Intuitio matematiikan tehtävissä

Pro gradu

Helmi Glumoff

2434483

Matemaattisten tieteiden koulutusohjelma

Oulun yliopisto

Syksy 2018

Sisällys

Johdanto

Tässä työssä käsitellään intuition vaikutusta matematiikan tehtävien ratkaisemisessa. Lähdemateriaali koostuu pääosin Springer Link -tietokannan artikkeleista, sekä niiden lähdeartikkeleista. Hakusanoina tietokannassa käytettiin termejä ”mathematics”, ”intuition”, ”intuitive rules” ja ”problem solving”.

Eri kulttuureissa on kautta aikain suhtauduttu eri tavoin intuitiiviseen tietoon. Länsimaisissa kulttuureissa formaalia sääntöihin pohjautuvaa ajattelutapaa on pidetty suuremmassa arvossa, kun taas Itä-Aasiassa kokemuspohjaista intuitiivista tapaa on pidetty vallitsevana (Norenzayan, Smith, Kim & Nisbett, 2002). Näiden kahden ajattelutavan käytöstä eri kulttuureissa on hyvin vähän tietoa, joten Norenzayan kollegoineen (2002) toteuttivat tutkimuksen, jossa eurooppalais- ja aasialaistaustaisia opiskelijoita pyydettiin luokittelemaan kuvia annettujen kriteerien mukaan kahteen ryhmään. Tehtävät aseteltiin niin, että intuitiivinen visuaalinen havainto ryhmästä, johon kuvan kohde kuuluu, on vastakkainen kriteereihin pohjautuvan luokittelun kanssa. Tutkimuksessa löydettiin trendi, jonka mukaan eurooppalaistaustaiset opiskelijat sivuuttivat herkemmin oman intuitionsa ja pitäytyivät annetuissa säännöissä, kun taas aasialaistaustaiset opiskelijat luottivat herkemmin intuitioon säännöistä huolimatta. Kulttuuristen erojen ajatellaan johtuvan päätöksenteon ja opetuksen eroista eri kulttuureissa. Länsimaissa asioita päättäessä käytetään vastakkainasetteluun pohjautuvaa väittelytyyliä, kun taas Aasiassa pyritään päätöksentekoon yhteisymmäryksessä. Länsimainen opetus ja koulu korostavat kriittistä ajattelua, vastapainona kokemuspohjainen oppiminen, joka on suosittua Aasiassa (Norenzayan ym., 2002).

Monissa tilanteissa intuitio on meille avuksi ja saa meidät uskomaan omaan ratkaisuumme. Intuitiivinen ajattelu formaalin ratkaisun lisänä saa meidät kyseenalaistamaan ja miettimään oman järkeilyn luotettavuutta. Toisissa tilanteissa intuitio taas saattaa ohjata järkeilyn heti alussa väärään suuntaan ja formaalin ratkaisutavan käyttö unohdetaan. Intuition vaikutusta matematiikkaan ei voida kieltää tai sivuuttaa. Siksi onkin tärkeää miettiä, miten voisimme hyödyntää intuitiota ja siitä kerättyä tietoa matematiikan opetuksessa.

Mitä on intuitio?

Intuitiolla voidaan tarkoittaa hyvin monia eri asioita ja eri ihmiset mieltävät intuition eri tavalla. Intuitio voi tarkoittaa muun muassa ajattelun strategiaa, jolla ilmiötä voidaan käsitellä, tiedon lähdettä tai kognition kategoriaa, johon kuuluva tieto ei vaadi perusteluja. Tieteellisiin yhteyksiin liitettynä intuitioon sisältyy usein negatiivinen merkitys. Intuitiivista tietoa pidetään arkijärkenä, joka ei perustu tieteen edellyttämiin faktoihin tai tieteellisiin teorioihin. Intuition ajatellaan usein haittaavan älyllisiä prosesseja ja tiedon muodostumista. Intuitiota pidetään helposti virhekäsityksien lähteenä, minkä vuoksi sen käyttöä ei arvosteta tai hyväksytä. Intuition ajatellaan olevan vain arvaus, jolla ei ole tieteellisessä mielessä arvoa, sillä intuitiivisille käsityksille ei tarjota pitäviä perusteluja (Fischbein, 1987). Fischbeinin (1987) teoksen määritelmää intuitiolle ja listaa intuition ominaisuuksista on käytetty teoriapohjana ja tuloksia selittävänä teoriana lähes jokaisessa tässä tutkimuksessa käsiteltävässä artikkelissa.

Intuitio ei kuitenkaan ole sattumanvaraista arvaamista (Fischbein & Grossman, 1997). Kuten muukin tieto, intuitiivinen tieto rakentuu ihmisen omaksumien pohjatietojen varaan. Fischbeinin ja Grossmanin (1997) mukaan intuitiiviset arvaukset ovat riippuvaisia aiemmista kokemuksista. Mikäli näitä kokemuksia ei ole, on ainoa mahdollisuus arvata sattumavaraisesti. Vaikka intuitiot toimivatkin tiedostamattamme, niiden taustalla on täsmällisiä ajattelumekanismeja, joiden vuoksi intuitio ei aina ole arvotonta tietoa. Tietoisella tasolla intuitio tuottaa pelkän vastauksen, joka on näennäisen spontaani, sillä yksityiskohdat ja prosessi vastauksen taustalla ovat häipyneet. Mielenkiintoinen kysymys siis on, mitä intuition aikana tapahtuu ihmisen mielessä ja miten näitä mekanismeja voidaan tutkia (Fischbein & Grossman, 1997).

Intuitiota on kritisoitu tieteellisessä järkeilyssä ja sitä on jopa ohjeistettu välttämään, jottei intuitio pääsisi johtamaan harhaan (Fischbein, 1999). Fischbein ja Grossman (1997) esittävät kuitenkin ajatuksen, jonka mukaan puhtaita intuitioita ei ole olemassa, vaan ne ovat aina sisäisesti muotoutuneet jonkin älyllisen mallin kautta. Heidän mukaansa intuitio olisi siis epäsuorasti toimivan älyllisen mallin tuote, ei niinkään mahdollinen älyllisen mallin kanssa ristiriidassa oleva virhelähde. Toki on totta, että moni intuitio johtaa harhaan ja tuottaa virheellisiä päätelmiä. Voidaan kuitenkin myös todeta, että nämäkin intuitiot pohjautuvat oppimiimme formaaleihin malleihin ja rakenteisiin. Virheellisyys johtuu siitä, että intuitiivisesti sovellamme opittuja periaatteita sielläkin, missä ne eivät päde.

Fischbeinin (1987) mukaan intuitiivisen tiedon ominaisuuksia ovat itsestään selvyys, sisäinen varmuus, periksiantamattomuus, pakottavuus, teoriastatus, laajennettavuus, globaalius ja epäsuoruus. Itsestään selvyys ja sisäinen varmuus viittaavat intuition piirteisiin, joiden mukaan intuition esittäjä ei koe tarvetta perustella tai todistaa intuition väitettä. Intuitiivinen tieto esiintyy meille totena, joka perustelee itse itsensä, eikä mitään ulkoista varmistusta kaivata, eikä sen vuoksi esitetä. Kun intuitiivinen käsitys on rakentunut, se on hyvin voimakas ja muuttumaton. Periksiantamattomuus viittaa tähän ominaisuuteen. Mikäli intuitiivinen käsitys on virheellinen, tämä piirre osoittautuu haastavaksi, sillä opetuksella ja formaaleilla ohjeilla on hyvin vähän vaikutusta taustalla vaikuttavaan intuitiiviseen käsitykseen ja väärä intuitiivinen käsitys saattaa pysyä todellisen käsityksen rinnalla aina, vaikka tietoisesti ymmärtäisimme intuition vääräksi. Pakottavuus on intuition ominaisuus, joka saa meidät torjumaan mahdollisuuden, että intuition kanssa ristiriitainen väite olisi totta. Intuitio on mielessä vahvistanut asemansa totuutena, jolloin loogisten perustelujenkaan jälkeen vastakkaisia väitteitä ei kyetä hyväksymään tosiksi.

Intuitiivisten käsitysten teoriastatus tarkoittaa, että intuitio antaa meille määritelmiä asioille sen sijaan, että se esimerkiksi auttaisi tekemään havaintoja tai suorittamaan jonkin toiminnon. Intuition peruspiirteisiin kuuluu myös laajennettavuus. Tämä tarkoittaa sitä, että johonkin pienempään kokonaisuuteen liittyviä ominaisuuksia voidaan laajentaa liittyviksi myös suurempaan määrään asioita ilman, että tunnetaan tarvetta perusteluille. Globaalius viittaa intuition yleiskatsaukseen perustuvaan piirteeseen. Intuitio pohjautuu usein nopeaan silmäykseen kokonaisuudesta, ei yksityiskohtiin tai ominaisuuksien tutkimiseen. Epäsuoruus taas kertoo, että intuitio, sellaisena kuin se esiintyy, on usein vain pintarakenne taustalla tapahtuville prosesseille. Henkilö itse ei ajattele laajentavansa käsitteitä tai esittävänsä tosina teorioita, jotka tarvitsisivat perusteluja. Intuitiivinen malli tai ajatus, joka hänen mieleensä on piirtynyt, tekee sen henkilön huomaamatta.

Tässä tutkielmassa intuitiolla tarkoitetaan intuitiivista tietoa kognition kategoriana sekä tämän tiedon soveltamista tehtävän ratkaisemisessa. Intuitio tuottaa välitöntä tietoa, mitä ei henkilön itsensä mielestä tarvitse perustella.

Fischbein (1975) jakaa intuition kahteen luokkaan: primaariseen ja sekundaariseen intuitioon. Primaarinen intuitio muodostuu itsenäisesti ennen, kuin henkilö on saanut asiaan liittyen mitään opetusta tai tietoa. Sekundaarisia intuitioita taas ovat ne, jotka muodostuvat ohjeistuksen ja tiedon saannin jälkeen. Nämä intuitiot ilmaisevat kokemusten mukanaan tuomaa tietoa ja matemaattiset ja tieteelliset intuitiot kuuluvat tähän kategoriaan. Sekundaarinen intuitio mahdollistaa ennakoinnin ja ekstrapoloinnin, minkä vuoksi siihen liittyy suuria määriä älyllistä toimintaa (Fischbein, 1975).

Sekundaarisen intuition Fischbein (1975) jakaa vakuuttavaan ja ennakoivaan intuitioon. Vakuuttava intuitio esiintyy itsestään selvinä väitteinä, jotka pohjautuvat omaksuttuun perustietoon ja henkilökohtaiseen kokemukseen (Fischbein, 1975). Tämä on enemmän käytetty ja tutkittu intuition tyyppi. Ennakoiva intuitio syntyy yleiskatsauksesta ongelman ratkaisuun ja ennakoi tulevaa muodollista ratkaisuprosessia. Ennakoiva intuitio siis kertoo matemaatikolle, että työn alla oleva lause on hyvin todennäköisesti paikkansa pitävä jo ennen, kuin hän on saanut valmiiksi kaikki muodollisen todistamisen vaatimat vaiheet (Fischbein, 1975).

Intuition oikeellisuus riippuu Fiscbeinin (1999) mukaan kontekstista, jossa se esiintyy. Tämä on osa intuition perusluonnetta, sillä usein intuitio on jokin olemassa oleva johonkin asiaan liittyvä ominaisuus, jonka todenmukaisuus riippuu siitä, sovelletaanko ominaisuutta siihen oikeasti liittyvään asiaan vai johonkin muuhun. Koska intuitio ei ole irrallinen ajattelun työkalu, vaan osa suurempaa mielessä rakentunutta mallia, ei intuitiivisia käsityksiä voida muuttaa irrallaan tästä mallista. Jos halutaan muuttaa intuitioita, on muutettava koko käsitystä kyseisestä oppisisällöstä.

Fischbein ja Grossman (1997) halusivat selvittää tutkimuksessaan, ovatko intuitiot todella aina riippuvaisia tietystä asiasisällöstä ja voidaanko intuitiivista tietoa siten pitää osana kyseisen sisällön osaamista. Tutkimuksessa eri ikäisiä opiskelijoita pyydettiin arvioimaan kombinatoriikan tehtävien vastauksen oikea suuruusluokka. Vastauksista huomattiin, että opiskelijat päätyivät käyttämään binäärisiä operaatioita, jolloin laskemisen tarve on minimissään ja siten spontaanin arvion antaminen mahdollista. Testissä saaduissa vastauksissa sekä oikeat, että väärät vastaukset olivat linjassa keskenään eli kaikkiin tehtäviin oli vastattu samojen intuitiivisten oletusten avulla, jolloin intuitiivisia keinoja vastaavat tehtävät menivät oikein ja niiden kanssa ristiriidassa olevat tehtävät väärin. Tästä säännönmukaisuudesta Fischbein ja Grossman (1997) tekivät päätelmän, että arvaukset eivät olleet sattumanvaraisia, vaan perustuivat kombinatoriikan malleihin, joita koehenkilöt sovelsivat intuitiivisesti. Koehenkilöt käyttivät valitsemaansa intuitiivista mallia systemaattisesti kaikkiin tehtäviin. Fischbein ja Grossman (1997) lisäksi nostivat tutkimuksestaan esiin ajatuksen, jonka mukaan formaalista mallista tulee intuitiivinen, kun se riisutaan minimiin. Tällöin tietenkin usein menetetään joitain olennaisia ominaisuuksia, mutta päälinja säilyy.

Intuitiiviset säännöt

Intuitiiviset säännöt ovat päättelymalleja, joita ihmiset soveltavat monenlaisissa aihealueiltaan poikkeavissa tehtävissä. Intuitiivisten sääntöjen teorian mukaan ihmisillä on tapana käyttää tiettyjä kaavoja noudattavaa päättelyä, vaikka heille ei olisi opetettu näitä tapoja. Intuitiivisia sääntöjä sovelletaan tehtäviin, joiden aiheet poikkeavat toisistaan merkittävästi, mutta jotka rakenteellisesti sisältävät tiettyjä samoja ominaisuuksia. Intuitiivisten sääntöjen teoriassa tällaisia sääntöjä ovat ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” ja ”sama A – sama B” (Tirosh & Stavy, 1999a). Näitä sääntöjä käytetään vertailutehtävissä, jossa kahden kuvion eri ominaisuuksia vertaillaan keskenään. Joissain yhteyksissä intuitiivisiin sääntöihin lasketaan kuuluvaksi myös säännöt ”kaikki prosessit loppuvat joskus” ja ”kaiken voi jakaa kahtia” (Tirosh, Stavy & Cohen, 1998), jotka esiintyvät peräkkäisiä jakamisia käsittelevissä tehtävissä.

Intuitio mielletään usein tiettyyn sisältötietoon sidonnaiseksi, minkä vuoksi oppilaiden vastauksia pyritään selittämään tässä kontekstissa (Tirosh & Stavy, 1999a). Oppilaiden intuitiivinen tieto on kuitenkin monissa tapauksissa ristiriidassa hyväksytyn aiheeseen liittyvän tieteellisen teorian kanssa, eikä intuitiivisten sääntöjen mukaisilla päättelytavoilla ole useissa tapauksissa mitään tekemistä opetettujen formaalien sääntöjen kanssa. Intuitiivisten sääntöjen teorian mukaan tietyt ulkoiset piirteet tehtävässä laukaisevat intuitiivisen tiedon käytön, eikä tehtävän käsittelemällä aiheella ole juurikaan merkitystä. Tämän vuoksi Tirosh ja Stavy (1999a) ovat pyrkineet etsimään selityksiä oppilaiden virheellisiin vastauksiin tehtävistä itsestään, sillä intuitiivisten sääntöjen teorian mukaan tehtävässä annetuilla lähtötiedoilla on suuri vaikutus tehtävän ratkaisussa käytettävään päättelyyn ja siten lopputulokseen (Tirosh & Stavy, 1999a).

”Enemmän A:ta – enemmän B:tä” -sääntö esiintyy monenlaisissa vertailutehtävissä. Tyyppiesimerkki tällaisesta on tehtävä, jossa on kaksi kuviota. Toinen on suorakulmio ja toinen monikulmio, joka on muodostettu ottamalla edellisen kaltaisen suorakulmion yhdestä kulmasta pois pieni neliön muotoinen alue. Tällöin visuaalisen havainnon perusteella nähdään helposti, että ensimmäisen kuvion pinta-ala on suurempi, kuin jälkimmäisen kuvion. Pinta-ala on siis kuvioiden ensisijainen ominaisuus A. Ominaisuus B on kuvion piiri, joka on tässä tapauksessa molemmissa kuvioissa yhtä pitkä. Monet kuitenkin väittävät virheellisesti intuitiivisen säännön ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” mukaisesti, että ensimmäisen kuvion piiri pidempi, sillä sen pinta-ala on suurempi (Babai, Levyadun, Stavy & Tirosh, 2006b). ”Enemmän A:ta – enemmän B:tä” säännön käytön herättävillä tehtäville on yhteistä, että tehtävässä esitetyt kaksi kohdetta, jotka poikkeavat jonkin ominaisuuden A suhteen esimerkiksi siten, että $A_1 > A_2$. Tehtävässä pyydetään vertaamaan kohteiden toista ominaisuutta B. Intuitiivisen säännön ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” mukaan tehtävään vastataan usein, että myös $B_1 > B_2$, vaikka näin ei todellisuudessa olisikaan (Tirosh & Stavy, 1999a).

Myös ”sama A – sama B” -sääntö esiintyy tehtävissä, joissa verrataan kahden kohteen ominaisuuksia A ja B. Tyyppiesimerkkinä voidaan pitää tehtävää, jossa esitellään kaksi perhettä. Toisessa on kaksi ja toisessa neljä lasta. Tehtävänä on kertoa, onko todennäköisyys, että kaksilapsisessa perheessä lapsista toinen on tyttö ja toinen poika suurempi/yhtä suuri/pienempi, kuin todennäköisyys sille, että nelilapsisessa perheessä on kaksi tyttöä ja kaksi poikaa. Molempien perheen lapsista osataan helposti laskea ominaisuus A, joka on tässä tehtävässä tyttö- ja poikalapsien suhde. Koska tämä suhde on kummankin perheen kohdalla sama, intuitiivisen säännön ”sama A – sama B” mukaisesti moni väittää, että myös ominaisuudet B eli todennäköisyydet ovat samat (Tirosh & Stavy, 1999b). Siis erona ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” -tehtäviin, kohteilla on nyt jokin sama ominaisuus A eli $A_1 = A_2$. Tällaisissa tehtävissä intuitiivisen säännön ”sama A – sama B” mukaisesti usein vastataan, että myös $B_1 = B_2$ riippumatta siitä, mikä ominaisuuksien A ja B suhde todellisuudessa on (Tirosh & Stavy, 1999a).

Kaksi muuta intuitiivista sääntöä liittyy peräkkäisistä jakamisista koostuviin tehtäviin. Tyyppiesimerkkinä tehtävä, jossa jana jaetaan kahteen yhtä suureen osaan, toinen saaduista janoista jaetaan edelleen kahteen yhtä suureen osaan ja jakamista jatketaan tällä tavoin. Tehtävässä pyydetään kertomaan, tuleeko prosessi päätökseen. Säännön ”kaikki prosessit loppuvat joskus” mukaan vastaus on kyllä, kun taas säännön ”kaiken voi jakaa kahtia” mukaan prosessi jatkuu loputtomasti, eikä sellaista tilannetta voida saavuttaa, jossa jakaminen olisi mahdotonta. (Tirosh, Stavy & Cohen, 1998).

Intuitiiviset säännöt ja niiden virheellinen käyttö on usein liitetty lasten matematiikkaan. Zazkis (1999) on kuitenkin saanut tutkimuksissaan tuloksia, jotka osoittavat, että myös aikuiset soveltavat virheellisesti intuitiivisia sääntöjä. Hän tutki luokanopettajaopiskelijoiden intuitiivisia käsityksiä lukuteoriaan liittyen ja tuloksista kävi ilmi, että useat opiskelijat ajattelivat suurella luvulla olevan enemmän tekijöitä, mikä on linjassa säännön ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” kanssa (Zazkis, 1999). Näitä havaintoja tukee Kospentarisin, Spyroun ja Lappasin (2011) tekemä tutkimus, jossa koehenkilöinä oli 12. luokkalaisia ja matematiikkaa yliopistossa opiskelevia opiskelijoita. Heille esitettiin kuusi haastavaa pinta-alan pysyvyyteen liittyvää tehtävää, joilla haluttiin selvittää, mitä strategioita matemaattisesti edistyneet opiskelijat käyttävät geometrisissa tehtävissä. Tutkimuksen tuloksissa nähtiin, että virheellisten vastausten perusteluina oli usein intuitiivisten sääntöjen mukaisia päättelyitä. Esimerkiksi kuvion suuremman ympärysmitan perusteella tehtiin päätelmiä kuvion suuremmasta pinta-alasta (enemmän A:ta – enemmän B:tä) ja yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen väitettiin olevan aina yhtä suuret (sama A – sama B). Tutkimuksessa huomattiin myös, että deduktiivista päättelyä ja visuaalisia havaintoja käytettiin vastauksen perusteluna epäjohdonmukaisesti riippuen tehtävän haastavuudesta. Mikäli tehtävä oli opiskelijalle vaikea, hän useammin teki karkean visuaalisen arvion ja tutummassa tai yksinkertaisemmassa tehtävässä käytti formaalia päättelyä. Monet myös käyttivät henkilökohtaisia intuitiivisia argumentteja vastaustensa perusteluina. Vasta, kun haastattelija kyseenalaisti intuitiiviset perustelut, koehenkilöt lakkasivat sokeasti luottamasta niihin ja turvautuivat loogiseen päättelyyn. Moni käytti alkuperäisessä ratkaisussaan matemaattisia formaaleja lähestymistapoja, mutta niitä ei käytetty ratkaisuun pääsemiseen, vaan oman intuitiivisen vastauksen perustelemiseen, riippumatta siitä, oliko intuitio oikeassa (Kospentaris ym., 2011).

Myös Tsamir (2007) on tehnyt tutkimusta yliopisto-opiskelijoilla intuitiivisiin sääntöihin liittyen. Hänen koehenkilönsä olivat opettajaopiskelijoita. Geometriaan liittyvissä tehtävissä opiskelijat laajensivat virheellisesti kuvioiden ominaisuuksiin liittyviä sääntöjä. Aluksi löydettiin yksi kuvio, jolla jokin sääntö pätee. Sitten sääntöä käytettiin perustelematta muillekin geometrisille kuvioille, vaikka näillä kuvioilla ei olisi vastaavia ominaisuuksia. Osa opiskelijoista jopa käytti matemaattista loogista päättelyä ja "todisti" intuitiivisen ratkaisunsa olevan oikea. Tästä väärästä ajatuksesta luovuttiin vasta, kun joku toinen esitti vastaesimerkin.

Toinenkin Tsamirin (2003) geometriaan liittyvä intuitiivisia sääntöjä käsittelevä tutkimus päätyi samanlaisiin tuloksiin. Koehenkilöt olivat nuorempia, mutta he yleistivät vastaavalla tavalla yksinkertaisemman kuvion kohdalla paikkansa pitäviä väittämiä ja esittivät niiden pätevän myös haastavammissa tapauksissa. Vanhemmat oppilaat perustelivat vastauksensa matemaattisesti, kun taas nuoremmat oppilaat käyttivät perusteluna intuitiivista sääntöä "enemmän A:ta – enemmän B:tä". Huomionarvoista tutkimuksen tuloksissa oli myös se, että vaikeampien kuvioiden kohdalla tehtävässä annettu kuva oli sivuutettu ja ratkaisu oli tehty intuitiivisten sääntöjen mukaisesti, vaikka yleensä tehtävässä annettu visuaalinen osa on merkittävässä roolissa ratkaisuun pääsemisessä ja näissä tehtävissä kuvasta olisi voinut suoraan mitata oikean vastauksen (Tsamirin, 2003). Kuten muissakin tutkimuksissa (Tsamir, 2007) (Kospentaris ym., 2011), oppilaat olivat yrittäneet perustella intuitiivisella säännöllä saatuja vastauksiaan itse keksityillä matemaattisilla kaavoilla tai formaaleilla päätelmillä, jotka perustuivat opittuihin matemaattisiin teorioihin. Intuitio siis useissa tilanteissa peitti alleen sekä visuaalisesti tehtävässä tarjotun oikean vastauksen että oppilaiden aiemmat tiedot geometriasta (Tsamir, 2003).

Zazkisin (1999) tutkimuksessa koehenkilöt löysivät tapauksia, joissa intuitiivinen sääntö ei pätenyt. Nämä tapaukset kuitenkin perusteltiin siten, että ne ovat poikkeuksia ja sen vuoksi intuitiivisen säännön paikkansapitävyyttä ei epäilty. Intuition pakottavan luonteen vuoksi koehenkilöiden löytäessä tilanteita, joissa intuitiivinen käsitys ei pätenyt, he eivät muokanneet käsitystään asiasta, vaan lisäsivät poikkeustapauksia teoriaansa.

Tirosh ja Stavy (1999b) esittävät syyksi intuitiivisten sääntöjen käyttöön ihmisen luontaisen taipumuksen ekstrapoloida. Tämän taipumuksen vaikutus nähdään oppilaiden vastausten taustalla myös Tsamirin (2003, 2007) tutkimuksissa. Yleistäminen ja laajentavien päätelmien teko on tärkeä älyllinen kyky, mutta usein ihmisellä on taipumus yleistää silloinkin, kun se ei ole perusteltua. Kun tehtävässä yksi suure pysyy muuttumattomana tai muuttuu tiettyyn suuntaan, ajatellaan muuttumattomuuden tai saman muutossuunnan koskevan myös muita suureita, jolloin päädytään intuitiivisten sääntöjen mukaisiin virhekäsityksiin (Tirosh & Stavy, 1999b). Tsamir (2003, 2007) onkin intuitiivisia sääntöjä koskevien tutkimustensa kautta huomannut intuitiivisten sääntöjen olevan päteviä työkaluja oppilaiden vastausten ennakoinnissa.

Intuitiivisten sääntöjen teoria on saanut osakseen myös kritiikkiä. Van Dooren, De Bock, Weyers ja Verschaffel (2004) kirjoittivat artikkelissaan monien intuitiivisia sääntöjä käsittelevien tutkimusten olevan väärässä väittäessään, että intuitiivisten sääntöjen avulla voidaan ennustaa ja selittää oppilaiden vääriä käsityksiä. Heidän mielestään useissa tutkimuksissa vain vahvistetaan intuitiivisen sääntöjen teoriaa yrittämättä edes uudistaa tai haastaa sitä, minkä vuoksi he toteuttivat tutkimuksen, jossa pyrkivät mittaamaan intuitiivisten sääntöjen todellista vaikutusta. Van Dooren ja kollegat (2004) väittivät, ettei muissa tutkimuksissa ole huomioitu sitä, johtuuko säännön mukainen vastaus itse säännön käytöstä vai ei ja sen vuoksi he halusivat omassa tutkimuksessaan selvittää, johtaako jokin muukin järkeilyprosessi samaan tulokseen, kuin intuitiivinen sääntö ja siten tuottaa vastauksen, joka näyttää intuitiivisen säännön vaikutuksen aikaansaamalta. Toisena kohtana he halusivat selvittää, valitsevatko oppilaat johdonmukaisesti tietyn säännön tiettyihin tehtäviin ja voidaanko siten oppilaiden vastauskäyttäytymistä ennakoida sääntöjen avulla.

Van Doorenin ja hänen kollegoidensa (2004) tutkimuksessa useimpien ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” ja ”sama A – sama B” -sääntöjen kanssa linjassa olevien vastausten perusteluista kävi ilmi, että vastaukseen oli päädytty muiden virheellisten päättelyiden kautta, ei intuitiivisen säännön vuoksi. Myöskään juuri kukaan oppilaista ei valinnut systemaattisesti tiettyä intuitiivista sääntöä, mikä johti päätelmään, ettei sääntöjen avulla voida ainakaan yksilötasolla ennustaa tapahtuvia virheitä.

Edellä kuvatussa Van Doorenin ja kollegoiden (2004) tutkimuksessa suurin osa oppilaiden vastauksista oli oikeita, eikä intuitiivisen säännön mukaisia vastauksia ollut yhdessäkään tehtävässä enempää, kuin mitä olisi todennäköisyyksien puitteissa saavutettu vain arvaamalla sattumanvaraisesti kolmesta vaihtoehdosta. Kokonaisuudessaan sekä oikeiden, että väärien vastausten perusteluissa oli tehty paljon lasku- ja päättelyvirheitä, jotka eivät liittyneet intuitiivisiin sääntöihin. Toisin kuin muiden aihetta käsittelevien tutkitusten tekijät, Van Dooren kollegoineen (2004) sanovat tutkimustulostensa perusteella, että oppilaiden reaktiot, virheet ja intuitio ovat vahvasti sidoksissa tehtävän kontekstiin ja matemaattiseen osa-alueeseen eikä intuitiivisten sääntöjen teoria kykene selittämään tätä kontekstisidonnaisuutta. Teoria, jonka mukaan eri kontekstin omaavia tehtäviä lähestyttäisiin samalla tavalla, jos niissä on nähtävissä intuitiivisten sääntöjen teorian kannalta tärkeät ominaisuudet A ja B, yksinkertaistaa liikaa matematiikkaan liittyviä virheitä (Van Dooren ym., 2004).

Tässä Van Doorenin ja kollegoiden (2004) artikkelissa mainittiin kuitenkin intuitiivisiin sääntöihin turvautumisesta silloin, kun eteen tulee tehtävä, jota ei osata ratkaista. Heidän tutkimuksessaan 10.-12. luokkalaisille oppilaille annettiin tehtäviä, jotka olivat vaikeustasoltaan selvästi alhaisempia, kuin sen ikäisten oletettu matemaattinen osaaminen. On siis tarpeen miettiä, voidaanko intuitiivisten sääntöjen käyttöä tutkia tehtävillä, jotka eivät ole koehenkilöille haastavia. Jos tehtävä on helppo ja oppilas osaa ratkaista sen matemaattisesti ja loogisesti oikein, ei hänellä ole ehkä mitään syytä vastata intuitionsa mukaisesti. Jos taas oppilas huomaa, ettei osaa ratkaista tehtävää matemaattisen osaamisensa avulla, voitaisiin pitää paljon todennäköisempänä, että hän turvautuu intuition antamaan vastaukseen, vaikkei osaa tarjota sille perusteluja.

Toisaalta, jos annettu tehtävä on niin vaikea, ettei koehenkilöllä ole työkaluja matemaattisen ratkaisun tuottamiseen, hän todennäköisesti turvautuu arvaukseen. Samoin, jos koehenkilö ei jaksa keskittyä ja pysähtyä miettimään ja heittää nopeasti jonkin vastauksen, se voi todennäköisesti olla juuri intuitiivisen säännön mukainen arvaus. Mikäli sama henkilö oikeasti miettisi tehtävää, hän saattaisi päätyä toisenlaiseen ratkaisuun. Tutkimustuloksista nähdään, että intuitiivisten sääntöjen tutkimuksen kohdalla erityisen tärkeitä osa-alueita pelkän vastauksen lisäksi ovat annettujen tehtävien vaikeustaso sekä ratkaisuprosessin huomioiminen.

Intuitiiviset mallit

Intuitio voi esiintyä matematiikan tehtävissä monilla muillakin tavoilla, kuin intuitiivisten sääntöjen kautta. Intuitiivisiksi malleiksi kutsutaan laskuja ohjaavia periaatteita, joita usein käytettään alakoulun matematiikassa, kun vasta opetellaan laskutoimitusten merkityksiä (Gvozdic & Sander, 2018). Tällaiset mallit ovat vahvoja erityisesti ensimmäisenä opeteltavissa peruslaskutoimituksissa, kuten vähennys-, kerto- ja jakolaskuissa. Laskutoimitukset usein opetetaan intuitiivisten mallien avulla, sillä se auttaa oppilaita huomaamaan operaatioiden väliset yhteydet ja merkityksen. Intuitiivisen mallin sisältämät vaatimukset eivät kuitenkaan usein vastaa oikean laskutoimituksen kaikkia ominaisuuksia, jolloin laskuihin liitetään virheellisiä käsityksiä ja rajoituksia. Tällaiset intuitiiviset opetetut mallit eivät koske ainoastaan laskutoimituksia, vaan myös laajempia aihekokonaisuuksia. Prosenttilaskentaan ja geometriaan liittyy virhekäsityksiä, jotka johtuvat käsitteiden suppeista esitystavoista ja virheellisestä käsitteiden omaksumisesta. Suuri osa intuitiivisista malleista on opetettuja tai vahingossa opittuja, joten ne ovat juurtuneet syvälle osaksi ihmisen omaa matemaattista tietoutta.

Gvozdic ja Sander (2018) nimeävät intuitiiviseksi malliksi esimerkiksi miinuslaskun ajattelemisen pois ottamisena tai kahden luvun välisenä etäisyytenä. De Corte ja Verschaffel (1996) puolestaan ovat tutkineet kertolaskuun liittyviä intuitiivisia malleja ja tutkimustensa perusteella esittävät, että kertolaskun taustalla vaikuttava primitiivinen malli on toistettu yhteenlasku, jonka avulla kertolasku usein alakoulussa opetetaan. Jakolaskulle on löydetty kaksi primitiivistä mallia: jakava ja ositteleva malli. Jakavassa mallissa yksi ryhmä jaetaan keskenään samankokoisiksi aliryhmiksi, joiden koko täytyy märittää. Osittelevassa mallissa täytyy selvittää, kuinka monta tietyn kokoista aliryhmää annetulla suuremmalla ryhmällä on. Nämä intuitiiviset mallit aiheuttavat laskutoimituksille ylimääräisiä rajoituksia, jotka puolestaan aiheuttavat virheitä (De Corte & Verschaffel, 1996).

Kertolaskun intuitiivinen malli, toistettu yhteenlasku, asettaa kertolaskulle useita rajoituksia, joista aiheutuu yleisiä väärinkäsityksiä. Ensimmäinen näistä on niin sanottu kertojavaikutus, joka tarkoittaa, että kertojan on oltava positiivinen kokonaisluku. Tämä johtuu siitä, että toistetussa yhteenlaskussa kerrottavia lasketaan yhteen kertojan ilmoittama määrä, mikä ei onnistu, jos kertoja ei ole positiivinen kokonaisluku. Kerrottavan luvun suuruudella ei mallin mukaan ole väliä. Esimerkiksi on helppo lisätä lukua 0,25 itseensä viisi kertaa, mutta mahdotonta lisätä luku viisi itseensä 0,25 kertaa. Toinen toistetun yhteenlaskun luoma harhakuva on ”kertominen tekee suuremmaksi”. Tämä käsitys on peräisin alakoulusta, jossa laskut tapahtuvat luonnollisilla luvuilla ja tulo on aina suurempi, kuin kerrottava. Myöhemmin, kun mukaan laskuihin tulevat negatiiviset luvut ja ykköstä pienemmät desimaali- ja murtoluvut, tämä käsitys ei enää päde (De Corte & Verschaffel, 1996).

Myös jakolaskun intuitiiviset mallit tuovat mukanaan ylimääräisiä rajoituksia. Jakavassa mallissa edellytetään, että jaettava on suurempi, kuin jakaja, jakaja on kokonaisluku ja osamäärä on pienempi kuin jaettava, joka ilmaistaan usein lauseella ”jakaminen tekee pienemmäksi”. Kuten kertolaskussakin, nämä rajoitukset pätevät aluksi, kun lasketaan pelkästään luonnollisilla luvuilla, mutta kun jakolaskua myöhemmin aletaan soveltaa muihinkin tilanteisiin, rajoitukset aiheuttavat ongelmia. Ositteleva jakolaskun malli kehittyy lapselle myöhemmin ja sen rajoituksena on ainoastaan, että jaettava on suurempi kuin jakaja (De Corte & Verschaffel, 1996).

De Corte, Verschaffel ja Van Coillie (1988) ovat tutkineet kertojavaikutusta 12-vuotiailla oppilailla, joille annettiin keskenään muuten samanlaisia kertolaskutehtäviä, mutta joissa kertojan tyyppi vaihtui. Tutkimuksessa huomattiin, että kaikkein helpoimpia ovat kertolaskut, joissa kertojana on kokonaisluku. Seuraavaksi parhaiten oppilaat selviytyivät tehtävistä, joissa kertojana oli ykköstä suurempi desimaaliluku, mutta joissain tapauksissa näiden kahden ensimmäisen kertojatyypin välillä ei ollut merkittävää eroa osaamisessa. Selvästi vaikeimmiksi osoittautuivat tehtävät, joissa kertoja oli ykköstä pienempi desimaaliluku. Tutkimuksesta päästiin päätelmään, jonka mukaan ”kertominen tekee suuremmaksi” on vahvempi ehto, kuin ”kertoja on kokonaisluku” ja siksi jälkimmäisen ehdon kanssa ristiriidassa olevissa tehtävissä tehtiin vähemmän virheitä. Vastaavaa vaikutusta ei ollut kerrottavalla luvulla. Myöskään symmetrisissä kertolaskutehtävissä kertojavaikutusta ei havaittu samassa laajuudessa, kuin epäsymmetrisissä. Esimerkiksi suorakulmion pinta-alaa laskettaessa kumman tahansa sivun pituuden voi merkitä kertojaksi tai kerrottavaksi, jolloin ”ongelmallisen” luvun voi ajatella kerrottavaksi. Itse asiassa tutkimuksessa symmetrisistä tehtävistä parhaiten osattiin ne, joissa mukana oli ykköstä pienempi desimaaliluku, joskaan erot eivät olleet suuruudeltaan merkityksellisiä (De Corte ym., 1988).

Kertojavaikutusta on tutkittu myös sanallisen tehtävän muodostamisen kautta. Tutkimuksessa eri ikäiset oppilaat ala-asteelta yliopistoon muodostivat sanallisia tehtäviä, jotka vastasivat heille annettuja laskulausekkeita. Esimerkiksi lauseketta

”24/3” vastaamaan olisi voitu kirjoittaa tehtävä ”24 karkkia jaetaan tasan kolmelle lapselle. Kuinka monta karkkia kukin lapsi saa?”. Annetuissa lausekkeissa oli kuusi kerto- ja kuusi jakolaskua. Laskulausekkeet oli muodostettu siten, että niistä ensimmäinen ei rikkonut yhtäkään intuitiivisen mallin mukaista sääntöä ja muut rikkoivat yhtä tai useampaa sääntöä. Intuitiivisten mallien teorian perusteella oletettiin, että oikein muodostettuja tehtäviä osataan tehdä parhaiten lausekkeista, joista on mahdollista muodostaa tehtävä, joka vastaa toistetun yhteenlaskun mallin rajoituksia (De Corte & Verschaffel, 1996).

Tuloksina kertolaskutehtävistä huomattiin, että ainoastaan rikottujen sääntöjen määrä ei selittänyt väärin muodostettuja tehtäviä. Sen sijaan huomattiin, että virhevaikutus oli suurempi tietyillä säännöillä. ”Kertominen tekee suuremmaksi” näyttäisi olevan vahvin kertolaskuun liittyvä virhekäsitys, kuten aiemmassakin tutkimuksessa (De Corte ym., 1988) todettiin. De Corte ja Verschaffel (1996) myös varoittivat yleistämästä kertojavaikutusta liikaa, sillä heidän tutkimuksessaan toistetun yhteenlaskun sääntöjen rikkominen ei aina johtanut huonompaan suoriutumiseen. Lisäksi nuorimmilla oppilailla desimaaliluvut tuottivat hankaluuksia silloinkin, kun niistä olisi voinut muodostaa sääntöjen puitteissa olevan tehtävän.

Jakolaskutehtävien perusteella tehtiin päätelmä, jonka mukaan ”jaettava on suurempi kuin jakaja” -ehto on heikompi, kuin muut ja esitettiin myös kysymys, onko tämä laisinkaan jakolaskun intuitiivisen mallin ehto. Tilanteissa, joissa ehtojen rikkomista ei voitu välttää, oppilaat rikkoivat huoletta ”jaettava on suurempi kuin jakaja” -ehtoa, jotta ”jakaja on kokonaisluku” -sääntöä ei tarvitsisi rikkoa. Monissa tapauksissa oppilaat muodostivat myös täysin virheellisiä tehtäviä esimerkiksi vaihtamalla osoittajan ja nimittäjän keskenään tai muuttamalla annetun desimaaliluvun kokonaisluvuksi, jotta rikottujen sääntöjen määrä vähenisi. Yleisesti ottaen sekä kerto- että jakolaskun kohdalla oppilaat pyrkivät muodostamaan sanallisen tehtävän siten, että mahdollisimman harvaa intuitiivisen mallin mukaista sääntöä tarvitsi rikkoa. Tämän vuoksi De Corten ja Verschaffelin (1996) tuloksia voidaan pitää primitiivisiä malleja tukevina.

De Corte ja Verschaffel (1996) kertoivat myös aiemmista tutkimuksista, joissa oli saatu hieman erilaisia tuloksia. Niiden mukaan ”jaettava on suurempi kuin jakaja” -sääntö on vahvempi, jos molemmat luvut ovat kokonaislukuja, kuin jos jaettava on desimaaliluku.

Esimerkiksi sanallinen tehtävä, joka kuvaa laskun ”5/15” oli oppilaille vaikeampi tehtävä, kuin ”0,75/5”. Myös siinä tapauksessa, että molemmat luvut olivat ykköstä suurempia desimaalilukuja, tehtävät osattiin hyvin. Kuitenkin tässäkin tutkimuksessa virheellinen osoittajan ja nimittäjän vaihto lisääntyi, jos tehtävässä jakaja ei ollut kokonaisluku (De Corte & Verschaffel, 1996).

De Corte ja hänen kollegansa (1988) olettivat, että intuitiiviset periaatteet ”kertominen tekee suuremmaksi” ja ”jakaminen tekee pienemmäksi” aiheuttavat virheitä operaation valinnassa kerto- ja jakolaskun välillä tehtävissä, joissa jakaja on ykköstä pienempi kokonaisluku. Aiemmissa tutkimuksissa oli havaittu, että oppilaat, jotka valitsivat virheellisesti jakamisen kertomisen sijaan, osasivat silti kertoa suullisessa haastattelussa vastuksen ja sen suuruuden kertojaan nähden. Oppilas osasi siis esimerkiksi kertoa, että tehtävän ”Kilo banaaneja maksaa 2 euroa. Kuinka paljon maksaa 0,75 kiloa banaaneja?” vastaus on pienempi, kuin 2, mutta hän silti valitsi virheellisesti jakolaskun tehtävässä käytettäväksi operaatioksi. Sama oppilas saattoi myös vaihtaa käytettävää operaatiota, kun kertojan lukuarvoa tehtävässä vaihdettiin, vaikka koko tehtävän muotoilu pysyi muuten samana. Tutkimuksessaan saatiin hypoteesin mukaisia tuloksia, jotka tukevat ”kertominen tekee suuremmaksi” ja ”jakaminen tekee pienemmäksi” -sääntöjen vaikuttavan vahvasti oppilaiden ajattelun taustalla ja siten aiheuttavan virheitä operaation valinnassa (De Corte ym., 1988).

Myös prosenttilaskentaan liittyy yleisiä virhekäsityksiä, jotka liittyvät tapaan, jolla prosenttilaskenta opetetaan, sekä tottumukseen laskea tavallisilla luvuilla. Ensimmäinen näistä yleisistä virheistä prosenttilaskennassa on se, että murtolukuja käytettäessä tehtävästä riippumatta nimittäjäksi valitaan luku 100. Tämä virhekäsitys on seurausta siitä, että prosentti on määritelmällisesti sadasosa. Määritelmän vuoksi intuitiivisesti prosentteihin liittyvät murtoluvut pyritään esittämään sadasosina, vaikka se ei olisi tarkoituksenmukaista. Kaksi muuta prosenttilaskennan virhekäsitystä liittyvät laskusääntöihin: Jos jokin osa on 34 % kokonaisuudesta ja toinen osa 66 % kokonaisuudesta, väitetään, että jälkimmäinen osa on 32 % suurempi, kuin ensimmäinen. Lisäksi, jos jokin osa on 32 % suurempi kuin toinen, väitetään myös, että pienempi osa on 32 % pienempi, kuin toinen (Bassan Cincinatus & Sheffet, 2016).

Nämä kaksi jälkimmäistä virhekäsitystä johtuu siitä, että ihminen samaistaa prosentit tavallisiin lukuihin, joilla laskeminen on meille tutumpaa ja laskusäännöt intuitiivisia.

Jos laskija ei ole sisäistänyt prosentin olevan aina osa kokonaisuudesta, hän ei ymmärrä tekevänsä virheitä käyttäessään edellä kuvattuja laskusääntöjä. Jälkimmäinen virheellinen laskusääntö voi esiintyä myös, vaikka tiedettäisiin prosentin olevan osa kokonaisuudesta, jos ei tiedetä mikä on tämä kokonaisuus, josta prosenttiosuus on määritetty. Vaikka prosenttilaskut ovat yksi useimmin arjessa vastaan tulevista laskuista, niissä tehdään paljon perustavaa laatua olevia virheitä intuitiivisiin laskusääntöihin liittyvien käsitysten vuoksi (Bassan Cincinatus & Sheffet, 2016).

Tehtävän muotoilu

Sanallisissa tehtävissä muotoilulla ja tehtävän sisältämillä lukuarvoilla on suuri merkitys tehtävän tulkinnassa ja ratkaisutavan valinnassa. Tehtävässä annettu kuva ohjaa ratkaisemaan visuaalisesti, kun taas annettu lauseke tai kaava kehottaa ratkaisijaa käyttämään analyyttista päättelyä. Jos tehtävänanto tuntuu vieraalta, sen ratkaiseminen on hankalampaa, kuin jos tehtävän muotoilu vastaa omaa käsitystä. Erilaisilla lukuarvoilla voi myös olla merkittävä vaikutus muuten samalaisissa tehtävissä.

Gvozdic ja Sander (2018) ovat huomanneet, että oppilailla on taipumus ratkaista sanallinen tehtävä siinä kuvatun tilanteen mukaisesti, vaikka se tekisi tehtävästä vaikeamman. Tätä taipumusta kuvaamaan on olemassa ”ensisijaisesti tilanteen mukaan” -malli (Brissiaud & Sander, 2010). Tämän mallin mukaan oppilaat lähtevät tehtävän kuvaaman tilanteen mukaiseen ratkaisuun myös siinä tapauksessa, että aiheesta on saatu formaalia opetusta ja ohjeistusta. Mallin mukaan vain siinä tapauksessa, että tehtävän kuvaaman tarinan mukainen tapa on liian työläs, oppilas soveltaa omaa aritmeettista osaamistaan ja laskee tehtävän itse keksimällään tilannetta kuvaavalla laskutavalla (Gvozdic & Sander, 2018). Brissiaud ja Sander (2010) esittävät myös, että tilanteen mukainen malli on jopa vahvempi, kuin oppilaan oma primitiivinen malli asiaan liittyen. Lisäksi Gvozdic ja Sander (2018) ovat saaneet selville, että sanalliset tehtävät ovat myös helpompia silloin, kun niiden muotoilu vastaa intuitiivista käsitystä. Esimerkiksi ”Pöydällä on seitsemän omenaa. Jos kolme omenaa otetaan pois, montako omenaa jää?” on helpompi tehtävä, kuin ”Huoneessa on seitsemän aikuista ja kolme lasta. Kuinka monta enemmän aikuisia on kuin lapsia?”, vaikka ne ratkaistaan samalla vähennyslaskulla. Ero vaikeudessa johtuu vähennyslaskun intuitiivisesta mallista, jonka mukaan vähennyslasku ajatellaan pois ottamisena. Tällöin sanallinen tehtävä, jossa kuvataan pois ottamista, on intuitiivinen ja siten helpompi vähennyslaskutehtävä.

Kospentaris, Spyrou ja Lappas (2011) raportoivat tutkimuksestaan, että tehtävän visualisoinnilla oli suuri vaikutus ratkaisun strategian valinnassa. Jos tehtävässä annetussa kuvassa jokin ominaisuus näytti pitävän paikkansa, se otettiin tehtävässä annettuna tietona kyseenalaistamatta omaa näköhavaintoa ja tehtävän ratkaisussa näitä näköhavaintoja pyrittiin oikeuttamaan perusteluilla. Visualisointia ja kuvasta saatavia tietoja ei kuitenkaan osattu käyttää toisin päin työkaluna, jolla voitaisiin oikaista vääriä päätelmiä.

De Corte ja Verschaffel (1996) havaitsivat, että multiplikatiivisissa tehtävissä esiintyvillä lukuarvoilla on suuri vaikutus tehtävän vaikeustasoon laskutoimitusten taustalla vaikuttavien intuitiivisten mallien vuoksi. Koska jokainen operaatio on linkittynyt tällaiseen tiedostamattomaan malliin, voi tehtävänanto itsessään sulkea pois joitain ratkaisumallivaihtoehtoja. Malli asettaa omat rajoituksensa, joten operaatiota valittaessa oikea vaihtoehto saattaa jäädä kokonaan valintaprosessin ulkopuolelle, jos tehtävässä esitetyt luvut eivät vastaa mallin vaatimuksia. Myös Fiscbein (1999) esittää, että tehtävän esitystapa vaikuttaa heräävään intuitiiviseen reaktioon ja tietyt seikat voivat joko laukaista tai estää intuition syntymisen. Mikäli tehtävän muotoilu ja siihen sisältyvät lukuarvot ovat ristiriidassa laskujen takana piilevän intuitiivisen mallin kanssa, kasvaa riski valita väärä operaatio.

Kospentaris kollegoineen (2011) havaitsi, että tehtävässä annetut tiedot ja tehtävän muoto vaikuttavat lähestymistapaan ja ratkaisustrategian valintaan. Jos tehtävässä oli annettu tilanteeseen liittyvä kuva, useimmat opiskelijat valitsivat geometrisen lähestymistavan, vaikka heillä ei ollut riittäviä tietoja tai osaamista tehtävän ratkaisemiseen kyseisellä tavalla. Toisaalta tehtävissä, joissa näennäisesti esiintyi jokin laskukaava, opiskelijat lähtivät sokeasti kaavan käyttöön, vaikka se ei olisi helpoin tai järkevin tapa ratkaista tehtävää. Kospentaris ja kollegat huomasivat myös (2011), että kaavaa käytettäessä oppilaat pitäytyivät sääntöihin perustuvassa ratkaisuprosessissa, kun taas kuvaan perustuvissa ratkaisuissa he sovelsivat enemmän vaihtoehtoisia päättelytapoja ja näköhavaintoon perustuvia intuitiivisia oletuksia. Myös Tsamir ja hänen kollegansa (2008) ovat huomanneet, että intuitio rohkaisee visuaaliseen päätöksentekoon ja tilanteessa, jossa intuitio ei anna suoraa vastausta, turvaudutaan käyttämään analyyttista ajattelua.

Tehtävän vastaustavalla on myös arveltu olevan vaikutusta osaamiseen. De Corte kollegoineen (1988) tutkivat monivalinnan ja avoimen vastauksen vaikutusta oppilaiden osaamiseen operaation valinnassa kertolaskutehtävissä. He havaitsivat, että avoimen vastauksen tuottaminen vähensi väärän operaation valintaa epäsymmetrisissä kertolaskutehtävissä, joissa kertojana oli ykköstä pienempi desimaaliluku.

Esimerkit ovat sekä matemaattisen käsitteen rakennuspalikoita, että käsitteen sisäistämisen tuotteita. Kun oppilas tutustuu ensimmäistä kertaa esimerkiksi kolmion käsitteeseen, hän oppii havaitsemaan kolmion ominaisuuksia annetun esimerkkikuvan avulla. Vastaavasti hän myös osaa käsitteen omaksumisen jälkeen itse tuottaa piirroksen kolmiosta (Tsamir, Tirosh & Levenson 2008). Esimerkkejä käytetään matemaattisten käsitteiden opetuksessa paljon, eikä tämä tapa ole aina ongelmaton.

Käsitteen osaamisella tarkoitetaan usein ihmisen kykyä määrittää, kuuluuko jokin asia kyseiseen kategoriaan eli käsitteen alle. Tsamir kollegoineen (2008) muotoilivat tämän kysymyksen muotoon: Onko esitetty asia esimerkki vai epäesimerkki käsitteestä? Käsitteen muodostumiseen on kaksi yleisesti tunnettua mallia. Klassisen näkökulman mukaan kategoria esitetään joukkona määrittäviä ominaisuuksia ja uutta kohdetta verrataan tähän listaan, jotta selviäisi, onko kohde esimerkki tästä kategoriasta. Prototyypillisessä näkökulmassa käsite esitetään ideaaliesimerkkien eli prototyyppien avulla ja uutta kohdetta verrataan näihin prototyyppeihin (Tsamir ym., 2008).

Usein, kun pyydetään antamaan esimerkki jostakin käsitteestä, tarjotaan ensin nimenomaan prototyyppiesimerkkiä. Tsamirin ja hänen kollegoidensa (2008) tutkimus keskittyi kolmioihin, joiden tapauksessa prototyyppiesimerkkejä ovat tasasivuinen ja tasakylkinen kolmio. Prototyyppiesimerkkejä kutsuttiin intuitiivisiksi kolmioiksi ja muita kolmioita ei-intuitiivisiksi. Prototyyppiesimerkkien huono puoli on, että ne aiheuttavat herkästi liian kapean käsitteen muodostumisen, sillä yhdessä esimerkissä ei aina pystytä ilmentämään kaikkia käsitteen ominaisuuksia. Tämä johtaa siihen, että usein vain prototyyppiesimerkit hyväksytään käsitteen esimerkeiksi (Tsamir ym., 2008). Tutkimuksessaan Tsamir kollegoineen (2008) esittivät lapsille kuvioita ja pyysivät kertomaan perustellen, onko kuvio kolmio. Osa kolmioista oli prototyyppiesimerkkejä ja osa ei. Ei-kolmioissa oli kaksi kategoriaa: intuitiivisiin ei-kolmioihin kuuluivat selkeästi muut kuviot, kuten neliö ja ellipsi ja ei-intuitiivisiin kolmiomaiset kuviot, joilla ei kuitenkaan ollut minkään tunnetun geometrisen kuvion muotoa, kuten kulmistaan pyöristetty ”kolmio” ja avoin ”kolmio”. Tarkoituksena oli selvittää, mikä tekee ei-kolmiosta ei-kolmion.

Lapset osasivat nimetä intuitiiviset kolmiot kolmioiksi paljon paremmin, kuin ei-intuitiiviset. Ei-kolmiot osattiin tunnistaa oikein myös huomattavasti paremmin, kuin kolmiot. Mitä lähempänä kuvio visuaalisesti oli kolmiota, sitä enemmän lapset tarjosivat kolmion kriittisiin ominaisuuksiin pohjautuvia perusteluja, kuten kolmen kulman olemassaolo, sivujen suoruus tai vaatimus suljetusta kuviosta. Intuitiivisia ei-kolmioita perusteltiin paljon vähemmän, kuin ei-intuitiivisia, eivätkä annetut perustelut liittyneet kolmion ominaisuuksiin vaan useammin kuvion nimeämiseen toiseksi tunnetuksi kuvioksi, kuten neliöksi. Intuitiivisten ei-kolmioiden kohdalla vastaukset myös annettiin välittömästi ja epäröimättä, joten näitä kuvioita (neliö, kuusikulmio, ellipsi) voidaan pitää intuitiivisina epäesimerkkeinä kolmioista. Kuvioita, jotka olivat ”melkein kolmioita”, ei osattu usein nimetä ei-kolmioiksi, vaikka niistä puuttui kolmion ominaisuuksia. Luvun kolme löytyminen näyttäisikin olevan kolmion tärkein ominaisuus, sillä sen puuttuminen tuotti välittömän luokittelun ei-kolmioksi (Tsamir ym., 2008).

Ratkaisemisen nopeus

Tehtävistä, joissa intuitiivisten käsitysten avulla päästään oikeaan ratkaisuun, suoriudutaan usein nopeammin, kuin intuition kanssa ristiriidassa olevista tehtävistä. Intuition tuottama oikea vastaus tukee saatua matemaattista ratkaisua, jolloin tehtävän tekijä luottaa laskeneensa oikein ja siten siirtyy eteenpäin. Mikäli taas intuitio kertoo, että saatu ratkaisu on virheellinen, pohdintaa jatketaan, ratkaisua tarkistetaan ja aikaa kuluu. Vaikka intuition tuottamaa vastausta ei suoraan annettaisikaan vastaukseksi, vaan se tarkistettaisiin formaaleilla menetelmillä, intuitio nopeuttaa ajatteluprosessia sen kanssa kongruenteissa tehtävissä, joissa intuitiivinen sääntö ja matemaattinen ratkaisutapa tuottavat saman eli oikean vastauksen. Epäkongruenteissa tehtävissä taas intuitiivisen säännön avulla saadaan väärä eli matemaattisesta ratkaisusta poikkeava vastaus.

Intuitiivisen ja matemaattisen ratkaisun välillä on huomattu olevan suhde, joka vaikuttaa tehtävän ratkaisun vaatimaan aikaan. Babai, Brecher, Stavy ja Tirosh (2006a) tutkivat tätä yhteyttä 16-17-vuotiaille nuorille tehdyllä testillä, joka sisälsi 20 kongruenttia ja 20 epäkongruenttia todennäköisyystehtävää. Tehtävissä oli kuvattu tilanne ja kysyttiin tietyn tapahtuman todennäköisyyttä. Kongruenteissa tehtävissä, jos kuvattu tilanne sisälsi lukumäärällisesti useita suotuisen tapahtuman ominaisuuksia, myös todennäköisyys oli suuri ja epäkongruenteissa päinvastoin. Tutkimuksessa havaittiin, että epäkongruenteissa tehtävissä oppilaat tekivät paljon enemmän virheitä. Myös vastausaika oikein menneissä kongruenteissa tehtävissä oli merkittävästi lyhyempi, kuin oikein menneissä epäkongruenteissa tehtävissä. Epäkongruenttien tehtävien kohdalla virheelliset vastaukset annettiin nopeammin kuin oikeat vastaukset (Babai, ym., 2006a).

Toisessa tutkimuksessa Babai, Eidelman ja Stavy (2011) saivat myös samansuuntaisia tuloksia. Mikäli tehtävässä intuitiivinen sääntö ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” tuotti oikean vastauksen, käytettiin vastaukseen vain vähän aikaa. Vastaavasti, jos oikea vastaus ei ollut linjassa intuitiivisen säännön kanssa, tehtävän ratkaisija joutui käymään läpi vaativamman ajatusprosessin, joten hänellä kului enemmän aikaa vastauksen antamiseen. Babai kollegoineen (2011) esitti, että erot ratkaisun vaatimassa ajassa johtuvat siitä, että eri alueet aivoissa aktivoituvat sen mukaan, onko tehtävä linjassa intuition kanssa vai ei. Tätä näkemystä tukee Stavyn, Goelin, Critchleyn ja Dolanin (2006b) tutkimus, jossa aivojen toimintaa kongruenteissa ja epäkongruenteissa tehtävissä tutkittiin toiminnallisen magneettikuvauksen avulla. Stavy kollegoinen (2006b) sai selville, että kongruentteja tehtäviä ratkaistaessa aivoissa on aktiivisena alue, joka liitetään automaattiseen käsittelyyn. Epäkongruenttien tehtävien kohdalla taas aktiivisena oli alue, joka liittyy ristiriitaisen ratkaisun käsittelyyn.

Babai kollegoineen (2006b) on tutkinut oppilaiden vastausaikoja kongruenteissa ja epäkongruenteissa tehtävissä myös geometriaan liittyvissä tehtävissä. Tässäkin tutkimuksessa tulokset osoittivat, että intuitiivisten sääntöjen kanssa kongruentteihin tehtäviin vastattiin merkittävästi nopeammin oikein, kuin epäkongruentteihin. Babai ja kollegat (2006b) esittävätkin, että reaktioajasta voidaan päätellä, kuinka vaativa ja monimutkainen ajatteluprosessi tapahtuu ennen vastauksen antamista. Tämä tulos on yhdenmukainen toisen Babain ja hänen kollegoidensa (2006a) tekemän tutkimuksen kanssa. Erilaisten tehtävien vastausaikoja vertaamalla tehtiin päätelmä, jonka mukaan oppilaat käyttivät kaikkiin tehtäviin oikeaa matemaattista ratkaisutapaa, mutta samalla tiedostamattaan ja kykenemättä sitä estämään, he myös tekivät intuitiivisen säännön mukaisen vertailun sinisten pallojen määrästä laatikoissa. Kun nämä molemmat tavat tuottivat saman tuloksen (kongruentit tehtävät), päättely voitiin lopettaa ja annettiin vastaus. Tilanteissa, joissa nämä kaksi tapaa tuottivat eri tulokset (epäkongruentit tehtävät), joutui oppilas jatkamaan miettimistä, jolloin aikaa kului lisää. Vaihtoehtoisesti hän saattoi ristiriitaisessa tilanteessa arvata vastauksen, mikä selittää virheellisten vastausten suuremman määrän (Babai ym., 2006a).

Jos oppilaat olisivat käyttäneet vain formaalia päättelytapaa olisi kaikkiin kongruentteihin ja epäkongruentteihin tehtäviin kulunut yhtä paljon aikaa ja kaikki tehtävät olisi osattu yhtä hyvin. Mikäli taas olisi käytetty pelkästään intuitiivisen säännön mukaista arvausta, olisi jokaiseen tehtävään kulunut yhtä vähän aikaa ja kaikki kongruentit tehtävät olisivat menneet oikein ja epäkongruentit väärin (Babai ym., 2006a). Koska tehtävän tyyppi vaikutti sekä aikaan, että tehtävän osaamiseen, voidaan päätellä, että intuitiiviset säännöt vaikuttavat ratkaisuprosesseihin myös silloin, jos kyseinen asia osataan ratkaista formaalisti oikein.

Iän ja koulutuksen vaikutus

Kuten jo aiemmin on tullut ilmi, intuitiiviset säännöt ja intuition käyttö matemaattisten ongelmien ratkaisussa eivät liity vain pienten lasten matemaattiseen päättelyyn. Käytetyt intuition muodot ja intuition herättävät aiheet saattavat muuttua iän, koulutuksen ja matemaattisen osaamistason nousun myötä, mutta intuitio ei katoa. Intuitio rakentuu pohjatietoihin, joten on selvää, että tiedon lisääntyessä intuitiiviset käsitykset muuttuvat, laajentuvat ja tarkentuvat. Tämä ei kuitenkaan poista intuitiivisten päätelmien virheellistä käyttöä. Intuitiolla on myös erilainen asema eri kulttuureissa. Koulutusasteen lisäksi, myös saadun koulutuksen kulttuuriympäristö voi vaikuttaa intuition käyttöön.

Suuri osa intuitiivisten sääntöjen tutkimuksesta on tehty samoissa maissa, eikä tutkimusta niiden käytöstä eri kulttuureissa ole toteutettu laajalti. Stavy kollegoineen (2006a) halusivatkin selvittää, ovatko intuitiiviset säännöt vain tietyn kulttuurin ja koulutussysteemin aikaansaannosta vai yleinen piirre kaikkien ihmisten ajattelussa.

He tutkivat ”sama A – sama B” ja ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” -sääntöjen käyttöä Israelissa, Taiwanissa ja Australiassa 1.-12. luokkalaisilla oppilailla käyttäen tehtäviä, joita oli jo aiemmin hyödynnetty näiden intuitiivisten sääntöjen tutkimuksessa Israelissa. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden määrät vaihtelivat eri maissa ja otoksen edustavuutta pidettiin epävarmana, joten tutkimuksen tuloksia voidaan pitää korkeintaan suuntaa antavina. Tulokset kuitenkin näyttivät kaikissa maissa samansuuntaisilta, kuin muidenkin intuitiivisia sääntöjä käsitelleiden tutkimusten tulokset: Kaikissa maissa käytettiin intuitiivisia sääntöjä ja jokaisessa maassa sääntöjen virheellinen käyttö väheni oppilaiden iän kasvaessa. Ikä, jolloin säännön käyttö väheni merkittävästi, vaihteli hieman tehtävästä riippuen ja esimerkiksi eri massaisten kappaleiden vapaapudotus sai aikaan virheellistä intuitiivisten sääntöjen käyttöä kaikissa maissa kaikissa ikäryhmissä (Stavy ym., 2006a). Kaikkien maiden oppilaat tarjosivat intuitiivisten sääntöjen mukaisia vastauksia ilman perusteluja, mikä kertoo niiden olevan kaikissa kulttuureissa itsestään selvinä pidettyjä. Ainoat erot maiden välillä huomattiin iässä, jolloin oikeiden vastausten määrä alkoi kasvaa rajusti, sekä tämän osaamisessa tapahtuneen muutoksen nopeudessa. Nämä erot johtunevat erilaisista opetussysteemeistä ja kulttuureista, mutta tutkimuksen perusteella voidaan kuitenkin olettaa, että intuitiiviset säännöt vaikuttavat ajatteluun ympäri maailman (Stavy ym., 2006a).

Tirosh ja Stavy (1999a) löysivät tutkimuksessaan kiinnostavia epäjohdonmukaisuuksia intuitiivisen säännön ”sama A – sama B” käytössä. Joissain tehtävissä vain nuoret lapset käyttivät intuitiivista sääntöä, kun taas toisissa tehtävissä siihen turvautuivat vain vanhemmat opiskelijat ja aikuiset. Tirosh ja Stavy (1999a) päätyivätkin siihen, että intuitiivista sääntöä käytetään loogisissa päättelytehtävissä vasta, kun henkilö on oppinut asiaan liittyvän teorian. Heidän tutkimuksessaan myös kävi ilmi, että joidenkin aihealueiden, kuten pinta-alan pysyvyyden ja verrannon, tehtävissä virheellinen intuitiivisen säännön käyttö lisääntyi iän myötä, mutta toisissa, kuten veden massaa ja tilavuutta käsittelevissä tehtävissä, käyttö väheni iän myötä. Syinä näihin eroihin Tirosh ja Stavy (1999a) listasivat tehtävien eri aihealueiden tuomat erot, sekä koehenkilöiden osaamisen tason erilaisia tietoja vaativissa tehtävissä. Intuitiivisten sääntöjen teorian mukaan tehtävän aiheesta riippumatta siihen sovelletaan intuitiivisia sääntöjä, jos muotoilu täyttää teorian vaatimukset. Vaikka sääntöjä käytetäänkin useissa toisiinsa aiheellisesti liittymättömissä tehtävissä, näyttää siltä, ettei aihe ole intuitiivisten sääntöjen suhteen merkityksetön tekijä.

Tiroshin ja kollegoiden (1998) tutkimuksessa tarkastelun kohteena olivat kaksi vähemmän tutkittua intuitiivista sääntöä ”kaikki prosessit loppuvat joskus” ja ”kaiken voi jakaa kahtia”. Näiden sääntöjen käyttöä testattiin peräkkäisistä jakamisista koostuvilla tehtävillä, joista osassa jaettava asia oli matemaattinen kohde, kuten jana ja osassa fysikaalinen asia tai esine, kuten kuparilanka. Tehtävissä kohdetta puolitettiin uudelleen ja uudelleen ja vastaajan tuli kertoa ja perustella onko jakamisprosessilla loppua. Useimmat oppilaat antoivat saman vastauksen riippumatta siitä, onko jaettava asia matemaattinen vai fysikaalinen. Huomattavaa oli, että nuoremmat oppilaat olivat usein sitä mieltä, että jokaisella prosessilla on loppunsa, kun taas vanhemmat oppilaat väittivät kaikkien prosessien jatkuvan loputtomiin (Tirosh ym., 1998). Syynä tähän eroavaisuuteen voisi pitää sitä, että vanhemmat oppilaat ovat koulussa tutustuneet jossain muodossa äärettömyyden käsitteeseen. Vastaavasti nuoret oppilaat toimivat heille tutussa reaalimaailmassa, jossa ikuisia prosesseja ei ole.

Tirosh ja Stavy (1999b) huomasivat tutkimuksessaan mielenkiintoisen yhteyden oppilaan iän ja intuitiivisen säännön valinnan välillä. Tutkimuksessa hyvin eri ikäisille oppilaille esitettiin eri aihealueisiin liittyviä vertailutehtäviä, joiden lähtötiedot oli muotoiltu siten, että niihin pystyi soveltamaan sekä ”enemmän A:ta – enemmän B:tä” että ”sama A – sama B” -sääntöä. Tiroshin ja Stavyn (1999b) tutkimuksesta kävi ilmi, että tietyissä tehtävissä nuoremmat oppilaat valitsivat useammin säännön ”enemmän A:ta – enemmän B:tä”, kun taas vanhemmat oppilaat valitsivat säännön ”sama A – sama B”. Ero säännön valinnassa johtuu todennäköisesti siitä, että tehtävien sisältämät käsitteet ovat vanhemmille oppilaille jo tuttuja koulusta, mutta nuoremmat tekevät päätelmänsä ilman pohjatietoa aiheesta (Tirosh & Stavy,1999b).

De Corte ja Verschaffel (1996) havaitsivat laskutoimitusten intuitiivisia malleja tutkiessaan, että mallien vaikutukset näkyvät sekä lapsilla, että aikuisilla. Matematiikan oppimisen ja koulutuksen mukana suoriutuminen ja oma ajattelu paranee, mutta mallin vaikutus huomattiin silti yliopiston opettajaopiskelijoillakin.

Yhteenvetona voidaan todeta, että matemaattisella osaamisella ja pohjatiedoilla on vaikutus intuitiivisten sääntöjen soveltamiseen. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että matemaattisesti lahjakkaat ihmiset eivät käyttäisi intuitiivista päättelyä ollenkaan. Sekundaarinen intuitio, jota kaikki matemaattinen intuitio on, rakentuu opitun teorian varaan. Tämän vuoksi ei ole yllättävää, että uusien asioiden oppiminen ja omaksuminen muokkaa myös ihmisen intuitiivista ajattelua. Matemaattinen osaaminen kasvaa usein iän myötä koulutuksen lisääntyessä, joten iän perusteella saadaan hyvin samanlaisia tuloksia, kuin osaamista vertaamalla.

Hyödyntäminen didaktiikassa

Tieto oppilaiden intuitiivisista käsityksistä ja niiden soveltamisesta tehtäviin voi auttaa opettajaa suunnittelemaan tehtävien ohjeistuksia paremmin ja laajemmalla tasolla parantaa opetussuunnitelmaa (Zazkis, 1999), (Tirosh & Stavy, 1999b). Oppilaiden ajattelun ymmärtäminen on oleellista suunnitellessa tapoja vaikeuksien selättämiseen (Babai ym., 2006a).

Intuitiiviset väärinymmärrykset vastustavat voimakkaasti niitä korjaamaan pyrkiviä ohjeita intuitiivisen tiedon pakottavan luonteen vuoksi (De Corte ym., 1988). Myös niiden syntymisen estäminen on erittäin vaikeaa, sillä useimmat intuitiiviset käsitykset ovat muodostuneet matemaattisen opetuksen alkuvaiheessa, kun uusia operaatioita ja käsitteitä vasta aletaan ottaa käyttöön. Uusien käsitteiden ja laskutapojen opetuksessa on yleistä linkittää uusi tapa jollain tavalla vanhaan, kuten kertolaskun vertaaminen toistettuun yhteenlaskuun. Tämä opetustapa auttaa varmasti lapsia ymmärtämään ja käyttämään uutta operaatiota, mutta toisaalta se myös luo intuitiivisen mallin ja tuo mukanaan rajoituksia.

Opeteltaessa uutta käsitettä, siitä usein tarjotaan esimerkkejä. Tsamir kollegoineen (2008) haluavat painottaa, että opetukseen tulisi sisällyttää aina muitakin, kuin prototyyppiesimerkkejä. Käsitteen alle kuuluu laajasti erilaisia asioita, joten on tärkeää, että esimerkitkin tuovat esille mahdollisimman suuren osan käsitteen asioista. Lisäksi olisi hyvä tutustuttaa oppilaat myös epäesimerkkeihin (Tsamir ym., 2008). Luokassa voitaisiin yhdessä pohtia, kuuluuko esitetty asia opeteltuun kategoriaan ja opetella löytämään ne tärkeät kohdat, joista kuulumisen tai kuulumattomuuden saa selville.

Tehtävän muotoilun kannalta tärkeää on myös opettajana kiinnittää huomiota tehtävässä esiintyvään kuvaan. Esimerkiksi kolmion pinta-alan laskemiseen liittyvä tehtävä vaikeutuu huomattavasti sen mukaan, millainen kolmio tehtävässä on annettu.

Omassa työssäni opettajana olen huomannut, että tylppäkulmaisen kolmion pinta-alan laskeminen on vaikeampaa, kuin terävä- tai suorakulmaisen kolmion, vaikka kaikkiin käytetään samaa kaavaa ja vaikka korkeusjanat olisi valmiiksi piirretty kuvaan. Tylppäkulmaisella kolmiolla korkeusjana on kolmion ulkopuolella, jolloin sitä on vaikeampi hyväksyä tärkeäksi pituudeksi, verrattuna kolmion sivunpituuksiin tai kolmion sisään piirrettyyn korkeusjanaan. Kuvan valinnalla voi lisätä tehtävän haastavuutta, mutta on myös hyvä miettiä, mitä tehtävällä halutaan mitata. Jos tarkoituksena on oppia etsimään kolmiosta kanta ja korkeus, on hyvä käyttää monia erilaisia kolmioita, jotta käsitys ei rajoitu prototyyppiesimerkkeihin. Jos taas tarkoituksena on selvittää, osaako oppilas käyttää laskukaavaa, voi perustehtävässä olla tarkoituksenmukaista esittää intuitiivinen teräväkulmainen kolmio.

Jotta virheellisten intuitiivisten käsitysten syntymistä voitaisiin hillitä, olisi uutta käsitettä opeteltaessa erittäin tärkeää tuoda esille siihen liittyvät intuitiiviset seikat. Esittämällä selkeästi uuden laskutavan erot ja yhtäläisyydet tuttuihin tapoihin, voidaan vääriä intuitioita mahdollisesti karsia ja vastaavasti myös tukea toimivia intuitioita (Bassan Cincinatus & Sheffet, 2018). Toimivat intuitiot voivat auttaa uuden matemaattisen tiedon omaksumisessa (Bassan Cincinatus & Sheffet, 2018), joten on tärkeää, ettei intuitioita torjuta kokonaan, vaan autetaan oppilaita huomaamaan omat intuitiiviset käsitykset ja arvioimaan niitä kriittisesti.

Konkreettisia keinoja intuitiivisten mallien ja sääntöjen aiheuttamien virheiden torjumiseen ovat De Corten ja hänen kollegoidensa (1988) mukaan havainnollistavan kuvan piirtäminen, vastaavan laskun käsittely ensin helpommilla luvuilla, sekä oman vastauksen tarkistamisen ja järkevyyden arvioinnin ottaminen tavaksi. Näistä viimeisenä mainittu on valitettavan harvinainen tapa oppilailla. Jos oman vastauksen mielekkyyttä pysähtyisi aina miettimään, voisi intuitiivisilla menetelmillä saada aikaan enemmän hyötyä. Vastauksen pohtiminen paitsi karsisi intuition virheellistä käyttöä, myös antaisi oppilaille itsevarmuutta luottaa intuitioonsa ja omaan käsitykseen silloin, kun se näyttää tuottavan järkeviä tuloksia. Vastauksia pohtimalla oppilaat myös voisivat itse oppia, millaisissa tilanteissa he kykenevät luottamaan intuitioon ja milloin on parempi turvautua formaaliin päättelyyn.

Tsamirin (2007) tutkimuksessa opettajaopiskelijat pitivät tärkeänä, että matemaattinen sisältö suunnitellaan huolellisesti oppitunneille. Opettajatkaan eivät ole immuuneja virheellisille intuitiivisille päätelmille, joten on tärkeää, että opettaja tarkistaa aina omat ratkaisunsa, jotta ne perustuvat matemaattiseen, eivätkä intuitiiviseen päättelyyn. Lisäksi useissa tutkimuksissa (De Corte & Verschaffel, 1996) (Bassan Cincinatus & Sheffet, 2018) (Tsamir, 2001) on painotettu oppilaiden saattamista tietoisiksi intuitiivisista malleista ja niiden mahdollisesti mukanaan tuomista virheistä. Tieto auttaa välttämään virheellisiä toimintamalleja ja siten mahdollistaa uuden tiedon omaksumisen ja käytön kokonaisuudessaan. Tsamirin (2001) mukaan avain opeteltujen mallien vahvistumiseen intuitiivisia malleja hallitsevammiksi on juuri intuitiivisten käsitysten tiedostamisessa ja aktiivisessa kriittisessä tarkastelussa.

Babain ja hänen kollegoidensa (2006a) mielestä intuitiiviset säännöt tulisi ottaa huomioon myös oppilaiden suoritusten arvioinnissa. Mikäli opettaja huomaa oppilaan toistavan virheellisesti jotain mallia vastauksissaan, on tästä tarpeen keskustella ja pyrkiä irrottautumaan virheellisistä tavoista. Opettajan on tärkeä myös vahvistaa oikeita ratkaisutapoja siten, että ne peittävät alleen intuitiivisten sääntöjen vaikutukset (Babai ym., 2006a). Oman opetuskokemukseni perusteella sama oppilas toistaa usein tiettyä virhettä systemaattisesti. Virheen korjaamisesta ja oikean tavan opettelusta huolimatta seuraavassa vastaavanlaisessa tehtävässä hän palaa omaan virheelliseen tapaansa. Intuitiiviset käsitykset ovat sitkeitä, minkä vuoksi virheiden korjaaminen vaatii paljon enemmän, kuin oikean tavan selvittämisen yhdessä tehtävässä.

Virheellisten intuitioiden muuttamista vaikeuttaa oman opetuskokemukseni mukaan myös oppilaan oma haluttomuus muuttaa ajatteluaan. Jos oppilas on tyytyväinen saatuaan minkä tahansa vastauksen paperille, eikä häntä kiinnosta, onko se oikein vai ei, on opettajan mahdotonta muuttaa oppilaan ajattelumalleja. Oman käsityksen muuttamisessa, kuten kaikessa muussakin oppimisessa oppilaan on itse oltava aktiivisessa roolissa. Opettaja ei voi pakottaa oppimista, jos oppilas ei itse halua omaksua uusia asioita.

Vertailutehtävien käyttöön oppilaiden osaamisen mittaamisessa tulisi suhtautua varauksella, sillä näissä tehtävissä oppilaiden vastauksia eivät välttämättä ohjaa tieteelliset mallit, vaan vastaukset muotoutuvat kysymyksen muodon ja intuitiivisten sääntöjen perusteella. (Tirosh & Stavy, 1999b).

Mikäli oppilaalla on tapa pitää oman käsityksensä vastaisia tapauksia vain poikkeuksena heidän teoriaansa, voisi heitä auttaa esittämällä lisää tällaisia poikkeustapauksia (Zazkis, 1999). Kun oppilas huomaa, että poikkeustapauksia on lukematon määrä, hän voi huomata, että hänen alkuperäinen käsityksensä teoriasta onkin virheellinen.

Fischbein (1999) luokittelee viisi erilaista todistamiseen liittyvää tehtävänannosta riippuvaa tilannetta, joissa intuitio näyttäytyy eri tavoin. Ensimmäinen tilanne koskee tehtävää, jonka esittämä väite hyväksytään intuitiivisesti, eikä todistuksia vaadita. Myös toisessa tilanteessa väite hyväksytään intuitiivisesti todeksi, mutta se on myös systemaattisesti todistettavissa. Kyseessä on siis yhteensattuma, jossa intuitiivinen ja looginen ratkaisu ovat samaa mieltä. Kolmannen tilanteen tehtävän väite on intuition vastainen ja se voidaan hyväksyä vain, jos pätevä todistus esitetään. Neljännessä tapauksessa looginen selitys on ristiriidassa intuition kanssa, eikä väitteen todistusta hyväksytä. Viimeisessä tilanteessa tehtävästä voi nousta kaksi keskenään ristiriidassa olevaa intuitiota.

Tehtävät, joissa intuitio on samaa mieltä formaalin todistuksen kanssa, mutta joissa todistus silti vaaditaan, on erityisen hankala tehtävätyyppi turhauttavuutensa vuoksi. Koska ratkaisu näyttäytyy oppilaille intuition vuoksi triviaalina, voi todistuksen vaatiminen aiheuttaa negatiivisia ajatuksia matematiikan mielekkyyttä kohtaan, sillä oppilas itse ei näe tarvetta väitteen kumoamiselle tai todistamiselle (Fischbein, 1999). Fischbein (1999) korostaa matemaattisten käsitteiden identifioimisen tärkeyttä, sekä selkeää linjaa siihen, mitä täytyy perustella ja miten. Myös näennäisesti triviaalit ominaisuudet on Fischbeinin (1999) mukaan käytävä huolellisesti läpi, jotta oppilaille on selvää, milloin ominaisuudet ovat voimassa ja milloin eivät.

Fischbeinin (1999) mukaan on tärkeää, että opettaja on perillä erilaisista tilanteista, joita tehtävästä kumpuava intuitio voi aiheuttaa, sillä silloin opettajalla on paremmat valmiudet auttaa oppilaita haastavissa tilanteissa. Tilanteissa, joissa intuitio ja formaali ratkaisu ovat ristiriidassa, opettajan tulisi osoittaa ristiriita oppilaille ja selittää, mistä väärä intuitio kumpuaa. Mikäli ristiriita jätetään huomioimatta ja käydään läpi vain oikea tapa, oppilas helposti palaa intuitiiviseen tapaan sitten, kun formaali tapa unohtuu (Fischbein, 1999).

Tiroshin ja hänen kollegoidensa (1998) tutkimuksessa oppilaille esitettiin pelkkien tehtävänantojen lisäksi valmiita vastausväittämiä, joista osa oli oikeita ja osa vääriä ja heidän tuli perustellen valita oikeat vastaukset. Näitä väitteitä kutsuttiin interventioiksi.

Nuorten oppilaiden vastauksiin interventiolla ei ollut vaikutusta, mutta vanhimman ikäryhmän eli 12. luokkalaisten vastausten oikeellisuus parani merkittävästi intervention jälkeen verrattuna heidän alkuperäisiin vastauksiinsa. Intuitiiviset säännöt ja intuitiot ylipäänsä ovat vakaita ja vastustavat muutosta, minkä vuoksi Tirosh kollegoineen (1998) esittävät, että oikeanlaisia interventioita käyttäen oppilaat voitaisiin saada ajattelemaan intuition ulkopuolelta. Kun tehtävässä tuodaan ilmi kaikki mahdolliset vaihtoehdot, joutuu oppilas pohtimaan ongelmaa joka suunnalta ja siten omaa vastaustaan monelta kannalta, mikä voi helpottaa intuitiivisen käsityksen sivuuttamista ja perustellun ratkaisun muodostamista. Intuitiivisen virheellisen vastauksen esiintyminen johtuu intuition pakottavasta luonteesta, joka aktivoi ajattelussa mekanismeja, jotka yrittävät pakottaa henkilön luottamaan intuition oikeellisuuteen (Babai ym., 2011). Tiroshin ja hänen kollegoidensa (1998) tapaan myös Babai kollegoineen (2011) esittää, että intuitiivisten mekanismien herättely etukäteen voisi auttaa tehtävien ratkaisussa sekä intuition huomioonottamisessa ja kyseenalaistamisessa. Tähän ajatukseen yhtyivät myös Bassan Cincinatus ja Sheffet (2018), jotka esittivät, että intuition ja formaalin ratkaisun välillä olevan konfliktin herättely etukäteen oppilaan mielessä voi auttaa välttämään intuition aiheuttamia virheitä.

Nykyisissä opetuksen toteuttamisen malleissa korostetaan vuorovaikutusta ja oppilaiden osallistumista opetukseen. Tämä tarkoittaa, että myös matematiikan tunneille halutaan tuoda yhteistä keskustelua ja pohdintaa ratkaisuista ja oikeista ja vääristä ideoista. Tsamir (2003) esittää, että intuitiivisten sääntöjen teoria on hyvä työkalu opettajalle tällaisen keskustelun pohjaksi. Teorian avulla opettajalla on mahdollisuus ennakoida oppilaiden mahdollisia vääriä käsityksiä ja niiden syitä ja sitä kautta rakentaa keskustelua oikeaan suuntaan. Fischbein (1999) kehottaa opettajia rohkaisemaan oppilaita ennakoivan intuition käyttöön. Vakuuttavan intuition jokainen tuntee automaattisesti, mutta ennakoivan intuition hyödyntäminen vaatii taitoa. Opettajien tulisi rohkaista oppilaita ehdottamaan ratkaisumenetelmää ja miettimään siitä saatavan ratkaisun oikeellisuutta jo ennen, kuin pitävät perustelut on saatu kokoon.

Lähteet

Babai, R., Brecher, T., Stavy, R. & Tirosh, D. (2006a). Intuitive interference in probabilistic reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education 4*, 627–639.

Babai, R., Eidelman, R.R. & Stavy, R. (2011). Preactivation of inhibitory control mechanisms hinder intuitive reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education 10,* 763-775.

Babai, R., Levyadun, T., Stavy, R. & Tirosh, D. (2006b). Intuitive rules in science and mathematics: a reaction time study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 37*(8), 913-924.

Bassan Cincinatus, R. & Sheffet, M. (2016). "With percentages the 100 is always in the denominator": From the field to pre-service teachers. *International Journal of Research in Education and Science 2(1),* 143-155.

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science 13*, 92–107.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction 6*, 219–243.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication problems. *Journal of Mathematical Behavior 7*, 197-216.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D. & Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of 'more A–more B' and 'same A–same B'. *Educational Studies in Mathematics 56,* 179-207

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics 38,* 11-50.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning*. Educational Studies in Mathematics 34*, 27–47.

Gvozdic, K. & Sander, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics 98,* 157-175.

Kospentaris, G., Spyrou, P. & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics 77,* 105-127.

Norenzayan, A., Smith, E., Kim, B. & Nisbett, R. (2002). Cultural preferences for formal versus intuitive reasoning. *Cognitive Science 26,* 653-684.

Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F.L. & McRobbie, C. (2006a). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education 4,* 417-436.

Stavy, R., Goel, V., Critchley, H. & Dolan, R. (2006b). Intuitive interference in quantitative reasoning. *Brain Research 1073–1074*, 383–388.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1999a). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics 38,* 51-66.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1999b). Intuitive rules and comparison tasks. *Mathematical Thinking and Learning 1(3),* 179-194.

Tirosh, D., Stavy, R. & Cohen, S. (1998). Cognitive conflict and intuitive rules. *International Journal of Science Education 20*, 1257-1269.

Tsamir, P. (2001). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics 48,* 289-307.

Tsamir, P. (2003). Using the intuitive rule more A-more B for predicting and analysing students' solutions in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 34(5),* 639-650.

Tsamir, P. (2007). When intuition beats logic: Prospective teachers' awareness of their *same sides – same angles* solutions. *Educational Studies in Mathematics 65,* 255-279.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics 69,* 81-95.

Zazkis, R. (1999). Intuitive rules in number theory: Example of 'the more of A, the more of B' rule implementation. *Educational Studies in Mathematics 40,* 197-209.