulma joka vastaa samaa keskuskulmaa, ja siirtämällä kylkien päätepisteet ympyrän kehää pitkin seurataan kehäkulmien suuruuksia.

Pohdinta A.25

Pohdinnan tavoitteena on, että edellisten havaintojensa pohjalta oppilas ensin päättelee puoliympyrän sisältämän kehäkulman olevan suora, sillä sitä vastaava keskuskulma on oikokulma. Sen jälkeen hänen on tarkoitus tarkistaa tulosta joko mittaamalla kulman suuruutta piirtokolmiolla tai GeoGebraa käyttäen. Kehäkulma sisältyy puoliympyrään silloin, kun kulman kylkien erilliset päätepisteet ovat ympyrän halkaisijan päätepisteitä.

Havaintojensa vahvistamiseksi opiskelijaa pyydetään sijoittamaan useampia pisteitä ympyrän kehälle ja mittaamaan kunkin puoliympyrän sisältämän kehäkulman suuruus. Mikäli havaintojen tekemiseksi käytetään GeoGebran applettia, jossa halkaisijan päätepisteet on annettu, opiskelijan tehtävänä on sijoittaa yksi piste P ympyrän kehälle ja seurata kehäkulman APB suuruutta siirtämällä pistettä P pitkin ympyrän kehää.

Pohdinta A.27

Tämä pohdinta on tarkoitettu eriyttämiseen. Pohdinnan tulos esiintyy mallitehtävässä A.29 todistettuna. Pohdinnan tavoitteena on, että opiskelija ymmärtää jännekulmion vastakkaisten kulmien olevan ympyrän kehäkulmia, jolloin niitä vastaavien ympyrän kaarten astelukujen summa on ympyrän koko kehä eli 360^o. Koska keskuskulman asteluku on yhtä suuri kuin sitä vastaavan kaaren asteluku, ja kehäkulman asteluku puolet vastaavan keskuskulman asteluvusta, saadaan vastakkaisten kehäkulmien yhteissuuruudeksi $\frac{360^o}{2} = 180^o$. Opiskelijan on tarkoitus ymmärtää tämän olevan ehto sille, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

Pohdinta A.32

Pohdinnan tarkoituksena on analysoida kriittisesti annettua ratkaisua. Valmiin ratkaisun virheellisyys johtuu siitä, että kehäkulmaa α vastaavan keskuskulman suuruus ei ole 130^o vaan $360^o - 130^o = 230^o$. Tästä saadaan kehäkulman α suuruudeksi $\frac{230^o}{2} = 115^o$. Tässä kohti on syytä korostaa opiskelijoille, että toisiaan vastaava kehä- ja keskuskulmapari löydetään etsimällä ympyrän kehästä kaari, joka vastaa molempia kulmia.

Kehäkulman β asteluku on laskettu oikein.

Pohdinta A.33

Pohdinta on käytännön esimerkki puoliympyrän sisältämästä kehäkulmasta. Siinä pitää arvioida valmista ratkaisusuunnitelmaa sekä jatkaa sitä sopivalla tavalla.

Pohdinnassa esitetty suunnitelma on oikein. Muodostamalla suora kulma kehäkulmaksi ympyrään ja yhdistämällä kulman kylkien ympyrän kehällä olevat erilliset päätepisteet A ja B saadaan aikaan ympyrän halkaisija. Ympyrän keskipiste löytyy helposti halkaisijan keskipisteenä.

Halkaisijan pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla ja sen arvo on $AC = 9,86...$ m, mistä säteen arvo on $R = 4,93...$ m. Ympyrän pinta-alaksi saadaan $\approx 76,4$ m^2 ja ympärysmitaksi ≈ 31 m.

Suunnitelmaan sisältyy virhemahdollisuus siinä mielessä, että alkupisteestä A ei voi lähteä kävelemään ihan mielivaltaiseen suuntaan. Jos sattumalta reitti kulkee ympyrän halkaisijaa pitkin, niin kääntymällä pisteestä B 90^o astetta, reitti jatkuu ympyrän ulkopuolella tangenttia pitkin, eikä piste C löydy.

Viitteet

[1] Aksoy, Y., Bayazit, I., Soybas, D. (2010). *The Effects of GeoGebra in Conjectures and Proofs*. Ithaca College, Ithaca, NY, USA Innovative Technologies for Building Mathematical Models and Modelling, July 27-28 2010.

[2] Barron, B., Darling-Hammond, L. (2008). *Teaching for Meaningful Learning: A Review of Research on Inquiry-Based and Cooperative Learning. Book Excerpt*. George Lucas Educational Foundation.

[3] Chazan, D. (1993). *High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof*. Educational Studies in Mathematics, 24, 359-387.

[4] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., Mark, J. (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Education Department Center, Newton, MA.

[5] Digabi. (2014). Ohjelmistot, <https://digabi.fi/materiaalit/>, luettu 28.7.2017.

[6] Dogan, M., Icel, R. (2011). *The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles*. International Journal of Human Sciences.

[7] Hakkarainen, K., Lonka, K., Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen: Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä*. WSOY.

[8] Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola, L. (2005). *Laudatur 3*. Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava.

[9] Heiskanen, P., Kaakinen, P., Lehtinen, P., Lehtonen, J., Leikas, M., Tahvanainen, J. (2016). *Tekijä 3*. Sanoma Pro Oy, Helsinki.

[10] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, Luoma-aho, E., Raittila, T., Tikka, T. (2017) *Juuri 3*. Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava.

[11] Idris, N. (2007). *The Effect of Geometers' Sketchpadon the Performance in Geometry of Malaysian Students' Achievement and van Hiele Geometric Thinking*. Malaysian Journal of Mathematical Sciences 1(2): 169 - 180.

[12] Jäppinen, P., Kupiainen, A., Räsänen, M. (2005). *Calculus 2*. Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava.

[13] Kirschner, P. A., Sweller, J., Clark, R. E. (2006). *Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching*. EDUCATIONAL PSYCHOLOGIST, 41(2), 75–86 2006, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[14] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A., Savolainen, S. (1998). *Pyramidi 2*. Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki.

[15] Korhonen, H., Luoma-aho, E., Rahikka, M. (2012). *GeoGebra -opas*. MFKA-Kustannus Oy, Helsinki.

[16] Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T. (2007). *Johdatus tasogeometriaan*. WSOY Oppimateriaalit Oy.

[17] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Helsinki: Opetushallitus.

[18] Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus.

[19] Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, M. L., Clark, D. L. (2014). *Artikkeli The Mathematical nature of Reasonong-and-Proving Opportunities in Geometry Textbooks*. Mathematical Thinking and Learning.

[20] Seloraji, P., Leong, K. E. (2017). *Students' Performance in Geometrical Reflection Using GeoGebra*. Malaysian Online Journal of Educational Technology, 2017 (Volume 5 - Issue 1).

[21] Shadaan, P., Leong, K. E. (2013). *Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles* . The Malaysian Online Journal of Educational Technology Volume 1, Issue 4.

[22] Stylianides, A. J. (2007). *The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 65(1), 1-20.

[23] Swan, M. *Collaborative Learning in Mathematics*. Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham, England.

[24] *Tutkiva oppiminen matematiikassa*. Opinnäytetyö, HELDA Helsingin yliopisto

A Tasogeometria

A.1 Kolmion merkilliset pisteet

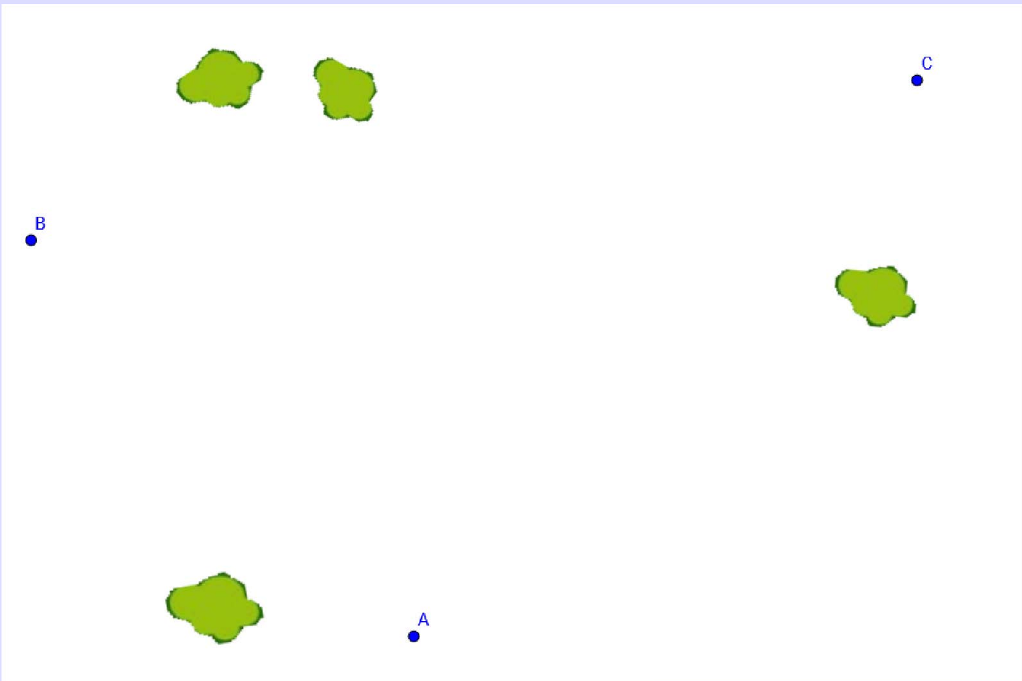
Kolmioon liittyviä tiettyjä pisteitä sanotaan merkillisiksi, sillä kolmiolla on erityisiä ominaisuuksia näiden pisteiden suhteen. Jatkossa pyritään selvittämään tutkimalla kyseisten pisteiden erityiset ominaisuudet.

A.1.1 Keskinormaalien leikkauspiste

Pohdinta A.1 Pohjapiirrokseen on merkitty kolme taloa A, B ja C. Alueelle aiotaan rakentaa leikkipuisto siten, että se sijaitsee yhtä kaukana kaikista kolmesta talosta. Auta suunnittelutyössä ja löydä piirtämällä leikkipuiston rakennuspaikka. Voit edetä esimerkiksi tällä tavalla:

a) Yhdistä janalla pisteet A ja B. Merkitse piirrokseen muutamia pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana pisteistä A ja B. Tutki, mitä ominaisuuksia on käyrällä, jonka yhtä etäällä olevat pisteet näyttävät muodostavan. Selitä ja perustele havaintosi.

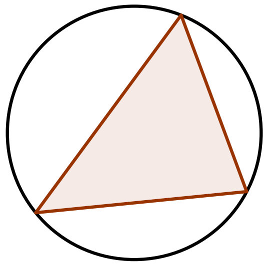
b) Sovella kohdassa a) saatu tieto kuvan muihin talopareihin ja ratkaise ongelma.



Asiaa voi tutkia parhaiten GeoGebran appletilla osoitteesta https://www.geogebra.org/m/hJV8TGVZ.

Määritelmä: Suoraa, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan, sanotaan janan *keskinormaaliksi*.

Ympyrää, joka kulkee kolmion kaikkien kärkien kautta, sanotaan *kolmion ympäri piirretyksi ympyräksi*.

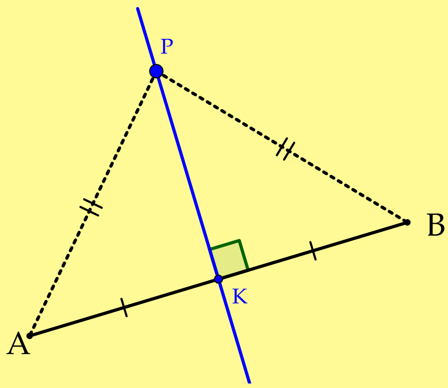


Pohdinta A.2 a) Missä, pohdintatehtävästä A.1 tekemiesi havaintojen perusteella, kolmion keskinormaalit leikkaavat?

b) Miten pohdintatehtävässä A.1 löytämäsi piste, joka sijaitsee yhtä kaukana kolmion kärkipisteistä, liittyy kolmion ympäri piirrettyyn ympyrään?

Pohdintatehtävässä A.1 havaittiin, että janan keskinormaali muodostuu pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä. Havainnosta muodostetaan lause ja todistetaan se.

Lause A.3 Piste on janan keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun se on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Todistus. Lauseessa oleva ilmaisu *täsmälleen silloin* tarkoittaa sitä, että päättely on suoritettava molempiin suuntiin.

(i) Osoitetaan ensin, että jos piste P on yhtä kaukana janan AB päätepisteistä, se on janan AB keskinormaalilla.

Merkitään janan AB keskipiste kirjaimella K. Nyt kolmiot AKP ja BKP ovat yhtenevät, sillä kolmioiden vastinsivut ovat yhtä suuret: $PA = PB$, $AK = KB$ ja PK on yhteinen. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa, että niiden vastinkulmat ova yhtä suuret, erityisesti $\angle AKP = \angle BKP$.

Lisäksi $\angle AKP + \angle BKP = 180^o$, joten on oltava $\angle AKP = \angle BKP = 90^o$.

Jana PK on täten janan AB sekä puolittaja että sen normaali eli janan keskinormaali. Piste P on siis janan AB keskinormaalilla.

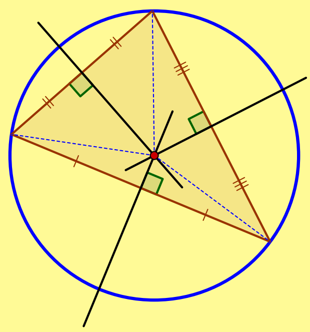
(ii) Seuraavaksi osoitetaan, että väite pätee myös toiseen suuntaan: jos piste P on janan AB keskinormaalilla, se on yhtä kaukana janan AB päätepisteistä.

Nyt janan AB keskinormaali on PK. Kolmiot AKP ja BKP ovat yhtenevät, sillä $AK = BK$, $\angle AKP = \angle BKP = 90^o$ ja sivu PK on yhteinen. Kolmioiden yhtenevyydestä seuraa, että niiden kaikki vastinsivut ovat yhtä suuret, erityisesti $PA = PB$. Piste P on siis yhtä kaukana janan AB päätepisteistä.

□

Pohdintatehtävien A.1 ja A.2 havaintojen nojalla voidaan muodostaa kolmion keskinormaaleille seuraava lause. Lauseen todistus jää harjoitustehtäväksi.

Lause A.4 Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, ja tämä piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

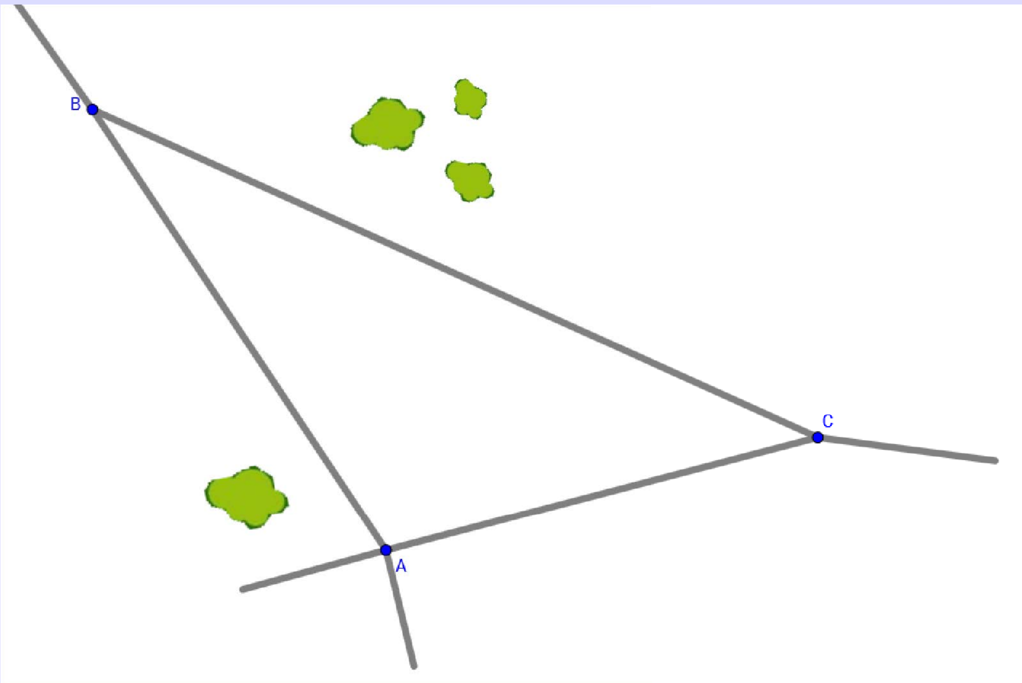


A.1.2 Kulmanpuolittajien leikkauspiste

Pohdinta A.5 Pohjapiirrokseen on merkitty kolme kylää A, B ja C sekä niiden väliset suorat tiet. Alueelle aiotaan rakentaa supermarketti siten, että se sijaitsee yhtä kaukana kyliä yhdistävistä teistä. Auta suunnittelutyössä ja löydä piirtämällä supermarketin rakennuspaikka. Voit edetä esimerkiksi näin:

a) Merkitse ensin piirrokseen muutamia pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana teistä AB ja AC. Tutki, mitä ominaisuuksia on käyrällä, jonka yhtä etäällä olevat pisteet näyttävät muodostavan. Selitä ja perustele havaintosi.

b) Sovella kohdassa a) saatu tieto kuvan muihin tiepareihin ja ratkaise ongelma.

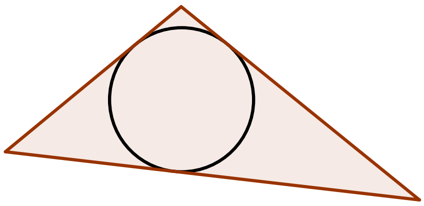


Asiaa voi tutkia parhaiten GeoGebran appletilla osoitteesta

https://www.geogebra.org/m/YKjcGXdy.

Määritelmä: *S*uoraa, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan, sanotaan kulman *kulmanpuolittajaksi*.

Ympyrää, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja, sanotaan *kolmion sisään piirretyksi ympyräksi*.

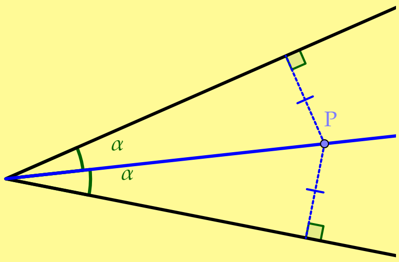


Pohdinta A.6 a) Missä, pohdintatehtävästä A.5 tekemiesi havaintojen perusteella, kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat?

b) Miten pohdintatehtävässä A.5 löytämäsi piste, joka sijaitsee yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista, liittyy kolmion sisään piirrettyyn ympyrään?

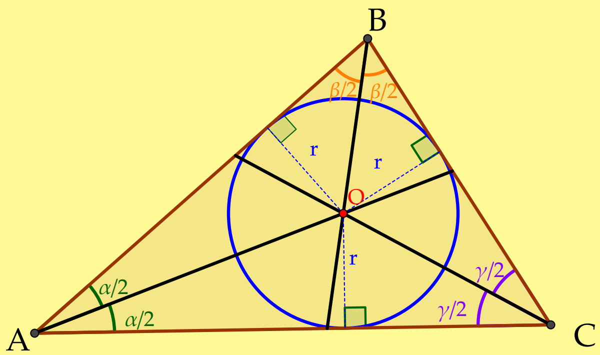
Pohdintatehtävässä A.5 havaittiin, että kulmanpuolittaja muodostuu pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä kulman molemmista kyljistä. Havainnosta muodostetaan lause. Lauseen todistus on harjoitustehtävänä.

Lause A.7 Piste on kulman kulmanpuolittajalla täsmälleen silloin, kun se on yhtä etäällä kulman kyljistä.



Pohdintatehtävien A.5 ja A.6 havaintojen nojalla voidaan muodostaa kolmion kulmanpuolittajille seuraava lause.

Lause A.8 Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, ja tämä piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



Todistus. Merkitään kolmion kulmien α ja β kulmanpuolittajien leikkauspiste kirjaimella O.

Koska piste O on kulman α kulmanpuolittajalla, se on yhtä etäällä sivuilta AB ja AC. Piste O on myös kulman β kulmanpuolittajalla eli se on yhtä etäällä sivuilta AB ja BC. Näin ollen piste O on yhtä etäällä sivuilta AC ja BC, eli se on myös kulman γ kulmanpuolittajalla. Kolmion kaikilla kulmanpuolittajilla on siis yhteisenä pisteenä piste O, toisin sanoen ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Piirretään normaalit kulmanpuolittajien leikkauspisteestä O kolmion kullekin sivulle. Nyt normaalijanojen pituudet ovat yhtä suuret ja merkitään ne kirjaimella r. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde r. Ympyrä sivuaa kolmion kaikkia sivuja, sillä ympyrän säteet ovat kohtisuorassa kolmion sivuja vastaan. Näin ollen kulmanpuolittajien leikkauspiste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. □

Pohdinta A.9 Tutki GeoGebran appletilla, mitä säännönmukaisuutta huomaat kolmion kulmanpuolittajaan liittyen. Siirrä kolmion kärkipisteitä A, B ja C ja seuraa applettiin merkittyjen janojen pituuksien suhteita. Kirjoita ylös havaintosi. Appletti löytyy osoitteesta

https://www.geogebra.org/m/nusGdBP5.

Pohdinta A.10 Miettikää parityössä seuraavaa ongelmaa. Ratkaisun löytämiseksi voitte käyttää myös GeoGebraa.

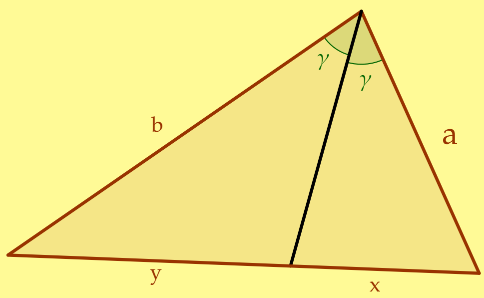
a) Keksikää sellainen kolmio, jossa keskinormaalien leikkauspiste yhtyy kulmanpuolittajien leikkauspisteeseen. Minkä tyyppisestä kolmiosta on kyse? Onko useampiakin kolmiotyyppejä, joissa kyseiset merkilliset pisteet yhtyvät?

b) Perustele parillesi, miksi keksimässänne kolmiossa keskinormaalien leikkauspiste yhtyy kulmanpuolittajien leikkauspisteeseen. Perustelitteko kumpikin samalla tavalla?

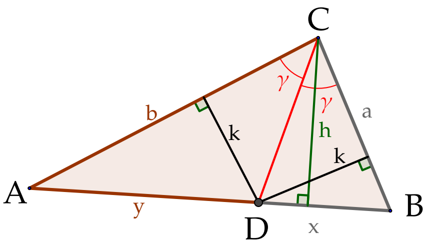
Kolmion kulmanpuolittajille on voimassa seuraava lause.

Lause A.11 (Kulmanpuolittajalause) Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Todistus. Kolmion kulman ACB kulmanpuolittaja leikkaa vastaisen sivun pisteessä D. Merkitään kärjestä C sivulle AB piirretty korkeusjana kirjaimella h ja pisteestä D sivulle CA piirretty korkeusjana k. Koska piste D on kulman ACB kulmanpuolittajalla, on se yhtä kaukana kulman kyljistä CA ja CB, joten pisteestä D sivulle CB piirretty korkeusjana on myös k.



Muodostetaan kolmion BCD pinta-alan lauseke kahdella eri tavalla:
$\frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}ak$, mistä saadaan $xh = ak$.
Muodostetaan myös kolmion ACD pinta-alan lauseke kahdella eri tavalla:
$\frac{1}{2}yh = \frac{1}{2}bk$, mistä saadaan $yh = bk$.

Jakamalla puolittain yhtälö $xh = ak$ yhtälöllä $yh = bk$ saadaan $\frac{xh}{yh} = \frac{ak}{bk}$ eli $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. □

Pohdinta A.12 a) Tutki Nikon ratkaisua. Etsi mahdolliset virheet ja selitä, mistä ne johtuvat.

b) Korjaa Nikon ratkaisun virheet ja laske, mikä tehtävän vastauksen tulisi olla.

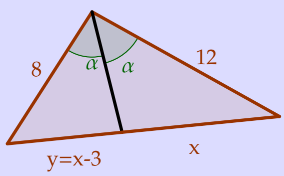
c) Vertaa ratkaisuasi Eliaksen ratkaisuun ja selitä Eliaksen ratkaisun kelpoisuutta.

Kolmion eräs kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun osiin, joista toinen on kolme pituusyksikköä pitempi kuin toinen. Kolmion muiden sivujen pituudet ovat 8 ja 12 pituusyksikköä. Kuinka pitkä on kulmanpuolittajan jakama kolmion sivu? Entä kuinka pitkät sen osat ovat?

a) Nikon ratkaisu

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= \frac{a}{b} \\
\frac{x}{x+3} &= \frac{12}{8} \\
8x &= 12(x+3) \\
8x &= 12x + 36 \\
-4x &= 36 \\
x &= -9 \\
y &= -9 + 3 = -6
\end{aligned}$$

b) Eliaksen ratkaisu



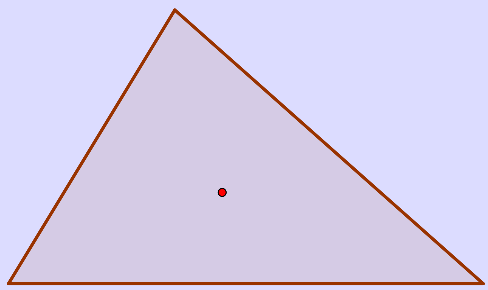
$$\begin{aligned}
\frac{8}{y} &= \frac{12}{x} \\
\frac{8}{x-3} &= \frac{12}{x} \\
8x &= 12(x-3) \\
8x &= 12x - 36 \\
-4x &= -36 \\
x &= 9 \\
y &= 9 - 3 = 6 \\
x + y &= 9 + 6 = 15
\end{aligned}$$

Vastaus: Kolmannen sivun pituus on 15 pituusyksikköä ja sen osien pituudet ovat 6 ja 9 pituusyksikköä.

A.1.3 Mediaanien leikkauspiste

Pohdinta A.13 Kuvaan on merkitty kolmio ja sen *painopiste*. Painopisteelle on ominaista, että tukemalla tasapaksuista yhtenäistä tasokuviota sen painopisteestään, kuvio asettuu vaakatasoon.

Tutki yhdistämällä kolmion kärkipisteet painopisteeseen ja jatkamalla janoja vastakkaisiin sivuihin, missä kolmion painopiste sijaitsee. Tutki myös, miten painopiste jakaa kyseisiä janoja.



Asiaa voi tutkia parhaiten GeoGebran appletilla osoitteesta

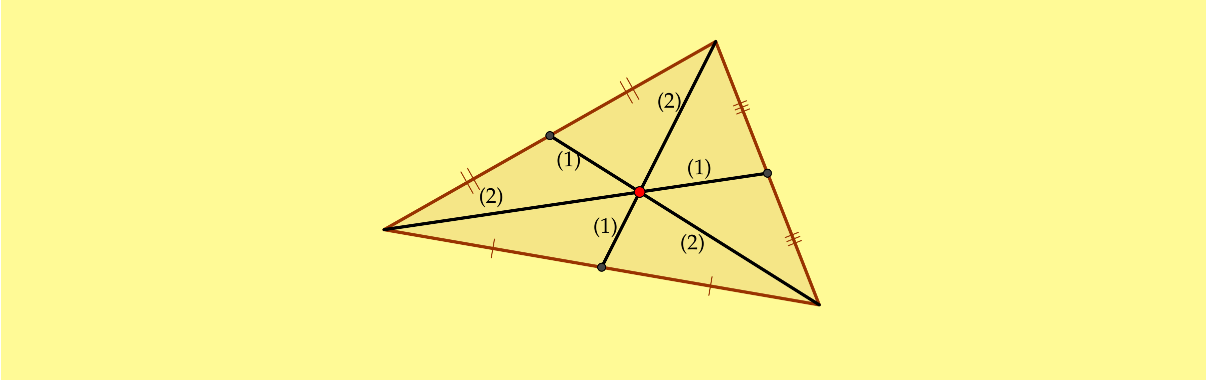
https://www.geogebra.org/m/NMw8A86r.

Määritelmä: Janan *keskipiste* on janalla sijaitseva jakopiste, joka jakaa janan kahteen yhtä pitkään osaan.

Janaa, joka yhdistää kolmion kärjen sen vastaisen sivun keskipisteeseen, sanotaan *mediaaniksi* tai *keskijanaksi*.

Lause A.14 (Mediaanilause) Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

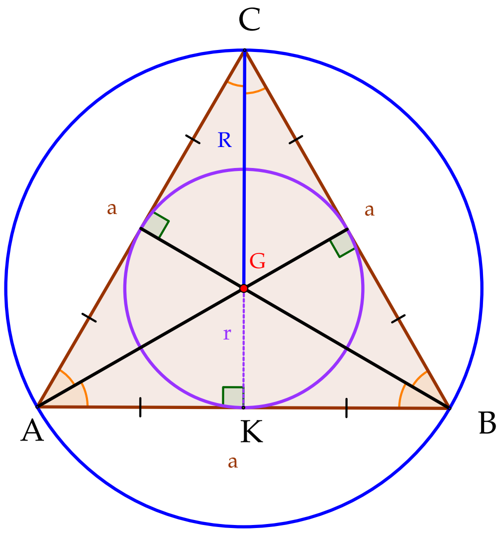
Mediaanien leikkauspiste eli painopiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2:1 kolmion kärjestä lukien.



Lauseen todistus tasogeometrisin keinoin sivuutetaan, sillä se vaatisi lisätietoja. Lauseen todistus onnistuu vektorikurssilla.

Mallitehtävä A.15 Tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteen pituus on R. Määritä kolmion sisään piiretyn ympyrän säteen sekä kolmion sivun pituus.

Ratkaisu:



Merkitään kolmion sisään piirretyn ympyrän säde kirjaimella r ja kolmion sivun pituus kirjaimella a.
Kolmion kärkikulman $C = 60^o$ kulmanpuolittaja leikkaa vastakkaisen sivun pisteessä K. Kolmiosta ACK nyt voidaan laskea kulman K suuruudeksi $180^o - 60^o - 30^o = 90^o$, eli kulmanpuolittaja CK on kohtisuorassa sivua AB vastaan.

Koska kolmioissa ACK ja BCK on voimassa $AC = BC = a$, $\angle ACK = \angle BCK = 30^o$ ja lisäksi sivu CK on yhteinen, niin kolmiot ACK ja BCK ovat yhtenevät. Tästä seuraa, että $AK = BK$, eli kulmanpuolittaja CK on samalla sivun AB sekä mediaani että keskinormaali. Sama pätee myös kantakulmien kulmanpuolittajiin.

Näin ollen tasasivuisessa kolmiossa kulmanpuolittajat ja niiden leikkauspiste G yhtyvät keskinormaaleihin ja niiden leikkauspisteeseen sekä mediaaneihin ja niiden leikkauspisteeseen.

Kuvasta nähdään, että mediaanin pituus on $R + r$. Lisäksi mediaanien leikkaupiste G jakaa mediaanit suhteessa $2 : 1$ kärjestä lukien, joten $R = 2r$. Tästä saadaan sisään piirretyn ympyrän säteeksi $r = \frac{1}{2}R$.

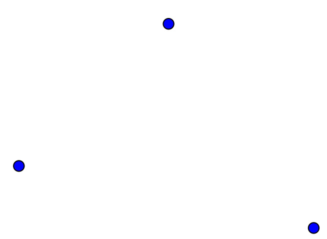
Kolmion sivun piuuden laskemiseksi muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
(R+r)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 &= a^2 \\
(R+\frac{1}{2}R)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 &= a^2 \\
(\frac{3}{2}R)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 &= a^2 \\
\frac{9}{4}R^2 + \frac{1}{4}a^2 &= a^2 \\
9R^2 + a^2 &= 4a^2 \\
9R^2 &= 3a^2 \\
a^2 &= 3R^2 \\
a &= \pm R\sqrt{3} \qquad | \, a > 0 \\
a &= R\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kolmion sisään piiretyn ympyrän säde on $r = \frac{1}{2}R$ ja kolmion sivu on $a = R\sqrt{3}$.

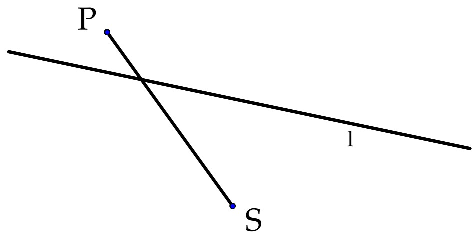
Tehtävät

1. a) Piirrä ympyrä, joka kulkee kolmen annetun pisteen kautta. Tehtävän voi ratkaista parhaiten matematiikkaohjelmalla.



b) Kolme pistettä on samalla suoralla. Tutki, onko olemassa piste, joka on yhtä kaukana kustakin kolmesta pisteestä. Perustele vastauksesi.

2. Piirrä ympyrä, jossa jana PS on jänne ja jonka keskipiste on suoralla l. Selitä piirtämisen vaiheita. Tehtävän voi ratkaista parhaiten matematiikkaohjelmalla.



3. Määritä suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen paikka. Matematiikkaohjelmaa käyttäen keskipiste löytyy helpoimmin. Perustele ympyrän keskipisteen sijainti (myös silloin, jos ratkaisit ongelman matematiikkaohjelmalla). Laske ympyrän säde, jos kateettien pituudet ovat 6 ja 8.

4. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 4 ja kylkien pituus 7. Määritä painopisteen etäisyys kolmion huippukulman ja kantakulman kärjistä. Ilmoita etäisyyksien tarkat arvot.

Vihje: Voit tarkistaa tuloksesi piirtämällä ongelma matematiikaohjelmalla (tässä tapauksessa on laskettava myös etäisyyksien likiarvot, sillä ohjelma ilmoittaa pituudet desimaalilukuina).

5. Arvioi Jennan ja Miran vastauksia. Onko jompikumpi oikeassa? Toteaa laskemalla oikea vastaus. Laske myös osien pituuksien tarkat arvot.

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on $2\sqrt{10}$ *ja toisen kateetin pituus* 2. *Missä suhteessa suoran kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun? Mitkä ovat osien pituuksien tarkat arvot?*

Jennan vastaus: Kulmanpuolittaja jakaa hypotenuusan suhteessa 1 : 3, joten hypotenuusa on neljä kertaa pitempi kuin lyhyempi osa.	Miran vastaus: Kulmanpuolittaja jakaa hypotenuusan suhteessa 3 : 1, joten lyhyemmän osan pituus on kolmasosa hypotenuusan pituudesta.

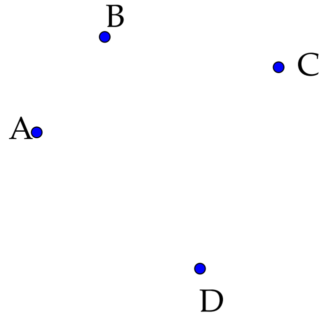
Vihje: Voit tarkistaa tuloksesi piirtämällä ongelma matematiikaohjelmalla (tässä tapauksessa on laskettava myös etäisyyksien likiarvot, sillä ohjelma ilmoittaa pituudet desimaalilukuina).

6. Piirrä matematiikkaohjelmalla tasakylkinen kolmio. Määritä kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden paikka ja piirrä ympyrät. Määritä piirtämällä myös kolmion painopisteen paikka. Mitä havaitset merkillisten pisteiden sijaintiin liittyen? Siirrä kolmion kärkipisteitä ja seuraa merkillisten pisteiden siirtymistä.

7. Piirrä matematiikkaohjelmalla tylppäkulmainen kolmio. Määritä kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden paikka ja piirrä ympyrät. Mitä havaitset ympyröiden keskipisteiden sijaintiin liittyen?

8. Kuvaan on merkitty neljän talon sijainti. Alueelle halutaan rakentaa suihkulähde, joka on yhtä kaukana kaikista taloista. Selvitä, löytyykö vastaava piste.

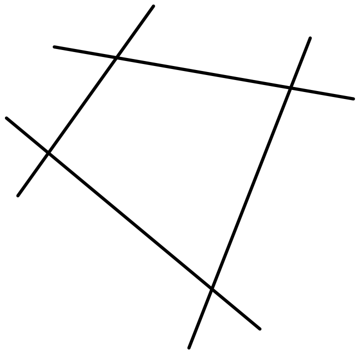
Kuinka monelle talolle löytyy aina yhtä kaukana oleva piste? Perustele vastauksesi. Selitä, mikä on ehto sille, että löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta pisteestä.



Vihje: Parhaiten saat selvitettyä asian matematiikaohjelmalla. Merkitse piirtoikkunaan neljä satunnaista pistettä jotka muodostavat nelikulmion kärjet ja jatka tutkimusta.

9. Kuvaan on merkitty neljä tietä, jotka ympyröivät nelikulmion muotoisen alueen. Alueelle halutaan pystyttää valaisinpylväs, joka on yhtä kaukana kaikista teistä. Selvitä, löytyykö vastaava piste.

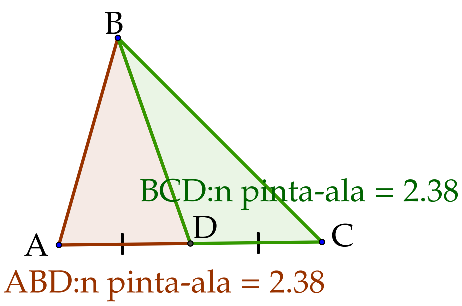
Kuinka monelle tielle löytyy aina vastaava piste? Perustele vastauksesi. Selitä, mikä on ehto sille, että löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta janasta.



Vihje: Parhaiten saat selvitettyä asian matematiikaohjelmalla. Piirrä piirtoikkunaan neljä janaa, jotka piirittävät nelikulmion. Jatka tutkimusta.

10. Arvioi Miran perustelua. Joko se on mielestäsi riittävä perusteluksi tai ei, selitä, miksi. Jos mielestäsi se ei kelpaa todistukseksi, laadi oikea todistus.

Osoita, että mediaani jakaa kolmion kahteen osaan, joiden pinta-alat ovat yhtä suuret.



Miran perustelu:
Kolmioon ABC on piirretty mediaani BD, joka jakaa kolmioon kahteen pienempään kolmioon ABD ja BCD. Kuten GeoGebran ilmoittamista arvoista nähdään, osakolmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret. Siirtämällä kärkipisteitä A, B ja C saadaan eri kolmioita, joissa kaikissa GeoGebra imoittaa osakolmioiden pinta-alat yhtä suuriksi. Tämä todistaa väitteen todeksi.

11. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 6 ja kylkien pituus 9. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säteen tarkka arvo.

Vihje: Voit tarkistaa tuloksesi piirtämällä ongelma matematiikaohjelmalla (tässä tapauksessa on laskettava myös säteen likiarvo, sillä ohjelma ilmoittaa pituus desimaalilukuna).

12. Täydennä taulukko seuraavilla ominaisuuksilla:

(A) On aina kolmion sisällä.

(B) On yhtä kaukana kolmion kaikista kärkipisteistä.

(C) On keskijanojen leikkauspiste.

(D) On kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

(E) Voi olla myös kolmion ulkopuolella.

(F) Painopiste.

(G) On kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

(H) Jakaa kolmion keskijanan siten, että sen etäisyys kärkipisteestä on 2/3-osa keskijanan pituudesta.

(I) On yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista.

(J) Tasasivuisessa kolmiossa yhtyy painopisteeseen.

(K) Suorakulmaisessa kolmiossa on hypotenuusan keskipisteenä.

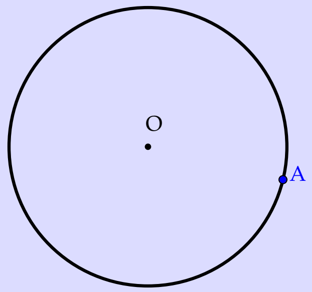
Kolmion keskinormaalien leikkauspiste	Kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste	Kolmion mediaanien leikkauspiste

A.2 Ympyrään liittyvien suorien geometria

A.2.1 Ympyrän tangentti

Pohdinta A.16 a) Kuvaan on merkitty ympyrän keskipiste O ja ympyrän kehällä oleva piste A. Piirrä säde OA ja sen jälkeen suora, joka kulkee pisteen A kautta ja on kohtisuorassa sädettä OA vastaan. Kuinka monta yhteistä pistettä ympyrällä ja suoralla on?

b) Piirrä erisuuntaisia suoria ympyrän kehällä olevan pisteen A kautta, jolloin suoran ja säteen välinen kulma on eri kuin 90^o. Kuinka monta yhteistä pistettä ympyrällä ja suoralla on näissä tapauksissa?

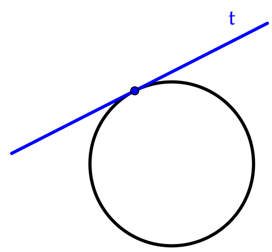


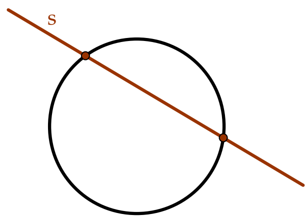
Asiaa voi tutkia parhaiten GeoGebran appletilla osoitteesta

https://www.geogebra.org/o/TEMtHasH.

Appletissa on merkitty piste A ympyrän kehälle, pisteeseen A piirretty säde sekä suora, joka kulkee pisteen A kautta. Ota kiinni suoran pisteestä P ja pyöritä suoraa pisteen A ympäri. Seuraa, montako leikkauspistettä suoralla ja ympyrällä voi olla. Seuraa myös suoran ja säteen muodostaman kulman suuruutta. Miten kulman asteluku vaihtelee leikkauspisteiden lukumäärästä riippuen?

Määritelmä: Suoraa, joka sivuaa ympyrää, sanotaan ympyrän *tangentiksi*.
Tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste, jota sanotaan sivuamispisteeksi.



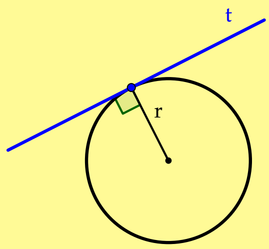


Kun yhteisiä pisteitä on kaksi, suora leikkaa ympyrän eli on ympyrän *sekantti*.

Kun yhteisiä pisteitä ei ole lainkaan, puhutaan ympyrän ulkopuolisesta suorasta.

Pohdintatehtävässä A.16 tehdyn havainnon nojalla voidaan lausua seuraava lause. Lauseen todistus sivuutetaan.

Lause A.17 Tangentti on aina kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Huomautus: Tangentti on säteen normaali, joka kulkee säteen pituuden etäisyydellä ympyrän keskipisteestä.

Pohdinta A.18 Kuvaan on merkitty ympyrä ja sen ulkopuolella oleva piste P.

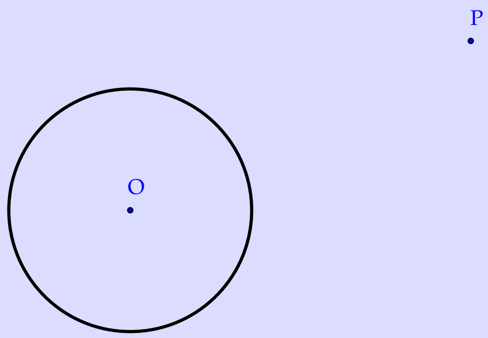
a) Tutki, kuinka monta tangenttia voit piirtää ympyrälle pisteestä P.

b) Piirrä kuhunkin sivuamispisteeseen ympyrän säde. Minkä tasokuvion sivuamispisteet, ympрän keskipiste ja piste P muodostavat?

c) Mitä havaitset tasokuvion kulmiin liittyen?

d) Mitä havaitset tasokuvion sivujen pituuteen liittyen?

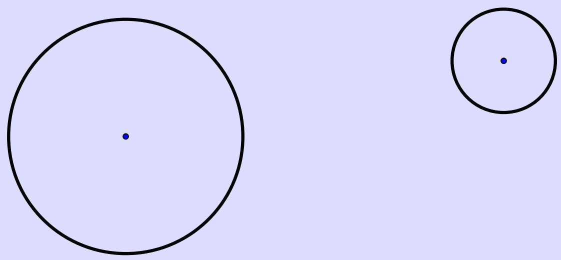
e) Selitä ja perustele havaintosi.



Asiaa voi tutkia parhaiten GeoGebran appletilla osoitteesta

https://www.geogebra.org/o/TsJwfTnf.

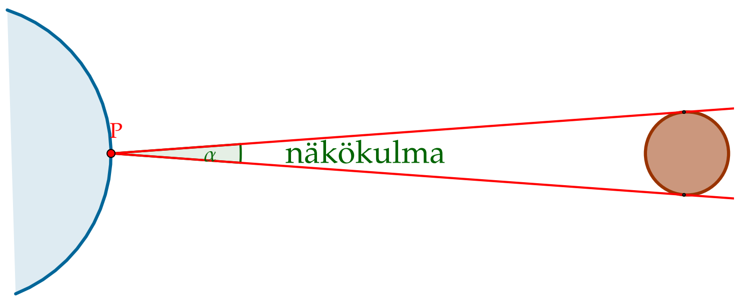
Pohdinta A.19 Kuvaan on piirretty kaksi toisiinsa nähden ulkopuolista ympyrää. Piirrä ympyröiden kaikki mahdolliset yhteiset tangentit. Pohdi, millä ehdolla toteutuu, että jostain pisteestä katsottuna molemmat ympyrät näyttävät yhtä suurilta. Mistä löytyvät nämä pisteet?



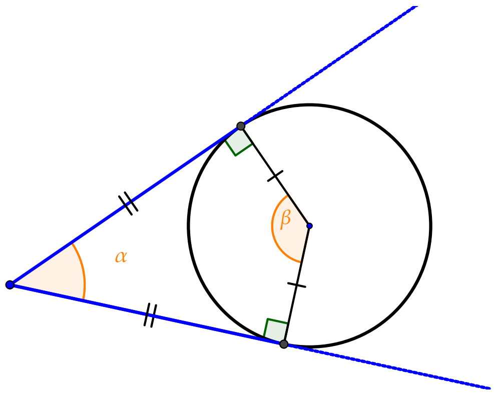
Voit tutkia asiaa myös GeoGebran appletilla
https://www.geogebra.org/m/KXhTm8xK.

Määritelmä: Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää ympyrälle tasan kaksi tangenttia, joiden välinen kulmaa sanotaan *tangenttikulmaksi*. Tangenttikulma on ympyrän *näkemiskulma* kyseisestä pisteestä.

Esimerkki A.20 Kuun näkemiskulma α Maan pinnan pisteestä P on pisteestä P Kuulle piirrettyjen tangenttien välinen kulma eli tangenttikulma.



Tangenttikulmaan liittyvät seuraavat tulokset, kuten pohdintatehtävässä A.18 havaittiin. Lauseiden todistus on harjoitustehtävänä.



Lause A.21 Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180^o, eli ne ovat toistensa suplementtikulmia.

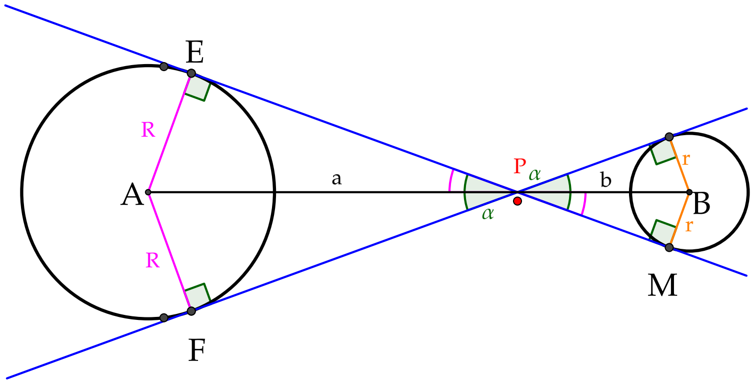
Kuvan merkintöjä käyttäen $\alpha + \beta = 180^o$.

Lause A.22 Tangenttikulman kyljet mitattuina kärjestä sivuamispisteisiin ovat yhtä pitkät.

Mallitehtävä A.23 Maapallon säde on noin 6 400 km ja Kuun säde 1 700 km. Maan ja Kuun keskipisteiden välinen etäisyys on 380 000 km. Mihin kohtaan pitää asettua Maan ja Kuun keskipisteitä yhdistävällä janalla, jotta Maa ja Kuu näyttäisivät yhtä suurilta?

Ratkaisu:

Kyseinen piste löytyy Maata ja Kuuta kuvaavien ympyröiden keskipisteiden yhdysjanalta. Piirtämällä ympyröiden kaksi yhteistä tangenttia kuvan osoittamalla tavalla tangenttisuorien leikkauspisteessä P muodostuneet yhtäsuuret ristikulmat α ovat ympyröiden näkemiskulmia pisteestä P. Koska ympyröiden näkemiskulmat kyseisestä pisteestä ovat yhtä suuret, tästä pisteestä katsottuna Maa ja Kuu näyttävät yhtä suurilta.



Merkitään suuremman ympyrän keskipiste kirjaimella A ja sen säde kirjaimella R. Vastaavasti pienemmän ympyrän keskipiste on B ja säde r. Merkitään janan AP pituus kirjaimella a, janan PB pituus kirjaimella b ja lisäksi ympyröiden keskipisteiden välisen yhdysjanan AB pituus kirjaimella d, missä $d = a + b$.

Koska kolmiot AEP ja AFP ovat yhtenevät ($AE = AF = R$, AP yhteinen, $\angle AEP = \angle AFP = 90^o$), niin jana AP puolittaa suuremman ympyrän tangenttikulman α. Sama päättely voidaan tehdä myös pienemmän ympyrän tangenttikulmalle α.

Nyt kolmiot AEP ja BMP ovat yhdenmuotoiset, sillä $\angle AEP = \angle BMP = 90^o$, $\angle EPA = \angle MPB = \frac{1}{2}\alpha$. Koska vastinsivujen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{R}{r} \\
\frac{a}{d-a} &= \frac{R}{r} \\
ar &= R(d-a) \\
ar &= Rd - Ra \\
a(r+R) &= Rd \\
a &= \frac{Rd}{r+R}
\end{aligned}$$

Sijoittamalla saatuun yhtälöön suureiden R, r ja d arvot saadaan

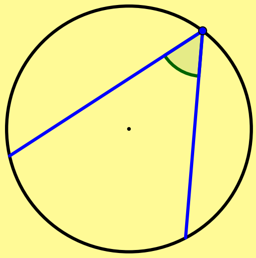
$a = \frac{6400\text{ km}\cdot 380000\text{ km}}{1700\text{ km}+6400\text{ km}} = 300247\text{ km} \approx 300200\text{ km}.$

Vastaus: Asettumalla noin 300 200 km:n päähän maapallon keskipisteestä eli noin 294 000 km:n etäisyydelle sen pinnasta Maan ja Kuun keskipisteitä yhdistävällä janalla Maa ja Kuu näyttävät yhtä suurilta.

A.2.2 Kehäkulma

Aiemmin oppikirjassa määriteltiin keskuskulma. Ympyrän sisältämä toinen kulmatyyppi on kehäkulma.

Määritelmä: Kulmaa, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet ovat ympyrän jänteitä, sanotaan ympyrän *kehäkulmaksi*.



Pohdinta A.24 a) Käytä tässä kohdassa tutkimista varten GeoGebran applettia

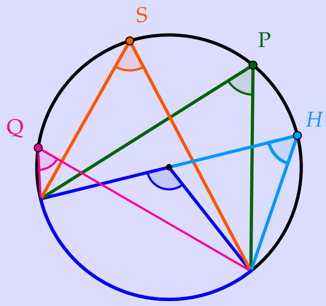
https://www.geogebra.org/m/qjhemYyQ.

Kuvaan on merkitty mm. pisteet A, B ja P ympyrän kehälle sekä ympyrän keskipiste O.

Piirrä keskuskulma AOB ja kehäkulma APB. Laita näkyviin kulmien suuruudet. Vertaa kehäkulman suuruutta keskuskulman suuruuteen. Jatka vertaamista siirtämällä pisteitä A, B ja P pitkin ympyrän kehää. Mitä havaitset?

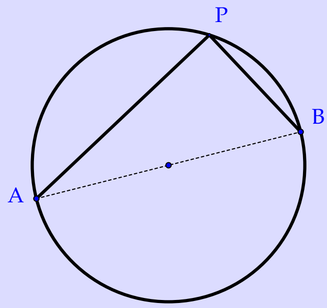
Huomaa erityisesti, että kehäkulma ja keskuskulma vastaavat koko tutkimisen ajan samaa ympyrän kaarta. Sanotaan, että kehäkulma ja keskuskulma vastaavat toisiaan.

b) Jatka pohdintaa viereisen kuvan ja kohdassa a) tekemäsi havainnon nojalla. Jos tiedetään kehäkulman P suuruus, mitä voidaan päätellä kehäkulmien Q, S ja H suuruudesta?



c)Tarkista kohdassa b) tekemäsi päätelmä käyttäen samaa GeoGebran applettia. Piirrä myös kehäkulma ASB ja laita näkyviin sen asteluku. Vertaa kehäkulmien APB ja ASB suuruus. Jatka vertaamista siirtämällä pisteitä P, S, A ja B pitkin ympyrän kehää.

Pohdinta A.25 Kuvaan on merkitty pisteet A ja B ympyrän kehälle siten, että ne ovat ympyrän halkaisijan päätepisteet. Nyt kulmasta APB sanotaan, että se sisältyy puoliympyrään. Määritä kulman APB asteluku edellisessä pohdinnassa A.23 tekemiesi havaintojen perusteella.



Sijoita lisää pisteitä X ympyrän kehälle eri kohtiin. Tarkista päätelmääsi mittaamalla ja vertaamalla kehäkulmien AXB suuruutta.

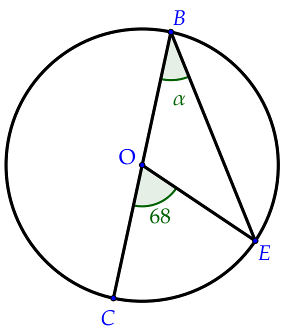
Jos tarkistat tuloksesi GeoGebran appletilla

https://www.geogebra.org/m/RE8tJPJD,

piirrä vain yksi piste P ympyrän kehälle ja seuraa kehäkulman APB suuruutta siirtämällä kulman kärkipistettä P pitkin ympyrän kehää.

Mallitehtävä A.26 a) Kehäkulman toinen kylki voi olla ympyrän halkaisija. Totea laskemalla, että kehäkulman α asteluku on puolet vastaavan keskuskulman asteluvusta.

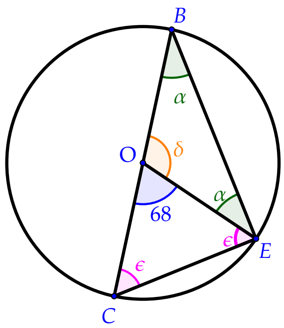
b) Mikä on kulman BEC suuruus pohdinnassa A.25 tekemäsi havainnon perusteella? Totea laskemalla, että oletuksesi pitää paikkansa.



Ratkaisu:

a) Janat OB ja OE ovat ympyrän säteinä yhtä pitkiä, joten kolmio BOE on tasakylkinen. Täten sen kantakulmat ovat yhtä suuret, merkitään molemmat kirjaimella α. Kolmion BOE kulmien summasta voidaan kirjoittaa kulman δ suuruudeksi

$$\delta = 180^o - 2\alpha.$$



Koska δ ja keskuskulma COE ovat vieruskulmia, kulman δ suuruus voidaan kirjoittaa myös muotoon $\delta = 180^o - \angle \mathrm{COE}$, mistä saadaan $\delta = 180^o - 68^o = 112^o$.
Sijoittamalla kulman δ arvo edelliseen yhtälöön saadaan

$$112^o = 180^o - 2\alpha$$

$$2\alpha = 68^o$$

$$\alpha = 34^o$$

b) Koska kehäkulman BEC kylkien päätepisteet ovat ympyrän halkaisijan päätepisteitä, ts. kehäkulma BEC sisältyy puoliympyrään, edellisten havaintojen perusteella oletetaan sen arvoksi 90^o.

Janat OC ja OE ovat ympyrän säteinä yhtä pitkiä, joten kolmio COE on tasakylkinen. Täten sen kantakulmat ovat yhtä suuret ja molemmat merkitään kirjaimella ϵ. Kolmion COE kulmien summasta voidaan laskea kulman ϵ suuruudeksi

$$\epsilon = \frac{180^o - 68^o}{2} = 56^o.$$

Saadaan kehäkulman BEC suuruudeksi

$$\angle \mathrm{BEC} = \alpha + \epsilon = 34^o + 56^o = 90^o.$$

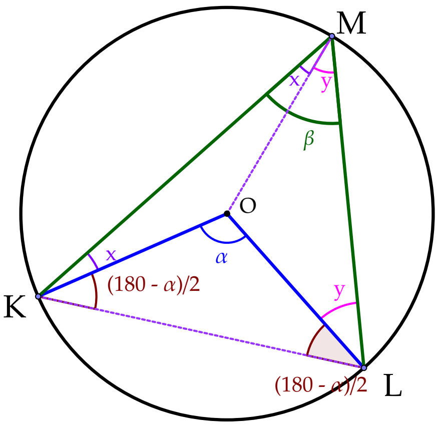
Vastaus: a) Kehäkulma $\alpha = 34^o$, eli sen asteluku on puolet vastaavan keskuskulman 68^o asteluvusta.

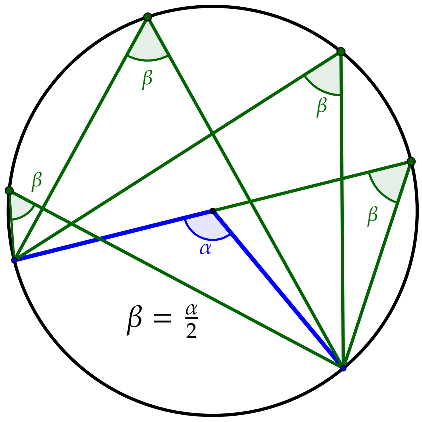
b) $\angle \mathrm{BEC} = 90^o$

Pohdinta A.27 Pohdintatehtävän A.24 kohdassa a) tehdyn havainnon perusteella mieti ehto sille, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Nelikulmion ympäri piirretty ympyrä kulkee nelikulmion kaikkien kärkien kautta. Tällaista nelikulmiota sanotaan *jännekulmioksi*. Voit käyttää avuksi GeoGebran applettia

https://www.geogebra.org/m/yEzuA64H.

Lause A.28 Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.





Todistus. Todistetaan lause tapauksessa, joka näkyy vasemmanpuolisessa kuvassa. Muut tapaukset voidaan osoittaa todeksi vastaavalla tavalla. Merkitään kehäkulma kirjaimella β ja samaa kaarta vaastava keskuskulma kirjaimella α sekä ympyrän keskipiste kirjaimella O.

Nyt kolmio KOL on tasakylkinen, joten sen kantakulmien suuruus on $\frac{180^o-\alpha}{2}$. Myös kolmio KOM on tasakylkinen, merkitään sen kantakulmat kirjaimella x. Vastaavasti tasakylkisen kolmion MOL kantakulmat ovat y.

Muodostetaan yhtälö kolmion KML kulmien summasta.

$$\begin{aligned}\beta + (x + \frac{180^o - \alpha}{2}) + (y + \frac{180^o - \alpha}{2}) &= 180^o \\ \beta + x + y + 180^o - \alpha &= 180^o \\ \beta &= \alpha - (x + y)\end{aligned}$$

Koska $\beta = x + y$, saadaan

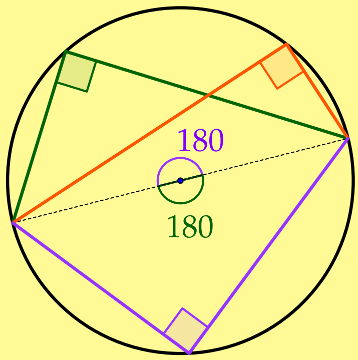
$$\begin{aligned}\beta &= \alpha - \beta \\ 2\beta &= \alpha \\ \beta &= \frac{1}{2}\alpha\end{aligned}$$

□

Lause A.29 Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

Todistus. Samaa kaarta vaastaavia kehäkulmia vastaa sama keskuskulma, joten kunkin kehäkulman asteluku on puolet saman keskuskulman asteluvusta, $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. □

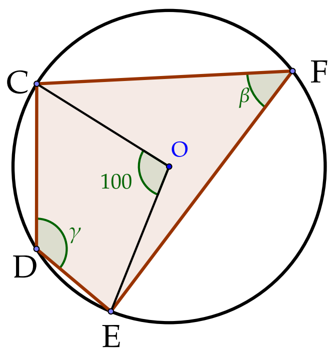
Lause A.30 (Thaleen lause) Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.



Todistus. Puoliympyrän sisältämää kehäkulmaa vastaava keskuskulma on oikokulma, jonka asteluku on 180^o. Näin ollen kehäkulman asteluvuksi saadaan $\frac{180^o}{2} = 90^o$. □

Mallitehtävä A.31 Määritä jännenelikulmion vastakkaisten kulmien β ja γ suuruus.

Muodosta ehto sille, että löytyy sellainen piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta pisteestä. Käytä hyväksi myös pohdintatehtävässä A.26 saatu tulos.



Ratkaisu:
Lasketaan yhteen kehäkulmien β ja γ suuruus.

$$\begin{aligned}\beta + \gamma &= \frac{1}{2}(\angle COE_{\text{kovera}}) + \frac{1}{2}(\angle COE_{\text{kupera}})\\ &= \frac{1}{2}(\text{kaaren } CDE \text{ asteluku}) + \frac{1}{2}(\text{kaaren } CFE \text{ asteluku})\\ &= \frac{1}{2}(\text{kaaren } CDE \text{ asteluku} + \text{kaaren } CFE \text{ asteluku})\\ &= \frac{1}{2}\cdot 360^o\\ &= 180^o\end{aligned}$$

Sama tulos pätee myös nelikulmion toisiin vastakkaisiin kulmiin.

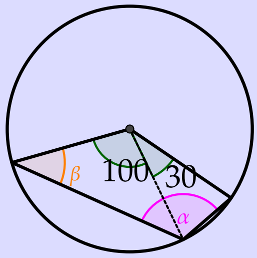
Jos nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä (joka siis kulkee kaikkien kärkipisteiden kautta), silloin ympyrän keskipiste on yhtä kaukana kustakin kärkipisteestä. Täten ehto sille, että löytyy sellainen piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta pisteestä, on, että nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180^o.

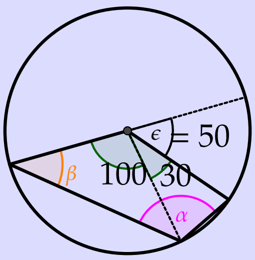
Nyt kehäkulman β suuruus on $\beta = \frac{1}{2} \cdot 100^o = 50^o$. Kehäkulman γ asteluvuksi saadaan $\gamma = 180^o - \beta = 180^o - 50^o = 130^o$.

Ratkaisu: $\beta = 50^o$ ja $\gamma = 130^o$.

Pohdinta A.32 Tutki Nikon ratkaisua. Etsi mahdolliset virheet ja selitä, mistä ne johtuvat. Korjaa virheet.

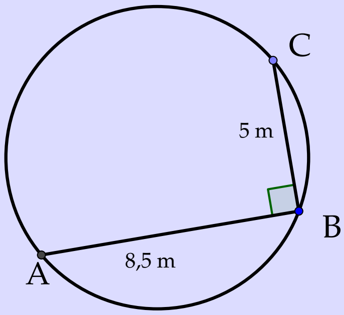
Määritä kulmien suuruus.





Kehäkulmaa α vastaavan keskuskulman suuruus on $100^o + 30^o = 130^o$. Tästä saadaan $\alpha = \frac{130^o}{2} = 65^o$.
Keskuskulman ϵ suuruus on $180^o - 100^o - 30^o = 50^o$.
Kehäkulmaa β vastaava keskuskulman suuruus on $50^o + 30^o = 80^o$. Siitä saadaan kehäkulman suuruudeksi $\beta = \frac{80^o}{2} = 40^o$.
Vastaus: $\alpha = 65^o$ ja $\beta = 40^o$

Pohdinta A.33 Tontti on ympyrän muotoinen ja sen mitat ovat tuntemattomat. Tehtävänä on selvittää tontin keskipisteen sijainti sekä tontin pinta-ala ja ympärysmitta. Elias laatii seuraavan suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi.

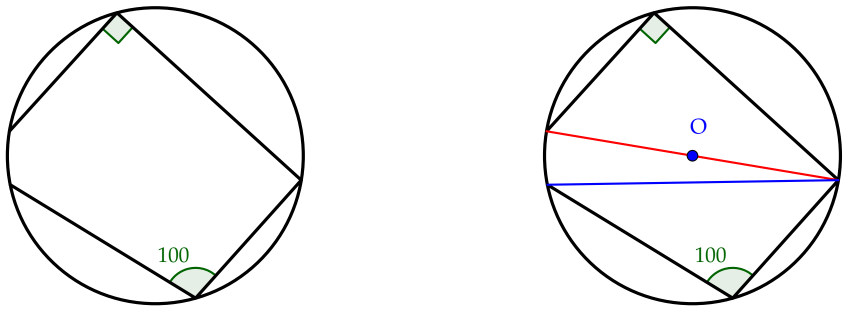


Hän päättää lähteä kävelemään tontin kehällä olevasta mielivaltaisesta pisteestä A suoraa reittiä mielivaltaiseen suuntaan tontin sisällä, kunnes kohtaa tontin reunan pisteessä B. Hän mittaa kuljetun matkan AB pituuden. Sen jälkeen hän kääntyy 90 astetta ja kävelee tontin sisällä suoraa reittiä pitkin, kunnes törmää tontin reunaan pisteessä C. Hän mittaa myös janan BC pituuden.

Arvioi Eliaksen suunnitelmaa. Jos se on mielestäsi oikein, jatka suunnitelmaa. Löydä ympyrän keskipisteen sijainti ja laske tontin pinta-ala ja ympärysmitta, kun Eliaksen mittaamat pituudet ovat $AB = 8,5$ m ja $BC = 5$ m. Jos suunnitelma on virheellinen tai siihen sisältyy virhemahdollisuus, korjaa se. Miten olisit itse lähestynyt ongelmaa?

Esimerkki A.34 Jos kehäkulman asteluku on 90^o, yhdistämällä kulman kylkien päätepisteet saadaan ympyrän halkaisija, joka on samalla suorakulmaisen kolmion hypotenuusa.

Mikäli kehäkulman asteluku on jokin muu kuin 90^o, yhdistämällä kylkien ympyrän kehällä olevat pisteet saadaan ympyrän jänne.



Tehtävät

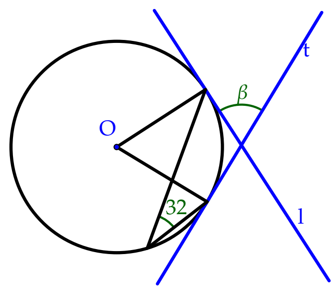
13. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $7,5$ ja 10. Määritä kolmion sisään piirretyn kolmion säde. Perustele vastauksesi. Piirroksen laatimiseen voit käyttää apunasi matematiikkaohjelmaa.

14. Ympyrää, joka sivuaa nelikulmion kaikkia sivuja, sanotaan nelikulmion sisään piirretyksi ympyräksi. Osoita, että jos nelikulmion sisään voidaan piirtää ympyrä, niin sen vastakkaisten sivujen pituuksien summat ovat yhtä suuret. Voit tutkia asiaa GeoGebran appletilla

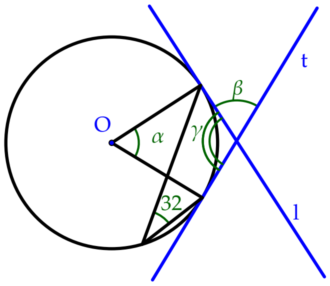
https://www.geogebra.org/m/qYwxfwx5.

15. Tutki Nikon ratkaisua. Etsi mahdolliset virheet, selitä, mistä ne johtuvat ja korjaa ne. Lisäksi ratkaisusta puuttuu täsmällisiä perusteluja. Täydennä ratkaisu niillä.

Laske kulman β arvo. Suorat t ja l ovat ympyrän tangentteja. Ympyrän säteet on piirretty suvuamispisteisiin.



Nikon ratkaisu:



Kulman α arvo on sama kuin kulman 32^o, koska niitä vastaa sama ympyrän kaari, joten $\alpha = 32^o$.
Kuvasta nähdään, että $\beta = \alpha = 32^o$.
Ratkaisu: $\beta = 32^o$

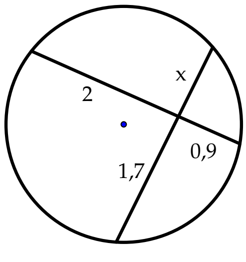
16. Täydennä taulukko seuraavilla tasokuvioilla sopiviin kohtiin:

kolmio, nelikulmio, suorakulmio, neliö, suunnikas, neljäkäs (vinoneliö), puolisuunnikas, viisikulmio, säännöllinen seitsenkulmio, säännöllinen n-kulmio

Voi aina piirtää ympyrän sen ympäri	Ei voi piirtää ympyrää sen ympäri	Erikoisehdoilla voi piirtää ympyrän sen ympäri	Voi aina piirtää ympyrän sen sisään	Ei voi piirtää ympyrää sen sisään	Erikoisehdoilla voi piirtää ympyrän sen sisään

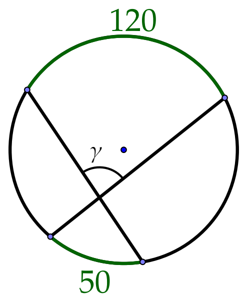
17. Laske janan x pituus. Perustele vastauksesi.

Vihje: Ydistä jänteiden päätepisteet nelikulmioksi. Etsi yhtäsuuria kulmapareja ja yhdenmuotoisia kolmioita.

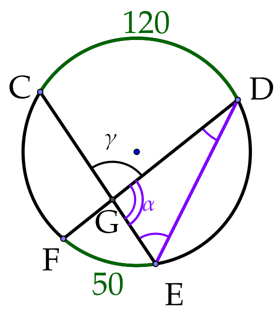


18. Arvioi Jennan ratkaisua. Jos se on mielestäsi väärin, selitä, mistä virheet johtuvat. Korjaa mahdolliset virheet ja laske oikea ratkaisu.

Määritä kulma γ, kun ympyrän värillä korostettujen kaarten asteluvut ovat 120^o ja 50^o.



Jennan ratkaisu:

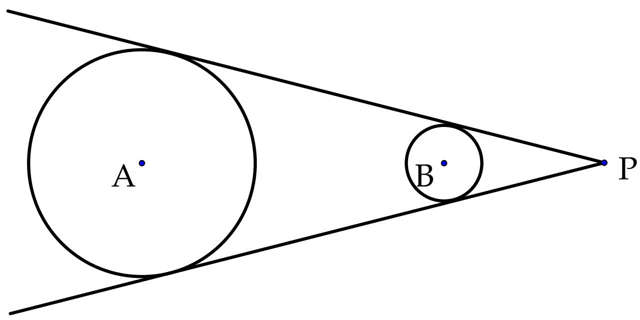


Piirretään jänne DE. Kehäkulman FDE suuruus on 50^o, sillä sitä vastaavan kaaren asteluku on 50^o. Samoten kehäkulman CED suuruus on 120^o, sillä sitä vastaavan kaaren asteluku on 120^o. Kolmiosta DEG voidaan laskea kulman α arvoksi: $\alpha = 180^o - 120^o - 50^o = 10^o$.
Kulman γ asteluvuksi saadaan $\gamma = 180^o - \alpha = 180^o - 10^o = 170^o$.
Vastaus: $\gamma = 170^o$

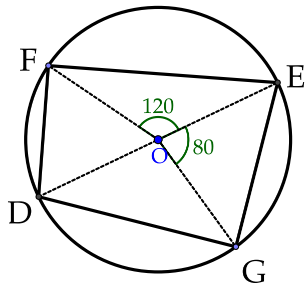
19. Kaksi pystysuuntaista ympyrälieriömuotoista säiliötä on asetettu maahan siten, että niiden pohjaympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on 8 m. Säiliöt ovat yhtä korkeat. Toisen säiliön pohjan säde on 3 m ja toisen 1 m. Jenna aikoo testata, kuinka hyvin hän pystyy arvioimaan kulman suuruutta.

Sitä varten hän asettuu pienemmän säiliön puolelle suoralle, joka yhdistää pohjaympyröiden keskipisteet. Hän lähtee kävelemään suoraa pitkin pinempää säiliötä kohti, kunnes saapuu kohtaan, josta katsottuna lieriöt näyttävät yhtä leveiltä, eli pienempi lieriö juuri alkaa peittää kokonaan suuremman lieriön.

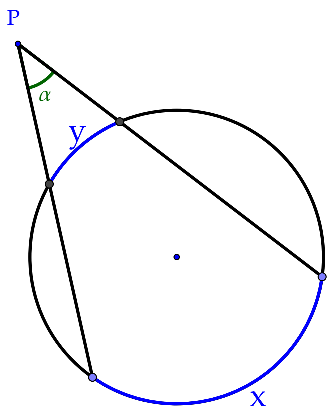
Siinä seisoessa hän arvioi lieriöiden yhteisen näkemiskulman suuruudeksi noin 30^o. Määritä laskemalla Jennan arvion virhe kaavalla $\frac{|\text{todellinen näkökulma} - \text{arvioitu näkökulma}|}{\text{todellinen näkökulma}} \cdot 100\%$.



20. Laske nelikulmion $EFDG$ kulmien suuruudet. Piste O on ympyrän keskipiste ja nelikulmion lävistäjä DE kulkee sen kautta. Perustele vastauksesi.



21. Osoita, että kulman α suuruus on $\frac{x-y}{2}$, missä x ja y ovat kulman kylkien välisten kaarten asteluvut (^{o}).



22. Tutki *pisteen potenssia ympyrän suhteen* GeoGebran appletin <https://www.geogebra.org/m/CCTVa54p> avulla. On annettu ympyrä ja sen ulkopuolella oleva piste P. Pisteestä P piirrettiin sekantti ympyrälle ja merkittiin ympyrän ja sekantin leikkauspisteet kirjaimilla A ja B. Ota kiinni sekantista ja pyöritä sitä pisteen P ympäri. Seuraa teksti-ikkunaan merkittyä laskutoimitusta. Siirrä piste P eri kohtiin ja toista edellisiä toimenpiteitä.

Pisteen potenssiksi ympyrän suhteen sanotaan tuloa $PA \cdot PB$. Muodosta havaintojesi perusteella sitä koskeva yhtälö, jota sanotaan hpisteen potenssin lauseeksi. Todista lause.

Vihje: Piirrä vihkoosi kuva kahdella sekantilla ja merkitse niiden ja ympyrän leikkauspisteet. Etsi yhtäsuurta kehäkulmaparia.

23. Pohdi, ovatko seuraavat väitteet totta aina (A), joskus (J) tai ei milloinkaan (E).

- Kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.
- Nelikulmion ympäri voidaan pirtää ympyrä.
- Kolmion sisään voidaan piirtää ympyrä.
- Nelikulmion sisään voidaan pirtää ympyrä.
- Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella.

- Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella.
- Löytyy piste, joka on yhtä kaukana kolmesta annetusta pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla.
- Löytyy piste, joka on yhtä kaukana kolmesta annetusta suorasta, joista kukin leikkaa toiset.
- Löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta pisteestä, jotka muodostavat nelikulmion.
- Löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta suorasta, jotka muodostavat nelikulmion.
- Suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sisällä.
- Tasasivuisessa kolmiossa merkilliset pisteet yhtyvät.
- Tasakylkisessä kolmiossa merkilliset pisteet yhtyvät.
- Painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspisteessä.
- Painopisteen ja kolmion kärkipisteiden etäisyys on $\frac{2}{3}$-osa kunkin mediaanin pituudesta.
- Kehäkulman suuruus on sama kuin keskulman suuruus.
- Kehäkulma kyljet ovat ympyrän jänteitä.
- Kehäkulman toinen kylki on ympyrän halkaisija.
- Jos kehäkulman toinen kylki on halkaisija, kehäkulma on suora.
- Jos kehäkulman kylkien päätepisteet ovat halkaisijan päätepisteet, kehäkulma on suora.
- Tangentin ja sivuamispisteeseen piirretyn säteen välinen kulma on suora.
- Jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, suora on ympyrän sekantti.
- Jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, suora on ympyrän sekantti.
- Jos suoralla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä, suora on ympyrän tangentti.
- Suoralla ja ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä lainkaan.

??.Vastaukset

1. a) Yhdistetään pisteet ainakin kahdella janalla. Piirretään janojen keskinormaalit. Ympyrän keskipiste on keskinormaalien leikkauspisteessä. Ympрän säde on keskipisteen ja jonkin annetun pisteen välinen etäisyys.

   b) Ei ole. Pisteiden muodostamien janojen keskinormaalit eivät leikkaa toisiaan, sillä ne ovat yhdensuuntaiset.

2. Ympyrän jänteen keskinormaali kulkee aina ympyrän keskipisteen kautta. Piirretään janan PS keskinormaali. Ympyrän keskipiste löytyy sekä keskinormaalilta että suoralta l, joten se löytyy niiden yheisestä pisteestä eli leikkauspisteestä. Ympyrän säteenä on keskipisteen ja janan jommankumman päätepisteen välinen etäisyys.

3. Suorakulmaisen kolmion keskinormaalit leikkaavat toisensa hypotenuusan keskipisteessä, joten suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on aina hypotenuusan keskipisteessä. Perustelu tapahtuu yhteenmuotoisten kolmioiden avulla, joiden vastinsivujen pituuksien suhde on $\frac{1}{2}$.

   Ympyrän säteen pituus on 5.

4. $2\sqrt{5}$ ja $\sqrt{14}$

   Etäisyys kantakulman kärjestä ratkaistaan yhtenmuotoisten kolmioiden avulla, joiden vastinsivujen pituuksien suhde on $\frac{1}{2}$.

5. Jennan vastaus on oikein.

   Osien pituudet ovat $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ja $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.

6. Tasakylkisessä kolmiossa merkilliset pisteet ovat samalla suoralla, joka on kannan keskinormaali.

7. Tylppäkulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on aina kolmion ulkopuolella. Sen sijaan sisään piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee kolmion sisällä.

8. Neljä taloa muodostaa nelikulmion. Piirretään aluksi nelikulmion kaksi sivua ja niiden keskinormaalit, joiden leikkauspiste P on yhtä kaukana kolmesta talosta. Piiretään nelikulmion kolmas sivu. Jos kolmannen sivun keskinormaali leikkaa edelliset keskinormaalit niiden leikkaupisteessä P, niin myös neljäs talo on yhtä kaukana pisteestä P. Tässä tapauksessa myös neljännen janan keskinormaali kulkee yhteisen leikkauspisteen P kautta.

   Kolmelle talolle eli pisteelle aina löytyy yhtä kaukana oleva piste, mikäli pisteet eivät ole samalla suoralla. Perusteluna tässä tapauksessa se, että kahden janan keskinormaalit varmasti leikkaavat toisensa.

9. Piirretään aluksi nelikulmion kahden kulman puolittajat, joiden leikkauspiste K on yhtä kaukana kulmien kyljistä eli kolmesta tiestä. Piirretään myös kolmannen kulman puolittaja. Mikäli se kulkee leikkauspisteen K kautta, niin piste K on

samalla etäisyydellä myös neljännestä tiestä. Tässä tilanteessa myös neljännen kulman puolittaja kulkee yhteisen leikkauspisteen K kautta.

Nelikulmiossa kolmelle tielle eli sivulle löytyy aina yhtä kaukana oleva piste. Perusteluna se, että nelikulmion kahden kulman puolittajat varmuudella leikkaavat toisensa.

10. Miran perustelu ei kelpaa todistukseksi, sillä yksittäisten tapausten tarkastelu ei todista väitettä yleisesti todeksi. Oikean todistuksen laatimiseksi piirretään kolmion korkeusjana sivulle AC. Nähdään, että se on samalla myös osakolmioiden ABD ja BCD korkeusjana. Koska osakolmion kannan pituus on puolet kolmion ABC kannan pituudesta ja kolmioiden korkeus on sama, niin osakolmion pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta. Tämä todistaa väitteen todeksi.

11. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

    Muodostetaan lauseke kolmion pinta-alalle kahdella tavalla: (1) pinta-alakaavalla ja (2) kolmen osakolmion pinta-alojen summana. Muodostetaan yhtälö kahdesta eri pinta-alalausekkeesta. Ratkaistaan yhtälöstä kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

12. Kolmion keskinormaalien leikkauspiste: B, E, G, J, K

    Kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste: A, D, I, J

    Kolmion mediaanien leikkauspiste: A, C, F, H

A.2 Ympyrään liittyvien suorien geometria

13. Säteen pituus on $2,5$.

    Tilanne tulkitaan siten, että kustakin kolmesta ulkopuolisesta pisteestä piirrettiin ympyrälle kaksi tangenttia, jolloin tangenttikulman kyljeet mitattuina kärjestä sivuamispisteisiin ovat yhtä pitkät. Muodostetaan yhtälöt, joissa kolmion sivujen pituudet on ilmoitettu tangenttijanojen pituuksien summina. Yhtälöryhmästä ratkaistaan säteen arvo.

14. Todistus tehdään edellisen tehtävän menetelmän tapaan, mutta tässä tilanteessa on neljä ulkopuolista pistettä.

15. Keskuskulman α arvo on kaksi kertaa enemmän kuin samaa kaarta vastaavan kehäkulman arvo eli $\alpha = 64^o$. Tangenttikulman γ ja sitä vastaavan keskuskulman α summa on 180^o, mistä saadaan kulman γ arvoksi 116^o. Kulmien γ ja β summa on 180^o, joten $\beta = \alpha = 64^o$

16. Voi aina piirtää ympyrän sen ympäri: kolmio, suorakulmio, neliö, säännöllinen seitsenkulmio, säännöllinen n-kulmio.

    Ei voi piirtää ympyrää sen ympäri: suunnikas (ei suunnikkaan erikoistapauksia), neljäkäs

    Erikoisehdoilla voi piirtää ympyrän sen ympäri: nelikulmio, puolisuunnikas, viisikulmio.

Voi aina piirtää ympyrän sen sisään: kolmio, neliö, neljäkäs, säännöllinen seitsenkulmio, säännöllinen n-kulmio.

Ei voi piirtää ympyrää sen sisään: suorakulmio, suunnikas (ei suunnikkaan erikoistapauksia).

Erikoisehdoilla voi piirtää ympyrän sen sisään: nelikulmio, puolisuunnikas, viisikulmio.

17. $x \approx 1,06$

    Yhtäsuurista kehäkulmapareista johtuen muodostuu yhdenmuotoisia kolmioita. Muodostamalla vastinsivujen pituuksien suhteet saadaan yhtälö, josta ratkaistaan janan pituus x.

18. Oikea vastaus on $\gamma = 85^o$.

    Kehäkulman suuruus on puolet vastaavan kaaren asteluvusta, joten $\angle FDE = 25^o$ ja $\angle CED = 60^o$. Jennan laskumenetelmällä saadaan $\alpha = 95^o$ ja $\gamma = 85^o$.

19. $3,4\%$ (näkemiskulman laskettu arvo $\approx 29^o$)

    Piirtämällä säteet sivuamispisteisiin muodostuu yhdenmuotoisia kolmioita. Muodostamalla vastinsivujen pituuksien suhteet saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaistaa janan AP pituus. Sopivalla trigonometrisella funktiolla saadaan tangenttikulman arvo.

20. $90^o, 100^o, 90^o, 80^o$

21. Etsitään kehäkulmia, joita vastaavien kaarten asteluvut ovat x ja y. Kulman α arvo saadaan näiden kehäkulmien arvojen avulla kolmion kulmien summasta.

22. Merkitään toisen sekantin ja ympyrän leikkauspisteet A ja B ja toisen kirjaimilla D ja E. Yhdistämällä pisteet A ja D sekä B ja C saadaan yhtäsuuri kehäkulmapari. Kolmioiden PAD ja PCB yhdenmuotoisuudesta seuraa väite.

23.
    - Kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. A
    - Nelikulmion ympäri voidaan pirtää ympyrä. J
    - Kolmion sisään voidaan piirtää ympyrä. A
    - Nelikulmion sisään voidaan pirtää ympyrä. J
    - Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella. E
    - Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella. J
    - Löytyy piste, joka on yhtä kaukana kolmesta annetusta pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla. A
    - Löytyy piste, joka on yhtä kaukana kolmesta annetusta suorasta, joista kukin leikkaa toiset. A
    - Löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta pisteestä, jotka muodostavat nelikulmion. J
    - Löytyy piste, joka on yhtä kaukana neljästä annetusta suorasta, jotka muodostavat nelikulmion. J

- Suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sisällä. E
- Tasasivuisessa kolmiossa merkilliset pisteet yhtyvät. A
- Tasakylkisessä kolmiossa merkilliset pisteet yhtyvät. E
- Painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspisteessä. A
- Painopisteen ja kolmion kärkipisteiden etäisyys on $\frac{2}{3}$-osa kunkin mediaanin pituudesta. A
- Kehäkulman suuruus on sama kuin keskulman suuruus. E
- Kehäkulma kyljet ovat ympyrän jänteitä. A
- Kehäkulman toinen kylki on ympyrän halkaisija. J
- Jos kehäkulman toinen kylki on halkaisija, kehäkulma on suora. E
- Jos kehäkulman kylkien päätepisteet ovat halkaisijan päätepisteet, kehäkulma on suora. A
- Tangentin ja sivuamispisteeseen piirretyn säteen välinen kulma on suora. A
- Jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, suora on ympyrän sekantti. E
- Jos suoralla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä, suora on ympyrän tangentti. E
- Suoralla ja ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä lainkaan. J