Puiden karakterisointi

LuK-tutkielma

Airta Ella
2502661
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2018

Sisältö

Johdanto

Koko tutkielma pohjautuu seuraavaan teokseen: Matousek, Nesetril: *Invitation to discrete mathematics.* Oxford OUP, Oxford, 2008 [1]. Tämä teos käsittelee diskreettiä matematiikkaa. Tutkielmassa on käsitelty kirjasta kahta kappaletta ja niitäkin vain osaksi. Kirjan kappaleesta 4. *Graphs: an introduction* on poimittu tarvittavia tietoja verkkoteorian johdatteluun ja kappaleesta 5. *Trees* tiedot puiden karakterisoinnista. Tutkielman ensimmäinen kappale siis käsittelee yleisesti verkkoteoriaa ja toisessa kappaleessa syvennytään verkkojen erityistapaukseen eli puihin. Tutkielman tavoitteena on esitellä verkon ja puun määritelmä sekä lause puiden karakterisoinnista.

1 Johdatus verkkoteoriaan

1.1 Verkko käsitteenä

Monet erilaiset käytännön ongelmat sekä matemaattiset ja teoreettisen tietojenkäsittelytieteen ongelmat voidaan koota kaavioon, joka koostuu kahdesta asiasta:

- (äärellisestä) joukosta pisteitä ja
- viivoista, jotka yhdistävät joitakin näistä pisteistä.

Pisteet voivat esimerkiksi esittää kaupungissa olevia kadun risteyksiä ja viivat taas itse katuja. Myös kunnallinen liikenneverkko tai rautatieverkosto on yleensä kuvattu tämän tyyppisesti (ks. Kuva 1) ja usein myös sähköisellä kaaviolla on samanlaisia piirteitä. Tällaisissa tapauksissa pisteitä on tunnetusti kutsuttu solmuiksi ($nodes, vertices$) ja viivoja taas kaariksi ($arcs, edges$).
Jos jätämme pituuden, muodon ja muut ominaisuudet huomiotta viivoista ja kiinnitämme huomion ainoastaan siihen, että mitkä pisteparit ovat yhdistyneet ja mitkä eivät, päädymme matemaattiseen käsitteeseen verkosta ($graph$). Yksinkertaisuudestaan huolimatta verkko on yksi diskreetin matematiikan avaintekijöitä.

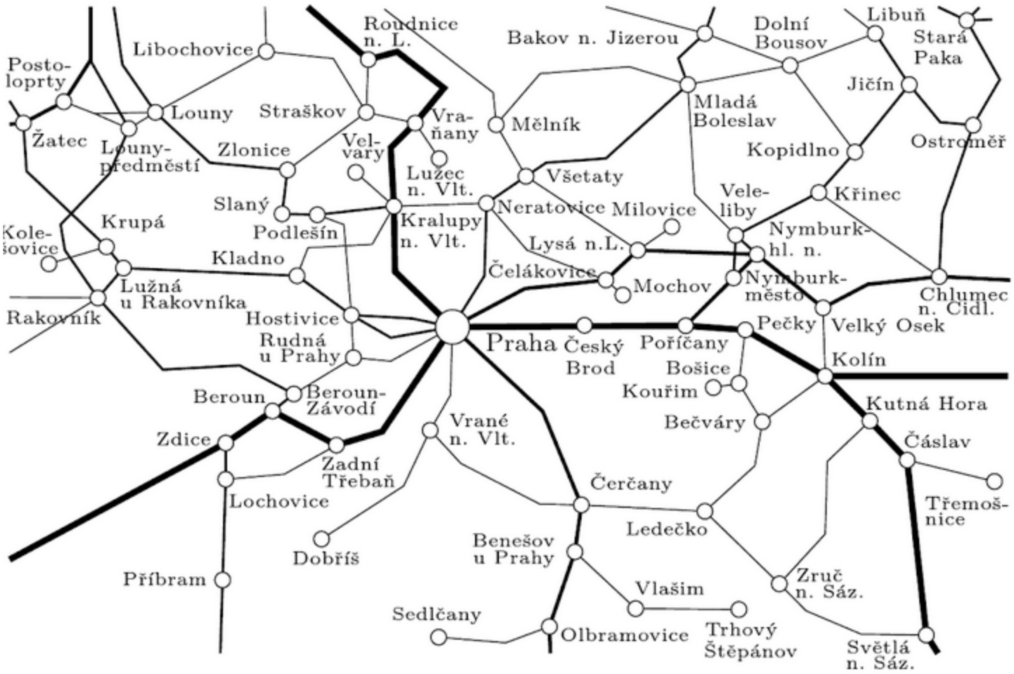
Määritelmä 1.1. Verkko G on järjestetty pari (V, E), missä V on jokin (äärellinen) joukko ja E on joukko kaksi-alkioisia osajoukkoja joukosta V. Joukon V alkioita kutsutaan solmuiksi ja joukon E alkioita kaariksi.

Huomautus 1.2. Kaikki tämän tutkielman verkot ovat äärellisiä.

1.2 Verkon merkintöjä

Jos haluamme osoittaa, että jollakin verkolla G on joukko V solmuina ja joukko E kaarina, merkitään $G = (V, E)$.
Jos puhumme jostain tunnetusta verkosta G ja haluamme viitata sen solmuihin, merkitään $V(G)$. Vastaavasti käytetään merkintää $E(G)$ joukon G kaarista.
Hyödyllinen merkintä on myös $\binom{V}{2}$ kaikille joukon V osajoukoille, jotka ovat muotoa $\{a, b\}$, missä $a \neq b$ ja $a, b \in V$. Tällaisia joukkoja kutsutaan *kaksioiksi*. Lyhyesti voidaan sanoa, että verkko on pari (V, E), missä $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Seuraava terminologia havainnollistaa verkkoa paremmin: Jos $\{u, v\}$ on jokin verkon G kaari, sanotaan, että solmut u ja v ovat *vierekkäiset* joukossa G tai u on solmun v *naapuri*. Vastaavasti v on solmun u naapuri.



Kuva 1: Kaavio osasta Tsekin rautatieverkoston alueesta noin 150×100 km Prahan ympäriltä

Verkot ovat yleensä kuvattu tasossa. Verkon solmut ovat sovittuja pisteitä tasossa (piirretty pisteinä, pieninä ympyröinä jne.) ja kaaret ovat kuvattu vastaavia pistepareja yhdistävillä suorilla tai erilaisilla käyrillä viivoilla, jotka ovat siis solmujen välejä. Näin saadaan tällaisia kuvia:

Kuva 2: kolme verkkoa

Verkko voidaan esittää monella muullakin tavalla kuin piirrettynä kuvana, esimerkiksi tietokoneen muistissa verkkoa ei talleneta kuvana. Yksi verkko voi olla myös kuvattu monin eri tavoin. Esimerkiksi kuvassa kaksi ensimmäiset kaksi verkkoa esittävät samaa verkkoa, jonka solmut ovat $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja kaaret ovat $\big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\big\}$.

Rautatieverkosto Kuva 1. havainnoillistaa sitä, kuinka verkon käsite on epätriviaali abstrakti käsite ja pelkistetty kuvaus oikeista elämäntilanteista. Rautatieverkosto kuvana muistuttaa verkon piirrosta, mutta on muutamia kohtia, missä radat haarautuvat muuallakin kuin asemakohtien eli ns. solmujen kohdalla. Rautatieverkostokaavioon voidaan myös haluta laittaa enemmän informaatiota kuin radat ja asemat esim. junien aikataulut ja reitit, mikä ei taas sovellu verkkoon. Käytännön verkoissa on siis pidemmälle vietyä informaatiota, mutta verkon käsite on kuitenkin käytännöllinen pohja tällaisille mateemaattisille malleille. Kun verkkoa käytetään merkittävänä osana mallia, niin saadaan hyvin kehittynyt matemaattinen teoria käyttöön, mistä taas saadaan lisää ominaisuuksia ja toimivia algoritmeja käyttöön.

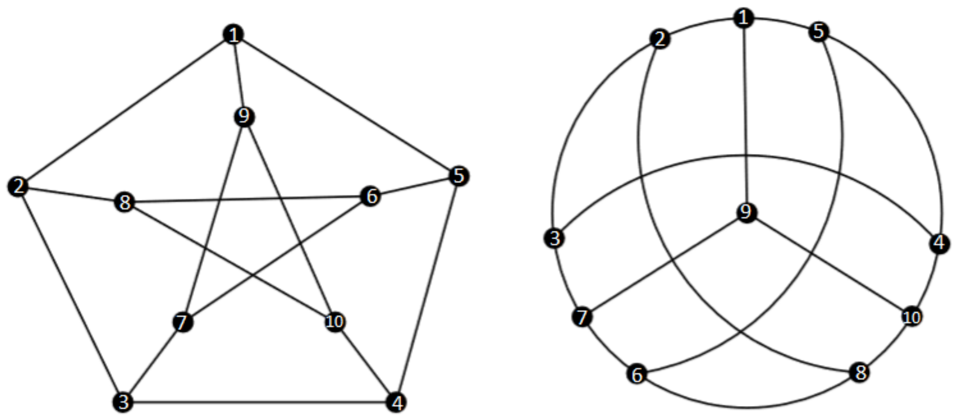
1.3 Verkkoisomorfismi

Kahta verkkoa G ja G' pidetään identtisinä tai samoina, jos niillä on sama joukko solmuja sekä sama joukko kaaria. Eli $G = G'$ tarkoittaa $V(G) = V(G')$ ja $E(G) = E(G')$. Toisaalta monilla verkoilla saattaa olla sama rakenne, mutta ne eroavat kaarien ja solmujen nimityksillä. Tämä kiteytyy käsitteeseen isomorfismi.

Määritelmä 1.3. Kahta verkkoa $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ sanotaan isomorfisiksi, jos on olemassa sellainen bijektio $f : V \to V'$, että $\{x, y\} \in E$, jos ja vain jos $\{f(x), f(y)\} \in E'$ kaikilla $x, y \in V, x \neq y$. Tätä bijektiota f sanotaan verkkojen G ja G' väliseksi isomorfismiksi. Merkitään $G \cong G'$.

Esimerkki 1.4. (a) Katso edellisestä kappaleesta kuva 2. ja siitä kaksi ensimmäistä verkkoa.

(b) Verkko $G = (V, E)$ ja verkko $G' = (V', E')$



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = V'$$

$$E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{4, 5\},$$
$$\{4, 10\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\big\} = E'$$

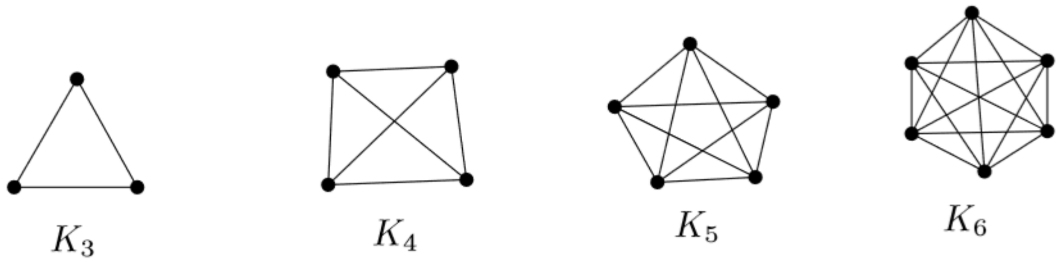
1.4 Tärkeitä verkkoja

Seuraavaksi määritellään muutamia erilaisia verkkoja, joita kohdataan usein verkkoteoriassa.

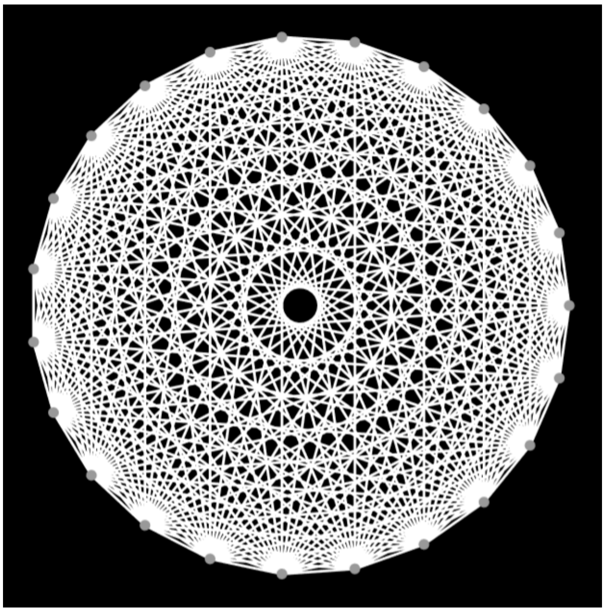
Määritelmä 1.5. *Täydellinen verkko*
Verkko, jonka jokaisesta solmusta on kaari verkon jokaiseen muuhun solmuun. Täydellisestä verkosta K, jossa on n solmua, käytetään merkintään K_n. Solmut ja kaaret merkitään seuraavasti :

$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E = \binom{V}{2}.$$

Esimerkki 1.6. Täydellisiä verkkoja



Kuva myös verkosta K_{23} ja sen kaikista 253 kaaresta:



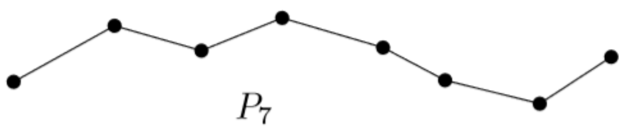
Määritelmä 1.7. *Polku*

Verkon $G = (V, E)$ poluksi sanotaan jonoa $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, missä $v_0, v_1, \ldots, v_t$ ovat verkon G eri solmuja ja kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t$, on olemassa sellaiset kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. Polku on kuin matkaloki, jossa reittiä kuljetaan pisteestä pisteeseen poikkeamatta reitiltä tai siihen palaamatta ja käydyt solmut ja kaaret tallennetaan jonoon kerran. Polkua P, jolla on n solmua merkitään P_n.

Polun pituudeksi t sanotaan polun kaarien lukumäärää. Huomaa, että jos polku on yhden solmun mittainen, niin sen pituus $t = 0$.

Esimerkki 1.8. Polku P_n, kun $n = 7$

$$V = \{0, 1, \ldots, 7\}, \quad E = \{\{i-1, i\}\} : i = 1, 2, \ldots, 7\}.$$

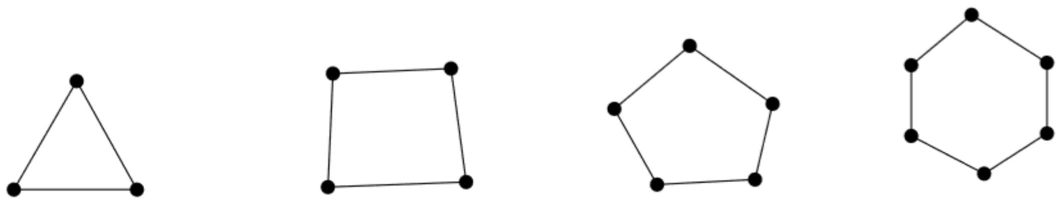


P_7

Määritelmä 1.9. *Sykli*
Verkon G sykliksi sanotaan jonoa $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_0)$, missä $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ ovat verkon G eri solmuja ja kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t-1$, on olemassa sellaiset kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ sekä kaari $e_t = \{v_{t-1}, v_0\} \in E(G)$ *(Toisin sanoen ensimmäinen solmu ja viimeinen solmu yhdistyvät)* ja luku $t \geq 3$. Luku t on myös syklin pituus. Sykliä C, jossa on n solmua merkitään C_n. Jos verkossa ei ole sykliä, se on syklitön.

Esimerkki 1.10. Sykli C_n

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i, i+1\}\} : i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

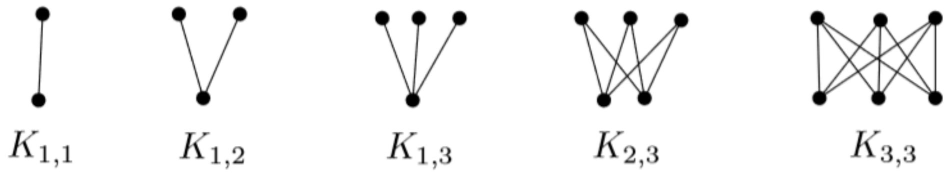


C_3 C_4 C_5 C_6

Määritelmä 1.11. Verkkoa G sanotaan *kaksiosaiseksi*, jos joukko $V(G)$ voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon V_1 ja V_2 niin, että verkon G jokainen kaari yhdistyy jokaiseen joukon V_1 solmuun ja jokaiseen joukon V_2 solmuun. Matemaattisin symbolein kirjoitettuna: $E(G) \subseteq \{\{v, v'\} : v \in V_1, v' \in V_2\}$. Tällaisia joukkoja V_1 ja V_2 kutsutaan joskus verkon G *luokiksi*.

Esimerkki 1.12. *Täydellinen kaksiosainen verkko* $K_{n,m}$:

$$V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}, \quad E = \{\{u_i, v_j\}\} : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$



1.5 Aliverkot, yhtenäisyys ja komponentit

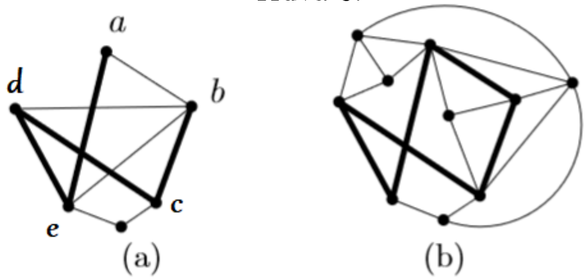
Seuraava määritelmä täsmentää ajatuksen, kuinka verkko voi sisältyä toiseen verkkoon.

Määritelmä 1.13. Olkoon G ja G' verkkoja. Sanotaan, että G on verkon G' aliverkko, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) \subseteq E(G')$. Sanotaan, että G on verkon G' indusoitu aliverkko, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$

Toisin sanoen: Verkon G' indusoitu aliverkko saadaan poistamalla joitakin solmuja verkosta G' ja poistamalla kaikki ne kaaret, jotka oli yhdistyneet poistettuihin solmuihin. Aliverkon saadakseen voidaan myös poistaa joitain kaaria, mutta kuitenkin niin, ettei yhtään päätesolmua poisteta.

Esimerkki 1.14. Kuvassa 3 (a) on verkko ja sen aliverkko polku $P_4 = (V = \{a, b, c, d, e\}, E = (\{a, e\}, \{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\})$. Polku on piirrettynä paksulla viivalla. Tämä aliverkko ei ole indusoitu, kaaren $\{a, b\}$ takia. Kuvassa 3 (b) on taas indusoitu aliverkko, joka on isomorfinen syklin C_5 kanssa, joka on piirretty paksulla viivalla.

Kuva 3:



Määritelmä 1.15. Yhtenäisyys
Sanotaan, että verkko G on *yhtenäinen*, jos kaikilla $x, y \in V(G)$ löydetään polku solmusta x solmuun y verkossa G.

Esimerkki 1.16. Kuvassa (a) on yhtenäinen verkko ja kuva (b) on esimerkki epäyhtenäisestä verkosta.

(a) (b)

Yhtenäisyys voidaan myös määritellä toisellakin tavalla, mitä varten määritellään seuraavat käsitteet.

Määritelmä 1.17. Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Jonoa $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ sanotaan *kävelyksi* verkossa G (laajemmin sanottuna kävelymatka t solmusta v_0 solmuun v_t), missä $v_0, \ldots, v_t$ ovat solmuja, jos on olemassa sellaiset kaaret $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ kaikilla $i = 1, \ldots, t$. Kävelyssä jotkin solmut ja kaaret saattavat toistua. Toisin sanoen kävely on matkaloki, jossa on voitu kulkea samasta solmusta tai kaaresta useita kertoja.

Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $V(G)$ asettamalla $x \sim y$ jos ja vain jos on olemassa kävely solmusta x solmuun y verkossa G.

Määritelmä 1.18. Olkoon $V = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \ldots \dot\cup V_k$ solmujoukon V jako, joka jakaa relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkiin. Verkon G aliverkkoja, jotka on indusoitu joukoilla V_i, sanotaan verkon G komponenteiksi.

Seuraava huomio liittää komponenttien määritelmän aikasempaan määritelmään yhtenäisestä verkosta.

Huomio 1.19. *Kaikki komponentit missä tahansa verkossa ovat yhtenäisiä, ja verkko on yhtenäinen, jos ja vain jos sillä on vain yksi komponentti.*

Todistus. Selvästi yhtenäisellä verkolla on vain yksi komponentti, se itse. Toisaalta mitkä tahansa kaksi solmua x, y samassa komponentissa verkossa G voi olla yhdistetty kävelyllä. Minkä tahansa kävelyn solmusta x solmuun y lyhintä mahdollista reittiä on oltava polku. □

Määritelmä 1.20. Verkkoa G sanotaan *k-solmu-yhtenäiseksi*, jos sillä on ainakin $k+1$ solmua ja se pysyy yhtenäisenä, vaikka siitä poistettaisiin $k-1$ solmua. Verkkoa G kutsutaan *k-kaari-yhtenäiseksi*, jos siitä poistamalla $k-1$ kaarta saadaan yhä yhtenäinen verkko. Verkon G *solmuyhtenäisyys* on maksimi k, kun verkko on k-solmu-yhtenäinen, vastaavasti määräytyy *kaariyhtenäisyys*.

Esimerkki 1.21. (Kahdesti yhtenäinen) Verkkoa G sanotaan kahdesti yhtenäiseksi, jos sillä on vähintään kolme solmua ja poistamalla minkä tahansa solmuista päädymme edelleen yhtenäiseen verkkoon.

Määritelmä 1.22. (Joitain verkkojen laskutoimituksia)
Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Määritellään erilaisia uusia verkkoja, jotka on saatu verkosta G:

- (kaarien poisto)
  $G - e = (V, E \backslash \{e\})$, missä $e \in E$ on verkon G kaari.

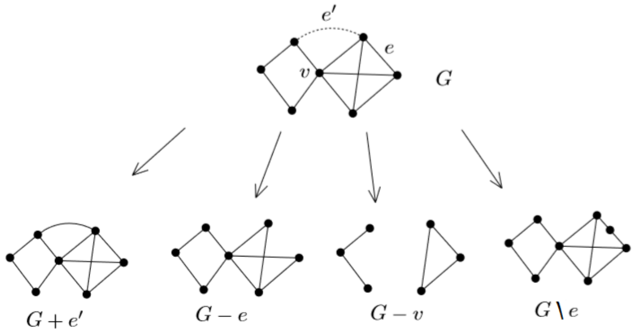
- (Kaaren lisäys)
  $G + \bar{e} = (V, E \cup \{\bar{e}\})$, missä $\bar{e} \in \binom{V}{2} \backslash E$ on solmu pari, joka ei ole verkon G alkuperäinen kaari.

- (Solmun poisto)
  $G - v = (V \backslash \{v\}, \{e \in E : v \notin e\})$, missä $v \in V$ (Poistetaan solmu v ja kaikki sen kaaret, joiden päätepiste se oli);

- (Kaaren jakaminen)
  $G \backslash e = \Big(V \cup \{z\}, (E \backslash \big\{\{x, y\}\big\}) \cup \big\{\{x, z\}, \{z, y\}\big\}\Big)$,
  missä $e = \{x, y\} \in E$ on kaari ja $z \notin V$ on uusi solmu (Piirretään uusi solmu z kaareen $\{x, y\}$).

  Sanotaan, että verkko G' on verkon G jako, jos verkko G' on isomorfinen minkä tahansa verkkon kanssa, joka saadaan verkosta G onnistuneella kaaren jakamisella.

Kuva 4: esimerkkejä näistä laskutoimituksista



1.6 Verkon pistemäärä

Olkoon G verkko ja olkoon v solmu verkossa G. Kaarien, jotka yhdistyvät solmuun v verkossa G, lukumäärää merkitään symbolilla $deg_G(v)$. Lukua $deg_G(v)$ sanotaan solmun v asteeksi verkossa G. Toisin sanoen solmun aste on siis solmuun yhdistyvien kaarien lukumäärä.

Merkitään verkon G solmuja seuraavasti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Jonoa:

$$(deg_G(v_1), deg_G(v_2), \ldots, deg_G(v_n))$$

sanotaan verkon *astejonoksi* tai verkon G *pistemääräksi.* Valitsemalla eri numeroinnit solmuihin samassa verkossa saadaan yleensä useita erilaisia numerojonoja, jotka eroavat niiden termien järjestyksellä. Näin ollen ei voida erottaa kahta pistemäärää, jos toinen niistä voidaan saada toisesta uudelleenjärjestämällä numeroiden järjestys. Pistemäärä kirjoitetaan yleensä kasvavassa järjestyksessä niin, että pienin aste tulee ensin.

Esimerkki 1.23. Kahdella seuraavalla verkolla, toinen epäyhtenäinen ja toinen yhtenäinen(sykli), on sama pistemäärä $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$:

Propositio 1.24. *Jokaiselle verkolle $G = (V, E)$ on voimassa*

$$\sum_{v \in V} deg_G(V) = 2|E|.$$

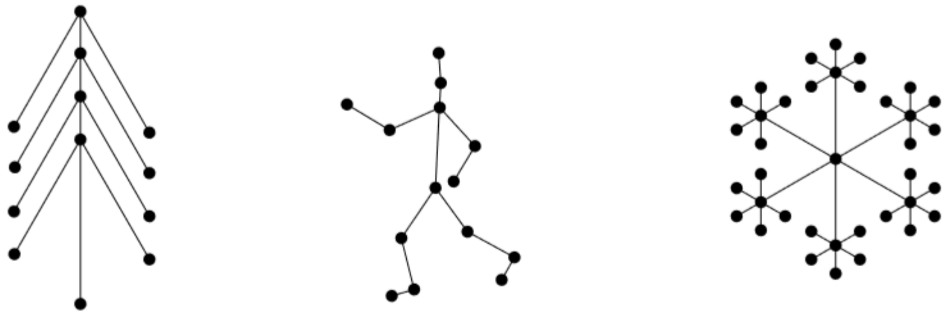
Todistus. Solmun v aste on kaarien lukumäärä, jotka ovat yhdistyneet siihen. Jokainen kaari sisältää 2 solmua, joten summaamalla kaikki asteet yhteen saadaan kaarien lukumäärä kaksinkertaisena. $\square$

2 Puut

2.1 Puiden määritelmä ja karakterisointi

Matematiikassa puut eivät ole sama asia kuin luonnossa kasvavat puut. Matematiikan nimitykset kuitenkin yleensä tulevat arkikielestä ja ne jollain tapaa muistuttavat sanan toista merkitystä. Puut ovat laaja alue verkkoteoriassa ja ne esiintyvät myös muissa matematiikan haaroissa sekä tietojenkäsittelytieteissä.

Verkkoteoriassa puu on samankaltainen verkko kuin seuraavat piirrustukset:



Määritelmä 2.1. Puu on yhtenäinen verkko ilman sykliä.

Tämä ei ole ainoa tapa määritellä puita, myöhemmin määritellään puu neljällä yhtäpitävällä tavalla. Miksi puu pitäisi sitten määritellä monella eri tavalla? Ensinnäkin juuri annettu määritelmä on jokseenkin sopimaton monestakin näkökulmasta. Esimerkiksi, ei ole selvää, miten voi tarkistaa onko verkko puu vai ei. Epäyhtenäisyyden voi varmistaa yksinkertaisella algoritmilla, mutta syklien olemassaolon päättäminen näyttää olevan ongelma. Puun vaihtoehtoiset määritelmät antavat todella suoraviivaiset algoritmiset tunnistustavat puille ja ne kertovat useita mielenkiintoisia ominaisuuksia puista, mitkä voivat olla hyödyllisiä käytössä.

Toiseksi, vaikka monen yhdenvertaisen määritelmän lukeminen ei ole välttämättä kovin mielekästä, se tarjoaa hyvää harjoitusmateriaalia lukijalle omiin todistuksiin. Erilaiset johtopäätökset todistuksessa eivät ole valtavan vaikeita, mutta ne eivät ole myöskään täysin helppoja. Omat yritykset todistaa joitakin näistä johtopäätöksistä luo monia mahdollisuuksia tehdä ja löytää virheitä tai aukkoja todistuksista.

Kolmanneksi, yhtäpitävä puiden karakterisointi, mikä on esitelty alapuolella, on yksinkertainen, mutta se näyttää mallia hyvästä matemaattisen kohteen karakterisoinnista, mitä tulisi etsiä; vaikeilla merkittävillä lauseilla useilta eri matematiikan alueilta on muodollisesti samanlainen malli.

Seuraavaksi esitellään puun yhtäpitävät määritelmät. Merkittävin niistä on varmaan se, jossa sanotaan, että yhtenäisten verkkojen keskuudessa puu voidaan yksinkertaisesti tunnistaa laskemalla sen kaaret ja solmut.

Lause 2.2. *(Puu karakterisointi)*
Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä verkolle $G = (V, E)$:

(i) *G on puu.*

(ii) *(polkujen yksikäsitteisyys)*
Kaikille solmuille $x, y \in V$ *on olemassa vain yksi polku solmusta* x *solmuun* y.

(iii) *(Pienin mahdollinen yhtenäinen verkko)*
Verkko G on yhtenäinen, ja jos siitä poistaa yhdenkin kaaren, se ei ole enää yhtenäinen verkko.

(iv) *(Suurin mahdollinen verkko ilman sykliä)*
Verkko G ei sisällä sykliä ja jokainen verkko, joka saadaan verkosta G lisäämällä siihen kaari sisältää syklin.

(v) *(Eulerin kaava)*
G on yhtenäinen ja $|V| = |E| + 1$.

Huomaa, että tämä lause ei ainoastaan kuvaile erillaisia puiden ominaisuuksia, niin kuin "jokaisella puulla, jolla on n solmua on $n - 1$ kaarta", mutta myös listaa yhtäpitävät ominaisuudet määritelmään 2.1, joten esimerkiksi tästä saadaan, että "Verkko, jolla on n solmua on puu, jos ja vain jos se on yhtenäinen ja sillä on $n - 1$ kaarta".

Aloitetaan lauseen 2.2 todistaminen. On tärkeää järjestää todistus sopivaksi, koska lauseessa on monta kohtaa todistettavaksi. Perusidea kaikissa kohdissa on edetä induktion mukaan kyseisen verkon solmujen määrässä, ja poistaa solmut, joissa on yksi kaari eli yhden asteen solmut induktiivisessa vaiheessa. Muutamalla yksinkertaisella aputuloksella päästään käsiksi tähän induktiotodistukseen.

Määritelmä 2.3. Yhden kaaren solmuja verkossa G sanotaan verkon G *päätesolmuksi* tai verkon G *lehdeksi*.

Lemma 2.4. *(Lehtilemma) Jokainen puu, jolla on vähintään kaksi solmua, sisältää ainakin kaksi lehteä.*

Todistus. Olkoon $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ pisin mahdollinen polku puussa $T = (V, E)$. Selvästi polun P pituus on ainakin 1 ja erityisesti $v_0 \neq v_t$. Osoitetaan, että solmut v_0 ja v_t ovat molemmat lehtiä. Tämä voidaan osoittaa ristiriidalla: Jos esim. v_0 ei ole lehti niin on olemassa kaari $e = \{v_0, v\}$ joka sisältää solmun v_0 ja eroaa polun P ensimmäisestä kaaresta $e_1 = \{v_0, v_1\}$. Silloin joko v on yksi polun P solmuista, esim. $v = v_i \quad i \geq 2$ (tässä tapauksessa kaari e ja polun P osa $[v_0, v_i]$ on muodoltaan sykli), tai $v \notin \{v_0, \ldots, v_t\}$ –Siinä tapauksessa voitaisiin P laajentaa lisäämällä siihen kaari e. Kummassakin tapauksessa päädytään ristiriitaan.

□

Seuraavaksi palataan määritelmään1.22: Jos $G = (V, E)$ on verkko ja v sen solmu, niin $G - v$ tarkoittaa verkkoa, joka syntyy verkosta G, kun tästä poistetaan solmu v ja kaikki sen sisältämät kaaret. Siinä tapauksessa, jos solmu v on puun T lehti, verkko $T - v$ saadaan poistamalla solmu v ja sen ainoa kaari.

Lemma 2.5. *(Puunkasvamislemma) Kaksi seuraavaa väittämää ovat yhtäpitäviä verkolle G ja sen lehdelle v:*

(i) G on puu ja v on sen lehti

(ii) $G - v$ on puu

Todistus. Ensin todistetaan väite $(i) \Rightarrow (ii)$. Verkko G on puu ja halutaan osoittaa, että $G - v$ on myös puu. Olkoon x ja y verkon $G - v$ kaksi solmua. Koska G on yhtenäinen, niin x ja y voidaan yhdistää polulla verkossa G. Jos tämä polku sisältää lehden v, niin se on yhdistetty kaarella jompaan kumpaan solmuun x tai y, koska lehdellä on vain yksi kaari ja koska polun määritelmän nojalla yksi kaari voi esiintyä vain kerran polussa. Siispä se on täysin yhtenäinen verkossa $G - v$ ja näin ollen myös $G - v$ on yhtenäinen. Koska verkolla G ei ole sykliä, niin selvästi myöskään verkolla $G - v$ ei ole sykliä ja siten se on puu.

Sitten jäljelle jää todistettavaksi $(ii) \Rightarrow (i)$. Olkoon $G - v$ puu. Kun lisätään lehti v takaisin siihen, niin ei voi syntyä sykliä. Täytyy myös tarkastaa verkon G yhtenäisyys. Koska $G - v$ on yhtenäinen niin, sen yhtenäisyys pysyy ennallaan, jos lehdelle v saadaan polku johonkin solmuun $x \in V(G - v)$. Polku solmuun v solmusta x on saatavissa siten, että tarkastellaan solmun v (ainoaa) naapuria v' verkossa G ja yhdistetään se polulla solmuun x verkossa $G - v$ ja laajennetaan tämä polku kaarella $\{v, v'\}$.

□

Tästä lemmasta seuraa se, että puuta voidaan supistaa pienemmiksi ja pienemmiksi puiksi poistamalla lehdet onnistuneesti. Nyt voidaan käyttää tätä lemmaa hyödyksi.

Lauseen 2.2 todistaminen:

Todistus. Todistetaan, että jokainen väittämä $(ii)-(v)$ on yhtäpitävä väittämän (i) kanssa. Tämä todistaa kaikkien väittämien yhtäpitävyyden. Todistukset etenevät induktiivisesti verkon G solmujen lukumäärän mukaan käyttämällä puunkasvamislemmaa 2.5. Huomataan, että kaikki väittämät ovat päteviä verkolle, jolla on yksi ainoa solmu ja tämä otetaan induktion lähtökohdaksi.

Nyt olkoon G puu, jolla on vähintään 2 solmua, ja olkoon v yksi sen lehdistä ja olkoon v' lehden v ainoa naapuri puussa G. Hyödynnetään lemmaa 2.5 ja oletetaan, että verkko $G-v$ täyttää jo väittämät $(ii)-(v)$; tämä on nyt induktio-oletus.

Väittämästä (i) seuraa, että G ei sisällä sykliä ja on yhtenäinen (määritelmä 2.1). Tästä puolestaan seuraa suoraan se, että väittämä (i) on yhtäpitävä väittämän (ii) kanssa, koska syklittömässä verkossa solmujen välillä ei voi olla kuin yksi polku. Nyt jos puusta G poistaa kaaren, sille jää poluton solmu, joka on ristiriita puun yhtenäisyyden kanssa, joten väittämät (i) ja (iii) ovat myös yhtäpitäviä. Taas, jos puuhun G lisätään pelkästään kaari, eli kaksi sen jo ennestään olevaa solmua yhdistetään, niin siihen syntyy sykli, mikä on taas ristiriidassa puun syklittömyyden kanssa. Näin ollen myös väittämä (iv) saadaan väittämästä (i). Todistetaan vielä $(i) \Rightarrow (v)$. Yhtenäisyys saadaan suoraan puun määritelmästä ja tästä seuraa se, että kaikkien puun G solmujen välillä on polku. Toisin sanoen jokaista kahta solmua, jotka on yhdistetty, vastaa yksi kaari ja näin ollen $|V| = |E| + 1$.

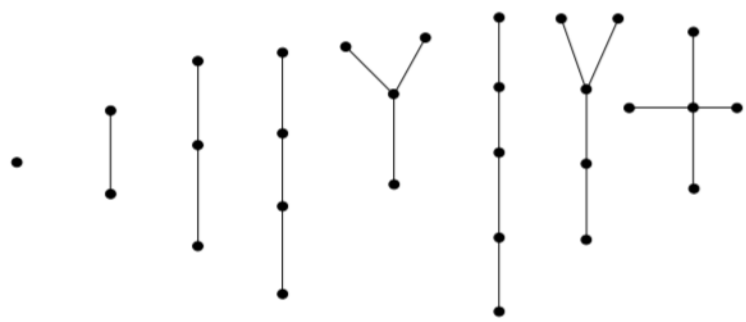
Todistetaan nyt, että jokaisesta väittämästä $(ii)-(v)$ saadaan väittämä (i). Kohdissa (ii) ja (iii) ollaan oletettu jo valmiiksi yhtenäisyys. Väittämän (ii) verkko ei voi sisältää sykliä, koska jos näin olisi, niin voitaisiin löytää sellainen polku $\{x, z, y\} : x, y, z \in V(G)$, mikä taas on ristiriidassa väittämän itsensä kanssa. Väittämälle (iii) syklittömyys tulee siitä, että jos verkosta G ottaa kaaren pois, se ei ole enää yhteinäinen, kun taas, jos syklistä poistaa kaaren, verkko pysyy yhtenäisenä. Näin ollen kohtien $(i)-(iii)$ yhtäpitävyys on todistettu.

Seuraavaksi todistetaan kohta $(iv) \Rightarrow (i)$. Syklittömyys on oletettu molemmissa, joten tarkastetaan vain, että G on yhtenäinen. Jos $x, y \in V(G)$ ovat kaksi solmua, ne ovat joko yhdistetty kaarella tai verkko $G + \{x, y\}$ sisältää syklin, ja kaaren $\{x, y\}$ poistaminen syklistä antaa polun solmusta x solmuun y verkossa G.

Todistetaan vielä viimeinen kohta $(v) \Rightarrow (i)$. Tämä todistetetaan induktiolla perustuen solmujen lukumäärään. Oletetaan, että yhtenäinen verkko G täyttää ehdon $|V| = |E| + 1 \geq 2$. Kaikkien solmujen asteiden summa on siten $2|V| - 2$ proposition 1.6 nojalla. Tämä tarkoittaa, että kaikkien solmujen aste ei voi olla 2 tai suurempi ja koska kaikki solmujen asteet ovat ainakin 1 yhtenäisyyden nojalla, niin on olemassa solmu v, jonka aste on tasan 1, jolloin se on verkon G lehti. Verkko $G' = G - v$ on taas yhteinäinen lemman 2.5 nojalla ja täyttää ehdon $|V(G')| = |E(G')| + 1$. Näin ollen $G - v$ on puu induktio-oletuksen nojalla ja siten myös G on puu.

□

Esimerkki 2.6. Seuraava kuva esittelee kaikki puut, joilla on korkeintaan 5 solmua:



Esimerkki 2.7. Osoita, että verkko $G = (V, E)$, jolla ei ole sykliä ja toteuttaa ehdon $|V| = |E| + 1$, on puu.

Todistus. Tarkastellaan lausetta 2.2 ja huomataan, että ainut tapaus, ettei G olisi puu, olisi se, että verkko G olisi epäyhtenäinen. Tulee siis osoittaa, että verkko on yhtenäinen. Todistetaan tämä induktion avulla.

Perusaskel: Solmuja $n = 1$ tällöin kaaria on 0. Tällöin verkko G täyttää molemmat oletuksen ehdot ja on yhtenäinen sekä näin ollen puu.

Nyt tehdään induktio-oletus ja -väite. Jos syklitön verkko G, jolla on k solmua ja $k - 1$ kaarta, on puu, niin myös verkko G, jolla on $k + 1$ solmua ja k kaarta on puu.

Kun k$\geq$ 2, on verkolla G ainakin yksi kaari e ja olkoon sen solmut v ja u. Tällöin, koska verkko on syklitön, on sillä jokin solmu, joka on asteeltaan 1, eli se on lehti verkossa G. Olkoon v verkon G lehti, jonka ainoa naapuri on tällöin solmu u. Induktio-oletuksen mukainen verkko on nyt $G - v$. Nyt induktio-väitteen verkko on $G - v + v$, joka pysyy yhtenäisenä, kun solmu v liitetään kaarella e sen ainoaan naapuriin u.

Näin ollen verkko G on puu ja induktiotodistus on pätevä. □

Lähdeluettelo

[1] Matousek, Nesetril: *Invitation to discrete mathematics*. Oxford OUP, Oxford, 2008.