



Känsäkoski Mira

Matematiikan oppiminen, oppimisvaikeus ja tukeminen

Erityispedagogiikan kandidaatintyö
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Erityispedagogiikan koulutus
2018

Oulun yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Matematiikan oppiminen, oppimisvaikeus ja tukeminen (Mira Käsäkoski)

Kandidaatintyö, 40 sivua

Toukokuu 2018

Kandidaatintutkielmani aiheena on matematiikan oppiminen sekä oppimisvaikeudet matematiikassa. Tämän lisäksi tutkielmassa käsitellään matematiikan oppimisvaikeuksien tukimuotoja ja oppimisen arviointia.

Matematiikan oppimisvaikeus on yleinen oppimisvaikeus, jota ei kuitenkaan ole vielä kovin paljon tutkittu. Matematiikan oppimisvaikeus lisää työttömyyden riskiä ja vaikeuttaa kaikkea toimintaa, jossa tarvitaan matemaattista osaamista.

Matematiikka on luonteeltaan kumuloituvaa, jolloin uudet opittavat asiat rakentuvat aiemmin opitun varaan. Matematiikan osaamisessa voidaan erotella neljä eri osataitoa: lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, laskemisen taidot ja aritmetiikan taidot. Kaikki nämä taidot ovat yhteydessä toisiinsa ja matemaattiseen osaamiseen.

Matemaattiset oppimisvaikeudet voidaan erottaa dyskalkuliaan eli vaikeuksiin peruslaskutaidoissa sekä heikkoon matemaattiseen osaamiseen, joka vaikeuttaa matematiikan oppimista ja matemaattisia taitoja vaativia arkielämän tilanteita. Heikossa matemaattisessa osaamisessa vaikeudet ovat kuitenkin lievempiä kuin dyskalkuliassa. Dyskalkulian taustatekijöinä on kognitiivisia tekijöitä kuten visuaalis-spatiaaliset taidot ja lukemisen taidot. Heikon matemaattisen osaamisen taustalla voi näiden lisäksi olla myös muun muassa motivaatioon ja oppimis-ympäristöihin liittyviä tekijöitä.

Matematiikan arviointiin on olemassa seuloja ja testejä. Seuloilla pyritään löytämään ne, joilla on mahdollisesti vaikeuksia matematiikassa. Testeillä taas selvitetään tarkemmin henkilön taitoja. Matematiikan oppimisvaikeuksien tukimuotoina voidaan käyttää esimerkiksi eksplisiittistä opetusta, havainnollistamista, yhteistoiminnallista oppimista, tietokoneharjoittelua sekä erilaisia interventioita.

Avainsanat: matematiikka, matematiikan oppimisvaikeus, dyskalkulia, arviointi, päällekkäistyminen, tukimuodot

Sisältö

1	Johdanto.....	4
2	Matematiikan oppiminen	6
2.1	Matematiikan osataidot	6
2.2	Matematiikan taitojen kehittyminen	7
2.3	Matematiikan osaaminen Suomessa	11
3	Matemaattiset oppimisvaikeudet	14
3.1	Matematiikan oppimisvaikeus	15
3.2	Heikko osaaminen matematiikassa	18
3.3	Arviointi	19
3.4	Päällekkäistyminen	21
3.5	Matematiikka-ahdistus	23
4	Tukikeinoja ja interventioita.....	24
4.1	Tehokkaita opetusmenetelmiä	24
4.2	Tietokoneperustaisia harjoitusohjelmia.....	26
4.3	Suomessa käytettäviä harjoitusohjelmia	27
	Pohdinta	30
	Lähteet.....	33

1 Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on matematiikan oppiminen sekä matematiikan oppimisvaikeudet. Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan matematiikan oppimisvaikeuden arviointia ja tukemista. Tutkielmassa käsitellään varhaisten matemaattisten taitojen oppimista eli oppimista joka ajoittuu ajalle ennen kouluikää sekä alkuopetukseen. Myös tutkielmassa esitellyt interventiot sijoittuvat varhaiskasvatukseen ja alakoulun kontekstiin. Hieman käsitellään myös matematiikan osaamista Suomessa niin kansainvälisen kuin kansallisenkin tutkimuksen valossa.

Matematiikan oppimisvaikeuksia on tutkittu vähemmän kuin lukemisen oppimisvaikeuksia, vaikka matematiikan oppimisvaikeudet ovat yhtä yleisiä kuin lukemisen oppimisvaikeudet. Lisäksi laskutaidon heikkous lisää työttömyyden todennäköisyyden kaksinkertaiseksi, sillä useimmilla aloilla tarvitaan laskemisen taitoja. (Räsänen 2012.) Heikot matemaattiset taidot ovat yhteydessä lyhyeen koulutuspolkuun ja yhdistettynä heikkoihin sosiaalisiin taitoihin ne ovat yhteydessä henkilön jäämiseen koulutuksen ja työelämän ulkopuolelle (Hakkarainen, Holopainen & Savolainen 2016). Laskemisen taidot ovat välttämättömiä arjessa selviytymisessä. Esimerkiksi kellonaikojen ymmärtäminen, ostosten tekeminen ja jopa oikean linja-auton löytäminen vaativat matemaattisia taitoja.

Matematiikan opetusta luonnehtii kumuloituvuus, eli uudet asiat sidotaan aiemmin opittuun (Opetushallitus 2014, 130; Räsänen 2012). Taitoerot kasvavat huomattavasti jo ennen koulun alkua (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi 2004; Mononen, Aunio, Väisänen, Korhonen & Tapola 2017, 16; Räsänen 2012) ja vaikeudet varhaisissa taidoissa aiheuttavat usein myös vaikeuksia myöhemmin opittavissa taidoissa (Mononen ym. 2017, 16; Räsänen 2012). Näin ollen matematiikan oppimisvaikeuksien mahdollisimman varhainen tunnistaminen ja tuen aloittaminen on tärkeää, jotta erot osaamisessa eivät kasvaisi suuriksi.

Jos oppilas ei hallitse riittävästi aiempien vuosiluokkien keskeisimpiä matematiikan sisältöjä tai muita aiemmin opittuja matemaattisia taitoja, hänen on mahdollista saada opetusta myös niistä. Tämän lisäksi tuen avulla ennakoidaan uusien sisältöjen oppimista. (Opetushallitus 2014, 130, 237, 376.) Oppilaan oikeus tukiopeukseen ja osa-aikaiseen erityisopetukseen on myös säädetty perusopetuslaissa (Perusopetuslaki 642/2010, 16§). Opettajien olisikin hyvä tietää, miten matematiikan taidot kehittyvät, jotta he voisivat mahdollisimman tehokkaasti tukea oppilaita.

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää: 1) Millaista matematiikan oppiminen on sekä mitä siihen kuuluu? 2) Mitä matematiikan oppimisvaikeus on? 3) Miten matematiikan oppimista voidaan tukea henkilöllä, jolla on matematiikan oppimisvaikeus?

Tutkielma toteutetaan kuvailevana kirjallisuuskatsauksena. Kuvailevalla kirjallisuuskatsauksella tarkoitetaan aiemman kirjallisuuden pohjalta muodostettua laaja-alaista yleiskatsausta (Salminen 2011, 6). Tutkielman tarkoituksena on lisätä ymmärrystä matematiikan oppimisesta ja oppimisvaikeudesta sekä tukikeinoista. Kun opettajilla on enemmän tietoa oppimisvaikeudesta ja sen ilmenemisestä, oppimisvaikeudet on helpompi tunnistaa mahdollisimman varhain ja aloittaa tukeminen ennen kuin puutteet taidoissa kasvavat suuriksi. Lisäksi tieto erilaisista tukikeinoista auttaa opettajia löytämään kuhunkin tilanteeseen sopivimman keinon. Tutkimusperustaisesti tehokkaat opetusmenetelmät taas ovat hyödyllisiä niiden oppilaiden, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, lisäksi myös muille oppilaille.

2 Matematiikan oppiminen

Tässä luvussa käsitellään matematiikan osataitoja ja taitojen kehittymistä. Lisäksi käsitellään matematiikan osaamista Suomessa sekä kansainvälisen tutkimuksen (PISA) että kansallisen tutkimuksen pohjalta.

2.1 Matematiikan osataidot

Matematiikan osaamisen osataitoja kahdeksanteen ikävuoteen asti ovat lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, laskemisen taidot ja aritmeettiset perustaidot. Nämä osataidot vaikuttavat kaikki toisiinsa. (Aunio & Räsänen 2016; Mononen ym. 2017, 17–29.) Nämä matematiikan osatekijät ennustavat matemaattista osaamista myöhemmällä iällä (Aunio & Räsänen 2016). 8–12-vuotiaana matemaattisista taidoista keskeisiä ovat aritmeettiset perustaidot, laskemisen taidot ja lukumääräisyyden taju (Mononen ym. 2017, 30–37).

Lukumääräisyyden tajulla tarkoitetaan pienten lukumäärien havaitsemista ilman tarkkaa laskeamista eli subitisaatiota sekä suuruusluokan vertailua (Aunio & Räsänen 2016). Laajemmassa määritelmässä lukumääräisyyden tajuun kuuluvat näiden lisäksi myös muun muassa aritmeettisten operaatioiden käyttö kymmenjärjestelmän ymmärtämiseen, arviointi, numeroiden tarkoituksen ymmärtäminen ja numeroiden käyttö reaali maailman asioiden mittaamiseen (Berch 2005). Näiden määritelmien erona on se, että Aunio ja Räsänen (2016) määrittelevät lukumääräisyyden tajun biologiseksi ominaisuudeksi eikä taitoa näin ollen tarvitse opettaa. Berch (2005) taas laajentaa määritelmää myös opituksi taidoksi.

Matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen liittyvät matemaattis-loogiset taidot, aritmeettiset periaatteet, matemaattiset symbolit sekä paikka-arvon ja kymmenjärjestelmän osaaminen. Matemaattis-loogisiin taitoihin kuuluvat vertailu, sarjoittaminen, luokittelu ja yksi yhteen -vastavuus. Aritmeettisiin periaatteisiin taas kuuluvat vaihdannaisuus eli yhteenlaskettavat voi laskea yhteen missä järjestyksessä tahansa, laskun hajottaminen osiin ja laskeminen eri järjestyksessä, kokonaisuuden muodostuminen pienemmistä osista, esimerkiksi $6=2+2+2$ ja $6=3+3$ sekä se, että yhteen- ja vähennyslasku ovat toisilleen käänteisiä operaatioita, kuten myös kerto- ja jakolasku. (Aunio & Räsänen 2016.)

Laskemisen taitoihin kuuluvat numerosanojen ja -symbolien oppiminen, lukujonon luettelemisen taidot eteenpäin ja taaksepäin sekä hyppien ja esineiden laskeminen (Aunio & Räsänen 2016). Eli lapsi oppii yhdistämään lukusanan ”kolme”, numerosymbolin 3 ja lukumäärän (•••).

Tämän yhteyden oppiminen on tärkeää koulun alkaessa. Lukujonotaitojen sujuvoituminen auttaa moninumeroisilla luvuilla laskemisessa. Suurilla luvuilla laskettaessa paikka- ja kymmenjärjestelmä ovat tärkeitä. (Mononen ym. 2017, 21–22.) Eli matemaattisten suhteiden ymmärtämistä tarvitaan laskemisen taitojen opettelussa.

Aritmeettiset perustaidot sisältävät yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutaidot (Aunio & Räsänen 2016). Aritmeettisten taitojen kehityksessä on tyypillistä aloittaa konkreettisesta esineiden laskemisesta ja lukujen luettelemisesta. Vähitellen kehitys siirtyy konkreettisesta laskemisesta kohti abstraktimpaa laskemista eli apuvälineiden tarve vähenee ja vastausten muistista palauttaminen on yleisempää. (Mononen ym. 2017, 27.) Kymmenjärjestelmän osaamista tarvitaan myös aritmeettisissä tehtävissä, kuten kymmenylitystä vaativissa yhteen- ja vähennyslaskuissa.

Lukumääräisyyden taju	Laskemisen taidot	Matemaattisten suhteiden ymmärtäminen	Aritmeettiset perustaidot
<ul style="list-style-type: none"> • subitisaatio: pienten lukumäärien määrittäminen (ei laskemista) • lukumäärien arviointi • lukujen erojen arviointi 	<ul style="list-style-type: none"> • lukusanojen luetteleminen • esineiden lukumäärien laskeminen • numerosymbolien hallinta • lukumäärän, lukusanan ja numerosymbolin yhteys 	<ul style="list-style-type: none"> • vertailu • luokittelu • sarjoittaminen • yksi yhteen - vastaavuus • matemaattisten symboleiden (<, >, =, ≠) hallinta • aritmeettiset periaatteet: kokonaisuus muodostuu pienemmistä osista, laskun hajottaminen osiin, vaihdannaisuus, käänteisyys • paikka-arvo ja kymmenjärjestelmä 	<ul style="list-style-type: none"> • yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutaidot

Kuvio 1. Matematiikan osataidot (Aunio & Räsänen 2016.)

2.2 Matematiikan taitojen kehittyminen

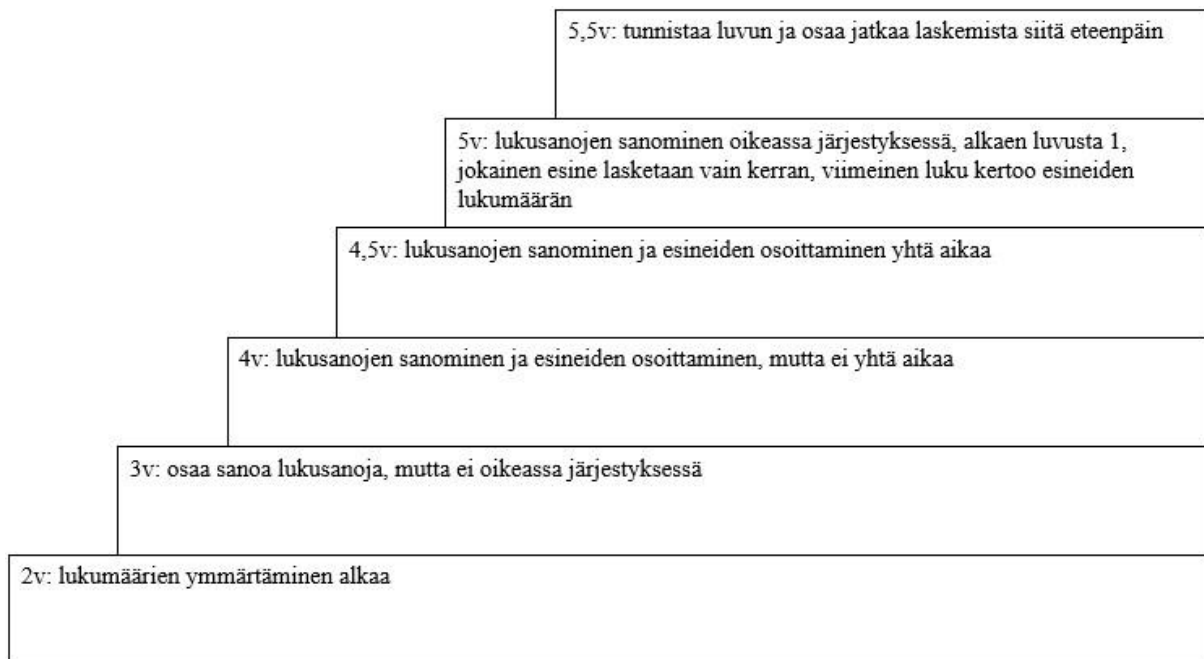
Matemaattisten taitojen kehitys alkaa jo hyvin nuorena. Varhaiskasvatuksessa luodaan pohjaa matematiikan osaamiselle. Matematiikan oppiminen on kumuloituvaa eli erot osaamisessa kasvavat (Räsänen 2012). Mitä korkeammalla tasolla taidot ovat, sitä nopeammin ne kasvavat, kun lapsi siirtyy esikoulusta 2. luokalle (Aunola ym. 2004). Näin ollen mahdollisimman varhainen puuttuminen vaikeuksiin matemaattisissa taidoissa on tärkeää, jotta osaamiserot eivät kasvaisi suuriksi.

Varhaiskasvatussuunnitelmassa tavoitteena on, että varhaiskasvatuksessa matemaattinen ajattelu kehittyy ja lasten myönteinen suhtautuminen matematiikkaan vahvistuu. Matemaattisten suhdetaitojen osalta vertailu, luokittelu, suhdekäsitteiden oppiminen ja säännönmukaisuuksien löytäminen ja tuottaminen on mainittu Varhaiskasvatussuunnitelmassa. Laskemisen taidoista lukumäärien havainnoiminen sekä liittäminen lukusanaan ja numeromerkkiin ja näiden lisäksi lukujonotaitojen kehittäminen kuuluvat tavoitteisiin. Matemaattisia taitoja harjoitellaan varhaiskasvatuksessa hyvin konkreettisesti ja arkipäivän tilanteisiin liittäen. (Opetushallitus 2016, 44–45.)

Ensimmäisen ja toisen luokan aikana matematiikan sisältöihin kuuluvat muun muassa laskemisen taidoista lukusanan, numeromerkin ja lukumäärän yhteyden ymmärtäminen, esineiden laskeminen ja lukujonotaidot. Matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen liittyvistä taidoista harjoitellaan vertailua, lukujen järjestämistä suuruusjärjestykseen, lukujen hajotelmia, vaihdannaisuutta ja liitännäisyyttä sekä kymmenjärjestelmää. Aritmeettisista taidoista harjoitellaan yhteen- ja vähennyslaskua sekä kertolaskun käsitettä ja pohjustetaan jakolaskun ymmärtämistä. (Opetushallitus 2014, 129.) Näin ollen suurin osa matematiikan perustaidoista käsitellään jo hyvin varhain alakoulussa.

Von Aster ja Shalev (2007) ovat kehittäneet neliportaisen mallin numerotaitojen kehittymisestä. Ensimmäisellä portaalla taitoja ovat subitisaatio, arviointi ja vertailu, jotka esiintyvät konkreettisenä määrän havaitsemisena. Toisella portaalla taitoja ovat verbaalinen laskeminen eli lukujen luetteleminen, laskustrategiat ja faktojen palauttaminen muistista. Nämä esiintyvät numerosanojen osaamisena. Kolmannella portaalla taitoja ovat kirjoitetut laskutoimitukset sekä numeromerkkien osaaminen. Neljännellä portaalla taas taitoja ovat arvioiva laskeminen ja aritmeettinen ajattelu sekä spatiaalinen kuva lukusuorasta. (von Aster & Shalev 2007.)

Lukujonotaitojen kehittymisessä olennaista on lukusanojen ja numeroiden oppiminen sekä matemaattisten suhdetaitojen hallinta. Tähän kuuluvat luokittelutaidot eli mitkä esineet lasketaan, yksi yhteen -vastaavuus eli jokainen esine lasketaan vain kerran sekä vertailun ja sarjoittamisen taidot eli esimerkiksi se, missä ryhmässä on eniten esineitä. (Aunio & Niemivirta 2010.) Kuviossa 2 kuvataan lukujonotaitojen kehittymistä, joka on perustana laskutaidon kehittymiselle.



Kuvio 2. Lukujonotaitojen kehittymisen kuusi vaihetta (Aunio & Niemivirta 2010.)

Matematiikan osaamisen tasoon vaikuttavat laskemisen taidot eli lukujen luetteleminen, lukujen luetteleminen tietyistä numerosta eteenpäin tai taaksepäin ja tietyn luvun verran jostain luvusta eteenpäin lukujen luetteleminen sekä metakognitiiviset taidot ja kuullun ymmärtäminen. Matematiikan taitojen kasvunopeuteen vaikuttavat laskemisen taidot ja visuaalinen tarkkaavaisuus. (Aunola ym. 2004.)

Hyvä suoriutuminen numeroiden vertailussa ja esineryhmien kokojen vertailussa ennustaa hyvää suoriutumista myös aritmeettisissa taidoissa. Tämä yhteys on tilastollisesti merkitsevä 7–11-vuotiaana. Laskemisen taitoihin liittyvistä tehtävistä numeroiden järjestys eli ovatko kolme lukua suuruusjärjestyksessä on yhteydessä aritmetiikan osaamiseen positiivisesti 9:n vuoden iästä lähtien. Laskemisen tehtävien osaaminen taas on yhteydessä 10- ja 12-vuotiaana aritmetiikan taitoihin niin, että niillä, joilla on paremmat laskemisen taidot on myös paremmat aritmetiikan taidot. Lukujonotaidot ovat yhteydessä aritmetiikkaan 7–8-vuotiaana ja 10–12-vuotiaana. Lukumääräisyyden tajuun liittyvistä tehtävistä vain pisteiden lukumäärän arviointi on yhteydessä aritmetiikan osaamiseen 10-vuotiaana. (Lyons, Price, Vaessen, Blomert & Ansari 2014.) Lukumääräisyyden taju ensimmäisen luokan alussa ennustaa matemaattista osaamista ensimmäisen luokan lopussa ja kolmannen luokan lopussa (Jordan, Glutting & Ramineni 2010). Aritmetiikan taitoihin ensimmäisellä luokalla ovat yhteydessä matemaattiset suhdetaidot sekä

laskemisen taidot esikoulussa. Lisäksi tarkkaamattomuus esikoulussa on yhteydessä suhdetaitojen ja laskemisen taitojen kehittymiseen sekä opettajan antamaan arvosanaan ensimmäisellä luokalla. (Aunio & Niemivirta 2010.)

Aunola ym. (2004) jakoivat aineistonsa kahteen ryhmään: hyvin suoriutuvat ja heikosti suoriutuvat. Hyvin suoriutuvilla lähtötaso matematiikan osaamisessa oli korkeampi ja heidän osaamisensa kehittyi nopeammin kuin heikosti suoriutuvilla. Oppilas oli todennäköisemmin hyvin suoriutuvien ryhmässä, jos hänen laskemisen taitonsa ja visuaalinen tarkkaavaisuutensa olivat korkeita. Lisäksi sukupuoli oli yhteydessä matematiikan osaamiseen siten, että pojat olivat todennäköisemmin hyvin suoriutuvien ryhmässä. (Aunola ym. 2004.)

Hyvin suoriutuvien ryhmässä matematiikan osaamisen tasoa ennustivat visuaalinen tarkkaavaisuus ja metakognitiiviset taidot. Matematiikan osaamisen kehittymisen nopeutta taas ennustivat laskemisen taidot ja sukupuoli. Heikosti suoriutuvien ryhmässä matematiikan osaamisen tasoa ennusti laskemisen taidot. Tässä ryhmässä matematiikan osaamisen kehittymisen nopeutta ennustivat laskemisen taidot ja visuaalinen tarkkaavaisuus. (Aunola ym. 2004.)

Laskutaito sekä nopea sarjallinen nimeäminen päiväkodissa ovat yhteydessä sujuvaan yksinumeroisilla luvuilla laskemiseen. Laskutaito on välittävä tekijä kirjaintietoisuuden ja lukukäsittelyn sekä yksinumeroisilla luvuilla laskemisen välillä. Nopea sarjallinen nimeäminen taas on välittävä tekijä visuaalisen tarkkaavaisuuden ja yksinumeroisilla luvuilla laskemisen välillä. Moninumeroisilla luvuilla laskemiseen ovat yhteydessä yksinumeroisilla luvuilla laskeminen neljännellä luokalla, lukukäsite päiväkodissa sekä äidin koulutustausta. Yksinumeroisilla luvuilla laskeminen on välittävä tekijä laskutaidon ja moninumeroisilla luvuilla laskemisen välillä. (Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi 2007.)

Matemaattiset suhdetaidot ovat suoraan yhteydessä laskemisen taitoihin ja sanallisiin tehtäviin. Laskemisen taidot ovat suoraan yhteydessä aritmeettisiin taitoihin. Näin ollen matemaattiset taidot ovat epäsuorasti yhteydessä aritmeettisiin taitoihin laskemisen taitojen kautta. Aritmeettisiin taitoihin vaikuttavat suoraan yhteen- ja vähennyslaskutaidot, sanalliset tehtävät sekä laskemisen taidot. (Mononen, Aunio, Hotulainen & Ketonen 2013.) Joten matematiikan osataidot ovat yhteydessä toisiinsa.

Ikä on suoraan yhteydessä matemaattisten suhdetaitojen kehittymiseen ja sen kautta epäsuorasti yhteydessä muihin matemaattisiin taitoihin. Sukupuoli poika on yhteydessä hyviin matemaattisiin suhdetaitoihin ja sen kautta epäsuorasti yhteydessä laskemisen taitoihin sekä sanallisiin

tehtäviin. Lisäksi sukupuoli poika on epäsuorasti yhteydessä aritmeettisiin taitoihin matemaattisten suhdetaitojen ja laskemisen taitojen kautta. Isän koulutustausta ei ole yhteydessä matemaattiseen osaamiseen, mutta äidin koulutustausta on positiivisesti yhteydessä matemaattisiin suhdetaitoihin ja sen kautta laskemisen taitoihin sekä sanallisiin tehtäviin. Lisäksi matemaattisten suhdetaitojen ja laskemisen taitojen kautta äidin koulutustausta on epäsuorasti yhteydessä aritmeettisiin taitoihin. (Mononen ym. 2013.) Toisaalta on myös tutkimus, jossa sekä äidin että isän koulutustausta on yhteydessä lapsen matematiikan osaamiseen toisella luokalla (Mononen & Aunio 2014).

Matematiikan oppimistuloksia selittävät hyvin vahvasti oppilaan asennetekijät eli matematiikan minäkäsitys ja suoritusluottamus. Muita selittäviä tekijöitä ovat oppilaan maahanmuuttaja-tausta, avoimuus ongelmanratkaisuun sekä kodin kulttuurinen tausta. Kouluun liittyviä selittäviä tekijöitä ovat koulun sosioekonominen tausta sekä asenne koulua kohtaan. (Kupari & Nissinen 2015.)

2.3 Matematiikan osaaminen Suomessa

Pisa 2015 -tutkimuksessa Suomen keskiarvo oli yli OECD-maiden keskiarvon. Osaaminen oli kuitenkin huonompaa verrattuna vuoden 2012 tutkimukseen. PISA-tutkimuksessa matematiikan osaaminen on jaoteltu kuuteen tasoon. Tutkimuksessa on määritetty heikon osaamisen rajaksi tason yksi osaaminen tai tätä heikompi osaaminen. Suomessa tasolla yksi tai sitä heikommien menestyneitä oli vuonna 2015 hieman alle 15 % ja tasolla 5 tai sitä paremmin menestyneitä, eli hyvin menestyneitä, hieman yli 10 %. Hyvin menestyneiden osuus oli pienentynyt vuodesta 2012 3,6 %. Vuodesta 2012 vuoteen 2015 ero tyttöjen ja poikien osaamisessa on hieman kasvanut niin, että tytöt suoriutuvat paremmin kuin pojat. Tämä johtuu pääasiassa poikien tason laskusta. (OECD 2016, 177, 183, 190–198.) Eli vaikka Suomessa osaaminen edelleen on korkeammalla tasolla kuin OECD-maissa keskimäärin, on osaamisen suunta laskussa. Näin ollen matematiikan osaamiseen tulisikin kiinnittää huomiota, jotta tämä lasku saataisiin pysähtymään.

Vuoden 2011 perusopetuksen päättävien matematiikan osaamisen kansallisen kokeen perusteella osaaminen on heikentynyt suhteessa aiempiin arviointeihin, jotka toteutettiin vuosina 1998–2004 (Hirvonen 2012, 15, 58). Yleisopetuksen oppilaat saivat ratkaistua vain hieman yli puolet tehtävistä ja ne, joilla oli yksilöllistetty oppimäärä, saivat ratkaistua alle viidesosan tehtävistä. Kokeen tehtävät olivat kaikille samanlaisia, eikä kokeessa huomioitu niitä, joilla oli

yksilöllistetty oppimäärä matematiikassa. Tyttöjen ja poikien välillä ei ollut eroa. (Hirvonen 2012, 38, 62–65.) Peruskoulun päättövaiheessa osaamiserot yleisopetuksen oppilaiden ja yksilöllistetyn oppimäärän mukaan opiskelevien välillä ovat siis hyvin suuria. Tyttöjen ja poikien välillä ei ollut eroa matemaattisessa osaamisessa 16-vuotiaana, eli peruskoulun lopussa (Holopainen, Taipale & Savolainen 2017).

Matematiikan arvosanat ovat suhteellisen vakaita luokkien 4–9 välillä, joskin lievää heikkenevistä arvosanoissa ilmenee. Erityisesti siirtymässä yläkouluun, keskimääräisesti suoriutuvien matematiikan arvosanat heikkenevät huomattavasti. Kuitenkin yläkoulun aikana arvosanat nousivat keskimääräisesti suoriutuvien ryhmässä. Suurin lasku matematiikan arvosanoissa on niillä, joilla on matematiikan oppimisvaikeus. (Holopainen ym. 2017.)

Mononen ym. (2013) ovat tutkineet matematiikan osaamista ensimmäisen luokan alussa eli sitä, millaisia koulun aloittavien lasten matematiikan taidot ovat. Matematiikan suhdetaitoja mittavista tehtävistä pienimmän tai suurimman luvun osasi valita yli puolet lapsista. Sanallisissa tehtävissä ja laskemisen tehtävissä hajonta osaamisessa oli suurta. Yhteenlasku oli vähennyslaskua helpompaa. Kuitenkaan 8 % lapsista ei osannut yhteenlaskua. 42 % lapsista ei osannut ratkaista vähennyslaskutehtäviä ensimmäisen luokan alussa. (Mononen ym. 2013.) Joten oppilailla on jo paljon tietämystä matematiikasta koulun alussa, mutta erot osaamisessa ovat suuria. Matematiikan suhdetaidot ovat jo hyvin hallussa suurimmalla osalla lapsista, mikä voi luultavasti johtua siitä, että niitä harjoitellaan varhaiskasvatuksessa. Yhteen- ja vähennyslaskun osaamisessa on suuria eroja, mikä voisi kertoa siitä, että vähennyslasku vaatii kehittyneempiä matemaattisia strategioita kuin yhteenlasku.

Sukupuolten välinen ero matematiikan osaamisessa on Suomessa kaventunut ja keskimäärin tytöt ja pojat suoriutuvat yhtä hyvin matematiikassa (Kupari & Nissinen 2015). Sukupuolieroja ei löydetty matematiikan osaamisessa (Mononen & Aunio 2014; Peters, van der Meulen, Zanolie & Crone 2017), heikosti suoriutuneissa (Räsänen, Närhi & Aunio 2010, 185) eikä matematiikan osataitojen osaamisessa (Devine, Soltész, Nobes, Goswami & Szűcs 2013). Vaikka sukupuolten osuudet matematiikan oppimisvaikeusryhmissä erosivat tutkimuksessa, sukupuolten välillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa (Murphy, Mazzocco, Hanich & Early 2007). Keskimäärin pojat suoriutuvat matematiikassa paremmin kuin tytöt (OECD 2016, 196). Tutkimuksissa on siis saatu ristiriitaisia tuloksia matematiikan taitojen sukupuolieroista.

Sekä PISA-tutkimuksen että kansallisen arvioinnin mukaan matematiikan osaaminen on siis Suomessa laskussa. Lisäksi matematiikan osaamisessa peruskoulun lopussa on suuria eroja.

Kuitenkin erot ovat melko suuria jo peruskoulun alussa. Matematiikan kumuloituvan luonteen takia erot osaamisessa kasvavat, joten matematiikan osaamista tulisi arvioida jo ennen koulun alkua ja säännöllisesti peruskoulun aikana. Lisäksi matematiikan tukitoimet tulisi aloittaa heti, kun vaikeudet matematiikan oppimisessa havaitaan. Näin voitaisiin pienentää eroja matematiikan osaamisessa.

3 Matemaattiset oppimisvaikeudet

Matematiikkaan liittyvät oppimisvaikeudet voidaan jakaa matematiikan oppimisvaikeuteen eli dyskalkuliaan, joka on vaikea oppimisvaikeus sekä heikkoon osaamiseen matematiikkaan liittyvissä taidoissa. Kouluarjessa tällaisen jaottelun tekeminen ei ole välttämätöntä, vaikka tutkimuskirjallisuudessa se usein tehdäänkin. Koulussa tärkeintä on löytää ne oppilaat, joilla on vaikeuksia matemaattisten taitojen oppimisessa, ja tukea heitä opiskelussa. (Mononen ym. 2017, 45–50.)

Tutkimuksissa käytetään hyvin monimuotoisia termejä kuvaamaan vaikeuksia matemaattisissa tehtävissä: matematiikan oppimisvaikeus (Sarsani, & Maddini 2009), kehityksellinen dyskalkulia (von Aster & Shalev 2007; Shalev, Manor & Gross-Tsur 2005), aritmetiikan oppimisvaikeus (Micallef & Prior 2004), matemaattiset oppimisvaikeudet sekä heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa (Mononen ym. 2017). Tutkimuksissa käytettyjä termejä avataan taulukossa 1.

Taulukko 1. Matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä käsitteitä

Käsite	Vaikeuksien ilmeneminen	Tutkimuksia
Dyskalkulia	Vaikeudet peruslaskutaidoissa	von Aster & Shalev 2007; Shalev ym. 2005
Matematiikan oppimisvaikeus	Vaikeuksia eri matematiikan osalueilla	Sarsani, & Maddini 2009
Matemaattiset oppimisvaikeudet	Vaikeuksia kaikissa tilanteissa, joissa tarvitaan matemaattista osaamista Sekä dyskalkulia että heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa	Mononen ym. 2017
Aritmetiikan oppimisvaikeus	Vaikeudet aritmetiikassa Vaikeuksia aritmeettisten prosessien suorittamisessa ja aritmeettisten faktojen muistista hakemisessa	Micallef & Prior 2004

Heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa	Dyskalkuliaa lievemmit vaikeudet; vaikeudet vaikuttavat arjessa selviytymiseen	Mononen ym. 2017
--	--	------------------

3.1 Matematiikan oppimisvaikeus

Matematiikan oppimisvaikeuksia on vaikea määrittellä, mikä voi johtua siitä, että matematiikan oppimisvaikeutta on tutkittu vielä melko vähän. Erityisesti verrattuna lukemisen vaikeuteen matematiikan oppimisvaikeutta on tutkittu huomattavasti vähemmän. (Mazzocco 2007, 29–34; Murphy ym. 2007.) Tutkimusten määritelmät matematiikan oppimisvaikeudelle vaihtelevat ja tutkimuksissa käytetään erilaisia kriteereitä heikolle osaamiselle. Kriteerirajat voivat vaihdella tutkimuksesta riippuen jopa 5 persentiilistä 46 persentiiliin. (Murphy ym. 2007.) Rajakriteerinä voi myös olla pisteiden poikkeama keskiarvosta, eli esimerkiksi pisteet vähintään 1–2 keskiarvon verran keskiarvon alapuolella (Devine ym. 2013) tai se, että osaaminen on 2 vuotta nuorempien tasolla (Murphy ym. 2007). Matematiikan oppimisvaikeutta on tutkimuksissa määritetty pääsääntöisesti kahdella tavalla: 1) älykkyydosamäärän ja osaamistason välisenä erona ja 2) erilaisilla matematiikan osaamisen standardisoitujen testien rajakriteereillä, joiden alle sijoittuneilla osaaminen on heikkoa (Murphy ym. 2007).

Matematiikan oppimisvaikeus on jatkuvaa (Murphy ym. 2007) ja biologispohjaista (Mazzocco 2007, 32). Lisäksi se on suhteellisen kapea-alainen oppimisvaikeus (Mononen ym. 2017, 43). Niillä, joilla on matematiikan oppimisvaikeus, voi olla vakavia puutteita joillakin taitoalueilla ja osaaminen voi toisilla alueilla olla keskimääräistä tai hyvää (Geary & Hoard 2005, 254). Käsitteellä erityinen oppimisvaikeus tarkoitetaan tietyn taidon oppimista ja käyttöä vaikeuttavaa kapea-alaista häiriötä (Aro, Aro, Koponen & Viholainen 2012, 299–300). Kehityksellinen oppimisvaikeus taas tarkoittaa sitä, että oppimisvaikeuden taustasyöt ovat olemassa jo yksilönkehityksen varhaisvaiheissa ja sen ilmiäsu voi vaihdella kehityksen kuluessa (Aro ym. 2012, 300). Joten matematiikan oppimisvaikeus on erityinen ja kehityksellinen oppimisvaikeus.

Termi matemaattiset oppimisvaikeudet laajentaa vaikeudet koskemaan paitsi matematiikkaa oppiaineena myös kaikkia niitä tilanteita, joissa matemaattista osaamista tarvitaan. Tämä termi kattaa sekä dyskalkulian eli vaikeudet peruslaskutaidoissa että heikon osaamisen matemaatti-

sisä taidoissa. (Mononen ym. 2017, 46–47.) Eli termillä matemaattiset oppimisvaikeudet voidaan määrittellä kaikki ne oppilaat, joiden taidot ovat selvästi heikkomat kuin muulla ikäryhmällä keskimäärin. Nämä oppilaat myös tarvitsevat tukea matematiikan oppimiseensa.

Matematiikkaan liittyvien oppimisvaikeuksien määrittelyssä on käytetty erilaisia termejä. Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia (F81.2) ei johdu kehitysvammaisuudesta tai puutteellisesta opetuksesta ja vaikeus kohdistuu peruslaskutaitoihin eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutaitoihin (World Health Organization 2016). Erityinen oppimisvaikeus: vaikeus matematiikassa (315.1) on DSM-5 tautiluokituksen määritelmä, joka lähes vastaa dyskalkulian määritelmää. Tässä kriteereinä ovat vaikeudet lukumääräisyyden tajussa, aritmeettisten faktojen muistamisessa, tarkassa tai sujuvassa laskemisessa sekä tarkassa matemaattisessa päättelyssä. Lisäksi vaikeuksien tulee ilmetä vähintään kuuden kuukauden ajan ja niiden tulee vaikuttaa joko akateemiseen suoriutumiseen tai arkielämään. Henkilön taidot ovat heikkomat kuin kronologinen ikä antaa olettaa. Vaikeuksien selittävänä tekijänä ei voi kuitenkaan olla kehitysvamma, näkö- tai kuulovamma, psykososiaaliset tekijät, opetuskieli tai opetuksen taso. (American Psychiatric Association 2013, 66–67.)

Matematiikan oppimisvaikeus on noin 5–8 %:lla ikäluokasta ja monella on tämän lisäksi matematiikan oppimisvaikeuden kanssa päällekkäistyviä vaikeuksia (Geary & Hoard 2005, 254). Dyskalkulian esiintyvyyden arvioksi on esitetty myös 1,3–10 % ikäryhmästä (Devine ym. 2013). Suomalaisessa tutkimuksessa matematiikassa heikosti suoriutuvien osuus oli 4,5 %. Tutkimuksessa heikon suoriutumisen kriteeri oli tiukka eli heikko osaaminen kansallisessa matematiikan kokeessa ja heikko opettajan antama arvio osaamisesta, joka oli joko arvosana tai hyvän osaamisen kriteerit eli tarvitseeko oppilas paljon tukea tunnilla. (Räsänen ym. 2010, 171–173, 175–181.) Kansallisen kokeen tulosten perusteella 1,3 %:lla oppilaista on vaikeuksia selviytyä ydintehtävistä eivätkä kuudennen luokan sisällöt Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti ole perusteltuja (Räsänen ym. 2010, 182). Matematiikan oppimisvaikeuden esiintyvyyden arvioiden erot luultavasti johtuvat erilaisista määritelmistä matematiikan oppimisvaikeudelle. Erilaisilla kriteereillä luonnollisesti saadaan erilaisia esiintyvyyсарvioita. Jos kriteerirajana on alle 5 prosenttiin osaaminen, on vaikeuden ilmeneminen vähäisempää kuin, jos kriteerirajana on alle 35 prosenttiin osaaminen.

Jokaisessa 20 oppilaan luokassa on keskimäärin yksi sellainen oppilas, joka tarvitsee huomattavasti tukea matematiikan oppimiseen (Räsänen ym. 2010, 182). Suurin osa niistä, jotka ovat

kuudennen luokan alussa matematiikassa heikosti suoriutuvia, on jo kolmannella luokalla kuulunut heikoimmin menestyviin oppilaisiin (Räsänen ym. 2010, 182). Poikien ja tyttöjen välillä ei heikossa osaamisessa ole eroa Suomen valtakunnallisessa matematiikan osaamisen tutkimuksessa (Räsänen ym. 2010, 185).

Kognitiivisia taustatekijöitä

Ryhmällä, jolla on matematiikan oppimisvaikeus, älykkyydosamäärä, kielelliset taidot ja työmuisti ovat heikommat kuin tavanomaisesti suoriutuvilla (Butterworth & Reigosa 2007, 66; Compton, Fuchs, Fuchs, Lambert & Hamlett 2012). Lisäksi nonverbaali ongelmanratkaisu, prosessointinopeus, käsitteenmuodostus, luetun ymmärtäminen, sanan lukeminen, sovellettu ongelmanratkaisu ja laskeminen (Compton ym. 2012) sekä käyttäytymisen ongelmat (Butterworth & Reigosa 2007, 66) ovat yleisempiä niillä, joilla on matematiikan oppimisvaikeus kuin tavanomaisesti suoriutuvilla. On myös tutkimuksia, joiden mukaan työmuisti tai älykkyydosamäärä ei vaikuta tilastollisesti merkitsevästi matematiikan osaamiseen (Peters ym. 2017).

Matalampi älykkyydosamäärä, tarkkaamattomuus ja heikot kirjoitustaidot olivat yhteydessä dyskalkulian jatkuvuuteen kuuden vuoden seurantatutkimuksessa (Shalev ym. 2005). 40 %:lla niistä, joilla oli diagnosoitu dyskalkulia 11 vuoden iässä, pystyttiin dyskalkulia diagnosoimaan vielä 17 vuoden iässä, kun dyskalkuliadiagnoosin kriteerinä oli sijoittuminen aritmetiikan testissä alimpaan 5 persentiiliin. Lisäksi kaikkien osallistujien osaaminen säilyi heikkona eli osallistujat sijoituivat heikoimpaan kvartiiliin. (Shalev ym. 2005.) Älykkyys on yhteydessä matemaattiseen kokonaissuoriutumiseen (Kyttälä 2010). Matematiikan oppimisvaikeuden ja heikon älykkyydosamäärän välillä on merkitsevä geneettinen yhteys, joka on jopa voimakkaampi kuin matematiikan oppimisvaikeuden ja lukemisen vaikeuden välinen geneettinen yhteys (Haworth ym. 2009).

Lapsilla, joilla on aritmeettinen oppimisvaikeus, on heikkoutta visuaalis-spatiaalisen luonnoslehtiön toiminnassa (Schuchardt, Maehler & Hasselhorn 2008). Matematiikan taitoja mittavissa tehtävissä suoriudutaan paremmin, jos suoriutuminen visuaalis-spatiaalisissa tehtävissä on hyvää (Kyttälä 2008; 2010). Kuitenkin voimakkuus visuaalis-spatiaalisten taitojen ja matematiikan taitojen välisessä yhteydessä vaihtelee riippuen tarkasteltavista matematiikan osataidoista ja visuaalis-spatiaalisen työmuistitehtävän luonteesta (Kyttälä 2010). Matemaattisen heikkouden taustalla voi olla visuaalis-spatiaalisen työmuistin heikkoutta (Kyttälä 2008). Matematiikan oppimisvaikeus -ryhmässä on visuaalis-spatiaalisia vaikeuksia (Tressoldi, Rosati & Lucangeli 2007).

Lukemisen ja matematiikan osaamisen välillä on yhteys (Devine ym. 2013; Peters ym. 2017). Matematiikka ja lukeminen ovat yhteydessä niin, että niillä, joilla on paremmat taidot matematiikassa, on paremmat taidot myös luetun ymmärtämisessä ja dekodauksessa (Holopainen ym. 2017). Mielenkiintoinen tulos on, että matematiikan oppimisvaikeus -ryhmällä äidinkielen arvosanat luokilla 6–9 ovat heikkomat kuin lukivaikeusryhmällä. Ryhmällä, jolla on sekä lukivaikeus että matematiikan oppimisvaikeus, on heikkomat arvosanat kuin matematiikan oppimisvaikeus -ryhmällä. (Holopainen ym. 2017.) Matematiikan oppimisvaikeus näyttäisi siis heikentävän koulusuoriutumista myös äidinkielellä.

Sananlukemistehtävässä tyypillisesti suoriutuneiden ja heikosti suoriutuneiden kehitys on samanlaista. Heikosti suoriutuneiden ryhmän pisteet ovat vain hiukan pienemmät kuin tyypillisesti suoriutuneilla. Matematiikan oppimisvaikeus -ryhmällä on koko ajan heikkomat pisteet kuin muilla ryhmillä, mutta kehitys on suurin piirtein saman suuntaista eli saman verran kehitystä samassa ajassa. Tyypillisesti suoriutuneiden ryhmässä on korkeampi verbaalinen ja ei-verbaalinen älykkyys kuin muissa ryhmissä. Toiset ryhmät eivät eroa tilastollisesti merkittävästi älykkyudessa. (Geary, Hoard, Nugent, & Bailey 2012.)

Verbaaliset taidot ja fonologinen dekodaus ovat yhteydessä symbolisiin numerotaitoihin sekä aritmetiikan perustaitoihin ja aritmeettisiin sanallisiin tehtäviin. Lisäksi aritmetiikan taidot ovat yhteydessä toisiinsa. Aritmeettisiin perustaitoihin on suora yhteys symbolisilla numerotaidoilla ja fonologisella dekodauksella. Epäsuora yhteys aritmeettisiin perustaitoihin on verbaalisilla taidoilla symbolisten numerotaitojen kautta. Aritmeettisiin sanallisiin tehtäviin suora yhteys on fonologisella dekodauksella ja aritmeettisillä perustaidoilla. Aritmeettisiin perustaitoihin taas ovat yhteydessä symboliset numerotaidot, joihin ovat yhteydessä verbaaliset taidot ja fonologinen dekodaus. (Vukovic & Lesaux 2013.)

3.2 Heikko osaaminen matematiikassa

10–15 %:lla lapsista on dyskalkulian esiintyvyyden, eli noin 5–8 %:n, lisäksi selvästi heikkomat matemaattiset taidot kuin ikätovereilla. Vaikeudet ovat dyskalkuliaa lievempiä, mutta vaikeuttavat opiskelua ja arkielämää. Heikon matemaattisen osaamisen taustatekijöinä voi olla kognitiivisia tekijöitä tai motivaatioon tai oppimisympäristöön liittyviä tekijöitä. (Mononen ym. 2017, 49.) Vaikka puutteellinen opetus ei voi olla matematiikan oppimisvaikeuden taustatekijä, se voi hyvinkin olla heikon matemaattisen osaamisen taustalla (Mazzocco 2007, 39).

Murphy ym. (2007) jakoivat tutkittavat kolmeen ryhmään matematiikan testin mukaan: 1) MLD-10 eli alle 10 persentiiliin sijoittuvat, 2) MLD-11–25 eli 11–25 persentiiliin sijoittuvat ja 3) non-MLD eli ryhmä, jolla ei ollut matematiikan oppimisvaikeutta, ja jotka sijoittuvat yli 25 persentiiliin. Tutkimuksessa etsittiin mahdollisia eroja näiden ryhmien välillä matematiikan ja siihen liittyvien taitojen (lukeminen, visuo-spatiaaliset taidot, työmuisti) osaamisessa. Taitoerot matematiikassa säilyivät koko seuranta-ajan päiväkodista 8-vuotiaaksi. Lisäksi kolmannella luokalla MLD-10-ryhmään kuuluneet olivat keskimäärin kahden vuosiluokan verran jäljessä matematiikan taidoissa non-MLD-ryhmään verrattuna. MLD-11–25-ryhmään kuuluvat olivat toisella ja kolmannella luokalla keskimäärin noin yhden vuosiluokan verran jäljessä non-MLD-ryhmään verrattuna. (Murphy ym. 2007.)

Non-MLD-ryhmällä pisteet visuo-spatiaalisten taitojen testissä olivat korkeammat kuin muissa ryhmissä olleiden pisteet toiselle luokalle asti. Kolmannella luokalla non-MLD-ryhmä ei eronnut MLD-11–25-ryhmästä visuo-spatiaalisissa taidoissa. Näillä kummallakin ryhmällä oli korkeammat pisteet visuo-spatiaalisissa taidoissa kolmannella luokalla kuin MLD-10-ryhmällä. Ryhmillä, joilla oli matematiikan oppimisvaikeus eli MLD-10 ja MLD-11–25 -ryhmillä, oli heikommat tulokset lukemisen testeissä kuin ryhmällä, jolla ei ollut matematiikan oppimisvaikeutta. Oletuksena on, että MLD-11–25-ryhmään kuuluvilla lukemisen vaikeudet liittyvät pääasiassa tekniseen lukemiseen, kun taas MLD-10-ryhmään kuuluvilla sekä tekniseen lukemiseen että lukemisen sujuvuuteen (Murphy ym. 2007). MLD-11–25-ryhmän jäsenillä oli heikot matemaattiset taidot, kun taas MLD-10-ryhmän jäsenet voidaan määritellä sellaisiksi, joilla on matematiikan oppimisvaikeus. Näin ollen matematiikan sekä siihen liittyvien muiden taitojen osaaminen vaihtelee riippuen siitä, onko kyseessä matematiikan oppimisvaikeus vai heikko osaaminen matematiikassa.

3.3 Arviointi

Matematiikan oppimisvaikeutta on siis määritelty heikkona osaamisena matematiikkaa arvioivissa testeissä. Heikon matematiikan osaamisen rajana voidaan pitää 25 persentiiliä, joka on laajasti käytetty matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimuksessa. Matematiikan oppimisvaikeuden rajana taas voidaan käyttää 10 persentiiliä, joka on lähellä tutkimuksin todennettua matematiikan oppimisvaikeuksien esiintyvyyttä eli 5–8 %. (Murphy ym. 2007.)

Suomessa on käytössä muutamia testejä ja seuloja matematiikan taitojen arviointiin. Testillä selvitetään jotain ominaisuutta, soveltuvuutta tai kykyä. Testi on mittaustarkkuudeltaan tarkempi kuin seula. Seulan avulla etsitään sellaiset henkilöt, joiden tiettyä piirrettä tulisi arvioida tarkemmin kuin suurinta osaa ikäluokasta. (Mononen ym. 2017, 119, 124.)

Lukimat-oppimisen arvioinnin välineet on suunniteltu käytettäväksi perustaitojen hallinnan arviointiin ja tuen tarpeen arviointiin. Arviointivälineet ovat seuloja ja arviointi toteutetaan ryhmässä. Arviointivälineitä on esikouluun sekä peruskoulun ensimmäiselle ja toiselle luokalle. Kullekin vuodelle on kolme arviointilomaketta eri ajankohtiin, eli syksylle, talvelle ja keväälle. Arviointiväline sisältää tehtäviä matematiikan neljän osataidon alueelta: lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot ja aritmeettiset taidot. Lisäksi ensimmäisen ja toisen luokan lomakkeessa on myös osataitoja yhdistäviä tehtäviä, kuten rahojen laskemisen tehtäviä. Arviointivälineisiin kuuluu laaja viiteaineisto, johon oppilaiden pisteitä verrataan. Lukimat-sivustolla on myös lomakkeita yksilölliseen taitojen arviointiin ja oppimisen seurantaan. (Lukimat-verkkopalvelu.)

Kymppi-kartoitus 1 on tarkoitettu 2.–3.-luokkalaisten arviointiin ja se sisältää keskeisten matematiikan sisältöjen tehtäviä. Puutteet näiden taitojen hallinnassa vaikeuttavat matematiikan oppimista. Kymppi-kartoitus 2 on tarkoitettu 4.–7.-luokkalaisten arviointiin. Sisällöt tulisi hallita 5. luokan kevääseen mennessä, koska ne ovat hyvin keskeisiä matematiikan oppimiselle. Tehtävät kartoittavat kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Kartoituksen jälkeen lasta pyydetään kertomaan suullisesti niistä kohdista, joissa oli virheitä. Näin saadaan tietoa lapsen ajattelusta matemaattisten tehtävien ratkaisussa. Materiaali sisältää myös harjoitusmateriaalia kartoituksen jälkeen käytettäväksi. Lisäksi materiaalissa on junauskokeet laskestrategioiden sekä yhteen- ja vähennyslaskutaidon määrittämiseen sekä lukualueella 0–20 että lukualueella 0–200. (Ikäheimo 2015, 7–8, 49, 55.) KTLT on normiperustainen seula, joka on tarkoitettu 7.–9.-luokkalaisten arviointiin. Arviointi voidaan toteuttaa ryhmä- tai yksilötilanteissa. Kuudesluokkalainen osaa keskimäärin puolet tehtävistä ja osaamisen vaihtelu jakaantuu tasaisesti keskiarvon molemmille puolille. (Räsänen & Leino 2005, 7, 12, 15–16.)

Lukukäsitetesti mittaa lukukäsitteen hallinnan tasoa 4–8-vuotiailla lapsilla. Tarkoitus on löytää lapset, joiden lukukäsite on heikko. Lukukäsitetesti on normitettu yksilötesti. (van Luit, Van de Rijt & Aunio 2006, 8–11.) Diagnostiset testit 3: Motivaatio, metakognitio ja matematiikka on tarkoitettu koulutulokkaiden ja ensimmäisen luokan oppilaiden arviointiin. Matemaattisen ajat-

telun osiossa on matemaattisloogisia tehtäviä, lukujonotaidon tehtäviä sekä aritmeettisia tehtäviä. Testi voidaan suorittaa yksilö- tai ryhmätilanteessa. (Salonen ym. 1994.) BANUCA on 7–9-vuotiaiden arviointiin tarkoitettu normitettu testi psykologien ja erityisopettajien käyttöön. BANUCA arvioi lukukäsitettä ja peruslaskutaitoja. Arviointi voidaan suorittaa ryhmässä. (Räsänen 2005, 6–7.) MATTE on tarkoitettu erityisesti 3.–5.-luokkalaisten taitojen arviointiin. Se sisältää laskutaidon ja sanallisten tehtävien ratkaisutaidon arviointia sekä matematiikka-asenteiden arvioinnin mahdollisuuden. Lisäksi sillä voidaan selvittää taitojen kehittymistä. Arvioinnin voi toteuttaa opettaja, erityisopettaja tai psykologi. Arviointi voidaan toteuttaa luokkatilanteessa, osa pienryhmä- tai yksilötilanteessa. Vertailuaineiston käyttö on mahdollista. (Kajamies, Vauras, Kinnunen & Iiskala 2003, 1–8, 45–46.) RMAT on normitettu testi psykologien ja erityisopettajien käyttöön. Testi on tarkoitettu 9–12-vuotiaiden laskutaidon arviointiin ja se voidaan suorittaa yksilö- tai ryhmätilanteessa. (Räsänen 2004, 12–19.)

Uuden perusopetuksen opetussuunnitelman mukaiset tavoitteet eivät näissä testeissä ja seuloissa välttämättä tule esille, sillä nämä arviointivälineet ovat jo melko vanhoja. Opettajan harvintaa tarvitaan arvioitaessa testien ja seulojen käytettävyyttä kullakin luokka-asteella.

Arviointi on monipuolista ja se perustuu opetussuunnitelmassa oleviin tavoitteisiin. Arvioinnin tehtävänä on tukea oppimista. Tavoitteista ja arviointikäytännöistä keskustellaan sekä vanhempien että oppilaiden kanssa. Arvioinnin avulla pyritään tekemään oppilaille näkyväksi ne asiat, jotka tulisi oppia ja ne, jotka ovat jo hallussa sekä se, miten omaa oppimista voisi edistää. (Opetushallitus 2014, 47–51.) Arviointi voi sisältää esimerkiksi havainnointia, kotitehtävien tarkistamista sekä oppilaiden itsearviointia (Suurtamm, Koch, & Arden 2010). Opettajan suorittama systemaattinen havainnointi opiskelutilanteissa antaa tietoa muun muassa lapsen osaamisesta ja siitä, millainen oppimisympäristö tukee lapsen oppimista (Mononen ym. 2017, 131).

3.4 Päällekkäistyminen

Matematiikan oppimisvaikeus voi päällekkäistyä useiden muiden oppimisvaikeuksien kanssa. Tällaisia vaikeuksia, jotka voivat päällekkäistyä matematiikan oppimisvaikeuden kanssa ovat esimerkiksi lukemisen vaikeudet (Taipale 2009), ADHD (Monuteaux, Faraone, Herzig, Navsaria & Biederman 2005), motoriset vaikeudet (Pieters, Desoete, Van Waelvelde, Vanderswalmen & Roeyers 2012) ja fonologiset vaikeudet (Jordan, Wylie & Mulhern 2010). Tässä kuitenkin tarkastellaan hyvin yleisiä matematiikan oppimisvaikeuden kanssa päällekkäistyviä oppimisvaikeuksia.

Lukivaikeus

Suomalaisilla nuorilla lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksien sekä matematiikan oppimisvaikeuksien päällekkäistymisen tutkimuksessa huomattiin yhteys matematiikan osataitojen ja luku- ja kirjoitustaidon välillä. Tyttöillä tämä yhteys oli voimakkaimmillaan algebran ja aritmetiikan sekä luetun ymmärtämisen välillä. Pojilla taas voimakkain yhteys oli kaikkien matematiikan osataitojen ja luetun ymmärtämisen välillä. (Taipale 2009, 119.)

Niistä, joilla on matalamman tason tehtävissä näkyvä oppimisvaikeus (sanojen lukeminen ja laskeminen), on molemmissa taidoissa vaikeus 18,6 %:lla. (Compton ym. 2012). Matematiikan osaaminen on heikompaa ryhmässä, jossa on sekä matematiikan oppimisvaikeus että lukivaikeus (Cirino, Fuchs, Elias, Powell & Schumacher 2015).

Ryhmässä, joissa on matematiikan oppimisvaikeus tai matematiikan oppimisvaikeus ja lukivaikeus, on joko tarkkuuden tai nopeuden puutteita useimmissa matemaattisissa taidoissa. Näihin taitoihin kuuluvat muun muassa aritmeettisten merkkien nimeäminen ja käyttö, suuruusluokan määrittely, mentaalinen laskeminen, numeroiden kirjoittaminen, numeeriset faktat ja numeroiden paikan määrittely eli paikka-arvo. Kuitenkin kaikki tutkittavat osoittavat puutteita vain numeeristen faktojen tehtävässä ja numeroiden paikan määrittämisessä. (Tressoldi ym. 2007.)

ADHD

Niistä nuorista, joilla on ADHD eli aktiivisuuden ja tarkkaavaisuuden häiriö, 11 %:lla on myös dyskalkulia (Monuteaux ym. 2005). Niistä, joilla on ADHD, 18,1 %:lla on myös matematiikan oppimisvaikeus. Sukupuolten välillä ei ole eroa matematiikan oppimisvaikeuden ja ADHD:n päällekkäistymisessä. (Capano, Minden, Chen, Schachar & Ickowicz 2008.) Monuteauxin ym. (2005) tutkimuksessa verrattiin nuorten, joilla on ADHD, dyskalkulia tai sekä ADHD että dyskalkulia, sukulaisia kontrolliryhmän, jolla ei ole ADHD:ta tai dyskalkuliaa, sukulaisiin. Tutkimuksessa huomattiin, että ADHD on yleisempää sekä niiden nuorten, joilla on ADHD että niiden, joilla on ADHD ja dyskalkulia, sukulaisilla kuin kontrolliryhmän sukulaisilla tai niiden nuorten, joilla on dyskalkulia, sukulaisilla. Myös dyskalkulia on yleisempää sellaisten nuorten, joilla on dyskalkulia tai ADHD ja dyskalkulia, sukulaisilla kuin kontrolliryhmän tai niiden, joilla on ADHD, sukulaisilla. Tutkimuksen tuloksena on, että ADHD ja dyskalkulia ovat itsenäisesti periytyviä. (Monuteaux ym. 2005.) Matematiikan oppimisvaikeus on siis yleisempää sellaisilla henkilöillä, joilla on ADHD, kuin väestössä keskimäärin.

3.5 Matematiikka-ahdistus

Matematiikka-ahdistus on matematiikkaan liittyvää ahdistuneisuutta. Se voi liittyä epäonnistumiseen tai matematiikkaa vaativiin tilanteisiin. Heikot aritmeettiset perustaidot liittyvät ahdistukseen, jota aiheuttavat matematiikkaa vaativat tilanteet. Matematiikka-ahdistusta ilmenee jo toisella luokalla ja se on yleisempää tytöillä kuin pojilla. (Sorvo ym. 2017.) On myös tutkimus, jossa matematiikka-ahdistuksessa ei ilmennyt sukupuolieroja (Hunt, Clark-Carter & Sheffield 2015). Sukupuolieroja matematiikka-ahdistuksessa voidaan osittain selittää sukupuolieroilla spatiaalisen prosessoinnin taidoissa (Maloney, Waechter, Risko & Fugelsang 2012). Matematiikka-ahdistusta, joka liittyy matemaattisten tehtävien tekemiseen, esiintyy noin 10 %:lla lapsista (Sorvo ym. 2017).

Matematiikka-ahdistus on yhteydessä negatiivisiin asenteisiin matematiikkaa kohtaan (Akin & Kurbanoglu 2011). Matematiikka-ahdistus on negatiivisesti yhteydessä matematiikan testissä suoriutumiseen (Andrews & Brown 2015). Matematiikka-ahdistus on myös positiivisesti yhteydessä vastausaikaan (Hunt ym. 2015). Matematiikka-ahdistukseen on yhteydessä luokan ilmapiiri ja opettajan empaattisuus. Myös se, että opettaja pitää itse matematiikasta on tärkeää. (Lindgren 2004, 389.) Matematiikka-ahdistus on suurempaa arviointitilanteissa kuin oppimistilanteissa aikuisopiskelijoilla (Andrews & Brown 2015).

Vanhempien matematiikka-ahdistus on negatiivisesti yhteydessä lasten matematiikan taitoihin, kun vanhemmat auttavat lapsiaan säännöllisesti matematiikan kotitehtävissä. Lisäksi vanhempien matematiikka-ahdistus on yhteydessä lasten matematiikan osaamisen kautta lasten matematiikka-ahdistukseen, kun vanhemmat auttavat lapsiaan säännöllisesti matematiikan kotitehtävissä. (Maloney, Ramirez, Gunderson, Levine & Beilock 2015.) Vanhempien matematiikka-ahdistus näyttäisi siis välittyvän lapsille yhteisten matematiikkaan liittyvien tilanteiden kautta.

4 Tukikeinoja ja interventioita

Tässä luvussa käsitellään Suomessa käytössä olevia tukimuotoja sekä tehokkaita opetusmenetelmiä, jotka ovat näiden tukimuotojen taustalla. Suomessa käytettäviä tukimuotoja ovat muun muassa tietokoneperustaiset harjoitusohjelmat ja erilaiset interventiot. Interventioista tarkastellaan sekä alle kouluikäisille että kouluikäisille suunnattuja interventioita. Erilaisia tehokkaita opetusmenetelmiä voidaan hyvin käyttää koko luokalle. Osa interventioista on kuitenkin pienryhmälle tarkoitettuja.

Tuki- ja erityisopetuksen määrissä huolestuttavaa on sellaisten heikosti suoriutuvien määrä, jotka ovat saaneet vain vähän tai eivät ollenkaan tuki- tai erityisopetusta. Niistä, joilla arvosana on 5 tai 6, hyvin vähän tukea on saanut 40,8 %. Niistä, jotka opettajan arvion mukaan tarvitsevat paljon tukea, on vähän tuki- tai erityisopetusta saanut 27,1 %. (Räsänen ym. 2010, 189.) Kun tarkastellaan tukiopetuksen määrää, niin melko tai erittäin paljon tukiopetusta saavista 22 % on heikosti matematiikassa suoriutuvia. Melko tai erittäin paljon erityisopetusta saavista 18 % on heikosti matematiikassa suoriutuvia. Erityisopetusta ei kuitenkaan ole tutkimuksessa määritelty vain matematiikan erityisopetuksiksi. (Räsänen ym. 2010, 190.) Matematiikan tuki- ja erityisopetus kohdistuu siis enemmän tavanomaisesti suoriutuviin kuin niihin, joilla on vaikeuksia matematiikan sisältöjen hallinnassa. Joten matematiikan tukiopetus ei välttämättä kohdennu niille, jotka sitä tarvitsevat.

4.1 Tehokkaita opetusmenetelmiä

Eksplisiitisessä opetuksessa opettaja mallittaa ensin opeteltavaa asiaa yksityiskohtaisesti ja kohta kohdalta edeten. Opettaja kertoo, millaisia strategioita käyttää ongelmanratkaisussa. Tämän jälkeen oppilaat harjoittelevat myös itsenäisesti opeteltua asiaa. Vaikka eksplisiitisessä opetuksessa opettaja on keskeisessä roolissa uusien asioiden opetuksessa, on oppilas kuitenkin aktiivisessa roolissa oman oppimisensa kannalta. Opetuksessa käytettävä omien ajatusten ja ratkaisustrategioiden sanallistaminen on tästä esimerkkinä. (Gersten ym. 2009.) Eksplisiitisessä opetuksessa lapsi saattaa kuitenkin ajatella, että vain opettajan mallittama strategia on oikea, eikä yritä itse löytää uusia tapoja ratkaista ongelma (Bonawitz ym. 2011). Lapset, joilla on matematiikan oppimisvaikeus, hyötyvät eksplisiitisestä, intensiivisestä ja systemaattisesta harjoittelujaksosta (Bryant ym. 2016).

Kumulatiivisessa harjoittelussa aloitetaan kahden taidon opettelulla erikseen, jonka jälkeen harjoitellaan näiden taitojen yhdistämistä. Vähitellen opetellaan uusia taitoja, jotka liitetään aiemmin opittuun ja edetään hierarkkisessa järjestyksessä. (Carnine, Jones & Dixon 1994.) Kumulatiivinen harjoittelu voi auttaa aritmeettisten ongelmanratkaisutehtävien opettelussa (Mayfield & Glenn 2008). Kumulatiivinen harjoittelu on ongelmanratkaisutaitojen opettelussa tehokkaampaa kuin yhden opetellun asian kertaaminen kerrallaan tai heti asian oppimisen jälkeen suoritettu ylimääräinen harjoittelu (Mayfield & Chase 2002).

Matematiikan opetuksen yksilöllistäminen on todettu tehokkaaksi (Chodura, Kuhn & Holling 2015; Poncy, Fontenelle & Skinner 2013). Interventio, jossa kartoitettiin ensin matematiikan taitoja ja sitten harjoiteltiin yksilöllisesti ryhmätilanteessa, oli tehokas kerto- ja jakolaskun opettelussa (Poncy ym. 2013). Sekä opettajalle että oppilaalle itselleen annettu palaute oppilaan taidoista vaikuttaa oppilaan matematiikan osaamiseen (Gersten ym. 2009). Opettajat antoivat enemmän tukea sellaisille oppilaille, joiden taidot olivat heikot kuin oppilaille, joilla oli hyvät taidot. Kuitenkaan lisätuki ei parantanut merkittävästi oppilaiden taitoja. (Kiuru ym. 2015.)

Matematiikan opetuksessa havainnollistamisella pyritään helpottamaan abstraktien matemaattisten käsitteiden ja laskutoimitusten ymmärtämistä (Mononen ym. 2017). Havainnollistamisvälineiden käyttö yhdistettynä muihin opetusmenetelmiin on todettu tehokkaaksi (Coddington, Burns & Lukito 2011). Havainnollistamisvälineiden käytöllä on positiivinen vaikutus matematiikan osaamiseen 6–8-vuotiailla lapsilla (Liggett 2017). Havainnollistamiseen voidaan käyttää esimerkiksi esineitä ja kuvia.

Vertaisoppiminen eli esimerkiksi vertaistuutorointi on havaittu kohtalaisen tehokkaaksi alakoulussa. Tehokkaampaa vertaisoppiminen on niillä, joilla on matematiikan oppimisvaikeuden riski kuin niillä, joilla on todettu matematiikan oppimisvaikeus. (Kunsch, Jitendra & Sood 2007.)

Tietokoneharjoittelu on todettu tehokkaaksi (Chodura ym. 2015; Li & Ma 2010). Toisaalta on myös ristiriitaisia tuloksia tietokoneharjoittelun tehokkuudesta perinteiseen opetukseen verrattuna (Seo & Bryant 2009). Tietokoneharjoittelu on tehokkaampaa erityisopetuksen oppilaille kuin yleisopetuksen oppilaille (Li & Ma 2010). Lyhyet tietokonepohjaiset interventiot ovat tehokkaimpia (Li & Ma 2010).

Tutkimuksessa, jossa opettajia ohjattiin mallittamaan omaa matemaattisten tehtävien ratkaisuprosessiaan oppilaille ja kannustamaan oppilaita vuorovaikutukseen tehtäviä tehtäessä, riskiryhmään kuuluvien lasten suoriutuminen matematiikassa parani enemmän kuin verrokkiryhmän suoriutuminen. Lisäksi riskiryhmään kuuluvien matematiikan minäkäsitys ja sitkeys tehdä matematiikan tehtävää kasvoivat enemmän kuin verrokkiryhmällä. Sormien käyttö apuna yksinkertaisissa yhteenlaskuissa väheni riskiryhmällä tutkimuksen aikana. (Hakkarainen, Haring, Holopainen, Lappalainen & Mäkihonko 2014.)

Interventiossa, jossa tavoitteena oli opettaa lapselle laskustrategioita ja parantaa hänen tietojaan numeroista ja aritmeettisista operaatioista, lapsi oli tarkempi yhteen-, vähennys- ja kertolaskussa intervention jälkeen. Lisäksi muistista palauttaminen oli yleisempää vähennyslaskussa intervention jälkeen. (Koponen, Aro & Ahonen 2009.) Laskemisen interventio oli tehokkaampi niillä lapsilla, joilla oli hyvä työmuisti kuin niillä, joilla oli työmuistissa heikkouksia. Myös kielen ymmärtäminen oli yhteydessä intervention tehokkuuteen. (Powell, Cirino & Malone 2017.)

Matematiikka-ahdistusta voi helpottaa se, että oppilaan uskoa omiin matemaattisiin kykyihinsä lisätään (Andrews & Brown 2015). Matematiikka-ahdistusta vähentää sekä ohjattu mielikuva-harjoittelu että hiljaa paikallaan istuminen (Henslee & Klein 2017). Tuen saaminen matematiikan oppimisvaikeuteen voi lievittää matematiikka-ahdistusta (Mononen ym. 2017).

4.2 Tietokoneperustaisia harjoitusohjelmia

Numerorata on tarkoitettu 5–8-vuotiaille lapsille, joilla on matematiikan oppimisvaikeuksia. Sillä harjoitellaan lukumääräisyyden tajua lukualueella 1–10, lukujonotaitoja, lukumäärien ja numerosymbolien yhteyttä sekä yhteen- ja vähennyslaskutaitoja. Peli mukautuu käyttäjän osaamisen mukaan. (Lukimat-verkkopalvelu.) Numerorata-pelillä harjoittelu parantaa aritmeettisiä taitoja (Salminen, Koponen, Räsänen & Aro 2015).

EkapeliMatikka on suunniteltu esi- ja alkuopetusikäisille lapsille, joilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa. Pelissä harjoitellaan yksi yhteen -vastaavuutta, vertailua, järjestämistä sekä lukusanan, lukumäärän ja numerosymbolin yhteyttä. Näiden lisäksi harjoitellaan myös lukujono- ja yhteenlaskutaitoja. Peliä suositellaan pelattavaksi noin 15 minuutin ajan päivittäin. Vuoden 2010 versio pelistä mukautuu käyttäjän osaamisen perusteella ja sen lukualue on 0–20. (Lukimat-verkkopalvelu.)

Vektor on 6–8-vuotiaille lapsille matematiikan perusteiden ja matematiikassa tarvittavien kognitiivisten taitojen harjoitteluun suunniteltu tabletilla käytettävä opetusohjelma. Ohjelmaa voidaan käyttää myös hieman vanhemmilla oppilailta, joilla on matematiikan oppimisvaikeus. Harjoittelu on intensiivistä ja mukautuvaa. Harjoittelujakso on 8 viikon mittainen ja harjoittelua on 30 minuuttia viitenä päivänä viikossa. Harjoittelun perustana on lukujonon käyttö lukujärjestelmän ja aritmetiikan oppimiseen. (Cognition Matters.)

Tietokoneperustaisissa harjoitusohjelmissa harjoitellaan siis usein matematiikan perustaitoja. Harjoittelu on myös usein pelaajan taitoihin mukautuvaa, jolloin pelaaja harjoittelee itselleen sopivalla vaikeustasolla. Harjoitusohjelmien tarkoituksena on vahvistaa taitoja, jotka ovat tarpeellisia myöhemmin opiskeltavissa matematiikan asioissa. Lisäksi harjoitusohjelmat on usein suunniteltu intensiivisiksi ja niitä tulisi käyttää lähes päivittäin.

4.3 Suomessa käytettäviä harjoitusohjelmia

NalleMatikka on tarkoitettu 3–5-vuotiaiden lasten varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämiseen pienryhmässä. Ohjelman tavoitteena on huomion kiinnittäminen matemaattisiin ilmiöihin. Harjoitustuokio on kerran viikossa. Toimintaa jäsennetään kuvakorteilla ja uusia asioita opetellaan leikkien kautta. Pienryhmässä käsitellyt asiat siirretään koko ryhmän tasolle. (Mattinen, Räsänen, Hannula-Sormunen & Lehtinen 2010, 21–27.) Nallematikka-ohjelman aikana lasten suoriutuminen matematiikan ja työmuistin osalta parani. Kehitys matematiikassa ja työmuistissa oli intervention aikana nopeampaa kuin seurantajaksolla. (Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen 2010.)

Minäkin lasken! -lukukäsitteen hallinnan tukemisen harjoitusohjelma on tarkoitettu 5–6-vuotiaille lapsille. Sopiva ryhmäkoko on 3–5 lasta. Ohjelmassa opeteltujen taitojen oletetaan olevan hallussa koulun alkaessa. Oppilaita ohjataan omien ratkaisumallien kehittämiseen ja oppimiseen vuorovaikutuksen kautta. Opetus lähtee peruslaskutaidoista ja konkreettisen materiaalin avulla laskemisesta siirrytään pikkuhiljaa abstrakteihin laskuihin. Ohjelmassa on teemoja, joiden kautta laskemista harjoitellaan ja laskeminen liitetään arkielämään. Lisäksi ohjelmassa käytetään lukurypäitä eli lukujen ryhmiä. Näitä lukuryhmiä ovat 1–5, 6–10, 1–10 ja 8–15. Matemaattisia esitaitoja harjoitellaan oppituntien aikana. (van Luit, Aunio & Räsänen 2010, 7–22.)

Selkis – yhteenlaskua ymmärtämään -harjoitusohjelmaan ja Selkis – vähennyslaskua ymmärtämään -harjoitusohjelmaan kuuluu kumpaankin 12 opetuskokonaisuutta ja kokonaisuudessaan

yhden ohjelman läpikäymiseen kuluu noin 30–40 opetuskertaa. Opetuksessa edetään lasten taitojen kehittymisen tahdissa. Laskustrategioiden harjoittelu ei rajoitu siihen tilanteeseen, jossa ohjelmaa varsinaisesti käydään läpi. Ohjelmassa liitetään lukujonotaitoja ja luvun määrään liittyviä tietoja yhteenlaskuun ja käytetään ankkurilaskuja, joiden avulla muiden laskujen ratkaisuja voidaan päätellä. Tällaisia ankkurilaskuja ovat kymppiparilaskut eli esimerkiksi $6+4=10$, tuplalaskut eli $8+8=16$ ja 10-laskut eli $10+4$. Perustehtävät ovat lukualueella 1–20, mutta ohjelma sisältää myös analogiatehtäviä, joissa käytetään samoja laskustrategioita, mutta kasvatetaan lukualuetta. Opetuskertaan kuuluu opettajajohtoista työskentelyä sekä pari- ja yksilötyöskentelyä. (Koponen, Mononen, Kumpulainen & Puura 2011, 17–20; Koponen, Mononen & Latva 2013, 19–22.) Selkis – yhteenlaskua ymmärtämään ohjelman periaatteita ovat lapsen taitotason mukainen eteneminen, lapsen oman oivaltamisen ja ymmärtämisen tukeminen, lukumäärien hahmottaminen kokonaisuuksina tai osista muodostuvina kokonaisuuksina, analogiat eli se, että lukualueen suurentaminen ei muuta lukujen yhdistelmien toimivuutta, arvioinnin käyttäminen harjoittelun suunnittelussa sekä se, että yhteenlasku on matematiikan oppimisen keskeinen osa-alue, jonka päälle muita taitoja rakennetaan (Koponen ym. 2011, 22–23). Selkis – vähennyslaskua ymmärtämään harjoitusohjelman periaatteita ovat yhteenlaskutaidon hallinta, lapsen taitotason mukainen eteneminen, lapsen oman oivaltamisen ja ymmärtämisen tukeminen, suuruuseron hyödyntäminen laskemisessa, analogiat, harjoittelun systemaattisuus ja intensiivisyys, arvioinnin käyttäminen harjoittelun suunnittelussa sekä se, että yhteen- ja vähennyslaskutaito ovat keskeisiä matematiikan oppimisessa (Koponen ym. 2013, 24–25).

Matematiikkaterapiassa kartoitetaan lapsen osaamista ja opetus toteutetaan yksilöllisesti. Tarkoituksena on käydä läpi sellaiset oppisisällöt, joissa lapsella on puutteita. Lapsen taidot määrittävät etenemistahdin eli seuraavaan sisältöön siirrytään vasta sitten, kun edellinen on hallinnassa. Tavoitteena on auttaa lasta saavuttamaan matematiikan perusasioissa luokkansa taso. (Dräger 2015, 17–20.)

ThinkMath -materiaalit ovat tutkimusperustaisia pienryhmässä toteutettaviksi tarkoitettuja harjoituspaketteja. Aiheina harjoituspaketeissa on matemaattiset suhdetaidot ja laskeminen lukualueilla 0–10, 0–20 ja 0–1000 sekä yhteen- ja vähennyslasku lukualueilla 0–10 ja 0–20. Harjoituspaketeissa on 11 tai 15 opetustuokiota, joihin kuhunkin kuuluu opettajan johdolla työskentelyä, pareittain tai pienessä ryhmässä pelinomaisesti työskentelyä sekä yksilötyöskentelyä kirjallisesti. Harjoituspaketeissa on tehtäviä, jotka vahvistavat matemaattisia suhdekäsitteitä, lukujonotaitoja ja laskemisen periaatteita. Myös yhteen- ja vähennyslaskun strategioita sekä yhteen- ja vähennyslaskun yhteyttä harjoitellaan. (ThinkMath-verkkosivusto.)

Lähikehityksen vyöhykkeellä tapahtuvaa oppimista on Nallematikassa (Mattinen, Räsänen, Hannula-Sormunen & Lehtinen 2010, 29–31) sekä Minäkin lasken! -ohjelmassa (van Luit ym. 2010, 7–8). Nallematika ja Minäkin lasken! -ohjelma ovat alle kouluikäisten matemaattisten taitojen kehittämiseen tarkoitettuja. Selkis – yhteenlaskua ymmärtämään, Selkis – vähennyslaskua ymmärtämään ja matematiikkaterapia taas ovat kouluikäisille tarkoitettuja. Kouluikäisille tarkoitettujen ohjelmien perusajatuksena on vahvistaa matemaattisia perustaitoja, jotta seuraavaksi opeteltavat asiat olisi mahdollista ymmärtää.

Pohdinta

Tämän tutkielman tarkoituksena oli selvittää, millaista matematiikan oppiminen on, mitä matematiikan oppimisvaikeus on ja miten voidaan tukea sellaista henkilöä, jolla on matematiikan oppimisvaikeus. Lisäksi tutkielmassa käsitellään arviointia, jolla pyritään etsimään sellaiset lapset, joilla on matematiikan oppimisvaikeus. Tukitoimista tutkielmassa esitellään Suomessa käytössä olevia tukitoimia sekä yleisempiä opetusmenetelmiä, jotka tutkitusti auttavat matematiikan oppimisessa niitä, joilla on matematiikan oppimisvaikeus.

Matematiikan osaaminen koostuu osataidoista: lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, laskemisen taidot ja aritmeettiset taidot. Nämä taidot kehittyvät suhteessa toisiinsa ja ennustavat matemaattista osaamista. (Aunio & Räsänen 2016.) Matematiikan oppiminen on kumuloituvaa eli aiempien asioiden osaaminen on ratkaisevassa roolissa uusien asioiden oppimisessa (Räsänen 2012). Koulumatematiikassa tarvitaan vahva pohja esitiedoista ja -taidoista. Yksi tällainen taito on lukumääräisyyden taju. Tärkeä taito matematiikassa on kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon oppiminen, sillä nämä luovat pohjaa laskutaitojen oppimiselle.

Matematiikan kumuloituvuus tarkoittaa, että perustaidot tulisi oppia ennen monimutkaisempien taitojen opettelu. Kuitenkin matematiikan hierarkia riippuu näkökulmasta ja siitä minkä taitojen oppimista tavoitellaan. Von Aster ja Shalev (2007) ovat muodostaneet mallin numerotaitojen kehityksestä. Aunio ja Niemivirta (2010) taas ovat kehittäneet mallin lukujonotaitojen kehittymisestä. Von Asterin ja Shalevin (2007) malli kattaa useampia matematiikan osa-alueita kuin Aunio ja Niemivirran (2010) malli.

Matematiikan oppimisvaikeuden määrittely on vielä kesken, sillä matematiikan oppimisvaikeutta on tutkittu vasta melko vähän (Mazzocco 2007, 29–34; Murphy ym. 2007). Tutkimuksissa on eroja siinä, miten matematiikan oppimisvaikeus määritellään ja millaisia rajakriteereitä heikolle matemaattiselle osaamiselle asetetaan (Murphy ym. 2007). Vaikeudet matematiikassa voidaan jakaa peruslaskutaitoihin liittyviin vaikeuksiin eli dyskalkuliaan ja näitä lievempiin vaikeuksiin eli heikkoon matemaattiseen osaamiseen (Mononen ym. 2017). Dyskalkulian taustalla voi olla useita kognitiivisia tekijöitä. Näitä tekijöitä ovat esimerkiksi visuaalis-spatiaalinen työmuisti ja kielelliset valmiudet. Heikon matemaattisen osaamisen taustalla voi olla myös motivaatioon tai oppimisympäristöön liittyviä tekijöitä.

Matemaattiseen oppimisvaikeuteen liittyy myös muita oppimisvaikeuksia kuten lukivaikeus (Taipale 2009) ja ADHD (Monuteaux, Faraone, Herzig, Navsaria & Biederman 2005). Näiden lisäksi myös esimerkiksi motoriset vaikeudet (Pieters, Desoete, Van Waelvelde, Vanderswalmen & Roeyers 2012) ja fonologiset vaikeudet (Jordan, Wylie & Mulhern 2010) voivat päällekkäistyä matematiikan oppimisvaikeuden kanssa.

Matematiikan oppimisen arviointiin tarkoitettuja menetelmiä on sekä erityisopettajien, luokanopettajien että psykologien käyttöön. On olemassa seuloja, joiden tarkoituksena on etsiä lapset, joilla voi mahdollisesti olla vaikeuksia matematiikassa. Testeillä taas arvioidaan lapsen matemaattista osaamista seulaa tarkemmin. Testit ja seulat saattavat arvioida sellaista osaamista, jota tämänhetkisen perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan kyseisellä luokka-asteella ei ole opetettu, joten tulosten tulkinnassa on käytettävä harkintaa. Matematiikan perustaidot kuitenkin opitaan hyvin varhain, joten niiden arviointi seuloilla ja testeillä ensimmäisellä ja toisella luokalla on hyvin perusteltua.

Oppilaalla on mahdollisuus saada opetusta niistä aiempien vuosiluokkien keskeisistä matematiikan sisällöistä, joita hän ei hallitse riittävästi (Opetushallitus 2014, 130, 237, 376). Lapsella on oikeus saada tukiopetusta ja osa-aikaista erityisopetusta (Perusopetuslaki 642/2010). Onko lapsilla tasavertainen mahdollisuus saada tarvitsemaansa tukea? Kun matematiikassa heikosti suoriutuvista jopa 40 % on saanut hyvin vähän tukea (Räsänen ym. 2010, 189), on syytä olettaa, että kaikki eivät saa tätä tarvitsemaansa tukea. Matematiikkaterapia on esimerkki käytännön keinosta opettaa lapselle tai nuorelle sellaisia matematiikan asioita, joita hän ei vielä ole aiemmillä luokilla oppinut.

Koko luokan matematiikan oppimista voisi tukea eksplisiittisellä opetuksella, jolloin opetelussa edetään kohta kohdalta ja opettaja mallittaa käyttämiään strategioita. Arvioinnin avulla opetusta voidaan yksilöllistää niin, että tukitoimet saadaan kohdennettua niihin taitoihin, joissa oppilailla on puutteita. Tuen suunnittelussa tulisi kiinnittää huomiota niihin jo aiemmillä vuosiluokilla opetettaviin taitoihin, joita lapsi ei vielä hallitse, sillä uusien taitojen oppiminen vaatii aiempien taitojen hallintaa. Niitä oppilaita, joilla on matematiikan oppimisvaikeus, voidaan tukea matematiikan oppimisessa erilaisilla interventioilla tai tietokoneperustaisilla harjoitusohjelmilla. Näitä tietokoneperustaisia harjoitusohjelmia voivat toki käyttää myös ne oppilaat, joilla ei ole matematiikan oppimisvaikeutta. Interventiot eivät kuitenkaan yleensä ole toteutettavissa yleisopetuksen luokassa, vaan ne tulisi toteuttaa pienemmässä ryhmässä. Tietokoneperustaisia harjoitusohjelmia voidaan käyttää myös kotona, joten yhteistyö vanhempien kanssa

on tärkeää. Myös muussa harjoittelussa vanhempien kanssa tehtävä yhteistyö on olennaista, jotta lapsi saa tukea harjoitteluunsa myös kotona. Kuitenkin on huomioitava, että vanhempien mahdollinen matematiikka-ahdistus voi siirtyä lapselle yhteisten matematiikkaan liittyvien tilanteiden kautta.

Matematiikan oppimisvaikeuden tunnistaminen ja vaikeudessa tukeminen on tärkeää, sillä matematiikan oppimisvaikeus vaikeuttaa elämää huomattavasti. Lisäksi matematiikan oppimisvaikeus on yhteydessä alhaiseen koulutukseen ja työttömyyteen (Hakkarainen, Holopainen & Savolainen 2016).

Matematiikan oppimisvaikeutta on tutkittu suhteellisen vähän. Jatkossa olisi mielenkiintoista tutkia kouluissa käytettäviä tukimuotoja, matematiikan oppimisvaikeuden ilmenemistä koulussa sekä tietokonepohjaisen harjoittelun vaikutusta matemaattisiin taitoihin.

Lähteet

- Akin, A. & Kurbanoglu, I. N. 2011. The relationships between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, 53:3, 263–273.
- American Psychiatric Association. 2013. *Diagnostic and statistical manual of mental disorders fifth edition*. Arlington, VA: American Psychiatric Association.
- Andrews, A. & Brown, J. 2015. The effects of math anxiety. *Education*, 135:3, 362–370.
- Aro, M., Aro, T., Koponen, T. & Viholainen, H. 2012. Oppimisvaikeudet. Teoksessa M. Jahnukainen (toim.) Lasten erityishuolto- ja opetus Suomessa. Tampere: Vastapaino, 299–331.
- Aunio, P. & Niemivirta, M. 2010. Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20, 427–435.
- Aunio, P. & Räsänen, P. 2016. Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators, *European Early Childhood Education Research Journal*, 24:5, 684–704.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. 2004. Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96:4, 699-713.
- Berch, D. B. 2005. Making sense of number sense: implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38:4, 333–339.
- Bonawitz, E., Shafto, P., Gweon, H., Goodman, N. D., Spelke, E. & Schultz, L. 2011. The double-edged sword of pedagogy: Instruction limits spontaneous exploration and discovery. *Cognition*, 120:3, 322–330.
- Bryant, B. R., Bryant, D. P., Portfield, J., Dennis, M. S., Falcomata, T., Valentine, C., Brewer, C. & Bell, K. 2016. The effects of a tier 3 intervention on the mathematics performance of second grade students with severe mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 49:2, 176–188.
- Butterworth, B. & Reigosa, V. 2007. Information processing deficits in dyscalculia. Teoksessa D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (toim.) *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore, Md: Paul H. Brookes Pub. Co, 65–81.

- Capano, L. B., Minden, D., Chen, S. X., Schachar, R. J. & Ickowicz, A. 2008. Mathematical learning disorder in school-age children with attention-deficit hyperactivity disorder. *Canadian Journal of Psychiatry*, 53:6, 392–399.
- Carnine, D., Jones, E. D. & Dixon, R. 1994. Mathematics: Educational tools for diverse learners. *School Psychology Review*, 23:3, 406–427.
- Chodura, S., Kuhn, J., & Holling, H. 2015. Interventions for Children With Mathematical Difficulties. *Zeitschrift Für Psychologie*, 223:2, 129–144.
- Cirino, P. T., Fuchs, L. S., Elias, J. T., Powell, S. R. & Schumacher, R. F. 2015. Cognitive and mathematical profiles for different forms of learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 2015, 48:2, 156–175.
- Codding, R. S., Burns, M. K. & Lukito, G. 2011. Meta-Analysis of Mathematic Basic-Fact Fluency Interventions: A Component Analysis. *Learning Disabilities Research & Practice*, 26:1, 36–47.
- Cognition Matters. <http://cognitionmatters.org/fi/> (Viitattu 28.4.2018).
- Compton, D. L., Fuchs, L. S., Fuchs, D., Lambert, W. & Hamlett, C. 2012. The Cognitive and Academic Profiles of Reading and Mathematics Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 45:1 79–95.
- Devine, A., Soltész, F., Nobes, A., Goswami, U. & Szűcs, D. 2013. Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction*, 27, 31–39.
- Dräger, M. 2015. *Matikkaluotsi: Matematiikkavaikkeuden tunnistaminen ja kuntouttava opetus*. Helsinki: ELLI Early Learning.
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. 2005. Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. Teoksessa J. I. D. Campbell (toim.), *Handbook of mathematical cognition*. New York, NY: Psychology Press, 253–267.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. 2012. Mathematical Cognition Deficits in Children With Learning Disabilities and Persistent Low Achievement: A Five-Year Prospective Study. *Journal of Educational Psychology*, 104:1, 206–223.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. 2009. Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79:3, 1202–1242.
- Hakkarainen, A., Haring, M., Holopainen, L., Lappalainen, K. & Mäkihönko, M. 2014. Matematiikan ajattelun mallintaminen ja laskustrategioiden opettaminen: Yleisen tuen interventio ensimmäisen luokan oppilaille. *NMI-bulletin*, 24:1, 9–24.

- Hakkarainen, A. M., Holopainen, L. K. & Savolainen, H. K. 2016. The impact of learning difficulties and socioemotional and behavioural problems on transition to postsecondary education or work life in Finland: a five-year follow-up study. *European Journal of Special Needs Education*, 31:2, 171–186.
- Haworth, C. M. A., Kovas, Y., Harlaar, N., Hayiou-Thomas, M. E., Petrill, S. A., Dale, P. S. & Plomin, R. 2009. Generalist genes and learning disabilities: a multivariate genetic analysis of low performance in reading, mathematics, language and general cognitive ability in a sample of 8000 12-year-old twins. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 50:10, 1318–1325.
- Henslee, A. M. & Klein, B. A. 2017. Using Brief Guided Imagery to Reduce Math Anxiety and Improve Math Performance: A Pilot Study. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, 18:4, 32–36.
- Hirvonen, K. 2012. *Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*. Koulutuksen seurantaraportit 2012:4. Opetushallitus.
- Holopainen, L., Taipale, A. & Savolainen, H. 2017. Implications of Overlapping Difficulties in Mathematics and Reading on Self-Concept and Academic Achievement, *International Journal of Disability, Development and Education*, 64:1, 88–103.
- Hunt, T. E., Clark-Carter, D. & Sheffield, D. 2015. Exploring the Relationship Between Mathematics Anxiety and Performance: An Eye-Tracking Approach. *Applied Cognitive Psychology*, 29:2, 226–231.
- Ikäheimo, H. 2015. *KYMPPI-Kartoitus: 10-järjestelmän hallinnan kartoitus (2. p.)*. Helsinki: ELLI Early Learning.
- Jordan, N. C., Glutting, J. & Ramineni, C. 2010. The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20, 82–88.
- Jordan, J.-A., Wylie, J. & Mulhern, G. 2010. Phonological awareness and mathematical difficulty: a longitudinal perspective. *British Journal of Developmental Psychology*, 28, 89–107.
- Kajamies, A., Vauras, M., Kinnunen, R. & Iiskala, T. 2003. *MATTE: Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaidon ja laskutaidon arviointi*. Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.
- Kiuru, N., Nurmi, J.-E., Leskinen, E., Torppa, M., Poikkeus, A.-M., Lerkkanen, M.-K., & Niemi, P. 2015. Elementary school teachers adapt their instructional support according to students' academic skills. *International Journal Of Behavioral Development*, 39:5, 391–401.

- Koponen, T., Aro, T. & Ahonen, T. 2009. Conceptual knowledge-based strategy training in single-digit calculation: a single case intervention study in a child with specific language impairment, *European Journal of Special Needs Education*, 24:3, 259–275,
- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. 2007. Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97, 220–241.
- Koponen, T., Mononen, R., Kumpulainen, T. & Puura, P. 2011. *Selkis! - Yhteenlaskua ymmärtämään*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti: Haukkarannan koulu.
- Koponen, T., Mononen, R. & Latva, T. 2013. *Selkis! - Vähennyslaskua ymmärtämään*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti: Oppimis- ja ohjauskeskus Onerva.
- Kunsch, C. A., Jitendra, A. K., & Sood, S. 2007. The Effects of Peer-Mediated Instruction in Mathematics for Students with Learning Problems: A Research Synthesis. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22:1, 1–12.
- Kupari, P. & Nissinen, K. 2015. Matematiikan osaamisen taustatekijät. Teoksessa J. Välijärvi & P. Kupari (toim.) *Millä eväillä uuteen nousuun? PISA2012 tutkimustuloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6. Helsinki: Opetus- ja kulttuuriministeriö, 10–27.
- Kyttälä, M. 2008. Visuaalis-spatiaalinen työmuisti: Rajallisen kapasiteetin työtila matematiikan oppimisen ja matematiikassa suoriutumisen tukena. *Psykologia: tiedepoliittinen aikakauslehti*, 43:5, 342-350.
- Kyttälä, M. 2010. Matemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten ja nuorten visuaalis-spatiaaliset työmuistivalmiudet. *NMI-bulletin*, 20:1, 4–24.
- Li, Q. & Ma, X. 2010. A Meta-analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning. *Educational Psychology Review*, 22:3, 215–243.
- Liggett, R. S. 2017. The impact of use of manipulatives on the math scores of grade 2 students. *Brock Education Journal*, 26:2, 87–101.
- Lindgren, S. 2004. Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti, 381–396.
- Lukimat-verkkopalvelu. www.lukimat.fi. (Viitattu 28.4.2018).
- Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L. & Ansari, D. 2014. Numerical predictors of arithmetic success in grades 1–6, *Developmental Science*, 17:5, 714–726.
- Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C. & Beilock, S. L. 2015. Intergenerational Effects of Parents' Math Anxiety on Children's Math Achievement and Anxiety. *Psychological Science* 26:9 1480–1488.

- Maloney, E. A., Waechter, S., Risko, E. F. & Fugelsang, J. A. 2012. Reducing the sex difference in math anxiety: The role of spatial processing ability. *Learning and Individual Differences*, 22:3, 380–384.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. 2010. Nallematikka: 4–5-vuotiaiden lasten oppimisvalmiuksien kehittäminen - pilottitutkimuksen tulokset. *NMI-bulletin*, 20:2, 41–59.
- Mattinen, A. Räsänen, P., Hannula-Sormunen, M. M. & Lehtinen, E. 2010. *Nallematikka: Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma*. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti.
- Mayfield, K. H. & Chase, P. N. 2002. The effects of cumulative practice on mathematics problem solving. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 35:2, 105–123.
- Mayfield, K. H. & Glenn, I. M. 2008. An Evaluation of Interventions to Facilitate Algebra Problem Solving. *Journal of Behavioral Education*, 17:3, 278–302.
- Mazzocco, M. M. M. 2007. Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. Teoksessa D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (toim.) *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore, Md: Paul H. Brookes Pub. Co, 29–47.
- Micallef, S. & Prior, M. 2004. Arithmetic learning difficulties in children. *Educational Psychology*, 24:2, 175–200.
- Mononen, R. & Aunio, P. 2014. A Mathematics intervention for lowperforming Finnish second graders: findings from a pilot study, *European Journal of Special Needs Education*, 29:4, 457–473.
- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. 2013. Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. *NMI Bulletin*, 23:4, 12–25.
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. 2017. *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Monuteaux, M. C., Faraone, S. V., Herzig, K., Navsaria, N. & Biederman, J. 2005. ADHD and dyscalculia: evidence for independent familial transmission. *Journal of Learning Disabilities*, 38:1, 86–93.
- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B. & Early, M. C. 2007. Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. *Journal of Learning Disabilities*, 40:5, 458–476.
- OECD. 2016. *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*, PISA, OECD Publishing, Paris.

- Opetushallitus. 2014. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014:96.
- Opetushallitus. 2016. *Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet 2016*. Määräykset ja ohjeet 2016:17.
- Perusopetuslaki. 642/2010. *Laki perusopetuslain muuttamisesta*. <http://finlex.fi/fi/laki/alkup/2010/20100642> (Viitattu 3.5.2018).
- Peters, S., van der Meulen, M. Zanolie, K. & Crone, E. A. 2017. Predicting Reading and Mathematics From Neural Activity for Feedback Learning. *Developmental Psychology*, 53:1, 149–159.
- Pieters, S., Desoete, A., Van Waelvelde, H., Vanderswalmen, R. & Roeyers, H. 2012. Mathematical problems in children with developmental coordination disorder. *Research in Developmental Disabilities*, 33, 1128–1135.
- Poncy, B. C., Fontenelle, S. F., & Skinner, C. H. 2013. Using detect, practice, and repair (DPR) to differentiate and individualize math fact instruction in a class-wide setting. *Journal of Behavioral Education*, 22:3, 211–228.
- Powell, S. R., Cirino, P. T., & Malone, A. S. 2017. Child-level predictors of responsiveness to evidence-based mathematics intervention. *Exceptional Children*, 83:4, 359–377.
- Räsänen, P. 2004. *RMAT-laskutaidon testi 9-12-vuotiaille: Käsikirja*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.
- Räsänen, P. 2005. *BANUCA: Basic numerical and calculation abilities = Lukukäsitteen ja laskutaidon hallinnan testi*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Räsänen, P. 2012. Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. *Duodecim: lääketieteellinen aikakauskirja*, 128:11, 1168–1177.
- Räsänen, P. & Leino, L. 2005. *KTLT: Laskutaidon testi yksilö- ja ryhmämuotoista arviointia varten: opas*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. 2010. Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa: Niemi E. K. & Metsämuuronen J. (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Helsinki: Opetushallitus, 165–203.
- Salminen, A. 2011. *Mitä on kirjallisuuskatsaus: Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppeihin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin*. Vaasan yliopiston julkaisuja. Saatavissa http://www.uva.fi/materiaali/pdf/isbn_978-952-476-349-3.pdf (Viitattu 4.4.2018)

- Salminen, J., Koponen, T., Räsänen, P. & Aro, M. 2015. Preventive Support for Kindergarteners Most At-Risk for Mathematics Difficulties: Computer-Assisted Intervention. *Mathematical Thinking and Learning*, 17:4, 273–295.
- Salonen, P., Lepola, J., Vauras, M., Rauhanummi, T., Lehtinen, E. & Kinnunen, R. 1994. *Diagnostiset testit: 3, Motivaatio, metakognitio ja matematiikka*. Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.
- Sarsani, M. R. & Maddini, R. 2009. Learning Difficulties in Mathematics (LDM) of Secondary School Students with Respect to Their Personal and Background Variables. *Journal on Educational Psychology*, 2:4, 85–97.
- Schuchardt, K., Maehler, C. & Hasselhorn, M. 2008. Working memory deficits in children with specific learning disorders. *Journal of Learning Disabilities*, 41:6, 514–523.
- Seo, Y., & Bryant, D. P. 2009. Analysis of studies of the effects of computer-assisted instruction on the mathematics performance of students with learning disabilities. *Computers & Education*, 53:3, 913–928.
- Shalev, R. S., Manor, O. & Gross-Tsur, V. 2005. Developmental dyscalculia: a prospective six-year follow-up. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 47:2, 121–125.
- Sorvo, R., Koponen, T., Viholainen, H., Aro, T., Räikkönen, E., Peura, P., Dowker, A. & Aro, M. 2017. Math anxiety and its relationship with basic arithmetic skills among primary school children. *British Journal of Educational Psychology*, 87, 309–327.
- Suurtamm, C., Koch, M., & Arden, A. 2010. Teachers' assessment practices in mathematics: Classrooms in the context of reform. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 17:4, 399–417.
- Taipale, A. 2009. *Matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksien päällekkäistyminen nuoruusiässä*. Joensuu: Joensuun yliopisto.
- ThinkMath-verkkosivusto. <https://thinkmathglobal.com/suomi/materiaalit/harjoituspakitit/> (Viitattu 28.4.2018).
- Tressoldi, P. E., Rosati, M. & Lucangeli, D. 2007. Patterns of developmental dyscalculia with or without dyslexia. *Neurocase*, 13:4, 217–225.
- Van Luit, J. E. H., Aunio, P. & Räsänen, P. 2010. *Minäkin lasken! - lasten lukukäsitteen harjoitusohjelma: Käsikirja*. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti.
- Van Luit, J. E. H., Van de Rijt, B. A. M. & Aunio, P. 2006. *Lukukäsitetestit: Käsikirja*. Helsinki: Psykologien kustannus.
- Von Aster, M. G. & Shalev, R. S. 2007. Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*. 49:11, 868–873.

- Vukovic, R. K. & Lesaux, N. K. 2013. The relationship between linguistic skills and arithmetic knowledge. *Learning and Individual Differences*, 23, 87–91.
- World Health Organization (WHO). 2016. International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems 10th Revision (ICD-10).