Yksikköympyrän irrationaaliset kierrot

LuK-tutkielma
Pietari Pennanen
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2018

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan irrationaalisiin kiertoihin yksikköympyrällä. Kiertoja tarkastellaan pääasiassa yksikkövälillä, mutta esitetyt tulokset pätevät myös kierroille yksikköympyrällä. Lisäksi esitetään todistus Dirichlet'n approksimaatiolauseelle.

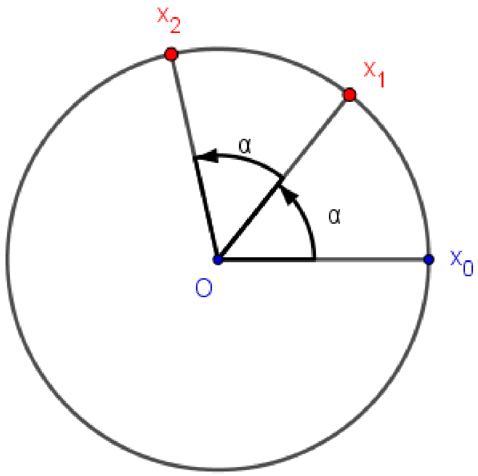
1 Kierroista

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa yksikköympyrän pistettä $x_0 = (1, 0)$ käännetään ympyrällä vastapäivään jonkin kulman α verran. Tällöin päädytään johonkin yksikköympyrän pisteeseen x_1 ja on tehty *kierto* yksikköympyrällä.

Jatkamalla kiertoja saadaan jono

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

Tämä jono koostuu siis niistä yksikköympyrän pisteistä x_n, jotka on saatu pisteistä x_{n-1} kiertämällä niitä vastapäivään kulman α verran.



Kuva 1: Kiertoja yksikköympyrällä.

Kiertokulma α voidaan rajoittaa välille $[0, 2\pi[$, sillä kaikki kokonaisen kierroksen yli menevät kulmat eivät muuta kiertoja millään tavalla. Jos kulma on yli yhden kierroksen, voidaan ajatella, että kierretään kierroksen yli menevän osan suuruinen kulma. Kulma α voidaankin nyt kirjoittaa myös seuraavasti:

$$\alpha = \tilde{\alpha} \cdot 2\pi, \text{missä } \tilde{\alpha} \in [0, 1[$$

eli kierrettäessä kulma α kierrettäänkin $\tilde{\alpha}$:s osa ympyrästä.

Kiertojen tarkastelua voidaan vielä hieman yksinkertaistaa. Kulman α suuruinen kierto yksikköympyrällä vastaa sitä, että kierrettävä piste siirtyy ympyrän kehällä α:n pituisen matkan. Toisaalta yksikköympyrä voidaan ajatella välinä $[0, 2\pi[$, jossa välin päätepisteet ovat samat. Kierrot ovatkin siis α:n pituisia siirtymiä välillä $[0, 2\pi[$. Lisäksi kulman α määrää luku $\tilde{\alpha} \in [0, 1[$, joten onkin järkevää tarkastella α:n sijaan $\tilde{\alpha}$:n suuruisia kiertoja yksikkövälillä $[0, 1[$, jonka päätepisteet ovat samat. Tästä syystä kierto määritelläänkin yksikkövälillä tapahtuvaksi siirtymäksi. Tutkielman lopussa on esitetty kuvaus, jolla väli $[0, 1[$ ja yksikköympyrä $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2 + y^2} = 1\right\}$ voidaan samaistaa.

2 Irrationaaliset kierrot

2.1 Määritelmiä

Määritelmä 2.1. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin lukua $\{\alpha\} = \alpha \mod 1 = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ kutsutaan luvun α murto-osaksi. Tässä $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ on lattiafunktio, joka määritellään $\lfloor \alpha \rfloor = \max \{m \leq \alpha | m \in \mathbb{Z}\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon $\tilde{\alpha}$ reaaliluku. Tällöin kuvausta

$$T \colon [0, 1[\mapsto [0, 1[\,, \; T(x) = (x + \tilde{\alpha}) \mod 1 = \{x + \tilde{\alpha}\}$$

kutsutaan kierroksi. Erityisesti $\tilde{\alpha}$:n ollessa irrationaaliluku sanotaan kiertoa irrationaaliseksi.

Määritelmä 2.3. Olkoon $X \subset \mathbb{R}$ väli. Tällöin joukko $A \subset X$ on tiheä joukossa X, jos kaikilla väleillä $I \subset X$ on olemassa $a \in A$, jolle $a \in I$.

Määritelmä 2.4. Olkoon $(\{x_n\})_n$ jono ja $[a, b[$ väli. Tällöin jono $(\{x_n\})_n$ on tasaisesti jakautunut joukossa $[0, 1[$ jos

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\# \{n \leqslant N : \{x_n\} \in [a, b[\ \}}{N} = b - a, \text{kaikille } [a, b[\subset [0, 1[$$

2.2 Murto-osa ja rationaalikierrot

Kun aloitetaan välin $[0, 1[$ pisteestä nolla ja tehdään $\tilde{\alpha}$:n suuruinen kierto, päädytään pisteeseen $T(0) = \tilde{\alpha} \mod 1$. Kun kiertojen tekemistä jatketaan muodostuu lukujono

$$0, \{\tilde{\alpha}\}, \{2\tilde{\alpha}\}, \{3\tilde{\alpha}\}, \ldots$$

jota voidaan merkitä lyhyemmin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{n\tilde{\alpha}\}$. Tällä lukujonolla on hyvin erilaisia ominaisuuksia riippuen siitä, onko $\tilde{\alpha}$ irrationaaliluku vai ei. Tapaus, jossa $\tilde{\alpha}$ on rationaaliluku, ei ole erityisen kiinnostava, sillä tällöin jonon alkioiden joukko on äärellinen. Jonolla on kuitenkin mielenkiintoisia ominaisuuksia, kun $\tilde{\alpha}$ on irrationaaliluku. Tällöin esimerkiksi osoittautuu, että jonon alkioiden joukko on tiheä välillä $[0, 1[$. Lauseessa 2.5 on esitetty murto-osan ominaisuuksia, joita käytetään myöhemmissä todistuksissa. Tämän jälkeen lähdetään tarkastelemaan jonon $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$ ominaisuuksia.

Lause 2.5. *Seuraavat ominaisuudet pätevät reaaliluvun murto-osalle:*

1. *Jos* $0 \leqslant x < 1$ *on reaaliluku, niin* $\{x\} = x$.
2. *Jos* $x \in \mathbb{R}$ *ja* $a \in \mathbb{Z}$, *niin* $\{x + a\} = \{x\}$.
3. *Jos* x *ei ole kokonaisluku, niin* $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$. *Tällöin* $\{-x\} = 1 - \{x\}$.
4. *Jos* x *ja* y *ovat reaalilukuja, niin* $\{x - y\} = \{x\} - \{y\}$, *kun* $\{x\} \geqslant \{y\}$ *ja* $\{x - y\} = \{x\} - \{y\} + 1$ *muulloin.*

Todistus. Perustellaan näistä kohta 4. Luvut x ja y voidaan esittää kokonais -ja murto-osiensa avulla: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ ja $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$. Täten myös $x - y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor + \{x\} - \{y\}$. Nyt määritelmän mukaan

$$\{x - y\} = x - y - \lfloor x - y \rfloor$$

ja lisäksi

$$\lfloor x - y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor + \{x\} - \{y\} \rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} - \{y\} \rfloor.$$

Jos $\{x\} \geqslant \{y\}$, niin $0 \leqslant \{x\} - \{y\} < 1$, jolloin $\lfloor \{x\} - \{y\} \rfloor = 0$. Tällöin saadaan, että $\{x - y\} = x - y - \lfloor x - y \rfloor = x - \lfloor x \rfloor - (y - \lfloor y \rfloor) = \{x\} - \{y\}$. Muulloin $-1 < \{x\} - \{y\} < 0$, jolloin $\lfloor \{x\} - \{y\} \rfloor = -1$ ja täten $\{x - y\} = x - y - \lfloor x - y \rfloor = x - \lfloor x \rfloor - (y - \lfloor y \rfloor) + 1 = \{x\} - \{y\} + 1$. □

Lauseissa 2.6 ja 2.7 tarkastellaan edellä esitettyä jonoa $x_n = n\tilde{\alpha} \bmod 1 = \{n\tilde{\alpha}\}$, missä $n \in \mathbb{N}, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Lause 2.6. *Jos* $\tilde{\alpha}$ *on rationaaliluku, niin* $\{\ x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ *on äärellinen.*

Todistus. Olkoon $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Tällöin $\tilde{\alpha} = \frac{p}{q}$ jollakin kokonaisluvulla p ja luonnollisella luvulla $q \neq 0$, joille $\mathrm{syt}(p, q) = 1$. Jono x_n on siis $x_n = n\ \dfrac{p}{q} \bmod 1$. Kun $n = q$ niin $x_q = q\dfrac{p}{q} \bmod 1 = p \bmod 1 = p - \lfloor p \rfloor = p - p = 0 = x_0$. Nähdään siis, että q:nnella askeleella jono päätyy takaisin alkupisteeseen. Tästä eteenpäin jonossa vain toistuvat aikaisemmin esiintyneet termit $x_i, 1 \leqslant i < q$. Itse asiassa $x_i \neq x_j$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j < q$. Täten $\{\ x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ on äärellinen. □

2.3 Irrationaalisten kiertojen ominaisuuksia

Seuraavan Lauseen 2.7 todistus mukailee [1]:ssä esitettyä todistusta.

Lause 2.7. *Jos $\tilde{\alpha}$ on irrationaaliluku, niin $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ on tiheä joukossa* $[0, 1[$.

Todistus. Olkoon $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Tulee siis osoittaa, että jokaiselta väliltä $I \subset [0, 1[$ löydetään jonon $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$ alkio.

Jaetaan väli $[0, 1[$ osaväleihin $I_m = \left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N}\right[$, $m = 0, \ldots, N-1$. Tällöin alkioista $x_1, \ldots, x_{N+1}$ ainakin kaksi kuuluvat samaan osaväliin eli $0 < |x_{n_1} - x_{n_2}| < \frac{1}{N}$ joillakin $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N+1\}$. Tämä voidaan perustella vastaoletuksella. Jos jokaiseen osaväliin kuuluisi korkeintaan yksi em. alkioista, niin alkioita olisi korkeintaan välien lukumäärä N. Tämä on ristiriita, sillä alkioita oli $N + 1$ kappaletta.

On siis olemassa luvut $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, että $0 < |\{n_1\tilde{\alpha}\} - \{n_2\tilde{\alpha}\}| < \frac{1}{N}$. Voidaan hyvin olettaa, että $\{n_1\tilde{\alpha}\} > \{n_2\tilde{\alpha}\}$, sillä ei voi olla $\{n_1\tilde{\alpha}\} = \{n_2\tilde{\alpha}\}$. Jos alkiot olisivat samat, niin silloin

$$\{n_1\tilde{\alpha}\} = \{n_2\tilde{\alpha}\}$$

$$n_1\tilde{\alpha} - \lfloor n_1\tilde{\alpha} \rfloor = n_2\tilde{\alpha} - \lfloor n_2\tilde{\alpha} \rfloor$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\lfloor n_1\tilde{\alpha} \rfloor - \lfloor n_2\tilde{\alpha} \rfloor}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q},$$

mikä ei ole mahdollista, sillä $\tilde{\alpha}$ oli irrationaaliluku. Koska $\{n_1\tilde{\alpha}\} > \{n_2\tilde{\alpha}\}$, niin

$$0 < |\{n_1\tilde{\alpha}\} - \{n_2\tilde{\alpha}\}| = \{n_1\tilde{\alpha}\} - \{n_2\tilde{\alpha}\} = \{n_1\tilde{\alpha} - n_2\tilde{\alpha}\} = \{(n_1 - n_2)\tilde{\alpha}\} < \frac{1}{N}.$$

Merkitään yksinkertaistuksen vuoksi $\{(n_1 - n_2)\tilde{\alpha}\} = d$. Olkoon M suurin positiivinen kokonaisluku, jolle $M \cdot d \leqslant 1$. Koska $\tilde{\alpha}$ on irrationaalinen, niin yhtäsuuruus ei voi päteä. Täytyy siis olla, että $M \cdot d < 1$.

Jokaisen osavälin I_m pituus on $\frac{1}{N}$ ja peräkkäisten termien etäisyys on $|(l+1) \cdot d - l \cdot d| < \frac{1}{N}, l = 0, \ldots, M-1$. Täten kaikille $m = 0, \ldots, N-1$ löydetään $k = 0, \ldots, M$, jolla $k \cdot d$ kuuluu osavälille $\left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N}\right[$. Toisaalta, koska $k \cdot d < 1$ kaikilla $k = 0, \ldots, M$ niin

$$\begin{aligned} k \cdot d &= \{k \cdot d\} \\ &= \{k \{(n_1 - n_2)\tilde{\alpha}\}\} \\ &= \{k(n_1 - n_2)\tilde{\alpha} - k\lfloor (n_1 - n_2)\tilde{\alpha} \rfloor\} \end{aligned}$$

Koska $k\lfloor(n_1 - n_2)\tilde{\alpha}\rfloor$ on kokonaisluku, niin

$$\{k(n_1 - n_2)\tilde{\alpha} - k\lfloor(n_1 - n_2)\tilde{\alpha}\rfloor\} = \{k\,(n_1 - n_2)\,\tilde{\alpha}\} = \{n'\tilde{\alpha}\} = x_{n'}$$

jollakin kokonaisluvulla n'. Nyt siis $x_{n'} \in \left[\frac{m}{N}, \frac{m+1}{N}\right[$. Koska N oli mielivaltainen, niin jokaisen osavälin $I \subset [0,1[$ täytyy sisältää jonon x_n alkio. Näin ollen Määritelmän 2.3 mukaan jonon x_n alkioiden joukko on tiheä joukossa $[0,1[$.

□

Lauseen 2.7 seurauksena saadaan Dirichlet'n approksimaatiolause, joka on tärkeä tulos Diofantoksen approksimaatioissa, joissa reaalilukuja pyritään arvioimaan rationaaliluvuilla.

Seuraus 2.8 (Dirichlet'n approksimaatiolause)**.** *Jokaiselle irrationaaliluvulle β ja positiiviselle kokonaisluvulle N löydetään kokonaisluvut p ja q siten, että*

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN},$$

missä $0 < q \leqslant N$.

Todistus. Lauseen 2.7 nojalla on olemassa kokonaisluvut $0 \leqslant k < l \leqslant N$ siten, että $|\{l\beta\} - \{k\beta\}| < \frac{1}{N}$. Valitsemalla nyt $q = l - k$ ja $p = \lfloor l\beta\rfloor - \lfloor k\beta\rfloor$ nähdään, että

$$\begin{aligned}\left|\beta - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{q}\,|q\beta - p| &= \frac{1}{q}\,|(l-k)\,\beta - \lfloor l\beta\rfloor + \lfloor k\beta\rfloor| \\ &= \frac{1}{q}\,|(l\beta - \lfloor l\beta\rfloor) - (k\beta - \lfloor k\beta\rfloor)| \\ &= \frac{1}{q}\,|\{l\beta\} - \{k\beta\}| \\ &< \frac{1}{qN}.\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.9. Edellisestä saadaan seurauksena, että mille tahansa irrationaaliluvulle epäyhtälö

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

pätee äärettömän monella kokonaisluvulla p ja q.

Esimerkki 2.10. Edellä esitetty Dirichlet'n approksimaatiolauseen todistus antaa myös keinon laskea irrationaalilukua β lähellä olevia rationaalilukuja.

Olkoon nyt $\beta = \sqrt{2}$. Valitaan N, lasketaan N kappaletta jonon $x_n = \{n \cdot \sqrt{2}\}$ pisteitä ja etsitään kaksi pistettä, joiden etäisyys toisistaan on pienempää kuin $\frac{1}{N}$. Kun nämä kaksi pistettä on löydetty, lasketaan p ja q, kuten Seurauksen 2.8 todistuksessa. Seuraavassa taulukossa on esitetty tällä tavalla saatavia rationaalilukuja eri N:nnän arvoilla.

N	l	k	$q = l - k$	$p = \lfloor l\beta \rfloor - \lfloor k\beta \rfloor$	$\frac{p}{q}$
1000	997	12	985	1393	$\frac{1393}{985}$
10000	9512	1393	8119	11482	$\frac{11482}{8119}$
100000	97020	16238	80782	114243	$\frac{114243}{80782}$
1000000	760499	289667	470832	665857	$\frac{665857}{470832}$

Jos tarkastellaan näistä viimeistä, niin nähdään, että

$$\left|\sqrt{2} - \frac{665857}{470832}\right| = 1{,}59486\ldots \cdot 10^{-12} < \frac{1}{470832 \cdot 1000000} = 2{,}12389\ldots \cdot 10^{-12}.$$

Kyseisen rationaaliluvun 11 ensimmäistä desimaalia ovat siis samat kuin luvulla $\sqrt{2}$.

Kuten jo Lauseen 2.7 todistuksessa kävi ilmi, jonon $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$ alkiot x_i ja x_j eivät voi olla samat, kun i ja j ovat erisuuret ja $\tilde{\alpha}$ on irrationaaliluku. Vaikkakin jonon alkioita on tällöin ääretön määrä, ne eivät voi ikinä kokonaan "täyttää"yksikköväliä. Osoittautuu kuitenkin, että jono on tasaisesti jakautunut välillä $[0, 1[$. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että jos I on jokin välin $[0, 1[$ osaväli, niin tällöin osavälille I osuvien jonon pisteiden x_n lukumäärä on verrannollinen I:n pituuteen, kun jonon pisteitä on kokonaisuudessaan paljon ($n \to \infty$). Jonon x_n tasaisesti jakautuminen todistetaan Lauseessa 2.13. Tätä ennen todistetaan kuitenkin Lemma 2.11, jota hyödynnetään Lauseen 2.13 todistuksessa. Lemman 2.11 ja Lauseen 2.13 todistukset mukailevat [2]:n todistuksia.

Lemma 2.11. *Jono $(\{x_n\})_n$ on tasaisesti jakautunut välillä $[0, 1[$ jos ja vain jos*

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \{x_n\} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \{x_n + a\} \right) = 0 \tag{1}$$

millä tahansa reaaliluvulla a.

Todistus. Jonon tasaisesti jakautuminen on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left\{n \leqslant N : \{x_n\} \in [0, b[\ \right\}}{N} = b$$

mille tahansa $b \in [0, 1[$. Kiinnitetään N ja merkitään

$$A = \{n \leqslant N : \{x_n\} \in [0, b[\}$$

ja

$$B = \{n \leqslant N : \{x_n\} \in [b, 1[\}\,.$$

Jos $n \in A$, niin $\{x_n\} < \{b\} = b$, joten $\{x_n - b\} = \{x_n\} + 1 - b$. Jos $n \in B$, niin $\{x_n\} \geqslant \{b\} = b$, joten $\{x_n - b\} = \{x_n\} - b$. Täten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n - b\} &= \frac{1}{N}\sum_{n\in A}(\{x_n\} + 1 - b) + \frac{1}{N}\sum_{n\in B}(\{x_n\} - b) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\} + \frac{1}{N}\sum_{n\in A} 1 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(-b) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\} + \frac{\#A}{N} + \frac{1}{N}\cdot N \cdot (-b) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{x_n\} + \frac{\#\left\{n \leqslant N : \{x_n\} \in [0, b[\ \right\}}{N} - b
\end{aligned}$$

Kun N kasvaa rajatta ja jono oletetaan tasaisesti jakautuneeksi, niin Määritelmän 2.4 mukaan $\frac{\#\{n\leqslant N:\{x_n\}\in[0,b[\ \}}{N} \to b$. Täten

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\{x_n - b\} - \sum_{n=1}^{N}\{x_n\}\right) = b - b = 0.$$

Toisaalta, kun oletetaan ehto (1), niin saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left\{n \leqslant N : \{x_n\} \in [0, b[\ \right\}}{N} &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\{x_n - b\} - \sum_{n=1}^{N}\{x_n\}\right) + b \\
&= 0 + b \\
&= b
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.12. Edellisessä Lemmassa ehdon (1) tulee päteä millä tahansa reaaliluvulla a. Todistuksessa reaaliluku b oli kuitenkin väliltä $[0, 1[$. Näin voitiin tehdä, sillä kaikki termit $\{x_n + a\}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\{x_n + b\}$, missä $b \in [0, 1[$.

Lause 2.13. *Jos* $\tilde{\alpha}$ *on irrationaaliluku, niin jono* $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$ *on tasaisesti jakautunut välillä* $[0, 1[$.

Todistus. Olkoon $0 < a < 1$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin Lauseen 2.7 perusteella löydetään sellainen kokonaisluku $k > 0$, että $a < \{k\tilde{\alpha}\} < a + \epsilon$. Osoitetaan ensin, että tällöin kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee, että

$$\{n\tilde{\alpha}\} < \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \epsilon.$$

Jos $\{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\} \geqslant 1$, niin tällöin $\{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} \geqslant 1 - \{k\tilde{\alpha}\} = \{-k\tilde{\alpha}\}$, jolloin

$$\begin{aligned}\{n\tilde{\alpha}\} &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha} - (-k\tilde{\alpha})\} \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-k\tilde{\alpha}\} \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - (1 - \{k\tilde{\alpha}\}) \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\} - 1.\end{aligned}$$

Nyt $\{k\tilde{\alpha}\} < a + \epsilon$ ja $\{-a\} = 1 - \{a\} = 1 - a$, joten

$$\begin{aligned}\{n\tilde{\alpha}\} = \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\} - 1 &< \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + a + \epsilon - 1 \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - (1-a) + \epsilon \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-a\} + \epsilon \\ &\leqslant \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \epsilon\end{aligned}$$

Viimeisessä käytettiin tietoa, että

$$\{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} = \begin{cases}\{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-a\}\,, & \text{jos } \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} \geqslant \{-a\} \\ \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-a\} + 1, & \text{jos } \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} < \{-a\}\end{cases}$$

Jos $\{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\} < 1$, niin $\{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} < 1 - \{k\tilde{\alpha}\} = \{-k\tilde{\alpha}\}$, jolloin

$$\begin{aligned}\{n\tilde{\alpha}\} &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha} - (-k\tilde{\alpha})\} \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-k\tilde{\alpha}\} + 1 \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - (1 - \{k\tilde{\alpha}\}) + 1 \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\}\,.\end{aligned}$$

Koska $\{k\tilde{\alpha}\} > a$, niin $\{-a\} = 1 - a > 1 - \{k\tilde{\alpha}\} > \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\}$. Tällöin nähdään, että

$$\begin{aligned}\{n\tilde{\alpha}\} &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} + \{k\tilde{\alpha}\} \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - 1 + a + 1 + \{k\tilde{\alpha}\} - a \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha}\} - \{-a\} + 1 + \{k\tilde{\alpha}\} - a \\ &= \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \{k\tilde{\alpha}\} - a\end{aligned}$$

Koska $\{k\tilde{\alpha}\} < a + \epsilon$, niin saadaan

$$\{n\tilde{\alpha}\} = \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \{k\tilde{\alpha}\} - a < \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \epsilon.$$

Täten kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee,

$$\{n\tilde{\alpha}\} < \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \epsilon \tag{2}$$

kun $0 < a < 1, \epsilon > 0$ ja $k > 0$ on kokonaisluku, jolla $a < \{k\tilde{\alpha}\} < a + \epsilon$.

Arvioidaan seuraavaksi summien $\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\}$ ja $\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}$ erotusta käyttäen edellä osoitettua tulosta. Emme kuitenkaan voi hyödyntää tulosta suoraan summiin, vaan summia täytyy hieman muokata. Hajotetaan molemmat summat kahteen osaan

$$\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\} = \sum_{n=1}^{k} \{n\tilde{\alpha}\} + \sum_{n=k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\}$$

ja

$$\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\} = \sum_{n=1}^{N-k} \{n\tilde{\alpha} + a\} + \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}.$$

Muokataan vielä jälkimmäisen summan ensimmäistä osaa vaihtamalla summausindeksi $(n-k)$:ksi. Tällöin summauksessa n käy $(k+1)$:stä N:nnään. Summasta tulee siis

$$\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\} = \sum_{n=k+1}^{N} \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}.$$

Summien erotus on nyt

$$\sum_{n=1}^{k} \{n\tilde{\alpha}\} + \sum_{n=k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\} - \left(\sum_{n=k+1}^{N} \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} + \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \{n\tilde{\alpha}\} + \left(\sum_{n=k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\} - \sum_{n=k+1}^{N} \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\} \right) - \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \{n\tilde{\alpha}\} + \sum_{n=k+1}^{N} (\{n\tilde{\alpha}\} - \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\}) - \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}\,.$$

Arvioidaan erotusta nyt ylöspäin. Ensimmäisessä summassa on k termiä, joista jokainen on aidosti pienempää kuin 1. Keskimmäisessä summassa on $N-k$ termiä, joista jokainen on (2):n perusteella aidosti pienempää kuin ϵ. Viimeisessä summassa jokainen termi on vähintään nollaa.

Saadaan siis

$$\sum_{n=1}^{k} \{n\tilde{\alpha}\} + \sum_{n=k+1}^{N} (\{n\tilde{\alpha}\} - \{(n-k)\,\tilde{\alpha} + a\}) - \sum_{n=N-k+1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}$$

$$< k + (N-k)\epsilon + 0 < k + N\epsilon.$$

Merkitään $S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha}\} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \{n\tilde{\alpha} + a\}$.

Tällöin nähdään, että

$$\limsup_{N\to\infty} S_N \leqslant \epsilon$$

Vastaavasti valitsemalla k siten, että $a - \epsilon < \{k\tilde{\alpha}\} < a$ nähdään, että

$$\liminf_{N\to\infty} S_N \geqslant -\epsilon$$

Näin ollen

$$-\epsilon \leqslant \liminf_{N\to\infty} S_N \leqslant \limsup_{N\to\infty} S_N \leqslant \epsilon.$$

Koska ϵ oli mielivaltainen, niin

$$\liminf_{N\to\infty} S_N = 0 = \limsup_{N\to\infty} S_N,$$

joten S_N suppenee ja

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 0.$$

Täten Lemman 2.11 nojalla jono $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$ on tasaisesti jakautunut välillä $[0,1[$. □

Esimerkki 2.14. Testataan jonon tasaisesti jakautumista valitsemalla irrationaaliluvuksi $\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja osaväliksi I =]0,25; 0,5[. Osavälin pituus on nyt siis 0,25. Lasketaan jonon pisteitä N kappaletta. Seuraavassa taulukossa on esitetty valittuun osaväliin kuuluvien jonon alkioiden lukumäärät eri N:n arvoilla.

N	$\#\{x_n \in I\}$	$\frac{\#\{x_n \in I\}}{N}$
5	1	0,2
15	3	0,2
25	6	0,24
150	37	0,2466...
1000	250	0,25
125000	31249	0,249992
500000	124999	0,249998
986379	246594	0,24999924

Taulukosta nähdään, että suhde $\frac{\#\{x_n \in I\}}{N}$ on suurilla N:n arvoilla lähellä välin I pituutta. On kuitenkin hyvä huomata, että se mitä tässä tarkoitetaan suurilla N:n arvoilla, riippuu täysin irrationaaliluvusta $\tilde{\alpha}$. Jollakin $\tilde{\alpha}$:lla miljoona ei saatakaan olla kovin suuri N, kuten seuraavasta tullaan huomaamaan.

Jos irrationaaliluvuksi valitaan $\tilde{\alpha} = \frac{11482}{8119\sqrt{2}}$ ei miljoona pistettä enää riitäkään tasaisesti jakautumisen havainnollistamiseen. Luku $\tilde{\alpha}$ on muodostettu jakamalla Esimerkin 2.10 taulukossa esitetty murtoluku $\frac{11482}{8119}$ luvulla $\sqrt{2}$. Tällöin $\tilde{\alpha}$ on hieman suurempi kuin 1, mutta kuitenkin hyvin lähellä 1:stä. Nyt jonon x_n pisteet liikkuvat siis "hitaasti"eteenpäin yksikkövälillä. Kun pisteitä lasketaan miljoona, päästään yksikkövälin kohtaan, joka on noin 0,00757283. Yksikään ensimmäisestä miljoonasta pisteestä ei siis kuulu tarkasteltavalle välille I. Voidaan nyt myös arvioida, että väli I saavutetaan vasta noin 33 miljoonalla pisteellä ja, että jono päätyy yksikkövälin alkupäähän uudestaan noin 132 miljoonan pisteen jälkeen. Tässä N:n täytyy siis olla paljon suurempi kuin $\frac{1}{\sqrt{2}}$:n tapauksessa, jotta nähtäisiin suhteen $\frac{\#\{x_n \in I\}}{N}$ olevan lähellä välin I pituutta.

2.4 Yksikköympyrä ja yksikköväli

Edellä on tarkasteltu irrationaalisia kiertoja yksikkövälillä $[0,1[$ ja erityisesti jonoa $x_n = \{n\tilde{\alpha}\}$. Esitetyt tulokset pätevät kuitenkin myös yksikköympyrällä, sillä yksikköväli ja yksikköympyrä voidaan samaistaa. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaista yksikkövälin lukua $\tilde{\alpha}$ vastaa täsmälleen yksi yksikköympyrän piste (x, y) (ja päinvastoin). Yksikköympyrän pisteet (x, y) ovat reaalilukupareja, joille $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Toisin sanoen yksikköympyrä on joukko niistä kompleksiluvuista, joiden pituus on 1. Näin ollen samaistus saadaan aikaiseksi seuraavalla kuvauksella:

$$\phi\colon\ [0,1[\ \mapsto S^1,\ \phi\,(\tilde{\alpha}) = e^{2\pi i\tilde{\alpha}} = \cos(2\pi\tilde{\alpha}) + i\sin(2\pi\tilde{\alpha}),$$

joka on selvästi bijektio. Irrationaaliset kierrot ovat siis tiheitä ja tasaisesti jakatuneita myös yksikköympyrällä.

Lähdeluettelo

[1] Haskell Curry (https://math.stackexchange.com/users/39362/haskell-curry): *Multiples of an irrational number forming a dense subset*, URL (version: 2014-07-21): https://math.stackexchange.com/q/272713.

[2] Zorzi, A.: *An elementary proof for the equidistribution theorem*, Mathematical Intelligencer (Volume 37, Issue 3, 2015), Springer Science+Business Media New York.