Diskreetti derivaatta

LuK-tutkielma
Saara Sadinmaa
2435712
Matemaattisten tieteiden koulutusohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2017

Sisältö

Johdanto

LuK-tutkielmani aiheena on diskreetti derivaatta. Tässä työssä diskreetti funktio tarkoittaa kokonaislukujen osajoukossa määriteltyä funktiota. Derivaatta puolestaan kuvaa funktion kulkua ja sen muutosnopeutta. Diskreeteille funktiolle ei voida käyttää differentiaalilaskennasta tuttua derivattaa, koska diskreettejä funktioita ei ole määritelty reaalilukuväleillä. Diskeetti derivaatta on siis derivaatan diskreetti analogia. Diskreetillä derivaatalla on myös käytännön sovelluksia, mutta tutkielmassani käsitellään vain abstrakteja tapauksia.
Tutkielmani aluksi määritellään diskreetti derivaatta. Lisäksi lasketaan tunnetuille lukujonoille diskreetit derivaatat. Seuraavaksi tutustutaan diskreetin derivaatan ominaisuuksiin. Lisäksi verrataan niitä vastaaviin differentiaalilaskennan derivointisääntöihin. Huomataan, että differentiaalilaskennan ja diskreettien derivaattojen ominaisuuksissa on paljon yhtäläisyyksiä. Kuitenkin esimerkiksi yhdistetyn funktion ja potenssifunktioiden diskreetit derivaatat poikkeavat differentiaalilaskennan derivaatoista. Määritellään järjestetty potenssifunktio, jonka diskreetti derivaatta vastaa tuttua jatkuvan potenssifunktion derivointisääntöä. Lopuksi johdetaan sarjakehitelmiä järjestetylle potenssifunktiolle.

1 Peruskäsitteitä

Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ diskreetti funktio. Funktio $f(x)$ on määritelty kokonaisluvuin eli sen määrittelyjoukko on $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Siten funktion $f(x)$ arvojoukko on $\{\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.1. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, missä $A \subseteq \mathbb{Z}$. Tällöin funktion $f(x)$ *diskreetti derivaatta* on

$$f'(x) = f(x+1) - f(x), \tag{1}$$

kun x ja $x+1 \in A$.

Huomautus 1.2. Diskreetti derivaatta muistuttaa selvästi jatkuvan derivoinnin laskukaavaa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esimerkki 1.3. Olkoon a_n aritmeettinen lukujono. Jokaiselle $n \geq 1$ pätee

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

missä d ja a_1 ovat vakioita. Siten kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio d

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Merkitään $a(x) = a_x$, kun $x \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin saadaan

$$a'(x) = a(x+1) - a(x) = d,$$

kun $x \geq 1$. Näin ollen

$$a'(x) = d.$$

Esimerkki 1.4. Olkoon a_n Fibonaccin lukujono. Jokaiselle $n \geq 1$ pätee

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

missä a_1 ja a_2 ovat vakioita. Merkitään $a(x) = a_x$, kun $x \in \mathbb{Z}_+$. Nyt

$$a(x+2) = a(x+1) + a(x),$$

joten

$$a'(x+1) = a(x+2) - a(x+1) = a(x).$$

Tästä saadaan

$$a''(x) = a'(x+1) - a'(x) = a(x) - a'(x),$$

jolloin

$$a''(x) + a'(x) - a(x) = 0.$$

Lisäksi on voimassa alkuarvot $a(1) = a_1$ ja $a'(1) = a_2 - a_1$.

2 Ominaisuuksia

Lause 2.1. Olkoon $f(x) = u(x) + v(x)$. Tällöin

$$f'(x) = u'(x) + v'(x). \tag{2}$$

Todistus. Nyt

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= [u(x+1) + v(x+1)] - [u(x) + v(x)] \\ &= u(x+1) - u(x) + v(x+1) - v(x) \\ &= u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

□

Lause 2.2. Olkoon $f(x)$ diskreetti funktio ja c mielivaltainen vakio. Tällöin

$$(cf(x))' = cf'(x). \tag{3}$$

Todistus. Määritelmän 1.1 mukaan $f'(x) = f(x+1) - f(x)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= cf(x+1) - cf(x) \\ &= c[f(x+1) - f(x)] \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

□

Lause 2.3. Olkoon $f(x) = u(x)v(x)$ Tällöin

$$f'(x) = u'(x)v'(x) + u'(x)v(x) + v'(x)u(x). \tag{4}$$

Todistus. Nyt

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= [u(x+1)v(x+1)] - [u(x)v(x)]. \end{aligned}$$

Seuraavaksi lisätään termit $-u(x)v(x+1)$ ja $u(x)v(x+1)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) \\ &= v(x+1)[u(x+1) - u(x)] + u(x)[v(x+1) - v(x)]. \end{aligned}$$

Diskreetin derivaatan määritelmän mukaan pätee, että

$$u(x+1) - u(x) = u'(x)$$

ja

$$v(x+1) - v(x) = v'(x).$$

Täten saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= v(x+1)u'(x) + u(x)v'(x) \\ &= [v(x+1) + v(x) - v(x)]u'(x) + u(x)v'(x) \\ &= [v'(x) + v(x)]u'(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$f'(x) = v'(x)u'(x) + u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

□

Esimerkki 2.4. Identtisen funktion $f(x) = x$ diskreetin derivaatan arvo on 1.

Todistus. Jos $f(x) = x$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= x + 1 - x \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.5. Lasketaan funktiolle $f(x) = x^2$ diskreetti derivaatta tulon derivointisäännöllä. Olkoon funktiot $u(x) = x$ ja $v(x) = x$, joille pätee edellisen esimerkin mukaan $u'(x) = 1$ ja $v'(x) = 1$. Nyt

$$f(x) = u(x)v(x),$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x)u'(x) + u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 1 + x + x \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Lause 2.6. Olkoon $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Tällöin

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)v(x+1)}. \tag{5}$$

Todistus. Nyt

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) = \frac{u(x+1)}{v(x+1)} - \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Lavennetaan termit toistensa nimittäjillä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v(x)u(x+1)}{v(x)v(x+1)} - \frac{u(x)v(x+1)}{v(x)v(x+1)} \\ &= \frac{v(x)u(x+1) - u(x)v(x+1)}{v(x)v(x+1)}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi lisätään termit $-u(x)v(x)$ ja $u(x)v(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v(x)u(x+1) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+1)}{v(x)v(x+1)} \\ &= \frac{v(x)[u(x+1) - u(x)] - u(x)[v(x+1) - v(x)]}{v(x)v(x+1)}. \end{aligned}$$

Edelleen määritelmän 1.1 mukaan saadaan

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)v(x+1)}.$$

□

Huomautus 2.7. Diskreetin derivaatan osamäärä muistuttaa differentiaalilaskennasta tuttua derivointisääntöä

$$y'(x) = \frac{f(x)g'(x) - g(x)f'(x)}{g^2(x)},$$

kun $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Esimerkki 2.8. Olkoon $f(x) = u(v(x))$ yhdistetty funktio, missä $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että funktio $v(x)$ on aritmeettinen lukujono

$$v(x+1) = v(x) + 2.$$

Lisäksi oletetaan, että $v : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ ja $v(0) = 0$. Funktion $v(x)$ diskreetti derivaatta on

$$v'(x) = v(x+1) - v(x) = 2.$$

Lasketaan funktion $f(x)$ diskreetti derivaatta:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= u(v(x+1)) - u(v(x)) \\
&= u[v(x+1) - v(x) + v(x)] - u(v(x)) \\
&= u[v'(x) + v(x)] - u(v(x)).
\end{aligned}$$

Täten

$$f'(x) = u[v(x) + 2] - u(v(x)).$$

Seuraavaksi lisätään termit $-u[v(x)+1]$ ja $u[v(x)+1]$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u[v(x) + 2] - u[v(x) + 1] + u[v(x) + 1] - u(v(x)) \\
&= u'[v(x) + 1] + u[v(x) + 1] - u(v(x)).
\end{aligned}$$

Lisätään edelleen termejä

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'[v(x) + 1] - u'(v(x)) + u'(v(x)) + u[v(x) + 1] - u(v(x)) \\
&= u''(v(x)) + u'(v(x)) + u[v(x) + 1] - u(v(x)) \\
&= u''(v(x)) + u'(v(x)) + u'(v(x)).
\end{aligned}$$

Lopulta saadaan funktion $f(x)$ diskreetiksi derivaataksi

$$f'(x) = u''(v(x)) + 2u'(v(x)).$$

Tällöin huomataan, että

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} u^{(k)}(v(x)).$$

Edellinen esimerkki yleistyy seuraavaksi lauseeksi.

Lause 2.9. Olkoon $f(x) = u(v(x))$ yhdistetty funktio, missä $x \in A \subseteq \mathbb{Z}$ ja $v(x) \in B \subseteq \mathbb{Z}$. Oletetaan, että $v : A \to B$ ja $u : B \to \mathbb{R}$. Oletetaan lisäksi, että funktio $v(x)$ on aidosti kasvava diskreetti funktio eli $v(x+1) > v(x)$ jokaisella $x \in A$. Tällöin

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{v'(x)} \binom{v'(x)}{k} u^{(k)}(v(x)). \tag{6}$$

3 Esimerkkejä

Esimerkki 3.1. Vakiofunktion $f(x) = c$ diskreetin derivaatan arvo on 0.

Todistus. Jos $f(x) = c$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= c - c \\ &= 0, \end{aligned}$$

kun $c \in \mathbb{R}$ on vakio. $\square$

Esimerkki 3.2. Lasketaan Esimerkin 2.4 funktiolle $f(x) = x^2$ diskreetti derivaatta myös määritelmän 1.1 mukaan. Tiedetään, että funktion diskreetti derivaatta on $f'(x) = 2x + 1$.

Todistus. Jos $f(x) = x^2$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= (x+1)^2 - x^2 \\ &= (x+1)(x+1) - x^2 \\ &= x^2 + x + x + 1 - x^2 \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 3.3. Logaritmifunktion $f(x) = \ln x$ diskreetti derivaatta on $f'(x) = (\ln x)' = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Todistus. Jos $f(x) = \ln x$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= \ln(x+1) - \ln x \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 3.4. Funktion $f(x) = \sin x$ diskreetti derivaatta on

$$f'(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Todistus. Jos $f(x) = \sin x$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= \sin(x+1) - \sin x. \end{aligned}$$

Trigonometristen summakaavojen nojalla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x \cos 1 + \cos x \sin 1 - \sin x \\ &= \sin x(\cos 1 - 1) + \cos x \sin 1 \\ &= \sin x\left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) + \cos x \sin 1 \\ &= \sin x\left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) + \cos x \sin 1 \\ &= \sin x\left(-2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \cos x \sin 1 \\ &= \sin x\left(-2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 2\cos x \sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\sin x \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \cos x \cos\left(\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Lopulta saadaan

$$f'(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

□

Esimerkki 3.5. Olkoon $f(x) = a^x$ diskreetti eksponenttifunktio, missä $a > 0, a \neq 1$ ja $x \in \mathbb{Z}$. Funktion $f(x)$ diskreetti derivaatta on $f'(x) = a^x(a-1)$.

Todistus. Määritelmän 1.1 ja potenssien laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= a^{x+1} - a^x \\ &= a^x a - a^x \\ &= a^x(a-1). \end{aligned}$$

□

4 Potenssifunktioita

Esimerkki 4.1. Olkoon $f(x) = x^k$, missä $x \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Nyt diskreetti derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= (x+1)^k - x^k. \end{aligned}$$

Huomataan, että potenssifunktion diskreetti derivaatta ei vastaa differentiaalilaskennan potenssifunktion derivaattaa. Määritellään seuraavaksi järjestetty potenssifunktio ja tutkitaan sen diskreettiä derivaattaa.

Määritelmä 4.2. Olkoon funktio

$$f(x) = x^{[k]} = x(x-1)\cdots[x-(k-1)],$$

missä $x \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Kutsutaan funktiota $f(x) = x^{[k]}$ *järjestetyksi potenssifunktioksi.*

Esimerkki 4.3. Lasketaan potenssifunktiolle $f(x) = x^{[k]}$ diskreetti derivaatta. Määritelmän 1.1 mukaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) = (x+1)^{[k]} - x^{[k]} \\ &= (x+1)[(x+1)-1]\cdots[(x+1)-(k-1)] - x(x-1)\cdots[x-(k-1)] \\ &= (x+1)x\cdots[x-(k-2)] - x(x-1)\cdots[x-(k-1)]. \end{aligned}$$

Otetaan yhteiseksi tekijäksi $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+2)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-1)\cdots[x-(k-2)][x+1-(x-(k-1))] \\ &= kx(x-1)\cdots[x-(k-2)] \end{aligned}$$

Lopulta saadaan

$$f'(x) = kx^{[k-1]}.$$

Huomautus 4.4. Järjestetyn potenssifunktion diskreetti derivaatta vastaa selvästi jatkuvan derivoinnin laskusääntöä

$$f'(x) = kx^{(k-1)},$$

kun $f(x) = x^k$.

Määritelmä 4.5. Olkoon funktio

$$f(x) = x^{[-k]} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)},$$

missä $x \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Funktiota $f = x^{[-k]}$ kutsutaan järjestetyksi potenssifunktioksi.

Esimerkki 4.6. Lasketaan järjestetylle potenssifunktiolle $f(x) = x^{[-k]}$ diskreetti derivaatta. Nyt

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= \frac{1}{(x+2)\cdots(x+1+k)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+k)} \\ &= \frac{(x+1)-(x+k+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)(x+k+1)} \\ &= -kx^{[-k-1]}. \end{aligned}$$

5 Sarjakehitelmiä

Tarkastellaan seuraavaksi Taylorin sarjaa järjestetylle potenssifunktiolle. Olkoon funktio $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että funktio f on määritelty kaavalla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!},$$

missä a_k on lukujono. Tutkitaan seuraavaksi lukujonoa a_k. Derivoidaan funktio, jolloin saadaan

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{[k-1]}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!}.$$

Lasketaan seuraavaksi korkeamman asteen derivaattoja:

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \frac{(x-x_0)^{[k-1]}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!}$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} \frac{(x-x_0)^{[k-1]}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+3} \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!}.$$

Lasketaan vielä n:nnen asteen derivaatta:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+(n-1)} \frac{(x-x_0)^{[k-1]}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!}.$$

Huomataan, että jokaiselle $k \geq 0$ pätee $a_k = f^{(k)}(x_0)$. Tällöin Taylorin sarjaksi saadaan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{[k]},$$

missä $x \geq x_0$.

Määritelmä 5.1. Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ Taylorin sarja on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{[k]},$$

missä $x \geq x_0$.

Huomautus 5.2. Edellinen Taylorin sarja on aina äärellinen sarja. Funktiolle $f = x^{[k]}$ pätee, että $(x - x_0)^{[k]} = 0$, kun $k > x - x_0$. Näin ollen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{x-x_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{[k]}.$$

Esimerkki 5.3. Kehitetään binomisarja järjestetylle potenssifunktiolle. Taylorin sarja funktiolle $f(x) = x^{[k]}$ on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^{[k]},$$

kun $a \in \mathbb{Z}$ ja $x \geq a$. Nyt

$$f^{(k)}(a) = n(n-1)\cdots(n-(k-1))a^{[n-k]},$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Täten funktion $f(x) = [n]$ Taylorin sarja on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{[n-k]}(x - a)^{[k]}.$$

Tällöin sijoittamalla $x = a + b$, saadaan binomikaava

$$(a + b)^{[n]} = f(a + b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{[n-k]} b^{[k]},$$

missä $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Lähdeluettelo

[1] F. A. Izadi: *Discrete Calculus By Analogy*, 2009.