Alkulukujen harmoninen sarja

LuK-tutkielma
Markus Horneman
Opiskelijanumero:2434548
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2017

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa syvennymme hieman alkulukujen ja sarjojen maailmaan. Aluksi käydään läpi tämän työn kannalta oleellisia alkulukujen ja sarjojen määritelmiä ja tuloksia. Viimeisenä määritellään **Alkulukujen harmoninen sarja** ja esitellään lause, jonka mukaan tämä sarja hajaantuu. Tässä työssä tämän sarjan hajaantumiselle on esitelty neljä todistusta, jotka on jaoteltu kappaleittain. Ensimmäisen kerran Alkulukujen harmonisen sarjan hajaantumisen todisti *Leonhard Euler* vuonna 1737, kuitenkaan tätä todistusta en esitä tässä työssä. Päälähteenä tutkielmassa käytetään kirjaa *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory*.

1 Hyödyllisiä tuloksia ja määritelmiä

1.1 Alkuluvuista

Määritelmä 1.1. Numeroa yksi suurempaa luonnollista lukua p sanotaan *alkuluvuksi*, mikäli se on jaollinen vain numerolla yksi ja itsellään.

Määritelmä 1.2. Numeroa yksi suurempaa luonnollista lukua, mikä ei ole alkuluku sanotaan *yhdistetyksi luvuksi*.

Määritelmä 1.3. Kahta numeroa yksi suurempaa luonnollista lukua a ja b kutsutaan *keskenään jaottomiksi* tai *suhteellisiksi alkuluvuiksi*, jos ja vain jos mikään numeroa yksi suurempi luonnollinen luku c ei jaa sekä lukua a ja lukua b. Toisin sanottuna luvun a ja luvun b suurin yhteinen tekijä on 1.

Esimerkki 1.4. Esimerkiksi luonnolliset luvut 12 ja 17 ovat suhteellisia alkulukuja, sillä ei ole olemassa sellasita luonnollista lukua c, joka jakaisi molemmat luvut.

Lause 1.5. *Alkulukuja on äärettömän monta.*

Todistus. Todistettu kurssilla Algebran perusteet. □

Lause 1.6. *(Aritmetiikan peruslause). Jokainen luonnollinen luku $n \geq 2$ voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen potenssien tulona. Toisin sanottuna*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k},$$

missä $p_1 < p_2 < ... < p_k$ ovat alkulukuja ja eksponentit $a_1, a_2, ...a_k$ ovat positiivisia kokonaislukuja.

Todistus. Todistettu kurssilla Algebran perusteet. □

Esimerkki 1.7. Luku 2646 voidaan esittää alkulukujen potenssien tulona seuraavasti

$$2646 = 7^2 \cdot 3^2 \cdot 2.$$

Määritelmä 1.8. Positiivista luonnollista lukua n sanotaan neliövapaaksi jos ja vain jos sitä ei voi jakaa minkään alkuluvun neliöllä.

Esimerkki 1.9. Luku 24 ei ole neliövapaa luku, sillä se on jaollinen luvulla 4 ja 4 on alkuluvun 2 neliö.

Esimerkki 1.10. Pienimpiä neliövapaita lukuja ovat: 1,2,3,5,6,7,10,11,13,14.

Lemma 1.11. *Jokainen positiivinen luonnollinen luku n voidaan esittää yksikäsitteisenä tulona a^2b, missä a on positiivinen luonnollinen luku ja b on neliövapaa luku.*

Todistus. Jos $n = 1$, lemma selvästi pitää paikkaansa. Oletetaan nyt, että $n > 1$. Aritmetiikan peruslauseen nojalla tiedetään, että luku n voidaan esittää alkulukujen potenssien tulona

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}.$$

Jos a_i on parillinen, merkataan $a_i = m_i$ tai jos a_i on pariton, merkataan $a_i = h_i$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} n &= ({p_{i_1}}^{m_1} {p_{i_2}}^{m_2} ... {p_{i_\lambda}}^{m_\lambda})({p_{j_1}}^{h_1} {p_{j_2}}^{h_2} ... {p_{j_\mu}}^{h_\mu}) \\ &= ({p_{i_1}}^{2e_1} {p_{i_2}}^{2e_2} ... {p_{i_\lambda}}^{2e_\lambda})({p_{j_1}}^{2f_1+1} {p_{j_2}}^{2f_2+1} ... {p_{j_\mu}}^{2f_\mu+1}), \end{aligned}$$

missä $2e_i = m_i$ ja $2f_1 + 1 = h_i$ ja e_i ja f_i ovat luonnollisia lukuja. Nyt

$$\begin{aligned} n &= ({p_{i_1}}^{e_1} {p_{i_2}}^{e_2} ... {p_{i_\lambda}}^{e_\lambda} \cdot {p_{j_1}}^{f_1} {p_{j_2}}^{f_2} ... {p_{j_\mu}}^{f_\mu})^2 \cdot (p_{j_1} p_{j_2} ... p_{j_\mu}) \\ &= a^2 b. \end{aligned}$$

Tässä alkuluvut p_i ja p_j ovat yksikäsitteisiä ja myös luonnolliset luvut m_i ja h_j ovat yksikäsitteisiä, joten luonnolliset luvut a ja b ovat yksikäsitteisiä. □

1.2 Sarjoista

Määritelmä 1.12. Olkoon (x_k) reaalilukujono. Muodostetaan uusi jono (s_n), jolle

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... x_n.$$

Jonoa (s_n) sanotaan jonoon (x_k) liittyväksi *osasummien jonoksi* tai *sarjaksi*.

Määritelmä 1.13. Mikäli on olemassa sellainen reaaliluku S, että

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S$$

niin sanotaan, että *sarja suppenee* ja lukua S sanotaan *sarjan summaksi*. Jos sarja ei suppene, niin sanotaan, että sarja *hajaantuu*.

Määritelmä 1.14. Summaa

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S - s_n$$

sanotaan sarjan $s_{n.}$ *jäännöstermiksi.*

Lause 1.15. *Geometrinen sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2...,$$

missä x on reaaliluku, suppenee jos ja vain jos $|x| < 1$. Jos $|x| < 1$, niin sarjan summa on

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Todistus. Todistettu kurssilla Sarjat ja integraalit. □

Seuraus 1.16. *Sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}},$$

missä x on reaaliluku pätee jos ja vain jos $|x| > 1$.

Todistus. Oletetaan, että x on sellainen reaaliluku, jolle pätee $|x| > 1$. Nyt sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k}$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k,$$

ja koska $|x| > 1$, niin $|\frac{1}{x}| < 1$. Merkataan nyt $\frac{1}{x} = y$ eli sarja saa muodon

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k.$$

Tämä on geometrinen sarja ja $|y| > 1$, joten sarja suppenee ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

□

Määritelmä 1.17 (Maclaurin sarja)**.** Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva funktio, missä x on reaali- tai kompleksiluku. Nyt $f(x)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

missä $f^{(n)}(x)$ tarkoittaa funktion $f(x)$ n. derivaattaa.

Esimerkki 1.18. Olkoon $f(x) = e^x$, joten yllä olevan määritelmän mukaan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Lause 1.19 (Majorantti- ja minoranttiperiaate)**.** *Oletetaan, että jonoille* (x_k) *ja* (y_k) *on voimassa* $0 \leq x_k \leq y_k$*, kaikilla* $k = 1, 2, ...$

(i) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *suppenee, niin* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee (majoranttiperiaate).*

(ii) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu, niin* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *hajaantuu (minoranttiperiaate).*

Todistus. Todistettu kurssilla Sarjat ja integraalit. □

Määritelmä 1.20. Sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

missä n on luonnollinen luku, sanotaan *harmoniseksi sarjaksi.*

Lause 1.21. *Harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu.

Todistus. Harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + ...\right) ...$$

$$> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + ...\right) ...$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

Nyt ääretön sarja $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$ hajaantuu, eli harmoninen sarja hajaantuu minoranttiperiaatteen nojalla. $\square$

Määritelmä 1.22. Harmonista sarjaa

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p},$$

missä p on alkuluku, sanotaan *alkulukujen harmoniseksi sarjaksi.*

Lause 1.23. *Alkulukujen harmoninen sarja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$$

hajaantuu, missä $p_i = 2, 3, ...,$ *kun* $i = 1, 2, ...$

2 Ensimmäinen todistus

Tehdään oletus, että sarja

$$S_p = \sum_{p} \frac{1}{p}$$

suppenee.

Oletuksen mukaan sarja S_p suppenee. Näin on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle pätee

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} ... < \frac{1}{2},$$

joten

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Määritelmä 2.1. Olkoon Q_m sellainen kokonaisluku, että

$$Q_m = 1 + mN,$$

missä $m = 1, 2, ...$ ja $N = p_1 p_2 ... p_n$.

Lause 2.2. *Luvun* Q_m *alkulukutekijät ovat joukosta* $\{\ p_{n+1}, p_{n+2} ...\ \}$.

Todistus. Olkoon $m = 1, 2, ...$ ja $N = p_1 p_2 ... p_n$ ja määritellään joukko $A = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, missä $p_1, p_2, ..., p_n$ ovat alkulukuja. Nyt luku N on jaollinen jokaisella joukon A alkiolla. Tarkastellaan nyt tuloa mN. Tämä tulo on selvästi jaollinen kaikilla joukon A alkioilla, sillä tulo mN on N:n m. monikerta. Koska $p_1 > 1$ ja mN on jaollinen kaikilla joukon A alkioilla, tästä seuraa, että jakojäännös jaettaessa lukua $Q_m = 1 + mN$ jollakin joukon A alkiolla on 1. Tästä seuraa, että mikään joukon A alkio ei voi olla Q_m:n alkulukutekijä, niin luvun Q_m alkulukutekijät ovat joukosta $\{p_{n+1}, p_{n+2}...\}$. □

Lemma 2.3. *Olkoon Q_m kuten yllä määritelty, nyt*

$$\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + ... + \frac{1}{Q_m} < \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \right)^t.$$

Todistus. Kirjoitetaan auki sarja

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \right)^t = \left(\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + ... \right) + \left(\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + ... \right)^2 + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + ... \right)^t + ...$$

Huomataan, että jokainen luku, joka on muotoa

$$\frac{1}{p_{n+1}^{m_1} p_{n+2}^{m_2} ... p_{n+}^{m_a}}$$

esiintyy sarjassa, mutta sarjassa esiintyy myös monia muita termejä. Koska jokainen luku Q_m on muotoa $Q_m = p_{n+1}^{m_1} p_{n+2}^{m_2} ... p_{n+a}^{m_a}$, niin tästä seuraa, että

$$\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + ... + \frac{1}{Q_m} < \sum_{t=1}^{\infty} (\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_k})^t.$$

□

Nyt summa $(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + ... + \frac{1}{Q_m})$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{Q_l},$$

ja tästä seuraa, että

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{Q_l} < \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \right)^t.$$

Koska oletettiin, että S_p suppenee, niin epäyhtälön (2.1) nojalla

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{Q_l} < \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^t.$$

Määritelmän 2.1 mukaan luku m saa arvoja $1, 2, ...$ joten edellinen epäyhtälö saa muodon

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{Q_l} < \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^t.$$

Tiedetään, että sarja $\sum_{t=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^t$ suppenee, sillä se on geometrinen sarja ja $|\frac{1}{2}| < 1$. Nyt majoranttiperiaatteen nojalla sarjan $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{Q_l}$ pitäisi supeta, mikä on ristiriita, sillä sarja

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(1+m)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+m}$$

hajaantuu ja

$$\frac{1}{Q_m} = \frac{1}{1+mN} > \frac{1}{N+mN} = \frac{1}{N(1+m)}.$$

Joten

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{Q_m} > \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{1+m},$$

niin minoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{Q_m}$ hajaantuu. Nyt oletus, että

$$\sum_{p} \frac{1}{p}$$

suppenee, on epätosi. Mistä seuraa, että sarja

$$\sum_{p} \frac{1}{p}$$

hajaantuu.

3 Toinen todistus

Määritelmä 3.1. Olkoon n sellainen positiivinen kokonaisluku, että $n > 1$. Niin

$$p_1, p_2, p_3, ..., p_k \leq n \leq p_{k+1},$$

jollekin kokonaisluvulle k.

Nyt jokaisen positiivisen kokonaisluvun $l \leq n$ alkulukutekijät ovat joukosta $\{p_1, p_2, ...p_k\}$. Tästä seuraa, että jokainen l voidaan ilmaista muodossa

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k},$$

missä $a_i \geq 0$ ja $i = 1, 2, ..., k$.

Määritelmä 3.2. Olkoon m sellainen kokonaisluku, jolle pätee

$$2^m > n.$$

Seuraus 3.3. *Jokaiselle alkuluvulle p_i pätee*

$$p_i^m > n$$

ja $i = 1, 2, ..., k$.

Todistus. Koska $2^m > n$ ja $p_i \geq 2$ kaikilla $i = 1, 2, ..., k, ...\infty$. Tästä seuraa $p_i^m \geq 2^m$ eli $p_i^m > n$. □

Nyt Seurauksen 3.3. perusteella $p_1^m p_2^m ... p_k^m > n$ ja $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_i^m ... p_k^{a_k} > n$, $i = 1, 2, ...k$.

Lause 3.4. *Olkoon $p_i^m > n$ Seaurauksen 3.3. mukaisesti ja $n < p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_i^m ... p_k^{a_k}$ tällöin*

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} > \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}.$$

Todistus. Tiedetään, että

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^j}$$

eli

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} > \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p^j}$$

Kirjoitetaan summa $\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p^j}$ auki

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p^j} = \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ... + \frac{1}{p_i^m}\right),$$

joten tästä saadaan

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} > \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ... + \frac{1}{p_i^m}\right). \tag{3.1}$$

Jos aukaistaan tulo

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ... + \frac{1}{p_i^m}\right)$$

saadaan summa, jonka kaikki termit ovat muotoa

$$\frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}},$$

missä $0 \leq a_i \leq m$ kaikilla $i = 1, 2, ..., k$. Nyt $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ on jokin luonnollinen luku q_i,missä $q_i = i$,$i = 1, 2, ...t$ ja $t > n$.

Nyt tulo $\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+...+\frac{1}{p_i^m})$ voidaan kirjoittaa luonnollisten lukujen q_i summana

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + ... + \frac{1}{q_t}.$$

Summassa esiintyy kaikki luvut $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}$, mutta summassa esiintyy myös monia muita positiivisia termejä. Tästä seuraa

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ... + \frac{1}{p_i^m}) > \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}$$

eli Epäyhtälöstä 3.1 saadaan

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} > \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}$$

. □

Lause 3.5. *Olkoon p_i alkuluku, nyt*

$$\ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} < \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2},$$

missä $i = 1, 2, ..., k$.

Todistus. Logaritmien laskusääntöjen nojalla

$$\ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = -\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Tiedetään myös, että

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}...,$$

jos $|x| < 1$. Nyt $|\frac{1}{p_i}| < 1$, sillä $p_i > 1$, joten

$$\begin{aligned}
-\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right) &= -\left(-\frac{1}{p_i} - \frac{1}{2p_i^2} - \frac{1}{3p_i^3} - \frac{1}{4p_i^4} - ...\right)\\
&= \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2} + \frac{1}{3p_i^3} + \frac{1}{4p_i^4} + ...\\
&< \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2} + \frac{1}{2p_i^3} + \frac{1}{2p_i^4} + ...\\
&= \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2}\left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + ...\right)\\
&= \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.
\end{aligned}$$

Koska p_i on jokin alkuluku, niin $p_i \geq 2$. Tästä seuraa

$$\frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2}$$

eli

$$-\frac{1}{p_i} \geq -\frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}}.$$

Näin ollen

$$\ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} < \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} \leq \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2p_i^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2},$$

joten

$$\ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} < \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2},$$

kun $i = 1, 2, ...k$. □

Lauseen 3.5. nojalla

$$\sum_{i=1}^{k} \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}. \tag{3.2}$$

Toisaalta

$$\sum_{i=1}^{k} \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} + \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} + ... + \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

$$= \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot ... \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}) = \ln \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Yhdistämällä Lause 3.4. ja epäyhtälö (3.2) saadaan uusi epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} > \ln \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} > \ln\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}\right). \tag{3.3}$$

Nyt epäyhtälöstä (3.3) seuraa

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} > \ln(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}.$$

Jos $n \to \infty$, siten myös $k \to \infty$. Tiedetään, että

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} = \infty,$$

joten

$$\ln(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}) = \infty.$$

Tiedetään myös, että

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$$

suppenee reaaliluvuksi, joten

$$\ln\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l}\right) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$$

hajaantuu. Näinpä minoranttiperiaatteen nojalla sarja

$$\sum_{p} \frac{1}{p}$$

hajaantuu.

4 Kolmas todistus

Määritelmä 4.1. Olkoon sarja S_N määritelty, että

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n},$$

missä N on luonnollinen luku ja p_n on alkuluku. Näin ollen

$$e^{S_N} = e^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_N}} = \prod_{n=1}^{N} e^{\frac{1}{p_n}}. \tag{4.1}$$

Lause 4.2.

$$e^{S_N} > \sum_{q \leq N} \frac{1}{q},$$

missä q on Määritelmän 1.8 mukainen neliövapaaluku.

Todistus. Nyt Esimerkin 1.18. mukaan

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

joten

$$e^{\frac{1}{p_n}} = 1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{2!p_n^2} + \frac{1}{3!p_n^3} + ...$$

ja tästä selvästi seuraa, että

$$e^{\frac{1}{p_n}} > 1 + \frac{1}{p_n}.$$

Nyt yhtälöstä (4.1) saadaan

$$e^{S_N} > \prod_{n=1}^{N}(1 + \frac{1}{p_n}).$$

Avataan nyt tuloa

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)...\left(1 + \frac{1}{p_N}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) ... \left(1 + \frac{1}{p_N}\right)$$
$$= \sum \frac{1}{p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_N^{t_N}},$$

missä $p_i = 2, 3, ...p_N$ ja $t = 0$ tai $t = 1$. Nyt nimittäja saa jokaisen arvon joukosta $\{1, 2, ..., k_j, ..., p_1 p_2 ... p_N\}$, missä k_j on määritelmän 1.8 mukainen neliövapaaluku. Koska $p_1 p_2 ... p_N > N$, niin nimittäjien joukossa esiintyy ainakin jokainen neliö vapaa luku $k \leq N$. Merkitään tätä lukua q:lla. Tästä seuraa, että

$$\prod_{n=1}^{N}(1 + \frac{1}{p_n}) > \sum_{q \leq N} \frac{1}{q},$$

joten myös

$$e^{S_N} > \sum_{q \leq N} \frac{1}{q}.$$

□

Lause 4.3. *Oletetaan, että lukujono S_N suppenee reaaliluvuksi*

$$\lim_{N \to \infty} S_N = S,$$

missä S on reaaliluku. Tällöin on selvää, että

$$S > S_N,$$

ja

$$e^S > \sum_{q \leq N} \frac{1}{q}, \tag{4.2}$$

jokaisella luonnollisella luvulla N.

Lause 4.4. *Olkoon D sellainen reaaliluku, että*

$$D > \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{a^2},$$

missä a on luonnollinen luku. Nyt luvuille q ja D pätee epäyhtälö

$$\sum_{q \leq N} \frac{1}{q} > \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

missä n on luonnollinen luku ja $N \neq 1$.

Todistus. Lemman 1.11 nojalla tiedetään, että jokainen positiivinen luonnollinen luku n voidaan esittää muodossa a^2q, missä q on neliö vapaa luku, joten voidaan esittää yhtälö

$$\left(\sum_{q\leq N}\frac{1}{q}\right)\cdot\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{a^2}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}, \tag{4.3}$$

missä $N\neq 1$. Lisäksi tiedetään, että sarja

$$\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{a^2}$$

suppenee.

Nyt voidaan valita sellainen reaaliluku D, että

$$D>\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{a^2}.$$

Tästä seuraa

$$\sum_{q\leq N}\frac{1}{q}>\frac{1}{D}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

□

Koska tiedetään, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

hajaantuu seuraa tästä, että

$$\frac{1}{D}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>e^S,$$

sillä N voidaan valita mielivaltaisen suureksi.

Näin ollen

$$\sum_{q\leq N}\frac{1}{q}>e^S,$$

mikä on ristiriita epäyhtälö (4.2) kanssa. Joten oletus, että

$$\lim_{N\to\infty}S_N=S,$$

on epätosi. Siispä sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

hajaantuu.

5 Neljäs todistus

Oletetaan, että sarja

$$\sum_{P} \frac{1}{p}$$

suppenee, joten on olemassa sellainen kokonaisluku k, että

$$\frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + ... < \frac{1}{2}.$$

Nyt myös pätee epäyhtälö

$$\frac{x}{p_{k+1}} + \frac{x}{p_{k+2}} + ... < \frac{x}{2}, \tag{5.1}$$

missä x on positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä 5.1. Olkoon $N(x, p_k)$ kaikkien sellaisten kokonaislukujen n lukumäärä, missä $n \leq x$ ja n ei ole jaollinen millään alkuluvulla p ehdolla $p > p_k$.

Lause 5.2. *Luvulle n on olemassa enintään $2^k\sqrt{x}$ arvoa, eli*

$$N(x, p_k) \leq 2^k\sqrt{x}.$$

Todistus. Nyt Lemman 1.11 mukaan mielivaltainen kokonaisluku n voidaan esittää muodossa

$$n = m_1^2 m,$$

missä m_1 on jokin kokonaisluku ja $m = 2^{b_1}3^{b_2} \cdots p_i^{b_i} \cdots p_k^{b_k}$, missä $b_i = 0$ tai $b_i = 1$ ja $i = 1, 2, ..., k$.

Nyt luku $p_i^{b_1}$ voi saada arvon 1 tai p_i, joten luvulle m on yhteensä 2^k mahdollista arvoa ja $\sqrt{n} = m_1\sqrt{m}$, ja tästä saadaan, että

$$m_1 \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}.$$

Joten näin ollen luvulle m_1 on olemassa enintään $\sqrt{x}$ arvoa. Tämä tarkoittaa, että luvulle n on olemassa enintään $2^k\sqrt{x}$ arvoa.

□

Lause 5.3. *Alkuluku p_k voiaan siten, että $p_k > \frac{x}{2}$ mikäli x on parillinen tai jos x on pariton niin $p_k > \frac{x+1}{2}$. Näin ollen luvulle n on olemassa enemmän kuin $\frac{x}{2}$ arvoa, eli*

$$N(x, p_k) > \frac{x}{2}.$$

Todistus. Alkuluku p_k on valittu siten, että $p_k > \frac{x}{2}$ mikäli x on parillinen tai jos x on pariton niin $p_k > \frac{x+1}{2}$. Koska mikään kokonaisluku $1, 2, 3, ...p_k$ ei selvästi ole jaollinen alkuluvulla p, sillä $p > p_k$, näin ollen

$$N(x, p_k) > \frac{x}{2}.$$

□

Seuraus 5.4. *Yhdistämällä Lauseet 5.2 ja 5.3 saadaan, että*

$$\frac{x}{2} < N(x, p_k) \leq 2^k \sqrt{x}.$$

Kuitenkin jos luku x valitaan siten, että $x \geq 2^{2k+2}$ Seuraus 5.4 on epätosi, sillä epäyhtälön mukaan

$$\frac{x}{2} < 2^k \sqrt{x},$$

eli

$$x < 2^{2k+2},$$

joten luvun x tulisi olla pienempää kuin 2^{2k+2}.

Näin ollen sarja

$$\sum_P \frac{1}{p}$$

hajaantuu.

Lähdeluettelo

[1] *Michael Th. Rassias,Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory.*

[2] *Kari Myllylä, Algebralliset rakenteet luentorunko 2016.*

[3] *Mahmoud Filali, Sarjat ja Integraalit luentomoniste 2016.*