Perkolaatio puissa

Pro gradu -tutkielma
Miika Savolainen
2380207
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2018

Sisältö

Johdanto

Tutkielman ensimmäisessä luvussa kerrataan todennäköisyyslaskennan perusasioita, jotka lukijan oletetaan tuntevan. Toisessa luvussa määritellään, mikä on puu ja tutustutaan puihin liittyviin käsitteisiin. Erityisen tärkeä puihin liittyvä käsite on haarautumisluku, joka kuvaa sitä kuinka suuri puu on. Haarautumisluku on eräänlainen keskiarvo puun solmujen seuraajien lukumäärälle. Luvun loppupuolella tarkastellaan muutamia tilanteita, joissa haarautumisluvun laskeminen on helppoa.

Kolmas luku käsittelee painotettuja satunnaiskävelyjä puissa. Luvun tärkein kysymys koskee satunnaiskävelyä, joka on painotettu puun juurta kohti jollakin vakiolla λ. Millaisissa puissa satunnaiskävely palaa juureen äärettömän monta kertaa melkein varmasti? Osoittautuu, että näin tapahtuu sellaisissa puissa, joiden haarautumisluku on pienempi kuin vakio λ. Puissa, joiden haarautumisluku on tätä vakiota suurempi, satunnaiskävely palaa juureen melkein varmasti vain äärellisen monta kertaa. Tilanne, jossa haarautumisluku on yhtä suuri kuin λ, on monimutkaisempi. Siihen palataan luvussa 6.

Neljännessä luvussa perehdytään perkolaatioon. Perkolaatiossa poistetaan osa puun kaarista. Jokaista kaarta tarkastellaan muista riippumattomasti ja se säilytetään puussa jollakin kiinnitetyllä todennäköisyydellä p. Nyt voidaan kysyä, millaisissa puissa on positiivinen todennäköisyys sille, että perkolaation jälkeen puun juureen jää kiinni ääretön alipuu. Haarautumisluku on tärkeä käsite tässäkin tapauksessa. Jos puun haarautumisluku on pienempi kuin $1/p$, niin todennäköisyys sille, että alipuu olisi ääretön, on nolla. Jos taas haarautumisluku on suurempi kuin $1/p$, niin todennäköisyys on positiivinen. Tapaus, jossa haarautumisluku on tasan $1/p$, käsitellään kuudennessa luvussa.

Luvun 5 aihe on Hausdorffin ulottuvuus. Luvun alussa tarkastellaan puun reunaa, jonka Hausdorffin ulottuvuus osoittautuu puun haarautumisluvun logaritmiksi. Luvun loppupuolella tutustutaan perkolaatioon yksikkökuution $[0, 1]^n$ tapauksessa. Puussa ja yksikkökuutiossa tapahtuvilla perkolaatioilla on yhteys. Jokaista yksikkökuutioon perkolaatiossa jäävää joukkoa A vastaa jokin puu. Tämän puun reunan Hausdorffin ulottuvuus on yhtä suuri kuin joukon A ulottuvuus.

Kuudennessa luvussa tutustutaan kapasiteettiin. Sen avulla voidaan ratkaista kysymys, mitä tapahtuu satunnaiskävelylle, jos haarautumisluku ja vakio λ ovat yhtä suuret. Vastaus on, että satunnaiskävely palaa juureen vain äärellisen monta kertaa, jos ja vain jos puun reunan kapasiteetti on positiivinen. Tämä on myös yhtäpitävää sen kanssa, että perkolaatiossa on positiivinen todennäköisyys sille, että juureen jää kiinni ääretön alipuu. Luvun loppuosassa todistetaan vielä kapasiteetin avulla muutama tulos liittyen perkolaatioon yksikkökuutiossa.

Lukujen 2-4 päälähteitä ovat Russell Lyonsin artikkeli [3] sekä Lyonsin ja Yuval Peresin kirja [5]. Tutkielman viides luku nojaa löyhästi Lyonsin ja Peresin kirjaan, mutta tulokset olen todistanut itse. Viimeisen luvun tärkeimmät lähteet puolestaan ovat Lyonsin artikkeli [4] ja Lyonsin ja Peresin kirja. Muista lähteistä on otettu vain yksittäisiä tuloksia.

1 Esitietoja

Määritelmä 1.1. Joukon A potenssijoukko on sen kaikkien osajoukkojen kokoelma. Merkitään $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subset A\}$.

Määritelmä 1.2. Avaruuden X sigma-algebra on kokoelma $F \subset \mathcal{P}(X)$, jolle pätee

1. $\emptyset \in F$;
2. Jos $A \in F$, niin $X \setminus A \in F$;
3. Jos $A_k \in F$, kun $k = 1, 2, \ldots$, niin $\cup A_k \in F$.

Määritelmä 1.3. Olkoon F avaruuden X sigma-algebra. Kuvaus $\mu : F \to [0, \infty]$ on mitta, jos $\mu(\emptyset) = 0$ ja $\mu(\cup A_k) = \sum \mu(A_k)$ kaikille erillisille $A_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$ Kolmikko (X, F, μ) on mitta-avaruus. Jos $\mu(X) = 1$, niin μ on todennäköisyys(mitta).

Määritelmä 1.4. Olkoon X topologinen avaruus ja Δ kaikkien avoimien joukkojen $U \subset X$ kokoelma. Avaruuden X Borelin sigma-algebra on kokoelma

$$F_\Delta := \bigcap \{F \subset \mathcal{P}(X) : F \text{ on sigma-algebra}, \Delta \subset F\}.$$

Sen alkioita sanotaan Borel-joukoiksi. Topologisen avaruuden X mitta μ on Borel-mitta, jos kaikki Borel-joukot ovat mitan μ sigma-algebran alkioita. Mitta on Borel-todennäköisyysmitta, jos se on todennäköisyysmitta ja Borelmitta.

Määritelmä 1.5. Perusjoukko on satunnaiskokeen kaikkien mahdollisten lopputulosten joukko. Olkoon Ω perusjoukko, F perusjoukon Ω sigma-algebra ja P todennäköisyys. Tällöin kolmikko (Ω, F, P) on todennäköisyysavaruus. Sigma-algebrat $F_k \subset F$, $k = 1, 2, \ldots$, ovat riippumattomia, jos kaikilla äärellisillä joukoilla $\{k_1, \ldots, k_n\} \subset \mathbb{N}$ ja kaikilla $A_{k_i} \in F_{k_i}$, $1 \leq i \leq n$, pätee

$$P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_n}) = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_n}).$$

Määritelmä 1.6. Olkoon (Ω, F, P) todennäköisyysavaruus ja $B \subset \Omega$ sellainen, että $P(B) > 0$. Tällöin tapahtuman $A \subset \Omega$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Kuvaus $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$, jolle pätee $X^{-1}(B) \in F$ kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \mathbb{R}$, on satunnaismuuttuja. Jos satunnaismuuttuja X saa vain numeroituvan määrän arvoja, se on diskreetti. Merkitään $P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$. Olkoon $\{x_1, x_2, \ldots\}$ diskreetin satunnaismuuttujan X arvojoukko. Tällöin satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i).$$

Jos myös $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on diskreetti satunnaismuuttuja ja $P(Y = y) > 0$, niin satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla $Y = y$ on

$$E[X|Y = y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i | Y = y).$$

2 Haarautumisluku

2.1 Puiden peruskäsitteitä

Määritelmä 2.1. Graafi koostuu solmuista ja kaarista. Kaari yhdistää kaksi solmua toisiinsa. Solmut, jotka sama kaari yhdistää, ovat toistensa naapureita. Jos jokaisesta solmusta voi päästä jokaiseen muuhun solmuun kulkemalla riittävän monen kaaren ja solmun kautta, graafi on yhtenäinen. Graafi, jonka jokaisesta solmusta pääsee jokaiseen solmuun täsmälleen yhtä reittiä, kun mitään kaarta pitkin ei saa kulkea kahdesti, on puu. Toisin sanoen puu on yhtenäinen graafi, jolla ei ole syklejä. Sykli on polku, jonka lähtöpiste on sama kuin sen päätepiste, mutta joka ei kulje mitään kaarta pitkin kahdesti. Puu on juurellinen, jos yksi puun solmuista on nimetty juureksi. Juuresta käytetään merkintää o. Solmut juurta lukuun ottamatta ovat lehtiä, jos niillä on vain yksi naapuri.

Huomautus 2.2. Ellei toisin mainita, jatkossa puut ovat aina juurellisia ja lokaalisti äärellisiä eli jokaisella solmulla on vain äärellinen määrä naapureita.

Määritelmä 2.3. Olkoot T puu ja σ ja τ sen solmuja. Merkintä $|\sigma|$ tarkoittaa solmun σ ja juuren välisen lyhimmän polun sisältämien kaarien lukumäärää. Merkitään $\sigma \leq \tau$, jos σ on lyhimmällä polulla juuresta solmuun

τ; $\sigma < \tau$, jos $\sigma \leq \tau$ ja $\sigma \neq \tau$; $\sigma \to \tau$, jos $\sigma \leq \tau$ ja $|\tau| = |\sigma| + 1$; $\sigma \sim \tau$, jos $\sigma \to \tau$ tai $\tau \to \sigma$. Jos $\sigma \to \tau$, niin τ on solmun σ seuraaja. Tällöin voidaan merkitä $\overleftarrow{\tau} := \sigma$. Merkintä $\sigma \wedge \tau$ tarkoittaa sitä solmua, joka on kauimpana juuresta niistä solmuista, joille pätee $\psi \leq \sigma$ ja $\psi \leq \tau$. Merkitään vielä $T_n = \{\sigma \in T : |\sigma| = n\}$, $T^\sigma = \{\tau \in T : \sigma \leq \tau\}$ ja $T_n^\sigma = \{\tau \in T : \sigma \leq \tau \text{ ja } |\tau| = |\sigma| + n\}$.

Määritelmä 2.4. Olkoon $\Pi \not\ni o$ sellainen äärellinen joukko puun solmuja, että niiden poistaminen jättää juureen kiinni vain äärellisen osan puusta. Jos ei ole sellaista paria $\sigma, \tau \in \Pi$, että $\sigma < \tau$, niin Π on puun leikkausjoukko. Merkitään $|\Pi| = \min\{|\sigma| : \sigma \in \Pi\}$. Mikäli $\{\Pi_\alpha\}$ on kokoelma leikkausjoukkoja, niin merkitään $\Pi_\alpha \to \infty$, jos $|\Pi_\alpha| \to \infty$.

Määritelmä 2.5. Vuo puussa T on sellainen ei-negatiivinen puun solmujen funktio θ, että kaikille solmuille $\sigma \in T$ pätee

$$\theta(\sigma) = \sum_{\tau, \sigma \to \tau} \theta(\tau).$$

Jos lisäksi $\theta(o) = 1$, niin θ on yksikkövuo.

Huomautus 2.6. Jos θ on vuo ja Π on leikkausjoukko lehdettömässä puussa, niin

$$\sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) = \theta(o).$$

Tämä pätee myös lehdellisissä puissa, jos rajoitutaan sellaisiin voihin, joiden arvo lehdissä on 0.

Määritelmä 2.7. Puun T kasvuluku on

$$\operatorname{gr} T := \liminf_{n \to \infty} |T_n|^{1/n}.$$

Puun haarautumisluku on

$$\operatorname{br} T := \inf\{\lambda > 0 : \liminf_{\Pi \to \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0\}.$$

Huomautus 2.8. 1. Jos $\lambda > \operatorname{gr} T$, niin

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\sigma \in T_n} \lambda^{-|\sigma|} = \liminf_{n \to \infty} |T_n| \lambda^{-n} = \liminf_{n \to \infty} \left(\frac{|T_n|^{1/n}}{\lambda} \right)^n = 0.$$

Jos taas $\lambda < \operatorname{gr} T$, niin

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\sigma \in T_n} \lambda^{-|\sigma|} = \liminf_{n \to \infty} |T_n| \lambda^{-n} = \liminf_{n \to \infty} \left(\frac{|T_n|^{1/n}}{\lambda} \right)^n = \infty.$$

Siis

$$\operatorname{gr} T = \inf\{\lambda > 0 : \liminf_{n\to\infty} \sum_{\sigma \in T_n} \lambda^{-|\sigma|} = 0\} \geq \operatorname{br} T.$$

Esimerkissä 2.13 nähdään, että sekä aito epäyhtälö että yhtäsuuruus ovat mahdollisia.

2. Jos puu on ääretön, niin $\operatorname{br} T \geq 1$.

Lemma 2.9. *Jos puussa T ei ole lehtiä, haarautumisluvulle voidaan antaa yhtäpitävä määritelmä seuraavasti: Olkoon θ vuo puussa T ja $\lambda \geq 1$. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$ vuolle rajoitus $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-n}$ kaikilla $\sigma \in T_n$. Puun haarautumisluku on supremum niistä arvoista λ, jotka sallivat positiivisen vuon.*

Todistus. Riittää todistaa, että

$$\sup\{\theta(o) : 0 \leq \theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|} \text{ kaikilla } \sigma \in T\} = \inf_{\Pi}\{\sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}, \tag{1}$$

koska tällöin

$$\begin{aligned} &\sup\{\lambda : \text{ on olemassa sellainen positiivinen vuo } \theta, \\ &\qquad \text{että } 0 \leq \theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|} \text{ kaikilla } \sigma \in T\} \\ &= \sup\{\lambda : \inf_{\Pi} \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|} > 0\} = \inf\{\lambda : \inf_{\Pi} \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0\} \\ &= \inf\{\lambda : \liminf_{\Pi\to\infty} \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0\}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa rajoitus $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}$ koskee vain äärellistä alipuuta ja puun T leikkausjoukot otetaan myös tästä alipuusta. Voidaan olettaa, että alipuu sisältää leikkausjoukkoja. Nyt

$$\theta(o) = \sum_{\sigma\in\Pi} \theta(\sigma) \leq \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|},$$

joten

$$\sup\{\theta(o) : 0 \leq \theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}\} \leq \inf\{\sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}.$$

Oletetaan sitten, että θ on sellainen vuo, että $\theta(o)$ on maksimaalinen. Olkoon A se juuressa kiinni oleva joukko, jonka solmuille pätee $\theta(\sigma) < \lambda^{-|\sigma|}$. Jos A on koko äärellinen alipuu, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $\theta(\sigma) + \varepsilon < \lambda^{-|\sigma|}$ kaikilla $\sigma \in A$. Tämä on ristiriita, sillä θ on maksimaalinen vuo. Siis alipuussa on olemassa leikkausjoukko $\Pi \subset A^{\complement}$, joka erottaa toisistaan joukot A ja $A^{\complement}$. Tämän leikkausjoukon solmuille pätee $\theta(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$. Siis

$$\theta(o) = \sum_{\sigma \in \Pi} \theta(\sigma) = \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}.$$

Näin ollen (1) pätee äärellisen alipuun tapauksessa.

Tarkastellaan sitten koko puuta T. Samoin kuin äärellisten alipuiden tapauksessa nähdään, että

$$\sup\{\theta(o) : 0 \leq \theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}\} \leq \inf\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}.$$

Olkoon (T^n) sellainen jono puun juuren sisältäviä alipuita, että $T^n \subset T^{n+1}$ ja $T = \bigcup_n T^n$. Nyt

$$\inf_{\Pi \subset T}\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\} = \inf_n \inf_{\Pi \subset T^n}\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}.$$

Olkoon θ_n maksimaalinen vuo puussa T, kun rajoitus $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}$ koskee vain alipuuta T^n ja θ jonon (θ_n) rajafunktio. Tällöin

$$\theta_n(o) = \inf_{\Pi \subset T^n}\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\} \geq \inf_{\Pi \subset T}\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}$$

ja θ on sellainen vuo puussa T, että

$$\theta(o) \geq \inf_{\Pi \subset T}\{\sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}\}.$$

Siis (1) on voimassa eli haarautumisluvun määritelmät ovat yhtäpitäviä. □

Huomautus 2.10. Lemman 2.9 antama haarautumisluvun määritelmä yleistyy myös lehdellisen puun tapaukseen, kun rajoitutaan sellaisiin voihin, joiden arvo lehdissä on 0.

Esimerkki 2.11. Jos T on sellainen ääretön puu, että sen jokaisella solmulla on k seuraajaa, niin $|T_n| = k^n$. Siis $\operatorname{gr} T = k$. Olkoon θ sellainen vuo, että $\theta(o) = 1$ ja vuo jakautuu jokaisessa solmussa tasaisesti sen seuraajiin. Tällöin $\theta(\sigma) = k^{-|\sigma|}$ kaikilla solmuilla σ. Siis vakion k määräämä rajoitus $\theta(\sigma) \leq k^{-n}$ kaikilla $\sigma \in T_n$ sallii positiivisen vuon. Lemman 2.9 nojalla $k \leq \operatorname{br} T$. Siis $k \leq \operatorname{br} T \leq \operatorname{gr} T = k$, joten $\operatorname{br} T = k$.

Esimerkki 2.12. Olkoon T sellainen ääretön puu, että solmujen seuraajien lukumäärä riippuu vain siitä, mihin joukkoon T_n solmu kuuluu. Tällöin $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$. Koska aina $\operatorname{br} T \leq \operatorname{gr} T$, niin riittää osoittaa, että $\operatorname{br} T \geq \operatorname{gr} T$. Jos $\operatorname{gr} T = 1$, niin tämä on selvää. Voidaan siis olettaa, että $\operatorname{gr} T > 1$. Olkoon $1 < \lambda < \operatorname{gr} T$. Nyt on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $\lambda^m < |T_m|$ kaikilla $m \geq n$. Olkoon θ yksikkövuo, joka jakautuu jokaisessa solmussa tasaisesti sen seuraajiin. Toisin sanoen $\theta(\sigma) = |T_{|\sigma|}|^{-1}$ kaikilla solmuilla σ. Tällöin ehto $\theta(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}$ on voimassa, kun $|\sigma| \geq n$. Asetetaan nyt

$$\theta'(\sigma) = \frac{\theta(\sigma)}{\lambda^n}.$$

Tällöin θ' on vuo, jolle pätee $\theta'(\sigma) \leq \lambda^{-|\sigma|}$ kaikilla solmuilla σ. Lisäksi $\theta'(o) = \lambda^{-n} > 0$, joten θ' on positiivinen vuo. Lemmasta 2.9 seuraa nyt, että $\operatorname{br} T \geq \operatorname{gr} T$, joten $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$.

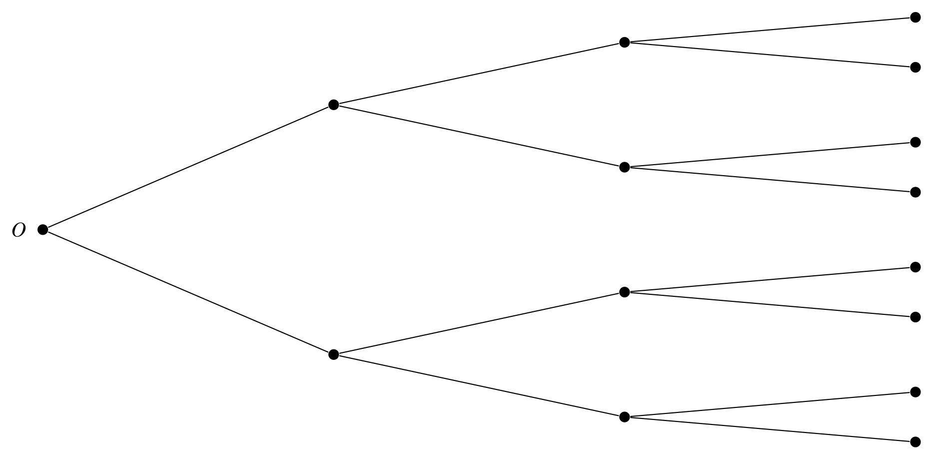
Jos puun T solmujen seuraajien lukumäärä riippuu vain solmujen etäisyydestä juuresta, niin jono $(|T_n|)$ sisältää kaiken tiedon puun rakenteesta. Tulos $\operatorname{gr} T = \operatorname{br} T$ on siis hyvin luonnollinen. Kaikkien puiden rakenne ei kuitenkaan ole näin yksinkertainen. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä tilanteesta, jossa $\operatorname{br} T < \operatorname{gr} T$.

Esimerkki 2.13. Olkoon T sellainen puu, että $|T_n| = 2^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\operatorname{gr} T = 2$. Puun haarautumisluku riippuu kuitenkin siitä, miten solmut ovat yhteydessä toisiinsa. Jos jokaisella solmulla on kaksi seuraajaa, niin myös $\operatorname{br} T = 2$. Tällaisen puun alku on kuvassa 1. Yhdistetään solmut kuitenkin toisella tavalla. Olkoon $(\sigma_1^n, \ldots, \sigma_{2^n}^n)$ vaiheen T_n solmut järjestettynä myötäpäivään. Jos $k \leq 2^{n-1}$, niin solmulla σ_k^n on kolme seuraajaa. Muulloin seuraajia on vain yksi. Tällöin $\operatorname{br} T = 1$. Tämän puun alku on kuvassa 2.

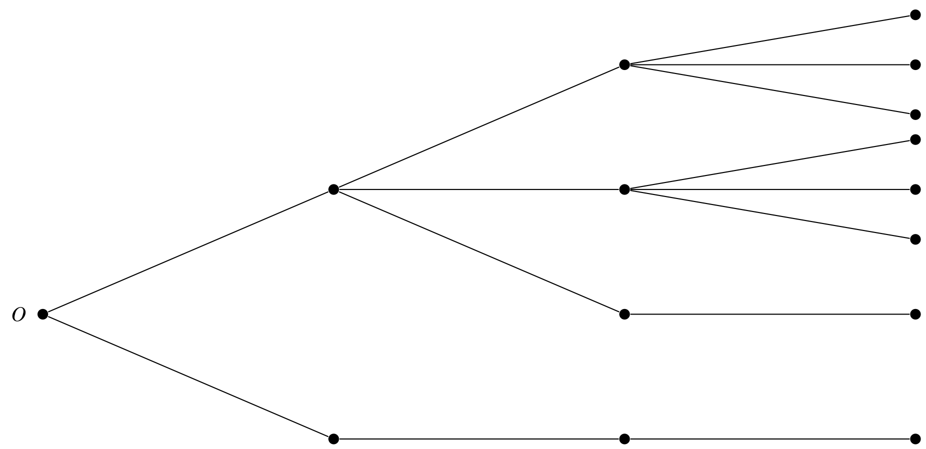
Miksi haarautumisluku on 1? Jos mikä vain solmu muotoa σ_1^k seuraajineen poistetaan puusta, jäljelle jäävässä osassa päädytään tilanteeseen, jossa jokaisella solmulla on aina yksi seuraaja, kun edetään tarpeeksi kauas juuresta. Tämä tapahtuu viimeistään vaiheessa T_{3k}, koska tällöin puussa on $2^{3k} = 8^k$ solmua. Jos solmun σ_1^k jokaisella jälkeläisellä olisi kolme seuraajaa, niin vaiheessa T_{3k} solmulla σ_1^k olisi $3^{2k} = 9^k$ jälkeläistä, mikä on mahdotonta. Siis solmun σ_1^k jollakin jälkeläisellä vaiheessa T_{3k} on vain yksi seuraaja, joten muuallakin puussa seuraajia voi olla vain yksi per solmu. Merkitään $T' = T \setminus T^{\sigma_1^k}$. Nyt pätee $|T'_n| \leq |T_{3k}|$ kaikilla n. Siis

$$\operatorname{br} T' \leq \operatorname{gr} T' = \liminf_{n\to\infty} |T'_n|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} |T_{3k}|^{1/n} = 1.$$

Siksi puun T' haarautumisluku on yksi. Nyt jos lemman 2.9 tilanteessa valitaan $\lambda > 1$, niin positiivinen vuo ei ole mahdollinen puussa T'. Tämä tilanne



Kuva 1: Binääripuun alku.



Kuva 2: 1–3-puun alku.

ei muutu, kun puuhun T' liitetään yksinäinen haara, joka sisältää vain muotoa σ_1^k olevat solmut. Siksi koko puun T haarautumisluku on 1.

2.2 Jaksolliset puut

Haarautumisluvun laskeminen on merkittävästi helpompaa tilanteissa, joissa se on yhtä suuri kuin kasvuluku. Esimerkissä 2.12 nähtiin, että haarautumisluku ja kasvuluku ovat yhtä suuret, jos solmun seuraajien lukumäärä riippuu vain sen etäisyydestä juuresta. Tässä luvussa tarkastellaan muutamia muita ehtoja haarautumis- ja kasvulukujen yhtäsuuruudelle.

Määritelmä 2.14. Olkoon T ääretön puu ja $N \geq 0$. Puu on N-jaksollinen (vastaavasti N-alajaksollinen), jos jokaista solmua $\sigma \in T$ kohti on olemassa sellainen solmujen naapuruussuhteet säilyttävä bijektio (injektio) $f\colon T^\sigma \to T^{f(\sigma)}$, että $|f(\sigma)| \leq N$. Puu on jaksollinen (alajaksollinen), jos se on N-jaksollinen (N-alajaksollinen) jollakin N. Puu on N-yläjaksollinen, jos jokaista solmua $\sigma \in T$ kohti on olemassa sellainen solmujen naapuruussuhteet säilyttävä injektio $f\colon T \to T^{f(o)}$, missä $f(o) \in T^\sigma$, että $|f(o)| - |\sigma| \leq N$.

Huomautus 2.15. Olkoon T ääretön puu. Jos T on 0-alajaksollinen, niin jokaista solmua $\sigma \in T$ kohti on olemassa sellainen solmujen naapuruussuhteet säilyttävä injektio $f\colon T^\sigma \to T$, että $f(\sigma) = o$. Jos puu on 0-yläjaksollinen, niin jokaista solmua $\sigma \in T$ kohti on olemassa sellainen solmujen naapuruussuhteet säilyttävä injektio $f\colon T \to T^\sigma$, että $f(o) = \sigma$. Siis puu on 0-jaksollinen, jos ja vain jos se on sekä 0-alajaksollinen että 0-yläjaksollinen. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti. Esimerkiksi jos puun juurella on neljä ja kaikilla muilla solmuilla kaksi seuraajaa, niin puu on 1-jaksollinen, mutta ei 1-yläjaksollinen.

Esimerkki 2.16. Olkoon T ääretön puu. Jos T on 0-alajaksollinen, niin

$$|T_{n+m}| \leq |T_n| \cdot |T_m|$$

kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$. Jos taas T on 0-yläjaksollinen, niin

$$|T_n| \cdot |T_m| \leq |T_{n+m}|.$$

Erityisesti jos T on 0-jaksollinen niin

$$|T_{n+m}| = |T_n| \cdot |T_m|.$$

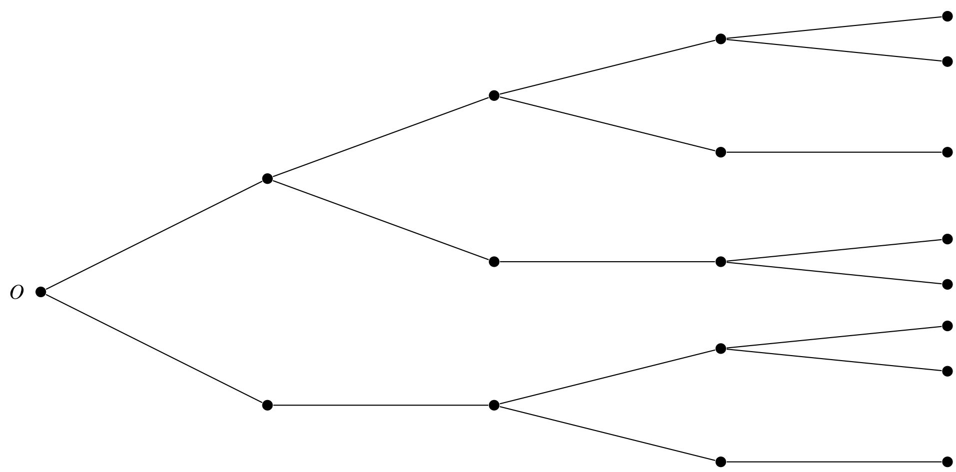
Toisaalta, jos

$$|T_{n+m}| = |T_n| \cdot |T_m|,$$

niin puu on 0-jaksollinen. Siis puu on 0-jaksollinen, jos ja vain jos sen jokaisella solmulla on yhtä monta seuraajaa.

Esimerkki 2.17. Olkoon T niin sanottu Fibonacci-puu. Sen juurella on kaksi ja muilla solmuilla joko yksi tai kaksi seuraajaa. Olkoon $\sigma \in T \setminus \{o\}$. Jos solmulla $\overleftarrow{\sigma}$ on yksi seuraaja, niin solmulla σ on kaksi seuraajaa. Jos solmulla $\overleftarrow{\sigma}$ on kaksi seuraajaa, niin luetellaan vaiheen $T_{|\sigma|}$ solmut myötäpäivään. Jos σ on näistä kahdesta solmusta aikaisemmin luettelossa, niin sillä on kaksi seuraajaa. Muuten sillä on vain yksi. Tämän puun alku on kuvassa 3. Puun nimi tulee siitä, että solmujen lukumäärät vaiheissa T_n vastaavat Fibonaccin lukujonoa. Fibonacci-puu on 0-alajaksollinen, mutta ei 0-yläjaksollinen. Siis se ei ole 0-jaksollinen. Se on kuitenkin 1-jaksollinen. Erityisesti se on jaksollinen. Esimerkiksi Binet'n kaavalla nähdään, että Fibonacci-puun kasvuluku on kultainen suhde eli

$$\operatorname{gr} T = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Kuva 3: Fibonacci-puun alku.

Lause 2.18. *Jos T on alajaksollinen puu, niin* $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$.

Todistus. Oletetaan ensin, että puulla T ei ole lehtiä. Osoitetaan, että väite pätee, kun T on 0-alajaksollinen. Jos $\lambda > 0$ ja Π on leikkausjoukko, niin merkitään

$$||\Pi||_\lambda := \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|}.$$

Nyt on olemassa sellainen leikkausjoukko Π ja $\lambda_1 > 0$, että

$$||\Pi||_{\lambda_1} < 1.$$

Valitaan sellainen $0 < \lambda < \lambda_1$, että

$$||\Pi||_\lambda < 1.$$

Merkitään $d = \max_{\sigma \in \Pi} |\sigma|$. Koska T on 0-alajaksollinen, niin jokaista solmua $\sigma \in \Pi$ kohti on olemassa sellainen alipuun T^σ leikkausjoukko $\Pi(\sigma)$, että

$$\sum_{\tau \in \Pi(\sigma)} \lambda^{-|\tau|+|\sigma|} \leq ||\Pi||_\lambda < 1$$

ja

$$\max_{\tau\in\Pi(\sigma)} |\tau| - |\sigma| \leq d.$$

Siis

$$||\Pi(\sigma)||_\lambda = \sum_{\tau\in\Pi(\sigma)} \lambda^{-|\tau|} < \lambda^{-|\sigma|}.$$

Olkoon $A \subset \Pi$. Korvaamalla solmut $\sigma \in A$ vastaavilla joukoilla $\Pi(\sigma)$ saadaan uusi leikkausjoukko

$$\tilde{\Pi} = (\Pi \setminus A) \cup \bigcup_{\sigma\in A} \Pi(\sigma),$$

jolle pätee

$$||\tilde{\Pi}||_\lambda = \sum_{\sigma\in\Pi\setminus A} \lambda^{-|\sigma|} + \sum_{\sigma\in A} ||\Pi(\sigma)||_\lambda \leq ||\Pi||_\lambda < 1.$$

Olkoon $n > d$. Valitaan joukoksi A ne leikkausjoukon Π solmut, joille pätee $|\sigma| < n$. Toistetaan prosessia, jossa leikkausjoukot korvataan toisilla. Seuraavassa vaiheessa korvataan $\tilde{\Pi}$ vastaavasti uudella leikkausjoukolla valitsemalla joukoksi A ne leikkausjoukon $\tilde{\Pi}$ solmut, joille pätee $|\sigma| < n$. Lopulta saadaan sellainen leikkausjoukko Π^*, joka on joukkojen T_n ja T_{n+d} välissä ja jolle pätee $||\Pi^*||_\lambda < 1$. Näin ollen $|T_n|\lambda^{-(n+d)} \leq ||\Pi^*||_\lambda < 1$, joten

$$\operatorname{gr} T \leq \limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \lambda^{1+\frac{d}{n}} = \lambda < \lambda_1.$$

Jos $\lambda_1 > \operatorname{br} T$, niin $\inf_\Pi ||\Pi||_{\lambda_1} = 0$. Siis vakioksi λ_1 voidaan valita mikä tahansa haarautumislukua suurempi luku. Tästä seuraa, että $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$.

Tarkastellaan sitten tapausta, että T on N-alajaksollinen. Luodaan puista $\{T^\sigma : |\sigma| \leq N\}$ erilliset kopiot ja samastetaan niiden juuret yhdeksi pisteeksi, joka on näin saadun uuden puun $\hat{T}$ juuri. Nyt $\hat{T}$ on 0-alajaksollinen, joten $\operatorname{gr} \hat{T} = \operatorname{br} \hat{T}$. Lisäksi $\operatorname{gr} \hat{T} \geq \operatorname{gr} T$. Olkoon Π puun T sellainen leikkausjoukko, että $\min_{\sigma\in\Pi} |\sigma| \geq N$ ja olkoon Π' sitä vastaava leikkausjoukko puussa $\hat{T}$. Toisin sanoen Π' sisältää ne solmut, joita vastaavat pisteet puussa T kuuluvat leikkausjoukkoon Π. Olkoon Π_τ se leikkausjoukon Π' osa, joka kuuluu puun $\hat{T}$ siihen alipuuhun, joka luotiin puusta T^τ, missä $\tau \in T_n$ jollakin $n \leq N$. Nyt kaikilla $\lambda > 0$ pätee

$$\sum_{\sigma\in\Pi_\tau} \lambda^{-|\sigma|} = \lambda^{|\tau|} \sum_{\sigma\in\Pi\cap T^\tau} \lambda^{-|\sigma|}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\Pi'}\lambda^{-|\sigma|} &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{\tau\in T_k}\sum_{\sigma\in\Pi_\tau}\lambda^{-|\sigma|} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{\tau\in T_k}\lambda^{|\tau|}\sum_{\sigma\in\Pi\cap T^\tau}\lambda^{-|\sigma|}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\sum_{\tau\in T_k}\sum_{\sigma\in\Pi\cap T^\tau}\lambda^{-|\sigma|} \le \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\sum_{\sigma\in\Pi}\lambda^{-|\sigma|}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\operatorname{br}\hat{T} \le \operatorname{br} T \le \operatorname{gr} T \le \operatorname{gr}\hat{T}$. Siis on oltava $\operatorname{gr} T = \operatorname{br} T$.

Oletetaan sitten, että puulla T on lehtiä. Muodostetaan puu T' lisäämällä jokaiselle lehdelle ääretön jono seuraajia, joilla on aina tasan yksi seuraaja. Huomautuksen 2.10 nojalla $\operatorname{br} T = \operatorname{br} T'$. Nyt T' on alajaksollinen, joten todistuksen alkuosan nojalla

$$\operatorname{gr} T \ge \operatorname{br} T = \operatorname{br} T' = \operatorname{gr} T' \ge \operatorname{gr} T.$$

Siis $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$. □

Vastaava tulos pätee myös yläjaksollisille puille. Ennen kuin se voidaan todistaa, tarvitaan kuitenkin seuraava Feketen lemmana tunnettu tulos.

Lemma 2.19. *Olkoon (a_n) sellainen jono reaalilukuja, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n pätee $a_{m+n} \le a_m + a_n$. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

Todistus. Olkoon $M > \inf_n a_n/n$ ja m sellainen, että $M > a_m/m$. Valitaan $a_0 = 0$. Nyt kaikilla n on olemassa sellaiset luonnolliset luvut q ja r, että $n = qm + r$ ja $0 \le r \le m-1$. Siis

$$a_n = a_{qm+r} \le a_m + \ldots + a_m + a_r = qa_m + a_r,$$

joten

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{qa_m + a_r}{qm + r} = \frac{qa_m}{qm + r} + \frac{a_r}{n} < \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} < M + \frac{a_r}{n}.$$

Siis

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le M.$$

Koska M voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua

$$\inf_n\frac{a_n}{n} \le \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n},$$

niin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \inf_n\frac{a_n}{n}.$$

□

Huomautus 2.20. Jos edellisessä lemmassa ehtona onkin

$$a_{m+n-N} \leq a_{m-N} + a_{n-N},$$

missä $n, m, N \in \mathbb{N}$, niin vastaavalla todistuksella nähdään, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-N}}{n} = \inf_n \frac{a_{n-N}}{n}.$$

Lause 2.21. *Jos T on N-yläjaksollinen puu ja $\limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} < \infty$, niin $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$ ja $|T_n| \leq (\operatorname{gr} T)^{n+N}$ kaikilla n.*

Todistus. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja $\sigma \in T_n$. Koska T on N-yläjaksollinen, niin on olemassa solmujen naapuruussuhteet säilyttävä injektio $f\colon T \to T^{f(o)}$, missä $f(o) \in T^\sigma$ ja $|f(o)| - |\sigma| \leq N$. Olkoon $|f(o)| = k$. Siis $k \leq n + N$. Nyt $f(T_m) \subset T^{f(o)} \cap T_{k+m}$. Tässä $|T^{f(o)} \cap T_{k+m}| \leq |T^{f(o)} \cap T_{n+m+N}|$, koska $k \leq n + N$ ja N-yläjaksollisessa puussa ei voi olla lehtiä. Siis T_m saadaan mahtumaan joukkoon T_{n+m+N} vähintään $|T_n|$ kertaa eli

$$|T_{n+m+N}| \geq |T_n| \cdot |T_m|.$$

Siis

$$|T_{n+m-N}| \geq |T_{n-N}| \cdot |T_{m-N}|,$$

missä $|T_{n-N}|$ tulkitaan nollaksi, jos $n < N$. Nyt

$$\log |T_{n+m-N}| \geq \log |T_{n-N}| + \log |T_{m-N}|$$

eli

$$-\log |T_{n+m-N}| \leq -\log |T_{n-N}| - \log |T_{m-N}|.$$

Nyt lemman 2.19 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log |T_{n-N}|}{n} = \inf_n \frac{-\log |T_{n-N}|}{n} = -\sup_n \frac{\log |T_{n-N}|}{n}$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_{n-N}|}{n} = \sup_n \frac{\log |T_{n-N}|}{n}.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_n|}{n+N} = \sup_n \frac{\log |T_n|}{n+N}.$$

Näin ollen

$$\log \operatorname{gr} T = \log \lim_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} = \log \lim_{n\to\infty} |T_n|^{1/(n+N)} = \log \sup_n |T_n|^{1/(n+N)}.$$

Erityisesti $\operatorname{gr} T \geq |T_n|^{1/(n+N)}$ eli $|T_n| \leq (\operatorname{gr} T)^{n+N}$ kaikilla n.

Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja θ sellainen yksikkövuo juuresta joukkoon T_k, että $\theta(\sigma) = \theta(\tau)$ kaikilla $\sigma, \tau \in T_k$. Toisin sanoen $\theta(\sigma) = |T_k|^{-1}$ kaikilla $\sigma \in T_k$. Jos $\tau \in T$ on sellainen, että $|\tau| < k$, niin pätee

$$\theta(\tau) \leq \theta(o) = 1 = |T_k|^0 = |T_k|^{-\left\lfloor \frac{|\tau|}{k+N} \right\rfloor}.$$

Laajennetaan nyt vuo θ koko puuhun T. Olkoon $\sigma \in T_k$. Koska T on N-yläjaksollinen, niin on olemassa injektio $f \colon T \to T^\sigma$. Asetetaan $\theta(f(\tau)) = \theta(\tau)\theta(\sigma)$ kaikilla $|\tau| \leq k$. Lisäksi solmuilla, jotka ovat lyhimmällä solmujen σ ja $f(o)$ välisellä polulla, vuo saa arvon $\theta(\sigma)$. Muilla solmun σ ja joukon $T^\sigma \cap T_{|f(o)|}$ välisillä solmuilla, joille f ei kuvaa yhtään solmua, vuo saa arvon 0. Valitsemalla seuraavaksi solmun σ rooliin solmu $f(\sigma)$ vuota θ voidaan laajentaa edelleen. Näin θ laajenee lopulta koko puuhun T. Nyt kaikilla solmuilla σ pätee $\theta(\sigma) \leq |T_k|^{-\lfloor |\sigma|/(k+N) \rfloor}$. Siis $\operatorname{br} T \geq |T_k|^{1/(k+N)}$. Kun $k \to \infty$, saadaan $\operatorname{br} T \geq \operatorname{gr} T$, joten $\operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$. □

Lemma 2.22. *Olkoon f ja g ei-negatiivisia funktioita puussa T. Olkoon funktio g positiivinen ja sellainen, että kaikilla $\sigma \leq \tau$ pätee $g(\sigma) \geq g(\tau)$. Merkitään*

$$a_n = \sum_{\sigma,\tau \in T_n} g(\sigma \wedge \tau)^{-1} f(\sigma) f(\tau)$$

ja

$$b_n = \sum_{\sigma \in T_n} f(\sigma).$$

Jos

$$\liminf_{n \to \infty} a_n b_n^{-2} < \infty,$$

niin

$$\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} g(\sigma) > 0.$$

Todistus. Olkoon $0 < \varepsilon < \limsup_{n \to \infty} a_n^{-1} b_n^2$. Jos Π on leikkausjoukko, niin valitaan sellainen n, että kaikilla $\sigma \in T_n$ on olemassa sellainen $\tau \in \Pi$, että $\tau \leq \sigma$ ja $a_n^{-1} b_n^2 > \varepsilon$. Asetetaan $c_n = b_n/(2a_n)$ ja

$$A = \{\sigma \in T_n : \text{ on olemassa } \tau \leq \sigma, \text{ jolle pätee } c_n \sum_{\substack{\rho \in T_n \\ \tau \leq \rho}} f(\rho) > g(\tau)\}.$$

Jos $\tau \leq \sigma \in T_n$, niin

$$\sum_{\rho \in T_n} g(\sigma \wedge \rho)^{-1} f(\rho) \geq \sum_{\substack{\rho \in T_n \\ \tau \leq \rho}} g(\sigma \wedge \rho)^{-1} f(\rho) \geq \sum_{\substack{\rho \in T_n \\ \tau \leq \rho}} g(\tau)^{-1} f(\rho).$$

Jos $\sigma \in A$, niin voidaan valita sellainen $\tau \leq \sigma$, että

$$\sum_{\substack{\rho \in T_n \\ \tau \leq \rho}} g(\tau)^{-1} f(\rho) > c_n^{-1}.$$

Tällöin

$$\sum_{\sigma \in A} f(\sigma) < c_n \sum_{\substack{\sigma \in A \\ \rho \in T_n}} f(\sigma) g(\sigma \wedge \rho)^{-1} f(\rho) \leq a_n c_n.$$

Lisäksi jos $|\tau| \leq n$, niin

$$c_n \sum_{\substack{\sigma \in T_n \setminus A \\ \tau \leq \sigma}} f(\sigma) \leq g(\tau).$$

Yhdistämällä nämä epäyhtälöt saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \Pi} g(\tau) \geq c_n \sum_{\tau \in \Pi} \sum_{\substack{\sigma \in T_n \setminus A \\ \tau \leq \sigma}} f(\sigma) = c_n \sum_{\sigma \in T_n \setminus A} f(\sigma) \\
= c_n \left(\sum_{\sigma \in T_n} f(\sigma) - \sum_{\sigma \in A} f(\sigma) \right) > c_n (b_n - a_n c_n) \\
= c_n (2a_n c_n - a_n c_n) = a_n c_n^2 = a_n \frac{b_n^2}{4a_n^2} = \frac{b_n^2}{4a_n} > \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

□

Lause 2.23. *Olkoon T ääretön puu ja $\lambda \geq 1$ sellainen, että*

$$\sup_{k,m \geq 0} |T_k|^{-1} \sum_{\sigma \in T_k} (\lambda^{-m} |T_m^\sigma|)^2 < \infty$$

ja

$$\limsup_{n \to \infty} \lambda^{-n} |T_n| > 0.$$

Tällöin $\lambda = \operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$.

Todistus. Kun $k = 0$, niin

$$|T_k|^{-1} \sum_{\sigma \in T_k} (\lambda^{-m} |T_m^\sigma|)^2 = (\lambda^{-m} |T_m|)^2.$$

Siis $\sup_m \lambda^{-m} |T_m| < \infty$, joten $\operatorname{gr} T \leq \lambda$. Koska $\operatorname{br} T \leq \operatorname{gr} T$, niin enää tarvitsee osoittaa, että $\lambda \leq \operatorname{br} T$. Tapaus $\lambda = 1$ on selvä, koska puu on ääretön, joten voidaan olettaa, että $\lambda > 1$. Olkoon $1 < \lambda_1 < \lambda$ ja asetetaan funktiot $f(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$ ja $g(\sigma) = \lambda_1^{-|\sigma|}$. Nyt

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\sigma,\tau \in T_n} g(\sigma \wedge \tau)^{-1} f(\sigma) f(\tau) = \sum_{\sigma,\tau \in T_n} \lambda_1^{|\sigma \wedge \tau|} \lambda^{-2n} \\ &= \sum_{|\rho| \le n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \sum_{\substack{\sigma,\tau \in T_n \\ \sigma \wedge \tau = \rho}} 1. \end{aligned}$$

Koska

$$\left(\sum_k x_k \right)^2 = \sum_k x_k^2 + 2 \sum_{i<k} x_i x_k$$

kaikilla $x_k \in \mathbb{R}$, niin

$$a_n = \sum_{|\rho| \le n} \lambda_1^{|\rho|} \lambda^{-2n} \left(|T_{n-|\rho|}^{\rho}|^2 - \sum_{\substack{\psi, \rho \to \psi \\ |\psi| \le n}} |T_{n-|\psi|}^{\psi}|^2 \right).$$

Edelleen pätee

$$\sum_{|\rho| \le n} \lambda_1^{|\rho|} \sum_{\substack{\psi, \rho \to \psi \\ |\psi| \le n}} |T_{n-|\psi|}^{\psi}|^2 = \sum_{0 < |\rho| \le n} \lambda_1^{|\overleftarrow{\rho}|} |T_{n-|\rho|}^{\rho}|^2$$

ja

$$\sum_{|\rho| \le n} \lambda_1^{|\rho|} |T_{n-|\rho|}^{\rho}|^2 = |T_n|^2 + \sum_{0 < |\rho| \le n} \lambda_1^{|\rho|} |T_{n-|\rho|}^{\rho}|^2,$$

joten

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda^{-2n} |T_n|^2 + \sum_{0 < |\rho| \le n} (\lambda_1^{|\rho|} - \lambda_1^{|\overleftarrow{\rho}|}) \lambda^{-2n} |T_{n-|\rho|}^{\rho}|^2 \\ &= \lambda^{-2n} |T_n|^2 + (1 - \lambda_1^{-1}) \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^k \sum_{\rho \in T_k} (\lambda^{-n+k} |T_{n-k}^{\rho}|)^2. \end{aligned}$$

Koska $\lambda \ge \operatorname{gr} T$, niin

$$\lambda^{-2n} |T_n|^2 < \infty.$$

Koska taas $\lambda^2/\lambda_1 > \operatorname{gr} T$, niin kun k on tarpeeksi suuri, pätee $|T_k| \le (\lambda^2/\lambda_1)^k$, joten

$$\lambda^{-k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^k \sum_{\rho \in T_k} (\lambda^{-n+k} |T_{n-k}^{\rho}|)^2 \le \sup_{k,m \ge 0} |T_k|^{-1} \sum_{\sigma \in T_k} (\lambda^{-m} |T_m^{\sigma}|)^2 < \infty$$

kaikilla $n \geq k$. Siis on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $a_n < M$ kaikilla n. Edelleen pätee

$$b_n = \sum_{\sigma \in T_n} f(\sigma) = |T_n| \lambda^{-n},$$

joten lauseen oletuksen nojalla $\limsup_{n \to \infty} b_n > 0$. Siis

$$\liminf_{n \to \infty} a_n b_n^{-2} < \infty,$$

joten lemman 2.22 nojalla

$$\inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} g(\sigma) = \inf_{\Pi} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda_1^{-|\sigma|} > 0.$$

Siis $\lambda_1 \leq \operatorname{br} T$. Näin ollen $\lambda = \operatorname{br} T = \operatorname{gr} T$. □

3 Satunnaiskävely

Tämän luvun aiheita ovat virtapiirit ja satunnaiskävely. Vaikka nämä aiheet kuulostavat erillisiltä, niiden välillä on monta merkittävää ja hyödyllistä linkkiä. Virtapiiriterminologia on peräisin fysiikasta, mutta aiheen käsittely on puhtaasti matemaattista. Fysiikan tuntemus ei siis ole tarpeellista, joskin se auttaa motivoimaan käytetyt määritelmät.

Määritelmä 3.1. Liitetään puun T solmuihin positiiviset luvut, joita sanotaan konduktansseiksi. Merkitään solmun σ konduktanssia $c(\sigma)$. Konduktanssien käänteisluvut ovat resistansseja ja merkitään $c(\sigma)^{-1} = r(\sigma)$. Määritellään vuon θ energia resistanssin avulla. Energia on

$$\mathcal{E}(\theta) = \sum_{\sigma \in T \setminus \{o\}} \theta(\sigma)^2 r(\sigma).$$

Huomautus 3.2. Kenties luonnollisempi määritelmä on liittää konduktanssit solmujen sijaan kaariin. Koska kaarien ja solmujen välillä (juurta lukuun ottamatta) on yksi yhteen -vastaavuus, määritelmä voidaan ajatella kummin vain. Merkintöjen kannalta kummallakin tavalla on etunsa. Jos on hyödyllistä liittää konduktanssit nimenomaan kaariin, merkitään $c(\sigma, \overleftarrow{\sigma}) = c(\sigma)$, missä $(\sigma, \overleftarrow{\sigma})$ tarkoittaa solmujen σ ja $\overleftarrow{\sigma}$ välistä kaarta.

Määritelmä 3.3. Tarkastellaan ääretöntä satunnaiskävelyä äärettömässä puussa T. Aloitetaan kävely juuresta ja siirrytään jokaisessa vaiheessa sen hetkisestä solmusta johonkin naapuriin. Määritellään siirtymätodennäköisyydet konduktanssien avulla. Todennäköisyys siirtyä solmusta σ sen naapuriin τ on

$$p(\sigma, \tau) = \frac{c(\sigma, \tau)}{\sum_{\psi, \sigma \sim \psi} c(\sigma, \psi)}.$$

Jos satunnaiskävely palaa juureen äärettömän monta kertaa melkein varmasti, satunnaiskävely on palautuva. Jos taas satunnaiskävely karkaa äärettömään eli palaa juureen melkein varmasti vain äärellisen monta kertaa, se on etääntyvä.

Huomautus 3.4. Olkoon V puun T solmujen joukko ja Ω kaikkien satunnaiskävelyjen joukko puussa T. Tässä Ω sisältää myös äärelliset satunnaiskävelyt. Olkoon $X_k : \Omega \to V$ funktio, joka kuvaa satunnaiskävelyn sille solmulle, jossa satunnaiskävely on vaiheessa k. Erityisesti $X_1 = o$. Satunnaiskävely on Markovin ketju, toisin sanoen

$$P(X_{k+1} = x | X_k = x_k, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_{k+1} = x | X_k = x_k).$$

Nyt jos $x \sim x_k$, niin

$$P(X_{k+1} = x | X_k = x_k) = \frac{c(x_k, x)}{\sum_{\sigma, x_k \sim \sigma} c(x_k, \sigma)}.$$

Lisäksi $P(X_{k+1} = x | X_k = x_k) = 0$, jos x_k ja x eivät ole toistensa naapureita.

Olkoon $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, missä $x_i \in V$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, n-pituinen satunnaiskävely. Nyt voidaan asettaa

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i),$$

missä $P(X_1 = o) = 1$. Kolmogorovin laajennuslause takaa sen, että tämä todennäköisyys on mahdollista laajentaa yksikäsitteisesti myös äärettömien satunnaiskävelyiden tilanteeseen. Laajennuslausetta ja sen todistusta varten katso [2, Teoreema 2.1].

Huomautus 3.5. Jos todennäköisyys palata juureen ainakin kerran on $p = 1$, niin todennäköisyys palata juureen äärettömän monta kertaa on $\prod_{i=1}^{\infty} p = 1$. Siis satunnaiskävely on palautuva. Jos todennäköisyys palata ainakin kerran on $p < 1$, niin todennäköisyys palata juureen äärettömän monta kertaa on $\prod_{i=1}^{\infty} p = 0$. Siis satunnaiskävely on etääntyvä. Erityisesti satunnaiskävely on aina joko palautuva tai etääntyvä.

Määritelmä 3.6. Olkoon T puu, Π leikkausjoukko ja Z puun se osa, joka jää leikkausjoukon sille puolelle, johon juuri ei kuulu. Sovitaan, että $\Pi \subset Z$. Jännite on sellainen funktio v, että $v(o) = 1$, $v(\sigma) = 0$ kaikilla $\sigma \in Z$ ja muulloin v on harmoninen, toisin sanoen $v(\sigma) = \sum_{\tau, \sigma\sim\tau} p(\sigma,\tau)v(\tau)$, kun $\sigma \notin o \cup Z$. Määritellään kaariin (sähkö)virta i asettamalla $i(\sigma,\tau) := c(\sigma,\tau)(v(\sigma) - v(\tau))$. Myöhemmin tässä luvussa osoitetaan, että jännite (ja siten myös virta) on aina olemassa ja yksikäsitteinen.

Jännite ja virta voidaan määritellä myös koko puuhun T. Olkoon (T^n) sellainen jono puun juuren sisältäviä äärellisiä alipuita, että $T^n \subset T^{n+1}$ ja $T = \bigcup T^n$. Valitaan $Z_n = T \setminus T^n$. Olkoon v_n jännite, jonka joukko Z_n määrää. Tällöin jännite juuresta äärettömään saadaan jonon (v_n) raja-arvona. Virta määritellään vastaavasti.

Huomautus 3.7.

1. Virralle pätee $i(\sigma,\tau) = -i(\tau,\sigma)$. Lisäksi $i(\sigma,\tau) > 0$, jos ja vain jos $v(\sigma) > v(\tau)$, toisin sanoen virran suunta on juuresta joukkoon Z.

2. Jos v on harmoninen solmussa σ, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau,\sigma\sim\tau} i(\sigma,\tau) &= v(\sigma)\sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau) - \sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau)v(\tau) \\
&= \sum_{\psi,\sigma\sim\psi} p(\sigma,\psi)v(\psi)\sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau) - \sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau)v(\tau) \\
&= \sum_{\psi,\sigma\sim\psi} \frac{c(\sigma,\psi)}{\sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau)} v(\psi)\sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau) - \sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau)v(\tau) \\
&= \sum_{\psi,\sigma\sim\psi} c(\sigma,\psi)v(\psi) - \sum_{\tau,\sigma\sim\tau} c(\sigma,\tau)v(\tau) = 0.
\end{aligned}$$

   Tämä ominaisuus tarkoittaa, että virta on vuo juuresta joukkoon Z.

3. Virran määritelmä on fysiikassa Ohmin laki ja tämän huomautuksen kohta 2 on Kirchhoffin virtalaki.

4. Äärettömässä puussa jännite on harmoninen lehdissä. Koska lehdellä on vain yksi naapuri, niin jännite saa lehdessä saman arvon kuin sen naapurissa. Siis virta on nolla lehteä vastaavassa kaaressa.

Lemma 3.8. *Jännite on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot v ja u jännitefunktioita ja Z kuten määritelmässä 3.6. Nyt $v(o) = u(o)$ ja $v(\sigma) = u(\sigma)$ kaikilla $\sigma \in Z$. Lisäksi v ja u ovat harmonisia funktioita solmuissa $\sigma \notin o \cup Z$. Olkoon $f = v - u$. Nyt f on harmoninen solmuissa $\sigma \notin o \cup Z$ ja nollafunktio joukossa $o \cup Z$. Osoitetaan seuraavaksi, että se on nollafunktio myös muualla. Jos funktio f saavuttaa supremuminsa joukossa $o \cup Z$, niin $f \leq 0$. Jos taas funktio saavuttaa supremuminsa solmussa $\sigma \notin o \cup Z$, niin $f(\sigma) = f(\tau)$ kaikilla $\tau \sim \sigma$ harmonisuuden nojalla. Tätä päättelyä toistamalla nähdään, että $f(\sigma) = f(o) = 0$. Siis $f \leq 0$. Symmetrian perusteella pätee myös $f \geq 0$, joten f on nollafunktio. Siis $v = u$ eli jännite on yksikäsitteinen. □

Lemma 3.9. *Olkoon Z kuten määritelmässä 3.6 ja σ puun solmu. Jännite v solmussa σ on yhtä suuri kuin todennäköisyys, että satunnaiskävely solmusta σ osuu juureen ennen kuin se osuu joukkoon Z.*

Todistus. Olkoon $P(\sigma)$ todennäköisyys, että satunnaiskävely solmusta σ osuu juureen ennen kuin se osuu joukkoon Z. Selvästi $P(o) = 1$ ja $P(\sigma) = 0$ kaikilla $\sigma \in Z$. Lisäksi $P(\sigma) = \sum_{\tau, \sigma \sim \tau} p(\sigma, \tau) P(\tau)$ kaikilla $\sigma \notin o \cup Z$, toisin sanoen P on harmoninen funktio. Siis P on jännite. Väite seuraa lemmasta 3.8. □

Huomautus 3.10. Koska lemmassa 3.9 mainittu todennäköisyys on aina olemassa, niin jännite on aina olemassa.

Määritelmä 3.11. Olkoon puun T solmujen joukko V ja sen kaarien joukko E. Tulkitaan tässä yhteydessä kaaret niin, että jos $(\sigma, \tau) \in E$, niin $(\tau, \sigma) \in E$. Toisin sanoen kaaret esiintyvät sekä suunnattuina poispäin juuresta että suunnattuina juurta kohti. Olkoon $l^2(V)$ solmujen funktioiden Hilbertin avaruus ja asetetaan sille sisätulo

$$(f|g) = \sum_{\sigma \in V} f(\sigma) g(\sigma).$$

Olkoon $l^2(E)$ kaarien sellaisten funktioiden Hilbertin avaruus, joille pätee $f(\sigma, \tau) = -f(\tau, \sigma)$, ja asetetaan sille sisätulo

$$(f|g) = \frac{1}{2} \sum_{(\sigma, \tau) \in E} f(\sigma, \tau) g(\sigma, \tau).$$

Määritellään nyt operaattorit $d : l^2(V) \to l^2(E), (dv)(\sigma, \tau) = v(\sigma) - v(\tau)$ ja $d^* : l^2(E) \to l^2(V), (d^* i)(\sigma) = \sum_{(\sigma, \tau) \in E} i(\sigma, \tau)$.

Huomautus 3.12. 1. Jännite on solmujen funktio ja virta on kaarien funktio, jolle pätee $i(\sigma, \tau) = -i(\tau, \sigma)$.

2. Merkintä d^* johtuu siitä, että kaikilla $i \in l^2(E)$ ja $v \in l^2(V)$ pätee

$$
\begin{aligned}
(i|dv) &= \frac{1}{2} \sum_{(\sigma,\tau)\in E} i(\sigma,\tau)(v(\sigma) - v(\tau)) \\
&= \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E \\ \sigma\to\tau}} i(\sigma,\tau)(v(\sigma) - v(\tau)) \\
&= \sum_{\sigma\in V} v(\sigma) \left(\sum_{\sigma\to\tau} i(\sigma,\tau) - \sum_{\tau\to\sigma} i(\tau,\sigma) \right) \\
&= \sum_{\sigma\in V} v(\sigma) \sum_{(\sigma,\tau)\in E} i(\sigma,\tau) = (d^* i|v).
\end{aligned}
$$

3. Kun näitä merkintöjä sovelletaan vuon θ energiaan, saadaan

$$
\mathcal{E}(\theta) = \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E \\ \sigma\to\tau}} \theta(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(\sigma,\tau)\in E} \theta(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) = (\theta|\theta r),
$$

missä vuo on tulkittu avaruuden $l^2(E)$ funktioksi samastamalla kaari $(\sigma,\overleftarrow{\sigma})$ solmun σ kanssa ja resistansseille käytetään tulkintaa $r(\sigma,\tau) = r(\tau,\sigma)$. Nyt energian määritelmä voidaan yleistää. Asetetaan $\mathcal{E}(\theta) = (\theta|\theta r)$ kaikilla $\theta \in l^2(E)$.

Tähän saakka jännitteelle on käytetty määritelmää, joka sisältää ehdon $v(o) = 1$. Tämän määritelmän etu on, että jännitteelle saadaan lemman 3.9 mukainen todennäköisyystulkinta. Joskus on kuitenkin hyödyllistä saada virralle jokin tietty arvo a juuressa, toisin sanoen $d^* i(o) = a$. Jännitteen arvo jokaisessa solmussa voidaan tällöin kertoa sopivalla vakiolla, jolloin virran arvot kasvavat samassa suhteessa.

Lemma 3.13 (Thomsonin periaate)**.** *Olkoon i virta, jolle pätee $d^* i(o) > 0$. Jos θ on vuo ja $d^*\theta(o) = d^* i(o)$, niin $\mathcal{E}(i) \le \mathcal{E}(\theta)$.*

Todistus. Merkitään $f(\sigma,\tau) = \theta(\sigma,\tau) - i(\sigma,\tau)$. Koska $d^*\theta(o) = d^* i(o)$, niin $\sum_{o\to\sigma} f(o,\sigma) = 0$. Sovitaan, että $\theta(\sigma,\tau) = -\theta(\tau,\sigma)$. Tällöin huomautuksen 3.7 kohdan 2 nojalla $\sum_{(\sigma,\tau)\in E} f(\sigma,\tau) = 0$, jos v on harmoninen solmussa σ. Siis

$$
\sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E \\ \sigma\to\tau}} f(\sigma,\tau)(v(\sigma) - v(\tau)) = \sum_{\sigma\in V} v(\sigma) \sum_{(\sigma,\tau)\in E} f(\sigma,\tau) = v(o) \sum_{o\to\sigma} f(o,\sigma) = 0.
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\theta) &= \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} \theta(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) = \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} (i(\sigma,\tau)+f(\sigma,\tau))^2 r(\sigma,\tau)\\
&= \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} i(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) + \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} 2i(\sigma,\tau)f(\sigma,\tau)r(\sigma,\tau) + \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} f(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau)\\
&= \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} i(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) + \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} 2f(\sigma,\tau)(v(\sigma)-v(\tau)) + \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} f(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau)\\
&= \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} i(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) + \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} f(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau)\\
&\geq \sum_{\substack{(\sigma,\tau)\in E\\ \sigma\to\tau}} i(\sigma,\tau)^2 r(\sigma,\tau) = \mathcal{E}(i).
\end{aligned}
$$

□

Huomautus 3.14. Jos puu on sellainen, että solmun konduktanssi ja seuraajien lukumäärä riippuvat vain solmun etäisyydestä juuresta, niin Thomsonin periaate tarkoittaa sitä, että minimienergia on sillä yksikkövuolla, joka jakautuu jokaisessa solmussa tasaisesti sen seuraajiin.

Lause 3.15. *Satunnaiskävely puussa T konduktansseilla c on etääntyvä, jos ja vain jos on olemassa positiivinen vuo, jolla on äärellinen energia.*

Todistus. Olkoon (T^n) sellainen jono puun juuren sisältäviä äärellisiä alipuita, että $T^n \subset T^{n+1}$ ja $T = \bigcup_n T^n$. Olkoon $Z_n = T \setminus T^n$ ja olkoot v_n ja i_n joukkoon Z_n liittyvät jännite ja virta. Satunnaiskävely puussa T on palautuva, jos ja vain jos todennäköisyys palata juureen mistä tahansa solmusta on 1 eli $v(\sigma) = 1$ kaikilla $\sigma \in T$, missä v on jonon (v_n) raja-arvo. Jännite saa saman arvon kaikissa solmuissa, jos ja vain jos virta on nolla. Siis satunnaiskävely on palautuva, jos ja vain jos $d^*i_n(o) \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska $d^*i_n(\sigma) = 0$, kun $\sigma \in T^n \setminus \{o\}$, niin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(i_n) &= (i_n|i_n r) = (i_n|dv_n) = (d^*i_n|v_n)\\
&= d^*i_n(o)\cdot v_n(o) + \sum_{\sigma\notin T^n} d^*i_n(\sigma)\cdot v_n(\sigma) = d^*i_n(o)\cdot v_n(o).
\end{aligned}
$$

Kerrotaan jännitteen v_n arvoa jokaisessa solmussa vakiolla $(d^*i_n(o))^{-1}$. Tässä $d^*i_n(o) \neq 0$, koska v_n on jännite äärellisessä alipuussa, eikä siksi voi olla vakiofunktio. Näin saadaan uusi jännite v_n'. Tätä jännitettä vastaavalle virralle

i'_n pätee $d^*i'_n(o) = 1$. Nyt

$$\mathcal{E}(i'_n) = d^*i'_n(o) \cdot v'_n(o) = v'_n(o) = \frac{v_n(o)}{d^*i_n(o)} = \frac{1}{d^*i_n(o)},$$

joten satunnaiskävely on palautuva, jos ja vain jos $\mathcal{E}(i'_n) \to \infty$, kun $n \to \infty$.

Oletetaan nyt, että on olemassa positiivinen vuo θ, jolla on äärellinen energia. Voidaan myös olettaa, että $\theta(o) = 1$. Nyt lemman 3.13 nojalla $\mathcal{E}(i'_n) \leq \mathcal{E}(\theta) < \infty$, joten satunnaiskävely on etääntyvä.

Koska jonolla (v_n) on raja-arvo, niin myös jono (i_n) suppenee. Siten myös jonolla i'_n on raja-arvo i'. Koska $i'_n(o) = 1$ kaikilla n, niin myös $i'(o) = 1$. Jos satunnaiskävely on etääntyvä, niin $\mathcal{E}(i'_n) \not\to \infty$. Tällöin $\mathcal{E}(i') < \infty$, joten on olemassa positiivinen vuo, jolla on äärellinen energia. $\square$

Lemma 3.16. *Olkoot c äärettömään puuhun T liittyvä konduktanssi ja $w_n > 0$ sellaisia lukuja, että $\sum_{n=1}^{\infty} w_n < \infty$. Jos vuolle θ pätee $0 \leq \theta(\sigma) \leq w_{|\sigma|}c(\sigma)$ kaikilla $\sigma \in T \setminus \{o\}$, niin $\mathcal{E}(\theta) < \infty$.*

Todistus.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\theta) = \sum_{\sigma \in T \setminus \{o\}} \theta(\sigma)^2 r(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma \in T_n} \theta(\sigma) \frac{\theta(\sigma)}{c(\sigma)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sum_{\sigma \in T_n} \theta(\sigma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} w_n \theta(o) < \infty.\end{aligned}$$

$\square$

Olkoon $\sigma \in T \setminus \{o\}$ solmu, jolla on n seuraajaa. Kun konduktansseiksi valitaan $c(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$, niin todennäköisyys, että satunnaiskävely solmusta σ lähtee kohti juurta, on $\lambda/(\lambda+n)$. Jokaisen solmun σ seuraajan todennäköisyys olla seuraava vaihe satunnaiskävelyssä taas on $1/(\lambda+n)$. Satunnaiskävely on siis painotettu kertoimella λ juurta kohti. Jos puun jokaisella solmulla on yksi seuraaja, niin satunnaiskävely on etääntyvä, jos on aina todennäköisempää lähteä poispäin juuresta kuin juurta kohti. Toisin sanoen tällaisessa puussa satunnaiskävely on etääntyvä, jos $\lambda < 1$. Yleisesti painotetun satunnaiskävelyn voi odottaa olevan etääntyvä, jos solmuilla on "keskimäärin" enemmän seuraajia kuin λ. Käy ilmi, että tällaisen "keskiarvon" antaa haarautumisluku.

Lause 3.17. *Olkoon T ääretön puu. Asetetaan $c(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$, missä $\lambda > 0$. Satunnaiskävely konduktansseilla c on etääntyvä, jos $\lambda < \operatorname{br} T$ ja palautuva, jos $\lambda > \operatorname{br} T$.*

Todistus. Jos satunnaiskävely on etääntyvä, niin lauseen 3.15 nojalla on olemassa positiivinen vuo θ, jolla on äärellinen energia. Voidaan olettaa, että $\theta(o) = 1$. Lisäksi lauseen 3.15 todistuksessa tämä vuo on virta, joten huomautuksen 3.7 kohdan 4 ja huomautuksen 2.6 nojalla $\theta(o) = \sum_{\sigma\in\Pi}\theta(\sigma)$, kun Π on leikkausjoukko. Nyt Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$1 = \left(\sum_{\sigma\in\Pi}\theta(\sigma)\right)^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\Pi}c(\sigma)\right)\left(\sum_{\sigma\in\Pi}\theta(\sigma)^2 r(\sigma)\right),$$

kun Π on leikkausjoukko. Koska vuon energia on äärellinen, niin

$$\lim_{\Pi\to\infty}\sum_{\sigma\in\Pi}\theta(\sigma)^2 r(\sigma) \to 0.$$

Siis

$$\lim_{\Pi\to\infty}\sum_{\sigma\in\Pi}\lambda^{-|\sigma|} = \lim_{\Pi\to\infty}\sum_{\sigma\in\Pi}c(\sigma) = \infty.$$

Nyt haarautumisluvun määritelmän nojalla $\lambda \leq \operatorname{br} T$. Siis jos $\lambda > \operatorname{br} T$, niin satunnaiskävely on palautuva.

Toisaalta, jos $\lambda < \operatorname{br} T$, voidaan valita $\lambda < \lambda' < \operatorname{br} T$ ja asettaa $w_n := (\lambda/\lambda')^n$. Nyt $\sum_{n\to\infty} w_n < \infty$. Lemmasta 2.9 seuraa, että on olemassa positiivinen vuo θ, jolle pätee $0 \leq \theta(\sigma) \leq (\lambda')^{-|\sigma|} = w_{|\sigma|}\lambda^{-|\sigma|}$. Lemman 3.16 nojalla vuolla θ on äärellinen energia. Lauseen 3.15 nojalla satunnaiskävely on etääntyvä. □

Huomautus 3.18. Esimerkissä 6.14 nähdään, että jos $\lambda = \operatorname{br} T$, niin satunnaiskävely voi olla palautuva tai etääntyvä.

4 Perkolaatio

Määritelmä 4.1. Olkoon T ääretön puu ja $0 \leq p \leq 1$. Tarkastellaan jokaista kaarta muista riippumattomasti ja säilytetään se todennäköisyydellä p (eli poistetaan se todennäköisyydellä $1-p$). Tätä prosessia sanotaan perkolaatioksi. Annetaan jäljelle jäävälle graafille merkintä ω_p ja sen yhtenäiselle osalle, joka sisältää solmun σ merkintä $K(\sigma)$. Jos $\tau \in K(\sigma)$, niin merkitään $[\sigma \leftrightarrow \tau]$ ja jos $K(\sigma)$ sisältää äärettömän monta solmua, niin merkitään $[\sigma \leftrightarrow \infty]$. Merkintä $[\sigma \leftrightarrow \Pi]$ tarkoittaa, että $[\sigma \leftrightarrow \tau]$ jollakin $\tau \in \Pi$, missä Π on joukko solmuja.

Mitä tämä tarkoittaa formaalisti? Todennäköisyysavaruuden perusjoukko on $\Omega = \{0,1\}^E$, missä $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ on kaarien joukko ja 0 vastaa tilannetta, missä kaari poistetaan ja 1 tarkoittaa, että kaari säilyy. Jokaista kaarta $e \in E$ kohti voidaan asettaa sellainen todennäköisyysmitta P_e avaruuteen $\{0,1\}$, että $P_e(\{0\}) = 1 - p$ ja $P_e(\{1\}) = p$. Nyt perusjoukkoon Ω saadaan todennäköisyysmitta P_p tulomittana

$$P_p = \prod_{e \in E} P_e.$$

Huomautus 4.2.
1. Koska kaaret poistetaan tai säilytetään toisistaan riippumattomasti, niin todennäköisyys, että solmu σ on yhteydessä juureen perkolaation jälkeen on $P_p[o \leftrightarrow \sigma] = p^{|\sigma|}$.
2. Perkolaatio voidaan määritellä yleisemmin puun sijaan graafiin. Tämä mahdollistaa sen, että voidaan käsitellä myös ensimmäisen perkolaation jälkeen jäljelle jäävän osan perkolaatiota.

Lause 4.3 (Kolmogorovin 0–1-laki)**.** *Olkoon* (Ω, F, P) *todennäköisyysavaruus ja* $F_n \subset F$ *jono riippumattomia sigma-algebroja. Olkoon*

$$G_n = \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k\right)$$

pienin sigma-algebra, joka sisältää sigma-algebrat $F_n, F_{n+1}, \ldots$ *Tällöin kaikilla*

$$A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

pätee joko $P(A) = 1$ *tai* $P(A) = 0$.

Todistus. Katso [6, Theorem 1.1.2]. □

Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi puun T alipuu $K(\sigma)$ on ääretön? Koska kaaret poistetaan tai säilytetään riippumattomasti ja kysymys on riippumaton mistä tahansa äärellisestä joukosta kaaria, niin voidaan soveltaa Kolmogorovin 0–1-lakia. Todennäköisyys on siis joko 0 tai 1. Koska todennäköisyys voi vain kasvaa, kun p kasvaa, on olemassa sellainen kriittinen arvo p_c, että sitä pienemmillä arvoilla todennäköisyys on 0 ja suuremmilla 1. Merkitään siis

$$p_c(T) = \sup\{p : \text{ on olemassa sellainen } \sigma \in T \text{, että } P_p[\sigma \leftrightarrow \infty] = 0\}.$$

Koska T on yhtenäinen ja numeroituva, niin

$$p_c(T) = \sup\{p : P_p[o \leftrightarrow \infty] = 0\}.$$

Lemma 4.4. *Olkoon T ääretön puu ja ω_p se graafi, joka jää jäljelle, kun puussa tapahtuu perkolaatio parametrilla $p > p_c(T)$. Tällöin*

$$p_c(\omega_p) = \frac{p_c(T)}{p}$$

melkein varmasti.

Todistus. Olkoon $0 \leq q \leq 1$. Jos suoritetaan ensin perkolaatio parametrilla p ja sitten toinen perkolaatio parametrilla q, niin kaarien säilymistodennäköisyydet ovat samat kuin jos olisi suoritettu yksi perkolaatio parametrilla pq. Siis todennäköisyys, että perkolaatio graafissa ω_p parametrilla q jättää jäljelle ainakin yhden sellaisen solmun σ, että $[\sigma \leftrightarrow \infty]$, on sama kuin todennäköisyys, että perkolaatio puussa T parametrilla pq jättää jäljelle ainakin yhden sellaisen solmun σ, että $[\sigma \leftrightarrow \infty]$. Nyt $q = p_c(\omega_p)$, jos ja vain jos $pq = p_c(T)$ eli

$$p_c(\omega_p) = \frac{p_c(T)}{p}.$$

□

Kriittinen arvo $p_c(T)$ riippuu tietysti puusta T. Jos puun solmuilla on "keskimäärin" paljon seuraajia, niin solmuja vastaavia kaaria on poistettava paljon, jotta puusta saadaan äärellinen. Siis todennäköisyyden kaarien säilymiseen tulee olla pieni. Toisaalta jos perkolaation jälkeen juuressa kiinni oleva osa on äärellinen, niin puusta on poistettu jotain leikkausjoukkoa vastaavat kaaret. Nämä huomiot viittaavat siihen, että $p_c(T)$ ja puun haarautumisluku liittyvät toisiinsa. Onhan haarautumisluku jonkinlainen "keskiarvo" seuraajien lukumäärälle ja määritelty leikkausjoukkojen avulla. Itse asiassa $p_c(T) = 1/\operatorname{br} T$. Tämän tuloksen todistamiseen tarvitaan muutama lemma.

Lemma 4.5. *Perkolaatiolle puussa T pätee*

$$P[\sigma \leftrightarrow \infty] \leq \inf\{\sum_{\tau \in \Pi} P[\sigma \leftrightarrow \tau] : \Pi \text{ on leikkausjoukko}\}.$$

Todistus. Jos leikkausjoukko Π erottaa solmun σ äärettömästä, niin

$$[\sigma \leftrightarrow \infty] \subset \bigcup_{\tau \in \Pi} [\sigma \leftrightarrow \tau].$$

Siis $P[\sigma \leftrightarrow \infty] \leq \sum_{\tau \in \Pi} P[\sigma \leftrightarrow \tau]$. □

Määritelmä 4.6. Olkoon (X_n) jono satunnaismuuttujia. Jono on martingaali, jos $E[|X_n|] < \infty$ kaikilla n ja

$$E[X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] = X_n.$$

Lemma 4.7. *Olkoon* (X_n) *ei-negatiivinen martingaali. Tällöin on olemassa sellainen satunnaismuuttuja* X*, että* $X_n \to X$ *melkein varmasti.*

Todistus. Katso [1, Corollary 8.3]. $\square$

Lemma 4.8. *Olkoon* (X_n) *martingaali. Jos* $\sup_n E[X_n^2] < \infty$*, niin on olemassa sellainen satunnaismuuttuja* X*, että* $X_n \to X$ *melkein varmasti ja* $E[X] = E[X_n]$ *kaikilla* n*.*

Todistus. Katso [1, Corollary 8.4]. $\square$

Lause 4.9. *Olkoon* T *ääretön puu. Tällöin*

$$p_c(T) = \frac{1}{\operatorname{br} T}.$$

Todistus. Kun $p < \frac{1}{\operatorname{br} T}$, niin haarautumisluvun määritelmän ja lemman 4.5 nojalla

$$\begin{aligned}0 &= \inf\{\sum_{\sigma\in\Pi} p^{|\sigma|} : \Pi \text{ on leikkausjoukko}\} \\ &= \inf\{\sum_{\sigma\in\Pi} P[o \leftrightarrow \sigma] : \Pi \text{ on leikkausjoukko}\} \geq P[o \leftrightarrow \infty].\end{aligned}$$

Siis $P[o \leftrightarrow \infty] = 0$, joten

$$p_c(T) \geq \frac{1}{\operatorname{br} T}.$$

Olkoot konduktanssit $c(\sigma) = p^{|\sigma|}$. Kun $\frac{1}{p} < \operatorname{br} T$, niin lauseen 3.17 nojalla satunnaiskävely näillä konduktansseilla on etääntyvä. Lauseen 3.15 nojalla nyt on olemassa positiivinen vuo θ, jolla on äärellinen energia. Asetetaan nyt

$$X_n(\theta) = \sum_{\sigma\in T_n\cap K(o)} \theta(\sigma)p^{-|\sigma|},$$

missä θ on edellä mainittu vuo. Jono $(X_n(\theta))$ muodostaa martingaalin, sillä

$$\begin{aligned}
&E[X_{n+1}(\theta)|X_1(\theta),\ldots,X_n(\theta)]\\
=&E[\sum_{\sigma\in T_{n+1}\cap K(o)}\theta(\sigma)p^{-|\sigma|}|X_1(\theta),\ldots,X_n(\theta)]\\
=&E[\sum_{\tau\in T_n\cap K(o)}\sum_{\substack{\sigma\in T_{n+1}\cap K(o)\\ \tau\to\sigma}}\theta(\sigma)p^{-|\sigma|}|X_1(\theta),\ldots,X_n(\theta)]\\
=&E[\sum_{\tau\in T_n\cap K(o)}\sum_{\tau\to\sigma}\theta(\sigma)p^{-|\sigma|}\mathbb{1}_{K(\tau)}(\sigma)|X_1(\theta),\ldots,X_n(\theta)]\\
=&\sum_{\tau\in T_n\cap K(o)}\sum_{\tau\to\sigma}\theta(\sigma)p^{-|\sigma|}E[\mathbb{1}_{K(\tau)}(\sigma)|X_1(\theta),\ldots,X_n(\theta)]\\
=&\sum_{\tau\in T_n\cap K(o)}\sum_{\tau\to\sigma}\theta(\sigma)p^{-|\sigma|}p\\
=&\sum_{\tau\in T_n\cap K(o)}\theta(\tau)p^{-|\tau|}=X_n(\theta).
\end{aligned}$$

Koska $X_n(\theta)$ on aina ei-negatiivinen, niin martingaali suppenee melkein varmasti satunnaismuuttujaan $X(\theta)$. Koska

$$\begin{aligned}
&P[\sigma,\tau\in K(o)]\\
&=P[\sigma\wedge\tau\in K(o)]P[\sigma\in K(o)|\sigma\wedge\tau\in K(o)]P[\tau\in K(o)|\sigma\wedge\tau\in K(o)]\\
&=p^{|\sigma\wedge\tau|}p^{|\sigma|-|\sigma\wedge\tau|}p^{|\tau|-|\sigma\wedge\tau|},
\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}
E[(X_n(\theta))^2]&=\sum_{\sigma,\tau\in T_n}\theta(\sigma)\theta(\tau)p^{-2n}P[\sigma,\tau\in K(o)]\\
&=\sum_{\sigma,\tau\in T_n}\theta(\sigma)\theta(\tau)p^{-2n}(p^{|\sigma\wedge\tau|}p^{|\sigma|-|\sigma\wedge\tau|}p^{|\tau|-|\sigma\wedge\tau|})\\
&=\sum_{\sigma,\tau\in T_n}\theta(\sigma)\theta(\tau)p^{-|\sigma\wedge\tau|}=\sum_{|\psi|\le n}p^{-|\psi|}\sum_{\substack{\sigma,\tau\in T_n\\ \sigma\wedge\tau=\psi}}\theta(\sigma)\theta(\tau).
\end{aligned}$$

Lisäksi koska

$$\left(\sum_k x_k\right)^2=\sum_k x_k^2+2\sum_{i<k}x_ix_k$$

kaikilla $x_k \in \mathbb{R}$, niin vuon määritelmästä seuraa

$$
\begin{aligned}
E[(X_n(\theta))^2] &= \sum_{|\psi|\le n} p^{-|\psi|} \sum_{\substack{\sigma,\tau\in T_n \\ \sigma\wedge\tau=\psi}} \theta(\sigma)\theta(\tau) \\
&= \sum_{|\psi|\le n} p^{-|\psi|} \left(\theta(\psi)^2 - \sum_{\substack{|\sigma|\le n \\ \psi\to\sigma}} \theta(\sigma)^2 \right).
\end{aligned}
$$

Edelleen pätee

$$
\sum_{|\psi|\le n} p^{-|\psi|} \sum_{\substack{\psi\to\sigma \\ |\sigma|\le n}} \theta(\sigma)^2 = \sum_{0<|\psi|\le n} \theta(\psi)^2 p^{-|\overleftarrow{\psi}|}
$$

ja

$$
\sum_{|\psi|\le n} \theta(\psi)^2 p^{-|\psi|} = 1 + \sum_{0<|\psi|\le n} \theta(\psi)^2 p^{-|\psi|},
$$

joten

$$
\begin{aligned}
E[(X_n(\theta))^2] &= 1 + \sum_{0<|\psi|\le n} \theta(\psi)^2 (p^{-|\psi|} - p^{-|\overleftarrow{\psi}|}) \\
&= 1 + (1-p) \sum_{0<|\psi|\le n} \theta(\psi)^2 p^{-|\psi|}.
\end{aligned}
$$

Koska konduktansseiksi valittiin $c(\sigma) = p^{|\sigma|}$, niin

$$
E[(X_n(\theta))^2] \le 1 + (1-p)\mathcal{E}(\theta) < \infty.
$$

Siis $\sup_n E[(X_n(\theta))^2]$ on äärellinen, joten lemman 4.8 nojalla

$$
\begin{aligned}
E[X(\theta)] = E[X_n(\theta)] &= E[\sum_{\sigma\in T_n\cap K(o)} \theta(\sigma) p^{-|\sigma|}] = E[\sum_{\sigma\in T_n} \theta(\sigma) p^{-|\sigma|} \mathbb{1}_{K(o)}(\sigma)] \\
&= \sum_{\sigma\in T_n} \theta(\sigma) p^{-|\sigma|} p^{|\sigma|} = \sum_{\sigma\in T_n} \theta(\sigma) = \theta(o) > 0.
\end{aligned}
$$

Koska $X(\theta) > 0$ positiivisella todennäköisyydellä, niin $K(o)$ on ääretön positiivisella todennäköisyydellä. Näin ollen

$$
p_c(T) \le \frac{1}{\operatorname{br} T}.
$$

$\square$

Seuraus 4.10. *Olkoon T ääretön puu ja $p > p_c(T)$. Tällöin*

$$p \operatorname{br} T = \sup_{\sigma \in T} \operatorname{br} K(\sigma)$$

melkein varmasti.

Todistus. Kriittisen arvon p_c määritelmän nojalla

$$p_c(\omega_p) = \inf_{\sigma \in \omega_p} p_c(K(\sigma)) = \inf_{\sigma \in T} p_c(K(\sigma)),$$

missä käytetään tulkintaa $p_c(K(\sigma)) = \infty$, jos $K(\sigma)$ on äärellinen. Siis

$$p_c(\omega_p)^{-1} = \sup_{\sigma \in T} p_c(K(\sigma))^{-1}.$$

Nyt lemman 4.4 ja lauseen 4.9 nojalla

$$p \operatorname{br} T = \frac{p}{p_c(T)} = p_c(\omega_p)^{-1} = \sup_{\sigma \in T} p_c(K(\sigma))^{-1} = \sup_{\sigma \in T} \operatorname{br} K(\sigma)$$

melkein varmasti. □

Huomautus 4.11. Jos T on puu, jonka jokaisella solmulla on n seuraajaa, niin pätee vahvempi tulos. Tällöin jos $K(o)$ on ääretön ja $p > p_c(T) = \frac{1}{n}$, niin

$$\operatorname{br} K(o) = p \operatorname{br} T = pn$$

melkein varmasti. Tämä johtuu siitä, että jos solmu σ on sellainen, että $K(\sigma)$ on ääretön, niin on positiivinen todennäköisyys, että alipuun $K(\sigma)$ haarautumisluku on pn. Jos nimittäin olisi $P(\operatorname{br} K(\sigma) = pn) = 0$, niin

$$P(\sup_{\sigma \in T} \operatorname{br} K(\sigma) = pn) \leq \sum_{\sigma \in T} P(\operatorname{br} K(\sigma) = pn) = 0.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita seurauksen 4.10 kanssa, sillä sen mukaan

$$\sup_{\sigma \in T} \operatorname{br} K(\sigma) = p \operatorname{br} T = pn$$

melkein varmasti. Koska $K(o)$ on ääretön, niin $\operatorname{br} K(\sigma) = pn$ jollekin $\sigma \in K(o)$ melkein varmasti. Siis $\operatorname{br} K(o) \geq pn$. Toisaalta seurauksen 4.10 nojalla $\operatorname{br} K(o) \leq \sup_{\sigma \in T} \operatorname{br} K(\sigma) = p \operatorname{br} T = pn$.

5 Hausdorffin ulottuvuus

5.1 Puun reuna

Määritelmä 5.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $s \geq 0$ ja $A \subset X$. Joukon A s-ulotteinen Hausdorffin mitta on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_k)^s : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \mathrm{diam}(E_k) \leq \delta\}.$$

Joukon A Hausdorffin ulottuvuus on

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Määritelmä 5.2. Säde x puussa T on ääretön polku, joka alkaa juuresta ja kulkee koko ajan poispäin juuresta. Jos $\sigma \in x$, niin merkitään $x_{|\sigma|} = \sigma$. Jos x ja y ovat säteitä, niin $x \wedge y$ tarkoittaa sitä solmua, joka on kauimpana juuresta niistä solmuista, jotka kuuluvat kumpaankin säteeseen. Säteiden etäisyys määritellään asettamalla $d(x, y) = e^{-|x \wedge y|}$ ja $d(x, x) = 0$. Otetaan käyttöön tulkinta $|x \wedge x| = \infty$, jolloin $d(x, x) = 0 = e^{-|x \wedge x|}$. Kaikkien säteiden joukko on puun reuna. Reunaa merkitään ∂T. Jos $E \subset \partial T$, niin $\mathrm{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$. Merkitään vielä $B_\sigma = \{x \in \partial T : x_{|\sigma|} = \sigma\}$, missä $\sigma \in T$.

Huomautus 5.3. Edellä määritelty etäisyys todellakin on metriikka:

1. $d(x, y) = e^{-|x \wedge y|} \geq 0$;
2. $d(x, y) = e^{-|x \wedge y|} = 0$, jos ja vain jos $|x \wedge y| = \infty$ eli $x = y$ ja
3. $d(x, y) = e^{-|x \wedge y|} = e^{-|y \wedge x|} = d(y, x)$.

Entä kolmioepäyhtälö? Jos $|x \wedge y| > |x \wedge z|$, niin $|y \wedge z| = |x \wedge z|$. Siis kaikilla $x, y, z \in \partial T$ pätee $|x \wedge z| \geq \min\{|x \wedge y|, |y \wedge z|\}$. Näin ollen

$$d(x, z) = e^{-|x \wedge z|} \leq \max\{e^{-|x \wedge y|}, e^{-|y \wedge z|}\} \leq e^{-|x \wedge y|} + e^{-|y \wedge z|} = d(x, y) + d(y, z).$$

Lisäksi koska

$$\mathrm{diam}\, \partial T = \sup\{d(x, y) : x, y \in \partial T\} = \sup\{e^{-|x \wedge y|} : x, y \in \partial T\} \leq e^{-0} = 1,$$

niin puun reuna on rajoitettu.

Puun reuna on myös kompakti. Olkoon $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ jono säteitä. Nyt äärettömän monelle x^n pätee $x_1^n = \sigma$ jollakin $\sigma \in T_1$. Valitaan jokin näistä säteistä ja merkitään sitä y^1. Edelleen äärettömän monelle x^n pätee $x_2^n = \tau$ jollakin

$\sigma \to \tau$. Valitaan näistä säteistä jokin sellainen säde, että se on jonossa (x^n) säteen y^1 jälkeen, ja merkitään sitä y^2. Näin jatkamalla saadaan jono (y^n). Tämä jono on Cauchy-jono, sillä

$$d(y^n, y^m) = e^{-|y^n \wedge y^m|} \leq e^{-\min\{n,m\}} \to 0,$$

kun $n, m \to \infty$. Siis sillä on suppeneva osajono. Erityisesti jonolla (x^n) on suppeneva osajono.

Puun reunan Hausdorffin ulottuvuus paljastuu puun haarautumisluvun logaritmiksi. Haarautumisluvun määritelmä on alunperin motivoitu tämän tuloksen avulla.

Lause 5.4. *Äärettömän puun T reunalle pätee* $\dim_{\mathcal{H}}(\partial T) = \log \operatorname{br} T$.

Todistus. Koska reuna on kompakti, niin reunan peittävän yhdisteen alkion E_k halkaisija on $\operatorname{diam}(E_k) = e^{-|x \wedge y|}$ joillakin sellaisilla $x, y \in \partial T$, että $E_k \subset B_{x \wedge y}$. Nyt $\operatorname{diam}(B_{x \wedge y}) = \operatorname{diam}(E_k)$. Koska Hausdorffin mitassa etsitään infimumia, niin reunan peittäviksi joukoiksi voidaan valita joukot B_σ. Nyt jos $\partial T \subset \bigcup_{\sigma \in C} B_\sigma$, niin joukon C on oltava sellainen, että se erottaa juuren äärettömästä. Lisäksi voidaan olettaa, että C on äärellinen, sillä reuna on kompakti. Koska etsitään infimumia, niin joukko C voidaan korvata leikkausjoukolla $\Pi \subset C$. Toisaalta $\partial T \subset \bigcup_{\sigma \in \Pi} B_\sigma$ kaikilla leikkausjoukoilla Π. Siis saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(\partial T) &= \lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_k)^s : \partial T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \operatorname{diam}(E_k) \leq \delta\} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{\sigma \in \Pi} \operatorname{diam}(B_\sigma)^s : \partial T \subset \bigcup_{\sigma \in \Pi} B_\sigma, \operatorname{diam}(B_\sigma) \leq \delta\} \\
&= \liminf_{\Pi \to \infty}\{\sum_{\sigma \in \Pi} e^{-|\sigma| s}\},
\end{aligned}$$

missä Π on leikkausjoukko. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathcal{H}}(\partial T) &= \inf\{s : \mathcal{H}^s(\partial T) = 0\} = \inf\{s : \liminf_{\Pi \to \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} e^{-|\sigma| s} = 0\} \\
&= \log \inf\{\lambda : \liminf_{\Pi \to \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0\} = \log \operatorname{br} T.
\end{aligned}$$

□

Seuraus 5.5. *Olkoon T ääretön puu ja $p > p_c(T)$. Suoritetaan perkolaatio parametrilla p. Tällöin*

$$\sup_{\sigma \in T} \dim_{\mathcal{H}}(\partial K(\sigma)) = \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) + \log p$$

melkein varmasti. Erityisesti kaikilla $\tau \in T$ pätee

$$\dim_{\mathcal{H}}(\partial K(\tau)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) + \log p$$

melkein varmasti.

Todistus. Seurauksen 4.10 ja lauseen 5.4 nojalla

$$\begin{aligned}\dim_{\mathcal{H}}(\partial K(\tau)) &\leq \sup_{\sigma\in T} \dim_{\mathcal{H}}(\partial K(\sigma)) = \sup_{\sigma \in T} \log \operatorname{br} K(\sigma) \\ &= \log(p \operatorname{br} T) = \log \operatorname{br} T + \log p = \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) + \log p.\end{aligned}$$

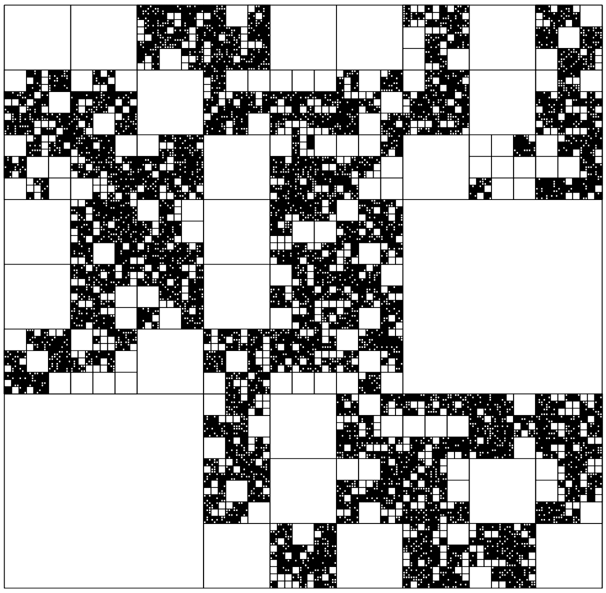
□

5.2 Fraktaaliperkolaatio

Tarkastellaan yksikkökuutiota $[0,1]^n$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $b \geq 2$ kokonaisluku ja jaetaan yksikkökuutio pienempiin suljettuihin b-adisiin kuutioihin, joiden sivun pituus on b^{-1}. Näitä kuutioita on siis b^n kappaletta. Jaetaan ne edelleen pienempiin suljettuihin b-adisiin kuutioihin, joiden sivun pituus on b^{-2}. Jatketaan näin. Merkitään vaiheen k kuutioita $Q_{k,1}, Q_{k,2}, \ldots, Q_{k,b^{nk}}$. Olkoon $0 \leq p \leq 1$. Poistetaan kuutio $Q_{1,1}$ todennäköisyydellä $1-p$ ja säilytetään se todennäköisyydellä p. Tehdään tämä jokaiselle kuutiolle $Q_{1,j}$ toisistaan riippumattomasti. Merkitään jäljelle jäävien kuutioiden kokoelmaa A_1. Poistetaan sitten joukon A_1 kuutioiden alikuutiot $Q_{2,k}$ todennäköisyydellä $1-p$ ja säilytetään ne todennäköisyydellä p riippumattomasti. Merkitään jäljelle jäävien kuutioiden joukkoa A_2. Näin saadaan jono (A_i). Tätä prosessia sanotaan fraktaaliperkolaatioksi. Merkitään $A = \bigcap A_i$. Kuvassa 4 on vaihe A_5 parametreilla $n = 2$, $b = 3$ ja $p = 0.75$.

Fraktaaliperkolaatiolla on vahva yhteys perkolaatioon puissa. Jos puun T jokaisella solmulla on b^n seuraajaa, niin puissa todistettuja tuloksia voidaan hyödyntää. Listataan jokaisen solmun b^n seuraajaa myötäpäivään lueteltuna ja liitetään niihin luvut $1, 2, \ldots, b^n$. Koska puun säteitä vastaavat yksikäsitteiset jonot solmuja, niin säteet voidaan samaistaa näiden lukujen määräämiin jonoihin. Vastaavanlainen samaistus voidaan tehdä kuutioille. Kun yksikkökuutio jaetaan b^n osaan, pienempiin kuutioihin voidaan liittää luvut $1, 2, \ldots, b^n$. Kun nämä kuutiot jaetaan osiin, uusiin kuutioihin voidaan taas liittää nämä luvut. Näin jatkamalla saadaan esitys jokaiselle joukon A pisteelle. Tämä esitys ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, koska kahden suljetun kuution yhteisellä reunalla oleva piste kuuluu kumpaankin.

Jokaista kuutiota $Q_{i,k}$ vastaa kuitenkin yksikäsitteinen solmu puussa. Nyt juuri on sellainen solmu, että valittiinpa mikä tahansa piste kuutiosta $Q_{i,k}$,



Kuva 4: Esimerkki fraktaaliperkolaatiosta.

niin juuren kautta kulkee säde, joka vastaa sitä. Nyt juuren seuraajista korkeintaan yksi täyttää saman ehdon, koska kaikki kuution $Q_{i,k}$ keskellä olevaa pistettä vastaavat säteet kulkevat saman solmun kautta. Edelleen tämän solmun seuraajista korkeintaan yksi täyttää halutun ehdon. Tätä päättelyä jatkamalla nähdään, että vaiheessa T_i voi olla täsmälleen yksi solmu, jonka kautta kulkevat säteet vastaavat koko kuutiota $Q_{i,k}$. Tällainen solmu myös on, sillä kuvaus $f : \partial T \to [0,1]^n$, missä säde kuvautuu aina sille pisteelle, jolla on sama esitys, on surjektio. Surjektiivisuus johtuu siitä, että puun säteet käyvät läpi jokaisen mahdollisen yhdistelmän luvuista $1, 2, \ldots, b^n$.

Millainen on kuvaus f? Tarkastellaan sädettä $x = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots$, missä $\sigma_i \in T_i$ ja $\sigma_i \to \sigma_{i+1}$. Nyt solmua σ_i vastaa kuutio Q_{i,k_i}, missä $k_i \in \{1, \ldots, b^{ni}\}$. Lisäksi $Q_{i+1,k_{i+1}} \subset Q_{i,k_i}$. Kuvaus f saadaan asettamalla

$$f(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_{i,k_i}.$$

Kuutioiden ja solmujen vastaavuudesta seuraa, että jos joukko kuutioita, joista yksikään ei sisällä joukon muita kuutioita, peittää kuution $[0,1]^n$, niin kuutioiden joukkoa vastaavat solmut muodostavat leikkausjoukon puussa T. Jos puussa tapahtuu sellainen perkolaatio, että puusta poistetaan ne kaaret, joita vastaavia solmuja vastaavat kuutiot on poistettu fraktaaliperkolaatiossa, niin alipuu $K(o)$ vastaa joukkoa A. Koska jokainen A_i on kompakti, niin myös A on kompakti. Nyt jos joukko kuutioita, joista yksikään ei sisällä joukon muita kuutioita, peittää joukon $A \neq \emptyset$, niin kuutioiden joukkoa vastaavat solmut muodostavat leikkausjoukon puussa $K(o)$. Tämä yhteys auttaa joukon A Hausdorffin ulottuvuuden selvittämisessä.

Lemma 5.6. *Olkoon $b \geq 2$ kokonaisluku ja $E \subset [0,1]^n$ sellainen joukko, että $b^{-k} \leq \operatorname{diam}(E) < b^{-k+1}$. Tällöin on olemassa sellaiset $(2b+1)^n$ kuutiota $Q_{k,i}$, että $E \subset \bigcup Q_{k,i}$.*

Todistus. Olkoon $x \in E$. Nyt x kuuluu johonkin kuutioon $Q_{k,i}$. Valitaan sellaiset kuutiot, joihin voidaan siirtyä kuutiosta $Q_{k,i}$ korkeintaan b askeleella, kun siirtyä voidaan vain sellaisten kuutioiden välillä, jotka leikkaavat. Näitä kuutioita on $(2b+1)^n$ kappaletta. Etäisyys tämän kuutiojoukon reunalta keskimmäiseen kuutioon on vähintään $b \cdot b^{-k} = b^{-k+1}$. Siis nämä kuutiot sisältävät joukon E. □

Huomautus 5.7. Koska kuution $Q_{k,i}$ sivun pituus on b^{-k}, niin $\operatorname{diam}(Q_{k,i}) = \sqrt{n} b^{-k} \leq \sqrt{n} \operatorname{diam}(E)$.

Fraktaaliperkolaatiossa jäljelle jäävä joukko on siis aina kompakti. Toisaalta jokainen kompakti joukko $A \subset [0,1]^n$ voidaan saada fraktaaliperkolaatioprosessin tuloksena. Valitaan joukko A_i joukkoa A leikkaavien kuutioiden $Q_{i,k}$ yhdisteeksi. Tällöin $A = \bigcap A_i$, koska A on kompakti. Siis joukkoa A vastaa fraktaliperkolaatio ja siten myös puu $K(o)$. Aiemmin puun säteille määriteltiin metriikka $d(x,y) = e^{-|x \wedge y|}$. Kantaluvuksi valittiin e vain mukavuussyistä ja se olisi voinut olla jokin muukin. Jos kantaluvuksi valitaan b, niin saadaan yksinkertainen yhteys joukkojen A ja $\partial K(o)$ dimensioiden välille.

Lause 5.8. *Olkoon $A \subset [0,1]^n$ kompakti ja epätyhjä ja T sitä vastaava puu. Tällöin*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) = \log_b \operatorname{br} T.$$

Todistus. Olkoon $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$, $\varepsilon > 0$ ja $E_i \subset [0,1]^n$ sellaisia, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Lemman 5.6 nojalla jokainen E_i voidaan peittää $(2b+1)^n$ kuutiolla. Indeksoidaan kuutiot uudestaan siten, että $Q_{i,j}$ tarkoittaa kuutiota, joka kuuluu joukon E_i peitteeseen ja $1 \leq j \leq (2b+1)^n$. Nyt pätee

$\mathrm{diam}(Q_{i,j}) \leq \sqrt{n}\,\mathrm{diam}(E_i)$. Jos $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s < \varepsilon$, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{(2b+1)^n} \mathrm{diam}(Q_{i,j})^s &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{(2b+1)^n} (\sqrt{n}\,\mathrm{diam}(E_i))^s \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (2b+1)^n (\sqrt{n})^s \,\mathrm{diam}(E_i)^s < (2b+1)^n (\sqrt{n})^s \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska nämä arvot poikkeavat toisistaan korkeintaan vakion $(2b+1)^n(\sqrt{n})^s$ verran, niin

$$\lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(Q_i)^s : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_i, \mathrm{diam}(Q_i) \leq \delta\} = 0,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \mathrm{diam}(E_i) \leq \delta\} = 0.$$

Siis joukon A Hausdorffin dimensio voidaan laskea mielivaltaisten joukkojen sijaan kuutioiden avulla. Koska kuutiot, jotka peittävät joukon A, vastaavat leikkausjoukkoja puussa T, niin

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(Q_i)^s : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_i, \mathrm{diam}(Q_i) \leq \delta\} \\
=& \lim_{\delta \to 0} \inf\{\sum_{\sigma \in \Pi} \mathrm{diam}(B_\sigma)^s : \partial T \subset \bigcup_{\sigma \in \Pi} B_\sigma, \mathrm{diam}(B_\sigma) \leq \delta\}
\end{aligned}$$

eli

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) = \log_b \mathrm{br}\, T.$$

□

Esimerkki 5.9. Olkoon T sellainen puu, että sen jokaisella solmulla on kolme seuraajaa. Kun jokaisen solmun keskimmäinen seuraaja poistetaan, saadaan alipuu, jonka jokaisella solmulla on kaksi seuraajaa. Tämä puu vastaa Cantorin kolmasosajoukkoa. Koska Cantorin kolmasosajoukko on kompakti, niin lauseen 5.8 nojalla sen Hausdorffin ulottuvuus on $\log_3 2$.

Esimerkki 5.10. Olkoon A niiden välin $[0,1]$ lukujen joukko, joiden desimaaliesitys sisältää vain numeroita 0 ja 7. Olkoon T puu, jonka jokaisella solmulla on kymmenen seuraajaa. Jos jokaisen solmun seuraajista poistetaan kaikki paitsi kaksi, jäljelle jäävä puu vastaa joukkoa A. Siis joukon A Hausdorffin ulottuvuus on $\log_{10} 2$.

Seuraus 5.11. *Olkoon* $A \neq \emptyset$ *joukko, joka jää jäljelle yksikkökuution* $[0,1]^n$ *fraktaaliperkolaatiossa parametreilla* b *ja* p*. Tällöin* $\dim_{\mathcal{H}}(A) = n + \log_b p$ *melkein varmasti.*

Todistus. Olkoon T puu, jonka jokaisella solmulla on b^n seuraajaa. Poistetaan puusta solmut, jotka vastaavat yksikkökuutiosta poistettuja kuutioita. Tämä vastaa perkolaatiota puussa T ja jäljelle jäävä alipuu $K(o)$ vastaa joukkoa A. Selvästi $\operatorname{br} T = b^n$. Kun puussa T tapahtuu perkolaatio parametrilla p ja jäljelle jäävä alipuu $K(o)$ on ääretön, niin huomautuksen 4.11 nojalla $\operatorname{br} K(o) = pb^n$ melkein varmasti. Siis lauseen 5.8 nojalla

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \log_b \operatorname{br} K(o) = \log_b pb^n = n + \log_b p$$

melkein varmasti. □

6 Kapasiteetti

6.1 Efektiivinen konduktanssi

Palautetaan luvusta 3 mieleen, että satunnaiskävelyssä todennäköisyys siirtyä solmusta σ sen naapuriin τ on

$$p(\sigma,\tau) = \frac{c(\sigma,\tau)}{\sum_{\sigma\sim\psi} c(\sigma,\psi)}.$$

Sanotaan, että satunnaiskävely siirtymätodennäköisyyksillä $p(\sigma,\tau)$ ja perkolaatio säilymistodennäköisyydellä $p \neq 1$ liittyvät toisiinsa, jos

$$c(\sigma) = \frac{p^{|\sigma|}}{1-p}$$

kaikilla solmuilla σ.

Aiemmin puun reuna määriteltiin säteiden avulla. Tässä luvussa on hyödyllistä määritellä reuna myös äärellisille puille. Äärellisen puun tapauksessa luonnollinen reuna on puun lehtien joukko. Jotta lehdet saadaan mukaan myös äärettömässä puussa, laajennetaan säteen määritelmä koskemaan kaikkia polkuja, jotka alkavat juuresta, kulkevat koko ajan poispäin juuresta ja joita ei voi pidentää. On kuitenkin syytä huomata, että kaikki tulokset pätevät myös alkuperäisellä määritelmällä, sillä lehdet voidaan aina korvata puulla, jonka jokaisella solmulla on tasan yksi seuraaja.

Luvusta 3 on syytä kerrata myös määritelmä 3.6.

Määritelmä 6.1. Olkoot T puu, Π leikkausjoukko ja Z puun se osa, joka jää leikkausjoukon sille puolelle, johon juuri ei kuulu. Sovitaan, että $\Pi \subset Z$. Olkoon $[o \to Z]$ tapahtuma, että juuresta alkava satunnaiskävely osuu joukkoon Z ennen kuin palaa juureen. Tällöin juuren ja joukon Z välisen osan efektiivinen konduktanssi on

$$\mathcal{C}(o \to Z) := P[o \to Z] \sum_{o \to \sigma} c(o, \sigma).$$

Tämän määritelmän motivoi lemma 6.3.

Olkoon (T^n) sellainen jono puun juuren sisältäviä äärellisiä alipuita, että $T^n \subset T^{n+1}$ ja $T = \bigcup T^n$. Valitaan $Z_n = T \backslash T^n$. Nyt määritellään koko puuhun efektiivinen konduktanssi asettamalla $\mathcal{C}(o \to \partial T) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(o \to Z_n)$. Raja-arvo on olemassa, sillä jono $(P[o \to Z_n])$ on vähenevä. Raja-arvo ei myöskään riipu jonon (T^n) valinnasta. Jos (T^n) ja $(\hat{T}^n)$ ovat tällaisia jonoja, niin kaikilla T^k on olemassa sellainen $\hat{T}^m$, että $T^k \subset \hat{T}^m$. Nyt $\mathcal{C}(o \to Z_k) \geq \mathcal{C}(o \to \hat{Z}_m)$, joten $\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(o \to Z_n) \geq \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(o \to \hat{Z}_n)$. Yhtäsuuruus on voimassa symmetrian vuoksi. Lisäksi asetetaan $\mathcal{C}(o \to o) = \infty$.

Lemma 6.2. *Satunnaiskävely äärettömässä puussa on etääntyvä, jos ja vain jos $\mathcal{C}(o \to \partial T) > 0$.*

Todistus. Olkoon T ääretön puu ja (T^n) sellainen jono juuren sisältäviä äärellisiä alipuita, että $T^n \subset T^{n+1}$ ja $\bigcup T^n = T$. Olkoon $Z_n = T \setminus T^n$. Nyt

$$P[o \to \infty] = P[\cap [o \to Z_n]] = \lim_{n\to\infty} P[o \to Z_n]$$

on todennäköisyys, että satunnaiskävely ei koskaan palaa juureen. Huomautuksen 3.5 nojalla se on positiivinen, jos ja vain jos satunnaiskävely on etääntyvä. Siis $\mathcal{C}(o \to \partial T) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(o \to Z_n) > 0$, jos ja vain jos satunnaiskävely on etääntyvä. □

Lemma 6.3. *Olkoon Π leikkausjoukko puussa T ja Z se puun osa, joka jää leikkausjoukon sille puolelle, johon juuri ei kuulu. Olkoon v sellainen joukon Z määräämä jännite, että $v(o) > 0$, ja i siihen liittyvä virta. Tällöin*

$$\mathcal{C}(o \to Z) = \frac{1}{v(o)} \sum_{o \to \sigma} i(o, \sigma).$$

Todistus. Asetetaan $v'(\sigma) = v(\sigma)/v(o)$ kaikilla $\sigma \in T$. Siis v' on jännite, jolle pätee $v'(o) = 1$. Nyt lemman 3.9 nojalla

$$\begin{aligned} P[o \to Z] &= \sum_{o \to \sigma} p(o,\sigma)(1 - v'(\sigma)) = \sum_{o \to \sigma} p(o,\sigma)(1 - \frac{v(\sigma)}{v(o)}) \\ &= \sum_{o \to \sigma} \frac{c(o,\sigma)}{\sum_{o \to \tau} c(o,\tau)}(1 - \frac{v(\sigma)}{v(o)}) \\ &= \frac{1}{v(o) \sum_{o \to \tau} c(o,\tau)} \sum_{o \to \sigma} c(o,\sigma)(v(o) - v(\sigma)) \\ &= \frac{1}{v(o) \sum_{o \to \tau} c(o,\tau)} \sum_{o \to \sigma} i(o,\sigma), \end{aligned}$$

joten

$$\mathcal{C}(o \to Z) = P[o \to Z] \sum_{o \to \sigma} c(o,\sigma) = \frac{1}{v(o)} \sum_{o \to \sigma} i(o,\sigma).$$

□

Huomautus 6.4.

1. Vastaava tulos pätee myös koko puun efektiiviselle konduktanssille $\mathcal{C}(o \to \partial T)$.
2. Lemman 6.3 avulla voidaan motivoida termi efektiivinen konduktanssi. Tulkitaan puun juuren ja joukon Z välinen osa yhdeksi kaareksi. Tällöin tämän kaaren konduktanssin voidaan ajatella olevan $\mathcal{C}(o \to Z)$.

Lemma 6.5. *Olkoon T puu resistansseilla r ja i yksikkövirta, toisin sanoen $d^*i(o) = 1$. Tällöin*

$$\mathcal{E}(i) = \frac{1}{\mathcal{C}(o \to \partial T)}.$$

Todistus. Huomautuksen 3.7 kohdan 2 ja lemman 6.3 nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(i) = (i|ir) = (i|dv) = (d^*i|v) &= \sum_{\sigma \in T} v(\sigma) \sum_{\sigma \sim \tau} i(\sigma,\tau) \\ &= v(o) \sum_{o \sim \tau} i(o,\tau) = v(o) = \frac{1}{\mathcal{C}(o \to \partial T)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 6.6. *Olkoon $(x_n) \subset]0,1]$ jono. Tällöin*

$$\sum \frac{1 - x_n}{x_n} \leq \frac{1 - \prod x_n}{\prod x_n}$$

ja

$$\sum \frac{1 - x_n}{1 + x_n} \geq \frac{1 - \prod x_n}{1 + \prod x_n}.$$

Todistus. Todistetaan ensin tapaus, että jonossa on vain kaksi alkiota. Nyt $0 \leq (1-x_1)(1-x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2$, joten $x_1 + x_2 - x_1x_2 \leq 1$ ja $x_1 + x_2 \leq 1 + x_1x_2$. Siis

$$\frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2} = \frac{x_2 - x_1x_2 + x_1 - x_1x_2}{x_1x_2} \leq \frac{1-x_1x_2}{x_1x_2}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} &= \frac{1 + x_2 - x_1 - x_1x_2 + 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} \\ &\geq \frac{2 - 2x_1x_2}{2 + 2x_1x_2} = \frac{1 - x_1x_2}{1 + x_1x_2}.\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että väite pätee, kun jonossa on k alkiota. Nyt oletuksen ja todistuksen alkuosan perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k+1} \frac{1-x_n}{x_n} &= \frac{1-x_{k+1}}{x_{k+1}} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1-x_n}{x_n} \leq \frac{1-x_{k+1}}{x_{k+1}} + \frac{1-\prod_{n=1}^{k} x_n}{\prod_{n=1}^{k} x_n} \\ &\leq \frac{1 - x_{k+1}\prod_{n=1}^{k} x_n}{x_{k+1}\prod_{n=1}^{k} x_n} = \frac{1-\prod_{n=1}^{k+1} x_n}{\prod_{n=1}^{k+1} x_n}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k+1} \frac{1-x_n}{1+x_n} &= \frac{1-x_{k+1}}{1+x_{k+1}} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1-x_{k+1}}{1+x_{k+1}} + \frac{1-\prod_{n=1}^{k} x_n}{1+\prod_{n=1}^{k} x_n} \\ &\geq \frac{1 - x_{k+1}\prod_{n=1}^{k} x_n}{1 + x_{k+1}\prod_{n=1}^{k} x_n} = \frac{1-\prod_{n=1}^{k+1} x_n}{1+\prod_{n=1}^{k+1} x_n}.\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla jonoilla $(x_n) \subset]0,1]$. $\square$

Tarkastellaan perkolaatiota puussa T ja otetaan käyttöön merkintä $[o \leftrightarrow \partial T]$. Sovitaan, että äärettömän puun tapauksessa tämä tarkoittaa samaa kuin $[\sigma \leftrightarrow \infty]$ määritelmässä 4.1. Äärellisen puun tapauksessa $[o \leftrightarrow \partial T]$ tarkoittaa, että perkolaatiossa jokin puun lehdistä jää juuressa kiinni olevaan joukkoon $K(o)$.

Lause 6.7. *Olkoon T puu. Jos satunnaiskävely ja perkolaatio liittyvät toisiinsa, niin*

$$\frac{\mathcal{C}(o \to \partial T)}{1 + \mathcal{C}(o \to \partial T)} \leq P[o \leftrightarrow \partial T] \leq 2\frac{\mathcal{C}(o \to \partial T)}{1 + \mathcal{C}(o \to \partial T)}$$

eli

$$\frac{P[o \leftrightarrow \partial T]}{2 - P[o \leftrightarrow \partial T]} \leq \mathcal{C}(o \to \partial T) \leq \frac{P[o \leftrightarrow \partial T]}{1 - P[o \leftrightarrow \partial T]}.$$

Todistus. Todistetaan väite äärellisen puun tapauksessa. Äärettömän puun tapaus seuraa, kun otetaan raja-arvo äärellisistä puista. Olkoon $\mathcal{C}(\sigma)$ solmun σ ja joukon ∂T^σ välisen osan efektiivinen konduktanssi. Jos $|\sigma| = 1$, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\sigma) &= \frac{1}{v(\sigma)} \sum_{\sigma \to \tau} i(\sigma, \tau) = \frac{i(o, \sigma)}{v(\sigma)} \\ &= \frac{c(o, \sigma)(v(o) - v(\sigma))}{v(\sigma)} = c(o, \sigma) \left(\frac{v(o)}{v(\sigma)} - 1 \right).\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(o \to \partial T) &= \sum_{|\sigma|=1} \frac{i(o, \sigma)}{v(o)} = \sum_{|\sigma|=1} \frac{c(o, \sigma)(v(o) - v(\sigma))}{v(o)} \\ &= \sum_{|\sigma|=1} \frac{c(o, \sigma) \left(\frac{v(o)}{v(\sigma)} - 1 \right)}{\frac{v(o)}{v(\sigma)}} = \sum_{|\sigma|=1} \frac{c(o, \sigma) c(o, \sigma) \left(\frac{v(o)}{v(\sigma)} - 1 \right)}{c(o, \sigma) + c(o, \sigma) \left(\frac{v(o)}{v(\sigma)} - 1 \right)} \\ &= \sum_{|\sigma|=1} \frac{c(o, \sigma) \mathcal{C}(\sigma)}{c(o, \sigma) + \mathcal{C}(\sigma)} = \sum_{|\sigma|=1} (c(o, \sigma)^{-1} + \mathcal{C}(\sigma)^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Olkoon $\mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)$ alipuun T^σ efektiivinen konduktanssi, joka on määritelty puuhuun T^σ liittyvien konduktanssien avulla, kun juuri on σ eikä o. Siis $\mathcal{C}(\sigma)$ lasketaan alkuperäisillä konduktansseilla ja $\mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)$ konduktansseilla, jotka on kerrottu vakiolla $p^{|\sigma|}$. Nyt $\mathcal{C}(\sigma) = p\mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)$, kun $|\sigma| = 1$, joten saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(o \to \partial T) &= \sum_{|\sigma|=1} (c(o, \sigma)^{-1} + \mathcal{C}(\sigma)^{-1})^{-1} \\ &= \sum_{|\sigma|=1} (c(o, \sigma)^{-1} + p^{-1} \mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)^{-1})^{-1} \\ &= \sum_{|\sigma|=1} (p^{-1} - 1 + p^{-1} \mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Lisäksi on voimassa

$$P[o \leftrightarrow \partial T] = 1 - \prod_{|\sigma|=1} (1 - pP[\sigma \leftrightarrow \partial T^\sigma]).$$

Kaikki nämä rekursiokaavat pätevät, kun $T \neq \{o\}$. Jos puu sisältää vain juuren, niin lauseen väite pätee, sillä $\mathcal{C}(o \to o) = \infty$ ja $P[o \leftrightarrow o] = 1$. Nyt yllä esiteltyjen kaavojen avulla väite voidaan laajentaa koskemaan myös suurempia puita. Jos väite pitää paikkaansa alipuiden T^σ kohdalla kaikilla $|\sigma| = 1$, niin se pätee myös koko puussa T. Siis jos

$$\mathcal{C}(o \to \partial T^\sigma) \leq \frac{P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}{1 - P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}$$

kaikilla $|\sigma| = 1$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(o \to \partial T) &= \sum_{|\sigma|=1} (p^{-1} - 1 + p^{-1}\mathcal{C}(\sigma \to \partial T^\sigma)^{-1})^{-1} \\
&\leq \sum_{|\sigma|=1} \left(p^{-1} - 1 + p^{-1}\frac{1 - P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}{P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}\right)^{-1} \\
&= \sum_{|\sigma|=1} \left(\frac{1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}{pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}\right)^{-1} \\
&= \sum_{|\sigma|=1} \frac{1 - (1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])}{1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]} \\
&\leq \frac{1 - \prod(1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])}{\prod(1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])} \\
&= \frac{P[o \leftrightarrow \partial T]}{1 - P[o \leftrightarrow \partial T]},
\end{aligned}$$

missä jälkimmäinen epäyhtälö seuraa lemmasta 6.6. Vastaavasti jos

$$\mathcal{C}(o \to \partial T^\sigma) \geq \frac{P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}{2 - P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}$$

kaikilla $|\sigma| = 1$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(o \to \partial T) &\geq \sum_{|\sigma|=1} \left(p^{-1} - 1 + p^{-1}\frac{2 - P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}{P[o \leftrightarrow \partial T^\sigma]}\right)^{-1} \\
&= \sum_{|\sigma|=1} \frac{1 - (1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])}{1 + (1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])} \\
&\geq \frac{1 - \prod(1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])}{1 + \prod(1 - pP[o \leftrightarrow \partial T^\sigma])} \\
&= \frac{P[o \leftrightarrow \partial T]}{2 - P[o \leftrightarrow \partial T]}.
\end{aligned}$$

Siis väite pätee koko puussa T. □

Seuraus 6.8. *Olkoon T puu. Jos satunnaiskävely ja perkolaatio liittyvät toisiinsa, niin satunnaiskävely on etääntyvä, jos ja vain jos $P[o \leftrightarrow \partial T] > 0$.*

Todistus. Väite seuraa välittömästi lemmasta 6.2 ja lauseesta 6.7. $\square$

Määritelmä 6.9. Olkoon T puu. Olkoon Ψ ei-negatiivinen funktio, jolle pätee $\Psi(\sigma) \leq \Psi(\tau)$ kaikilla $\sigma \to \tau$. Laajennetaan Ψ puun reunaan asettamalla $\Psi(x) = \lim_{\sigma \in x} \Psi(\sigma)$, kun $x \in \partial T$. Määritellään ydin K asettamalla $K : \partial T \times \partial T \to [0, \infty], K(x, y) = \Psi(x \wedge y)$. Jos $x = y$, niin $K(x, y) = \Psi(x)$. Olkoon $\mathrm{Prob}(\partial T)$ puun reunan Borel-todennäköisyysmittojen joukko ja $\mu \in \mathrm{Prob}(\partial T)$. Mitan μ potentiaali on

$$V_\mu(x) := \int_{\partial T} K(x, y) d\mu(y)$$

ja sen energia on

$$\mathcal{E}(\mu) := \int_{\partial T \times \partial T} K d(\mu \times \mu) = \int_{\partial T} \int_{\partial T} K(x, y) d\mu(y) d\mu(x) = \int_{\partial T} V_\mu(x) d\mu(x).$$

Joukon $E \subset \partial T$ kapasiteetti on

$$\operatorname{cap} E := (\inf\{\mathcal{E}(\mu) : \mu \in \mathrm{Prob}(\partial T) \text{ ja } \mu(\partial T \setminus E) = 0\})^{-1}.$$

Jos $E = \emptyset$, niin $\operatorname{cap} E = 0$.

Huomautus 6.10. Mittojen $\mu \in \mathrm{Prob}(\partial T)$ ja puun T yksikkövoiden θ välillä on seuraava yksi yhteen -vastaavuus: $\theta(\sigma) = \mu(\{x : \sigma \in x\})$.

Lemma 6.11. *Merkitään $\Phi(\sigma) = \Psi(\sigma) - \Psi(\overleftarrow{\sigma})$, kun $\sigma \neq o$ ja $\Phi(o) = \Psi(o)$. Nyt kaikilla $x \in \partial T$ pätee*

$$V_\mu(x) = \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma) \theta(\sigma)$$

ja

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{\sigma \in T} \Phi(\sigma) \theta(\sigma)^2,$$

missä θ on edellisen huomautuksen määräämä vuo.

Todistus. Koska $\Psi(\sigma) = \sum_{\tau \leq \sigma} \Phi(\tau)$ ja $\Psi(x) = \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma)$, niin

$$\begin{aligned} V_\mu(x) &= \int_{\partial T} K(x, y) d\mu(y) = \int_{\partial T} \Psi(x \wedge y) d\mu(y) = \int_{\partial T} \sum_{\sigma \leq x \wedge y} \Phi(\sigma) d\mu(y) \\ &= \int_{\partial T} \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma) \mathbb{1}_{[\sigma \in y]} d\mu(y) = \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma) \int_{\partial T} \mathbb{1}_{[\sigma \in y]} d\mu(y) \\ &= \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma) \mu(\{y : \sigma \in y\}) = \sum_{\sigma \in x} \Phi(\sigma) \theta(\sigma) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mu) &= \int_{\partial T} V_\mu(x)d\mu(x) = \int_{\partial T} \sum_{\sigma\in x} \Phi(\sigma)\theta(\sigma)d\mu(x) \\ &= \sum_{\sigma\in T} \Phi(\sigma)\theta(\sigma)\mu(\{x : \sigma \in x\}) = \sum_{\sigma\in T} \Phi(\sigma)\theta(\sigma)^2.\end{aligned}$$

□

Lause 6.12. *Olkoon T puu resistansseilla r. Asetetaan $\Psi(o) = 0$ ja $\Psi(\sigma) = \sum_{o<\tau\leq\sigma} r(\tau)$ kaikilla $\sigma \neq o$. Tällöin satunnaiskävely puussa T on etääntyvä, jos ja vain jos* $\operatorname{cap}\partial T > 0$.

Todistus. Nyt $\Phi(o) = \Psi(o) = 0$ ja $\Phi(\sigma) = \Psi(\sigma) - \Psi(\overleftarrow{\sigma}) = r(\sigma)$ kaikilla $\sigma \in T \setminus \{o\}$, joten lemman 6.11 nojalla

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{\sigma\in T} \Phi(\sigma)\theta(\sigma)^2 = \sum_{\sigma\in T\setminus\{o\}} r(\sigma)\theta(\sigma)^2 = \mathcal{E}(\theta).$$

Tästä saadaan lemman 3.13 ja lemman 6.5 nojalla

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\partial T &= (\inf\{\mathcal{E}(\mu) : \mu \in \operatorname{Prob}(\partial T)\})^{-1} \\ &= (\inf\{\mathcal{E}(\theta) : \theta \text{ on yksikkövuo}\})^{-1} = \mathcal{E}(i)^{-1} = \mathcal{C}(o \to \partial T).\end{aligned}$$

Väite seuraa lemmasta 6.2. □

Huomautus 6.13.

1. Jos yllä olevassa todistuksessa asetetaankin $\Psi(o) = 1$ ja $\Psi(\sigma) = 1 + \sum_{o<\tau\leq\sigma} r(\sigma)$, niin saadaan

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{\sigma\in T} \Phi(\sigma)\theta(\sigma)^2 = \Psi(o)\theta(o)^2 + \sum_{\sigma\in T\setminus\{o\}} r(\sigma)\theta(\sigma)^2 = 1 + \mathcal{E}(\theta)$$

ja edelleen

$$\operatorname{cap}\partial T = (1 + \mathcal{E}(i))^{-1} = \frac{\mathcal{C}(o \to \partial T)}{1 + \mathcal{C}(o \to \partial T)}.$$

Siis lause 6.7 saadaan muotoon

$$\operatorname{cap}\partial T \leq P[o \leftrightarrow \partial T] \leq 2\operatorname{cap}\partial T.$$

2. Kun satunnaiskävely ja perkolaatio liittyvät toisiinsa, niin

$$r(\sigma) = c(\sigma)^{-1} = \frac{1-p}{p^{|\sigma|}}.$$

Erityisesti solmujen konduktanssit riippuvat vain niiden etäisyydestä juuresta. Jos myös solmujen seuraajien lukumäärä riippuu vain niiden etäisyydestä juuresta, niin huomautuksen 3.14 nojalla pienin energia on sillä yksikkövuolla θ, joka jakautuu jokaisessa solmussa tasaisesti sen seuraajiin. Tämän vuon energia on

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\theta) &= \sum_{\sigma \in T\setminus\{o\}} r(\sigma)\theta(\sigma)^2 = (1-p)\sum_{\sigma \in T\setminus\{o\}} \frac{1}{p^{|\sigma|}|T_{|\sigma|}|^2} \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\sigma|=n} \frac{1}{p^{|\sigma|}|T_{|\sigma|}|^2} \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|T_n|}{p^n|T_n|^2} = (1-p)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n|T_n|}.\end{aligned}$$

Siis kun $\Psi(o) = 1$ ja $\Psi(\sigma) = 1 + \sum_{o<\tau\leq\sigma} r(\sigma)$, niin kapasiteetti on

$$\operatorname{cap}\partial T = \left(1 + (1-p)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n|T_n|}\right)^{-1}.$$

Nyt huomautuksen ensimmäisen kohdan nojalla $P[o \leftrightarrow \partial T] > 0$, jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n|T_n|} < \infty.$$

3. Olkoon $E \subset \partial T$ suljettu. Merkitään

$$T(E) = \{\sigma \in T: \text{ on olemassa sellainen } x \in E, \text{ että } \sigma \in x\}.$$

Nyt $T(E)$ on puun T alipuu ja $\partial T(E) = E$. Siis

$$\operatorname{cap} E \leq P[o \leftrightarrow E] \leq 2\operatorname{cap} E.$$

Toisin sanoen $P[\partial K(o) \cap E \neq \emptyset] > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap} E > 0$.

Esimerkki 6.14. Olkoon T^1 puu, jonka jokaisella solmulla on tasan yksi seuraaja. Tietenkin $\operatorname{br} T^1 = \operatorname{gr} T^1 = 1$. Olkoon T^2 puu, jonka solmuilla on 1 tai 3 seuraajaa ja $|T_n^2| = 3^k$, kun $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Myös $\operatorname{br} T^2 = \operatorname{gr} T^2 = 1$. Lauseen 3.17 nojalla kummankin puun kohdalla satunnaiskävely konduktansseilla $c(\sigma) = \lambda^{-|n|}$ on etääntyvä, jos $\lambda < 1$ ja palautuva, jos $\lambda > 1$. Tarkastellaan nyt tapausta $\lambda = 1$. Tällöin $c(\sigma) = r(\sigma) = 1$. Puussa T^1 voi olla vain yhdenlainen yksikkövuo θ_1, jonka energia on

$$\mathcal{E}(\theta_1) = \sum_{\sigma \in T^1\setminus\{o\}} r(\sigma)\theta_1(\sigma)^2 = \sum_{\sigma \in T^1\setminus\{o\}} 1 \cdot 1^2 = \infty.$$

Siis $\operatorname{cap}\partial T^1 = \mathcal{E}(\theta_1)^{-1} = 0$. Siis lauseen 6.12 nojalla satunnaiskävely puussa T^1 on palautuva. Puussa T^2 yksikkövuo θ_2, jolla on pienin energia, on sellainen, joka jakautuu solmuissa tasaisesti seuraajiin eli $\theta_2(\sigma) = |T^2_{|\sigma|}|^{-1}$. Tällaisen vuon energia on

$$\mathcal{E}(\theta_2) = \sum_{\sigma\in T^2\setminus\{o\}} r(\sigma)\theta_2(\sigma)^2 = \sum_{\sigma\in T^2\setminus\{o\}} \frac{1}{|T^2_{|\sigma|}|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\sigma|=n} \frac{1}{|T^2_{|\sigma|}|^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|T^2_n|}{|T^2_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|T^2_n|} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k\leq n<2^{k+1}} \frac{1}{|T^2_n|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} < \infty.$$

Siis $\operatorname{cap}\partial T^2 = \mathcal{E}(\theta_2)^{-1} > 0$, joten satunnaiskävely puussa T^2 on etääntyvä.

6.2 Yhteys fraktaaliperkolaatioon

Kapasiteetti voidaan määritellä myös joukoille $E \subset [0,1]^n$. Olkoon f ei-negatiivinen vähenevä funktio. Asetetaan $K(x,y) = f(||x-y||)$. Määritellään Borel-todennäköisyysmitan $\mu \in \operatorname{Prob}(E)$ energia kuten puun tapauksessa eli

$$\mathcal{E}_f(\mu) = \int\int f(||x-y||)d\mu(y)d\mu(x)$$

ja joukon E kapasiteetti

$$\operatorname{cap}_f E = (\inf\{\mathcal{E}_f(\mu) : \mu \in \operatorname{Prob}(E)\})^{-1}.$$

Jos kapasiteettiin liittyvä funktio f on $f(z) = (z/\sqrt{n})^{-\alpha}$ jollakin $\alpha > 0$, niin merkitään $\operatorname{cap}_f E = \operatorname{cap}_\alpha E$. Jos taas f on $f(z) = \log(\sqrt{n}/z)$, niin merkitään $\operatorname{cap}_f E = \operatorname{cap}_0 E$. Nyt jos $\alpha_1 < \alpha_2$, niin $\operatorname{cap}_{\alpha_1} E \geq \operatorname{cap}_{\alpha_2} E$.

Lause 6.15. *Olkoon Γ puu, jonka jokaisella solmulla on b^n seuraajaa. Olkoon $E \subset [0,1]^n$ suljettu ja T sitä vastaava alipuu puussa Γ. Olkoot $r_k > 0$ sellaisia, että $\sum r_k = \infty$. Asetetaan puuhun T resistanssit $r(\sigma) = r_{|\sigma|}$. Olkoon f vähenevä funktio, jolle pätee*

$$f(b^{-k}) = \sum_{1\leq i\leq k} r_i$$

kaikilla k ja $f(0) = \sum r_k = \infty$.

Jos Borel-todennäköisyysmitoille $\nu \in \operatorname{Prob}(E)$ ja $\mu \in \operatorname{Prob}(\partial T)$ pätee $\theta(\sigma) = \nu(Q_\sigma)$ kaikilla solmuilla σ, missä θ on mittaa μ vastaava yksikkövuo ja Q_σ on solmua σ vastaava b-adinen kuutio, niin

$$2^{-n}b^{-nl}\mathcal{E}(\theta) \leq \mathcal{E}_f(\nu) \leq 3^n b^n \mathcal{E}(\theta),$$

missä $l = \lceil 1/2\log_b n\rceil$. Erityisesti $\operatorname{cap}\partial T > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_f E > 0$.

Todistus. Olkoon $N \in \mathbb{N}$. Jos $t \leq b^{-N}$, niin $f(t) \geq f(b^{-N})$, joten

$$f(t) \geq \sum_{k \geq 1} r_k \mathbb{1}_{\{b^{-k} \geq t\}}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_f(\nu) &= \int\int f(||x-y||) d\nu(y) d\nu(x) \geq \int\int \sum_{k\geq 1} r_k \mathbb{1}_{\{b^{-k} \geq ||x-y||\}} d\nu(y) d\nu(x) \\ &= \sum_{k \geq 1} r_k \cdot (\nu \times \nu)\{||x-y|| \leq b^{-k}\}.\end{aligned}$$

Koska $l \geq 1/2 \log_b n$, niin $b^l \geq \sqrt{n}$ eli $b^{-l} \leq 1/\sqrt{n}$. Kun $|\sigma| = l + k$, niin

$$\operatorname{diam}(Q_\sigma \times Q_\sigma) = \sqrt{2n} b^{-l-k} \leq \sqrt{2} b^{-k}.$$

Siis

$$\{||x-y|| \leq b^{-k}\} \supset \bigcup_{|\sigma| = l+k} (Q_\sigma \times Q_\sigma).$$

Koska jokaisessa pisteessä voi leikata korkeintaan 2^n kuutiota $Q_\sigma \times Q_\sigma$, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_f(\nu) &= \sum_{k\geq 1} r_k \cdot (\nu \times \nu)\{||x-y|| \leq b^{-k}\} \\ &\geq 2^{-n} \sum_{k \geq 1} r_k \sum_{|\sigma| = k+l} \nu(Q_\sigma)^2 = 2^{-n} \sum_{k\geq 1} r_k \sum_{|\sigma|=k+l} \theta(\sigma)^2.\end{aligned}$$

Jos $\sigma \in T_k$ ja vaiheen T_{k+l} niiden solmujen joukko, joille pätee $\sigma < \tau$, on $\{\tau_i : i = 1, \dots, b^{nl}\}$, niin vuon määritelmän ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\frac{\theta(\sigma)^2}{b^{nl}} = \left(\sum_{i=1}^{b^{nl}} \frac{\theta(\tau_i)}{\sqrt{b^{nl}}} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{b^{nl}} \theta(\tau_i)^2 \sum_{i=1}^{b^{nl}} \frac{1}{b^{nl}} = \sum_{i=1}^{b^{nl}} \theta(\tau_i)^2.$$

Siis

$$\mathcal{E}_f(\nu) \geq 2^{-n} b^{-nl} \sum_{k\geq 1} r_k \sum_{|\sigma|=k} \theta(\sigma)^2 = 2^{-n} b^{-nl} \mathcal{E}(\theta).$$

Tarkastellaan sitten tapausta $t \geq b^{-N}$. Nyt $f(t) \leq f(b^{-N})$, joten

$$f(t) \leq \sum_{k \geq 1} r_k \mathbb{1}_{\{b^{-k+1} > t\}}.$$

Siis

$$\mathcal{E}_f(\nu) = \int\int f(||x-y||)d\nu(y)d\nu(x) \leq \int\int \sum_{k\geq 1} r_k \mathbb{1}_{\{b^{-k+1}>||x-y||\}} d\nu(y)d\nu(x)$$
$$= \sum_{k\geq 1} r_k \cdot (\nu\times\nu)\{||x-y|| < b^{-k+1}\}.$$

Jos $||x-y|| \leq b^{-k+1}$, niin on olemassa sellaiset solmut $x \in \sigma$ ja $y \in \tau$, että $|\sigma| = |\tau| = k-1$ ja $Q_\sigma \cap Q_\tau \neq \emptyset$. Siis

$$(\nu\times\nu)\{||x-y|| < b^{-k+1}\} \leq \sum_{|\sigma|=|\tau|=k-1} \mathbb{1}_{Q_\sigma\cap Q_\tau\neq\emptyset}\theta(\sigma)\theta(\tau).$$

Jokaista kuutiota Q_σ kohti on korkeintaan 3^n sellaista kuutiota Q_τ, että $Q_\sigma \cap Q_\tau \neq \emptyset$ ja $|\sigma| = |\tau|$. Lisäksi koska

$$\theta(\sigma)\theta(\tau) \leq \frac{\theta(\sigma)^2 + \theta(\tau)^2}{2},$$

niin

$$(\nu\times\nu)\{||x-y|| < b^{-k+1}\} \leq 3^n \sum_{|\sigma|=k-1} \theta(\sigma)^2.$$

Nyt valitsemalla $l = 1$ kaavassa

$$\frac{\theta(\sigma)^2}{b^{nl}} \leq \sum_{i=1}^{b^{nl}} \theta(\tau_i)^2$$

saadaan

$$3^n \sum_{|\sigma|=k-1} \theta(\sigma)^2 \leq 3^n b^n \sum_{|\sigma|=k} \theta(\sigma)^2.$$

Näin ollen

$$\mathcal{E}_f(\nu) \leq \sum_{k\geq 1} r_k \cdot (\nu\times\nu)\{||x-y|| < b^{-k+1}\} \leq 3^n b^n \sum_{k\geq 1} r_k \sum_{|\sigma|=k} \theta(\sigma)^2 = 3^n b^n \mathcal{E}(\theta).$$

$\square$

Lemma 6.16. *Olkoot f ja g sellaisia ei-negatiivisia väheneviä funktioita, että $f/c_1 - c_2 \leq g \leq c_1 f + c_2$ joillakin vakioilla c_1 ja c_2. Tällöin kaikilla $E \subset [0,1]^n$ pätee $\operatorname{cap}_f E > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_g E > 0$.*

Todistus. Jos $\operatorname{cap}_f E > 0$, niin on olemassa sellainen $\mu \in \operatorname{Prob}(E)$, että $\mathcal{E}_f(\mu) < \infty$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g(\mu) &= \int\int g(||x-y||)d\mu(y)d\mu(x)\\ &\leq \int\int c_1 f(||x-y||) + c_2 d\mu(y)d\mu(x) < \infty.\end{aligned}$$

Siis $\operatorname{cap}_g E > 0$. Vastaavasti nähdään, että jos $\operatorname{cap}_g E > 0$, niin $\operatorname{cap}_f E > 0$. □

Lause 6.17. *Olkoon Γ puu, jonka jokaisella solmulla on b^n seuraajaa. Olkoon $E \subset [0,1]^n$ suljettu ja T sitä vastaava alipuu puussa Γ. Asetetaan puuhun T resistanssit $r(\sigma) = \lambda^{|\sigma|}$, missä $\lambda = \operatorname{br} T = b^{\dim_{\mathcal{H}}(E)}$. Satunnaiskävely puussa T resistansseilla r on etääntyvä, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_{\dim_{\mathcal{H}}(E)} E > 0$.*

Todistus. Valitaan funktio f kuten lauseessa 6.15. Lauseiden 6.15 ja 6.12 nojalla satunnaiskävely puussa T on etääntyvä, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_f E > 0$. Nyt riittää vain löytää sellaiset vakiot c_1 ja c_2, että

$$\frac{f(z)}{c_1} - c_2 \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{z}\right)^{\dim_{\mathcal{H}}(E)} \leq c_1 f(z) + c_2,$$

kun $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 0$ ja

$$\frac{f(z)}{c_1} - c_2 \leq \log\frac{\sqrt{n}}{z} \leq c_1 f(z) + c_2,$$

kun $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$, koska tällöin lemman 6.16 nojalla $\operatorname{cap}_f E > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_{\dim_{\mathcal{H}}(E)} E > 0$. Riittää myös tarkastella funktiota f vain pisteissä b^{-k}, koska f on vähenevä muualla. Nyt

$$f(b^{-k}) = \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i = \frac{\lambda(\lambda^k - 1)}{\lambda - 1} \geq \lambda^k$$

ja

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{b^{-k}}\right)^{\dim_{\mathcal{H}}(E)} = (\sqrt{n})^{\dim_{\mathcal{H}}(E)}\lambda^k,$$

joten ehto

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{z}\right)^{\dim_{\mathcal{H}}(E)} \leq c_1 f(z) + c_2$$

on helppo täyttää. Lisäksi jos vakio c on niin suuri, että $\lambda \geq c/(c-1)$, niin $(c-1)\lambda^{k+1} \geq c\lambda^k \geq c\lambda^k - \lambda$ ja edelleen $c\lambda^{k+1} - c\lambda^k \geq \lambda^{k+1} - \lambda$ eli

$$f(b^{-k}) = \frac{\lambda(\lambda^k - 1)}{\lambda - 1} \leq c\lambda^k.$$

Siis myös ehto

$$\frac{f(z)}{c_1} - c_2 \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{z}\right)^{\dim_{\mathcal{H}}(E)}$$

saadaan voimaan. Kun $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$, niin $\lambda = 1$, joten

$$f(b^{-k}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i = k.$$

Koska

$$\log \frac{\sqrt{n}}{b^{-k}} = \log \sqrt{n} - \log b^{-k} = \log \sqrt{n} + k \log b,$$

niin myös ehto

$$\frac{f(z)}{c_1} - c_2 \leq \log \frac{\sqrt{n}}{z} \leq c_1 f(z) + c_2$$

täyttyy helposti. □

Seuraus 6.18. *Olkoon $E \subset [0,1]^n$ suljettu. Tällöin*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{\alpha : \operatorname{cap}_\alpha E = 0\}.$$

Todistus. Jos $\alpha < \dim_{\mathcal{H}}(E)$, niin $b^\alpha < b^{\dim_{\mathcal{H}}(E)}$. Nyt jos valitaan lauseen 6.17 tilanteessa $\lambda = b^\alpha$, niin $\lambda < b^{\dim_{\mathcal{H}}(E)} = \operatorname{br} T$, joten lauseen 3.17 nojalla satunnaiskävely on etääntyvä. Siis

$$\operatorname{cap}_\alpha E \geq \operatorname{cap}_{\dim_{\mathcal{H}}(E)} E > 0,$$

joten

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \inf\{\alpha : \operatorname{cap}_\alpha E = 0\}.$$

Jos taas $\alpha > \dim_{\mathcal{H}}(E)$, niin $b^\alpha > b^{\dim_{\mathcal{H}}(E)}$. Nyt jos valitaan lauseen 6.17 tilanteessa $\lambda = b^\alpha$, niin $\lambda > b^{\dim_{\mathcal{H}}(E)} = \operatorname{br} T$, joten lauseen 3.17 nojalla satunnaiskävely on palautuva. Siis

$$0 \leq \operatorname{cap}_\alpha E \leq \operatorname{cap}_{\dim_{\mathcal{H}}(E)} E = 0,$$

joten

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) \geq \inf\{\alpha : \operatorname{cap}_\alpha E = 0\}.$$

□

Lause 6.19. *Olkoon A se yksikkökuution $[0,1]^n$ osa, joka jää jäljelle fraktaaliperkolaatiossa parametreilla b ja p, ja olkoon $E \subset [0,1]^n$ suljettu. Tällöin $P[A \cap E \neq \emptyset] > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_{-\log_b p} E > 0$.*

Todistus. Olkoon Γ puu, jonka jokaisella solmulla on b^n seuraajaa ja olkoon T sen alipuu, joka vastaa joukkoa E. Joukkoa A vastaa puolestaan alipuu $K(o)$. Siis $P[A \cap E \neq \emptyset] > 0$, jos ja vain jos $P[\partial K(o) \cap \partial T \neq \emptyset] > 0$. Huomautuksen 6.13 nojalla $P[\partial K(o) \cap \partial T \neq \emptyset] > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap} \partial T > 0$. Edelleen lauseen 6.15 nojalla $\operatorname{cap} \partial T > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_f E > 0$. Valitaan lauseessa 6.15 sellaiset resistanssit, että satunnaiskävely ja perkolaatio liittyvät toisiinsa, toisin sanoen $r(\sigma) = (1-p)/p^{|\sigma|}$. Tällöin

$$f(b^{-k}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1-p}{p^i} = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{(1-p^{-k})}{1-p^{-1}} = p^{-k} - 1.$$

Koska $p^{-k} = (b^{\log_b p})^{-k} = (b^{-k})^{\log_b p}$, niin lemman 6.16 nojalla $\operatorname{cap}_f E > 0$, jos ja vain jos $\operatorname{cap}_{-\log_b p} E > 0$. □

Seuraus 6.20. *Olkoon A ja E kuten lauseessa 6.19. Jos $\dim_{\mathcal{H}}(E) > n - \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $P[A \cap E \neq \emptyset] > 0$. Jos $\dim_{\mathcal{H}}(E) < n - \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $P[A \cap E \neq \emptyset] = 0$ eli $P[A \cap E = \emptyset] = 1$.*

Todistus. Jos $A = \emptyset$, niin väite selvästi pätee. Jos $A \neq \emptyset$, niin seurauksen 5.11 nojalla $\dim_{\mathcal{H}}(A) = n + \log_b p$ melkein varmasti. Nyt jos $\dim_{\mathcal{H}}(E) < n - \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $\dim_{\mathcal{H}}(E) < -\log_b p$. Seurauksen 6.18 nojalla $\operatorname{cap}_{-\log_b p} E = 0$. Edelleen lauseen 6.19 nojalla $P[A \cap E \neq \emptyset] = 0$.

Toisaalta jos $\dim_{\mathcal{H}}(E) > n - \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $\dim_{\mathcal{H}}(E) > -\log_b p$. Nyt seurauksen 6.18 nojalla $\operatorname{cap}_{-\log_b p} E > 0$. Lauseen 6.19 nojalla $P[A \cap E \neq \emptyset] > 0$. □

Lähdeluettelo

[1] K. J. Falconer: *Techniques in Fractal Geometry.* Chichester, 1997.

[2] D. Gasbarra: *Stokastiikka.* 2010. Viitattu 16.1.2018. https://koppa.jyu.fi/kurssit/100105/materiaalikansio/stokastiikka2010.pdf

[3] R. Lyons: *Random Walks and Percolation on Trees.* Annals of probability, Volume 18, Issue 3, 1990, 931-958.

[4] R. Lyons: *Random Walks, Capacity and Percolation on Trees.* Annals of probability, Volume 20, Issue 4, 1992, 2043-2088.

[5] R. Lyons, Y. Peres: *Probability on Trees and Networks.* Cambridge University Press, New York, 2016.

[6] D. W. Stroock: *Probability theory: an analytic view.* Cambridge University Press, 2011.