Paraabelit ja pisteen etäisyys suorasta lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Ville Virtanen
2373201
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

Johdanto

Matematiikan opetus elää tällä hetkellä muutoksen vaihetta ja yrittää pysytellä yleisen, kiihtyvän kehityksen mukana. Opetettavien aiheiden päivittäminen ei riitä pelkästään, sillä on hankala ennustaa tarkasti tulevaisuuden tietojen ja taitojen tarpeet. Siitä syystä, koulutuksen kannattaa pyrkiä kehittämään opiskelijoiden taitoja käsitellä uutta tietoa ja ratkaista ongelmia mieluummin kuin valmiiden faktojen ja ratkaisutyyppien opettelua. Perinteisen opetuksen, jossa opettaja esittelee teorian ja opiskelijat laskevat, sijaan opiskelijoiden tulisi olla aktiivisessa roolissa rakentamassa omaa matemaattista ymmärrystään ja kehittämässä oppimisen taitojaan. Vuonna 2015 laadittu lukion opetussuunnitelma onkin asettanut tavoitteeksi järjestää sellaista opetusta, jossa opiskelijat muodostavat kysymyksiä ja päätelmiä omien havaintojensa pohjalta [10].

Tämä tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jonka tarkoituksena on tuottaa avointa oppimateriaalia lukion pitkän matematiikan kurssille MAA5: Analyyttinen geometria. Oppimateriaali koostuu opiskelijoille tarkoitetusta materiaalista, jonka aiheina ovat *pisteen etäisyys suorasta* sekä *paraabelit*.

Tutkielma koostuu oppikirjan perusteluosasta, varsinaisesta oppimateriaalista ja opettajan oppaasta. Perusteluosassa esitellään kirjalle asetetut tavoitteet, jotka perustuvat lukion opetussuunnitelman perusteisiin ja projektiryhmän yhteisesti asettamiin tavoitteisiin. Lisäksi tässä osiossa perustellaan oppikirjaan tehtyjä valintoja tieteellisten artikkeleiden sisältämän tutkimustiedon avulla.

Oppimateriaali koostuu kutakin aihetta vastaavasta teoriaosuudesta, josssa opiskelijoiden omalla pohdinnalla on merkittävä rooli, ja harjoitustehtävistä. Oppikirjassa tavoitellaan laadukasta osaamista, jonka kolmijalkaisena perustana toimii faktatieto, lausekkeiden käsittelytaidot sekä käsitteiden ymmärtäminen. Uutta asiaa lähestytään tutkivan oppimisen periaatteen mukaisilla pohdintatehtävillä, joilla rakennetaan uutta tietoa aiemmin opitun päälle. Oppimateriaalin valinnoilla pyritään estämään tutkimuksissa havaittujen harhakäsitysten syntymistä ja kehittämään niiden seikkojen osaamista, joissa on todettu puutteita. Opettajan oppaaseen on koottu kappalekohtaisesti keskeiset oppimistavoitteet, vinkkejä teorian käsittelyyn sekä pohdintatehtävien vastaukset.

1 Oppikirjan tavoitteet

Tässä luvussa kerrotaan oppikirjalle asetetuista tavoitteista, joiden perustana on vuoden 2015 lukion opetussuunnitelma sekä artikkeli *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*.

1.1 Opetussuunnitelma

Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelma toimii opetuksen tavoitteiden keskeisimpänä perustana. Yleiset tavoitteet pitkän matematiikan opetukseen korostavat lausekkeiden käsittelytaitojen lisäksi erilaisten ratkaisustrategioiden keksimistä ongelmiin sekä niiden kriittistä arviointia. Matematiikan kielen ja loogisen rakenteen sisäistäminen on luonnollisesti keskeinen oppimistavoite. Opetussuunnitelma asettaa opetuksen tavoitteeksi myös rohkaisemisen kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan. Edellä mainitut opetussuunnitelman tavoitteet toimivat ohjaajina tämän oppikirjan opetusmenetelmien valinnassa. [10]

Teknisten apuvälineiden hyödyntäminen on nykyään tärkeä osa matematiikkaa niiden laskenta- ja piirto-ominaisuuksien vuoksi. Tässä oppikirjassa käytetään opetusvälineenä matematiikkaohjelma GeoGebraa, jota pystyy käyttämään helposti tavallisessa laskemisessa, kuvaajien ja geometristen kuvioiden piirtämisessä sekä taulukkolaskennassa. GeoGebra on lukiolaiselle tarpeellinen ohjelma, sillä se on käytössä myös matematiikan sähköisissä ylioppilaskokeissa.

Opetussuunnitelman MAA5-kurssille asettamat oppimistavoitteet, jotka koskevat tätä pro gradu-tutkielmaa ja oppikirjan osuutta, ovat:

- ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä, suoria ja paraabeleja.
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä pistejoukon yhtälön tutkimisessa sekä yhtälöiden, yhtälöryhmien, itseisarvoyhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusongelmissa. [10]

1.2 Habits of Mind

Oppikirjan tavoitteiden kannalta yksi peruspilareista on artikkeli *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [4]. Habits of Mind -artikkeli esittelee matemaatikkojen hyödyllisiä tapoja ajatella ja lähestyä ongelmia. Sen sijaan, että opiskellaan ainoastaan erinäisiä aihealueita ja tehtävätyyppejä, tulisi opettaa taktiikoita ongelmien ja pulmien käsittelyyn, jotta koulutus antaisi paremman valmiuden menestyä koulun jälkeisessä elämässä. Silti näiden menetelmien omaksumisen myötä kaikkein tärkein kyky on kyky tunnistaa, missä tilanteessa kannattaa käyttää mitäkin menetelmää. [4]

Tähän oppikirjaan valittiin kolme Habits of Mind -menetelmää, jotka valikoituivat niiden ja analyyttisen geometrian parhaan yhteensopivuuden perusteella. Valitut menetelmät olivat:

- visualisointi (*vizualizers*)
- kuvaileminen (*describers*)
- kokeileminen (*experimenting*)

Visualisoinnissa on kyse kuvittelemisen taidosta. Se liittyy etenkin visaalisen muutoksen kuvittelemiseen. Voidaan ajatella esimerkiksi, miten suoran kulmakertoimen kasvaminen näyttäytyisi sen kuvaajassa. Analyyttisessä geometriassa on kyse erityisesti algebran ja geometrian yhteydestä, eli jonkin geometrisen muodon ja sen yhtälön liitosta. Visualisoinnin taidon omaksunut opiskelija osaa ennakoida yhtälön avulla, minkälainen muoto koordinaatistoon ilmestyisi piirrettäessä. Visualisointi voidaan nähdä myös kykynä ajatella vielä edessäpäin olevia laskutoimituksia tehtävää ratkaistessa, mikä on erittäin hyödyllinen taito valitessa tehtävän kannalta tehokkainta ratkaisutapaa. [4]

Kuvailemisella tarkoitetaan erityisesti sanallista kuvailua ja selittämistä, joka liittyy opiskelijan oman ratkaisuprosessin avaamiseen muille. Kuvailemisen taito linkittyy vahvasti perustelemisen kanssa ja siitä on hyötyä sekä oppijalle itselleen että luokkatovereille. Matematiikka on tyypillisesti hyvin ytimekästä tekstiä ja siksi on tärkeää osata selittää itselleen, mitä tehtävän malliratkaisussa tehdään tai mitä jokin matemaattinen lause tarkoittaa. Hyvät kuvailemisen taidot auttavat vakuuttamaan myös luokkatoverit oman ratkaisun oikeellisuudesta sekä parantavat yhteistyötä ideoiden vaihtamisen ja kysymyksien kysymisen osalta. On kannattavaa opetella tapa kirjoittaa muistiin kaikki ajatukset, kysymykset, perustelut ja lopputulokset, joista voi lopuksi koostaa siistimmän esityksen. [4]

Kokeilemista voi olla esimerkiksi se, kuinka vain yhden muuttujan vaihtelu vaikuttaa kuvaajan ulkonäköön, ja ylipäänsä erilaisten parametrien vaikutuksen tutkiminen. Kokeileminen ei liity pelkästään erilaisten lukuarvojen sijoittamiseen, vaan sitä voi olla myös ongelman ratkaiseminen yrittämällä hyväksi todettujen taktiikoiden käyttöä. Toisinaan tulee vastaan ongelmia, joiden ratkaisemiseksi ei ole mielessä mitään opittua ratkaisumallia. Tällaisina hetkinä on kannattavaa kokeilla tuttuja taktiikoita ja katsoa johtavatko ne pois umpikujamaisesta tilanteesta. [4]

2 Oppimateriaalin perustelu

2.1 Oppikirjan rakenne ja tehtävätyypit

Tähän tutkielmaan kuuluva osuus *MAA5: Analyyttinen geometria* -kurssin oppikirjasta käsittelee koordinaattipisteen etäisyyttä suorasta sekä paraabeleita. Pisteen etäisyys suorasta kuuluu suoria käsittelevään yläkappaleeseen ja paraabelit ovat oma yläkappaleensa, joka on jaettu kahteen osaan. Ensimmäinen paraabeleita käsittelevä osa keskittyy paraabelin määritelmään ja yleiseen yhtälöön, kun taas toisessa osassa tutustutaan paraabelin huippuun ja sen sijainnin määrittämiseen.

Edellä mainittuihin aiheisiin on varattu yhteensä kolme 75 minuutin oppituntia. Kussakin kappaleessa on teoriaosa, joka sisältää opittavaa asiaa pohjustavia pohdintatehtäviä, määritelmät ja lauseet sekä mallitehtävän. Lisäksi teoriaosassa on paikoitellen havainnollistamista tukevia GeoGebra-appletteja sekä ohjeita GeoGebran käyttöön. Teoriaosan päätteeksi on tarjolla aiheeseen liittyviä harjoitustehtäviä, jotka jäävät pääasiassa kotitehtäviksi.

Oppikirjan pohdinta- ja harjoitustehtäviä varten valittiin tekijöiden kesken kolme tehtävätyyppiä Malcolm Swanin artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics* [15]. Valitut tehtävätyypit sisälsivät eri ratkaisustrategioiden vertaamista, ratkaisujen järjestämistä sekä arvioitavia väitelauseita. *Ratkaisustrategioiden vertaamista* vaativilla tehtävillä pyritään tuottamaan joustavuutta matemaattiseen ongelmanratkaisuun, mikä tarkoittaa useamman ratkaisutavan osaamista ja tilanteen kannalta tehokkaimman tavan valitsemista. Kyseinen tehtävätyyppi on kuin tehty istuttamaan erityisesti menetelmän valintaa edeltävää ajatteluprosessia. *Ratkaisun järjestämisessä* on taas kyse väärässä järjestyksessä olevien ratkaisun vaiheiden järjestämisestä ja täten matematiikan loogisen rakenteen harjoittelusta. *Väitetehtävissä* kysytään, pitääkö väite paikkaansa aina, joskus vai ei koskaan. Päätöksen lisäksi vaaditaan myös perustelut, jotka koostuvat pitkälti väitettä tukevista esimerkeistä tai väitteen kumoavista vastaesimerkeistä. Väittämät käsittelevät opiskelijoille haastavia kohtia ja yleisiä virhekäsityksiä aiheesta. Tämän tyyppinen tehtävä parantaa opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa [15].

2.1.1 Pohdintatehtävät

Pohdintatehtävien rooli oppikirjassa on pohjustaa keskeisiä asioita kappaleissa ja antaa opiskelijalle mahdollisuus oivaltaa asia itse. Pohdinnoilla pyritään lisäämään ennen kaikkea aiheiden kokonaisvaltaista ymmärrystä niin käsitteiden kuin laskumenetelmienkin osalta. Stylianidesin artikkelin mukaan matemaattisen tehokkuuden kolme perusjalkaa ovat käsitteellinen osaaminen, faktatieto ja taitavuus lausekkeiden käsittelyssä [14].

Pohdintatehtävät edustavat tutkivaa oppimista, jossa opiskelija rakentaa uutta tietoa jo oppimansa tiedon pohjalta. Opiskelijat kykenevät omaksumaan paremmin uutta tietoa, kun he osaavat yhdistää uuden asian jonkin opitun asian jatkeeksi [6]. Lisäksi, kun uusi tieto liittyy selkeästi aiemmin opittuun, opiskelija kykenee muistamaan sen, näkemään sen osana suurempaa kokonaisuutta ja soveltamaan sitä uudenlaisissa tilanteissa

[14]. Kysymykset on tehty sellaisiksi, joilla pyritään herättelemään opiskelijoiden omaa ajattelua ja heidän tehtävänään onkin rakentaa tietoa aktiivisesti.

On suositeltavaa tehdä pohdintatehtäviä pareittain tai korkeintaan kolmen hengen ryhmissä, jotta opiskelijat voivat vaihtaa ajatuksia sekä ideoita keskenään ja tukea näin omaa ja vierustoverin oppimista. Pienryhmätyöskentely luo myös oivan tilaisuuden harjoitella kuvailemista sekä toisten ideoiden arviointia, mikä kuului oppikirjan Habits of Mind -tavoitteisiin. Opettajan tehtävänä on erityisesti ohjata opiskelijoiden ajatuksia tarkoituksen mukaiseen suuntaan sekä vaatia perusteluita heidän esittämien väitteiden tueksi. On tärkeää kannustaa opiskelijoita selittämään ja pohtimaan toisesta näkökulmasta sekä toimia tarvittaessa asiantuntija-apuna.

2.1.2 Mallitehtävät

Jokaista oppitunnin aihetta kohti on yksi mallitehtävä, jossa on esitetty jokin ongelma ja ratkaisu siihen. Toisinaan mallitehtävän sijaan on käytetty hyvin paljon mallitehtävää muistuttavaa pohdintaa, jotta opiskelija joutuisi prosessoimaan valmista ratkaisua enemmän. Tällä pyritään opettamaan opiskelijoille oppimisen kannalta tehokas tapa käsitellä mallitehtäviä, joita he kohtaavat opintojensa aikana. Mallitehtävien käytön eduksi voidaan katsoa niissä käytetty ratkaisurakenne. Ratkaisut etenevät matemaattisesti järkevällä tavalla ja tarpeelliset perustelut on esitetty selkeästi. Mallitehtävät toimivat näin ollen esimerkkinä ja vertailukohteena opiskelijoille, millä pyritään lisäämään matemaattisen kielen, kuten symbolien ja käsitteiden, sekä rakenteen oppimista [2]. Mallitehtävien toinen hyvä puoli on, että ne auttavat opiskelijaa kotona muistamaan, kuinka tehtäviä ratkaistiin [2]. Tämän lisäksi mallitehtävien käyttöä puoltaa niin sanottu kognitiivisen kuorman teoria (cognitive load theory). Sen mukaan on toisinaan hyvä opettaa mallitehtävillä ongelmanratkaisutehtävien sijaan, sillä avoimen luonteen ongelmanratkaisua vaativat tehtävät voivat ylikuormittaa rajallista työmuistia ja näin rajoittaa oppimisen siirtymistä pitkäaikaiseen muistiin [9]. Matematiikassa on paljolti kyse myös toisten ratkaisujen tai todistusten lukemisesta ja arvioinnista, joten on hyvä harjaantua perustelemaan itselleen valmiin matemaattisen tekstin vaiheita.

Miten mallitehtävistä oppii parhaiten? Atkinson ym. (2000) kokosivat useita mallitehtävien käyttöä tarkastelleita tutkimuksia artikkeliinsa. Artikkelin mukaan mallitehtävien ja harjoitustehtävien välillä tulisi olla selkeä yhteys. Toisin sanoen mallitehtävästä ei ole niin paljon hyötyä, jos harjoitteluvaiheessa ei ole samankaltaista ongelmaa ratkaistavana. Toisaalta harjoitustehtävät eivät saisi olla täsmälleen samanlaisia kuin mallitehtävät, etteivät ne kannustaisi pelkkään jäljittelyyn. Tutkimuksissa hyvät ja huonot opiskelijat erottuivat toisistaan mallitehtävien analysointitavoiltaan. Hyvät opiskelijat perustelivat itselleen useammin ratkaisun vaiheita kuin huonosti suoriutuneet opiskelijat ja ilmaisivat enemmän itsesäätelyyn liittyviä lausuntoja. He palasivat myös harvemmin etsimään ohjeita mallitehtävistä, ja näin tehdessään he tarkistivat jotakin pienempää seikkaa. Pinnallisemmin mallitehtäviä tarkastelleet ja huonosti suoriutuneet opiskelijat eivät yleensä osanneet ratkaista tehtävää, joka poikkesi hieman mallitehtävistä. Mallitehtävistä oppimisen keskiössä oli siis ratkaisun syvällinen prosessointi, joka koostui ratkaisussa tehtyjen valintojen perustelusta itselle. Tällaista oppimismenetelmää voi istuttaa opiskelijoihin lisäämällä oppimateriaaliin keskeneräisiä mallitehtäviä - mallitehtäviä, joita tulee täydentää tai kuvailla niiden tiettyjä välivaiheita. Toinen keino, joka lisää erityisesti ratkaisun loogisen rakenteen ymmärtämistä, on luokitella ja nimetä ratkaisun keskeiset välivaiheet sekä perustella, miksi ratkaisussa tehdään nämä valinnat. Mallitehtävien vaiheiden jäsentelyn ja selittämisen on todettu parantavan oppimista mallitehtävistä. [1]

2.1.3 Harjoitustehtävät

Harjoitustehtävien tarkoituksena on tarjota lisäharjoitusta opitun asian parissa ja mahdollisuus syventää osaamistaan. Harjoitustehtäviä on tarkoitus tehdä osittain oppitunneilla ja erityisesti kotona, minkä vuoksi tehtäviä on kutakin aihetta kohti vain tarpeellinen määrä (5-6 kappaletta). Harjoitustehtävät sisältävät perustehtäviä sekä vaativampia tehtäviä, jotka edellyttävät kattavampaa ymmärrystä kappaleen sisällöistä.

Harjoitustehtävien luomisessa on pyritty noudattamaan Bloomin taksonomiaa. Bloomin taksonomialla tarkoitetaan osaamisen jakamista kuudelle tasolle, jotka ovat vaativuusjärjestyksessä *tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analysointi, syntetisointi* ja *arviointi*. Syvemmän osaamisen tasoa ei voi saavuttaa ennen kuin alemmat osaamisen tasot on saavutettu. *Tietämisellä* tarkoitetaan asioiden muistamista: esimerkiksi miten lasketaan kahden koordinaattipisteen välisen janan pituus. Mikäli opiskelijan osaaminen on *ymmärtämisen* tasolla, hän osaa myös kertoa, miksi juuri kyseisellä kaavalla saadaan laskettua janan pituus. Ymmärtämistä on myös se, että osaa selittää omin sanoin jonkin matemaattisen määritelmän. *Soveltaminen* on opitun tiedon soveltamista ongelman ratkaisemiseen. Osaamisen ollessa soveltamisen tasolla opiskelija osaa itsenäisesti valita useiden joukosta, mikä opittu menetelmä sopii ratkaisuksi. Tehtävänanto ei saisi kertoa suoraan, mitä tehtävän ratkaisemiseksi tulisi tehdä. Soveltamista testaava tehtävä voisi käsitellä esimerkiksi paraabelin suurimman arvon määrittämistä. [8]

Analysointi, syntetisointi ja arviointi edustavat jo melko korkeaa osaamisen tasoa. *Analysointi* on annetun tiedon pilkkomista pienempiin osiin, jotta sitä voi ymmärtää ja tutkia helpommin [8]. "Mitä paraabelin ominaisuuksia huipun koordinaattien ratkaisemiseen käytettiin ratkaisussa?-kysymys olisi analysointia harjoittava tehtävä. *Syntetisoinnissa* on kyse uuden luomisesta yhdistelemällä opittuja seikkoja [8]. Syntetisointia olisi esimerkiksi r-säteisen pallon tilavuuden ja pinta-alan riippuvuuden päättely niiden laskukaavoja yhdistelemällä. Myös paraabelin $y = -x^2 + 7x - 10$ kuvaajan luonnostelu ilman teknisiä apuvälineitä on syntetisointia [8]. Syntetisointi on korkein Bloomin taksonomian taso, joka esiintyy tämän tutkielman tehtävissä. *Arvioinnilla* tarkoitetaan jonkin tuotoksen, idean tai ehdotuksen tarkastelua sisäisten tai ulkoisten kriteerien perusteella [8]. Kriteereinä voi olla esimerkiksi tehtävän ratkaisun loogisuus tai siinä esitettyjen seikkojen paikkansapitävyys [8]. Tyypillisin arviointitehtävä on pisteyttää kuvitteellisen luokkatoverin todistus jollekin lauseelle.

2.2 Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta on mainittu vuoden 2015 opetussuunnitelmassa keskeiseksi sisällöksi [10]. Kappaleessa pohjustetaan ensin pisteen ja suoran etäisyyttä pohdintatehtävällä A.1, määritellään pisteen etäisyys suorasta ja esitellään laskukaava sen laskemiseksi. Laskukaava on matemaattinen lause, jonka todistus annetaan valmiina sen haastavuuden vuoksi. Todistuksen periaate on pohdinnan jälkeen helpommin ymmärrettävissä, mutta sen rakentaminen vinkkienkin avulla olisi todennäköisesti ollut liian haastava ja aikaa vievä tapaus. Tätä seuraa pohdintatehtävä, jossa pohditaan laskukaavan oikeaoppista käyttöä ja pyritään ennaltaehkäisemään helposti sattuvaa virhettä. Teoriaosan lopussa on melko perinteinen mallitehtävä, jossa itseisarvojen sisälle sijoitetaan muuttuja ja ratkaistaan muodostunut itseisarvoyhtälö.

Pohdintatehtävällä A.1 pyritään osoittamaan, että pisteen etäisyys suorasta on vain yksi suoriin liittyvän tiedon sovellus. Etäisyyden määrittämisessä tarvitaan oppikirjan aiemmissa kappaleissa hankittua osaamista suoran normaalin yhtälön määrittämisestä, kahden suoran leikkauspisteestä sekä janan pituuden laskemisesta. Pohdinta täten sitoo aiemmin käsiteltyjä aiheita uuteen aiheeseen, millä on positiivisia vaikutuksia uuden asian oppimiseen [6, 14]. Pohdinnan tavoitteena on, että opiskelija huomaa suoran normaalin olevan keskeisessä asemassa pisteen ja suoran välisen lyhimmän etäisyyden laskemisessa. Tällöin opiskelijan on helpompi ymmärtää laskukaavan todistuksen periaate, jonka keskiössä on suoran normaalivektori.

Pohdintatehtävän A.4 tarkoitus on muistuttaa mallitehtävää, joka vaatii kuitenkin tarkempaa keskittymistä ja pohtimista. Yleisesti mallitehtävissä näytetään esimerkkiä vastaavanlaisten tehtävien ratkaisemiseen eli tässä tapauksessa kyse on oikeiden lukuarvojen kaavaan sijoittamisesta. Tämän pohdintatehtävän tarkoitus on auttaa opiskelijat alkuun kappaleen keskeisimmän asian eli pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskukaavan käytössä. Pohdinnalla pyritään myös ennaltaehkäisemään laskukaavan virheellistä käyttöä, joka liittyy sijoitettavan suoran yhtälön oikeaan muotoon. Kun opiskelija huomaa verrattavien ratkaisujen päätyvän eri vastaukseen, hänen täytyy tarkastella lausetta A.3 ja molempia ratkaisuja huolellisesti arvioidessaan niiden oikeellisuutta.

Pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskeminen laajennetaan yhdensuuntaisten suorien välisen etäisyyden laskemiseen pohdinnassa A.5. Pohdintatehtävässä mietitään, kuinka edellä mainittu ongelma voidaan palauttaa perustapaukseen, ja sovelletaan opittua tietoa sen ratkaisemiseksi. Kun ajatus tehtävän ratkaisemiseksi on muodostettu, lasketaan kysytty etäisyys. Pohdinnassa yhdistyy siis kappaleen käsitteellinen ja laskennallinen anti. Lisäksi siinä arvioidaan väittämän paikkansapitävyyttä, missä tulee pohtia erilaisia suoran yhtälön tapauksia. Väitetehtävä edustaa tutkivaa ja kokeilevaa oppimista.

Mallitehtävä A.6 valittiin teoriaosaan mukaan tarjoamaan esimerkin kaavan soveltamisesta, kun pisteen etäisyys suorasta tunnetaan. Tässä mallitehtävässä täytyy myös ratkaista itseisarvoyhtälö, mikä on hyvä palauttaa opiskelijoiden mieleen ennen harjoitustehtäviä. Tehtävässä ei tule merkittävästi uutta tietoa, minkä vuoksi toteutukseen valittiin mallitehtävä pohdintatehtävän sijaan. Yleisesti mallitehtävien käyttöä perusteltiin jo kappaleessa 2.1.2.

Harjoitustehtävät alkavat kahdella perustehtävällä, joissa lasketaan tunnetun koordinaattipisteen etäisyyttä suorasta. Laskurutiinia kehittävissä tehtävissä pyritään kuitenkin pitämään ajatteleminen mukana estämällä suora kaavaan sijoittaminen. Tehtävissä 3 ja 4 joutuu soveltamaan tällä oppitunnilla opittua tietoa sekä aiemmin opittua tietoa esimerkiksi yhdensuuntaisuudesta ja suoran kulmakertoimesta. Tehtävä 3 on tehty samantyyliseksi kuin teoriaosan mallitehtävä, sillä malli- ja harjoitustehtävien välillä kannatti säilyttää selkeä yhteys [1]. Se poikkeaa kuitenkin hieman mallitehtävästä, mikä estää ratkaisun jäljentämisen. Vanhassa ylioppilastehtävässä eli tehtävässä 4 suoran yhtälöä ei ole annettu valmiiksi, vaan se tulee muodostaa annetun tiedon perusteella. Kolmiota käsittelevä tehtävä tarjoaa yllättävän käyttökohteen kappaleen oppisisällölle, mikä voi laajentaa opiskelijan menetelmäpankkia. Yhteenvetona voisi sanoa, että tähän oppikirjan kappaleeseen liittyvillä tehtävillä tavoitellaan laskukaavan osaamisen lisäksi laajempaa tietämystä soveltamiskohteista, joita pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskemisella on.

2.3 Paraabelit

Paraabelin yhtälö kuuluu vuoden 2015 Opetussuunnitelman keskeisiin sisältöihin [10]. *Paraabelin ominaisuuksia* -kappaleessa lähestytään paraabelia ja sen yhtälöä määritelmän näkökulmasta. *Paraabelin huippu* -kappaleessa tulkitaan paraabelin yhtälöä erityisesti sen huipun kannalta.

2.3.1 Paraabelin ominaisuuksia

Kappale alkaa suoraan paraabelin määritelmällä, jonka visuaaliseen havainnollistamiseen on piirretty apukuva ja tehty yksinkertainen GeoGebra-appletti. Oli luonnollista aloittaa suoraan paraabelin määritelmällä, sillä tätä kappaletta oli hankala pohjustaa millään hyödyllisellä ja opettavaisella pohdinnalla. Opiskelijat ovat toki tutustuneet aiemmissa opinnoissaan toisen asteen yhtälöön, mutta vasta analyyttisen geometrian kurssin tässä kappaleessa paraabelin yhtälö johdetaan sen määritelmän perusteella. Tässä tapauksessa on siis luontevampaa määritellä paraabeli heti aluksi ja tutustua määritelmän avulla sen kuvaajan muotoon ja symmetriaan hyödyntämällä GeoGebra-applettia. Opettajan oppaassa on kysymyksiä, joita opettaja voi käyttää paraabelin kuvaajan käsittelemiseen. Opetusmenetelmäksi valittiin opettajan ja ryhmän välinen keskustelu varsinaisen pohdintatehtävän sijaan, sillä opettaja pystyy esittämään ajattelua ohjaavia kysymyksiä joustavammin kuin kirjoitettu oppimateriaali.

Paraabelin määritelmään liittyy myös pohdinta B.2, jossa on esitetty selityksiä vailla olevat vaiheet paraabelin yhtälön määrittämiseksi. Kyseessä on niin sanottu keskeneräinen mallitehtävä, jonka tarkoitus on opettaa selittämistä [1] sekä harjoittaa kuvailemisen taitoa [4]. Tämä pohdintatehtävä havainnollistaa paraabelin määritelmää matemaattisten symbolien tasolla sekä laskennallisesta näkökannasta. Ideana on tunnistaa, mitä aiemmin opittua käytetään apuna paraabelin yhtälön muodostamisessa, ja tällä tavoin luoda yhteys aiemmin opitun ja paraabeleiden välille. Lisäksi yhtälön johdon keskeisten vaiheiden numerointi voi havainnollistaa menetelmän rakennetta [1], kuten mallitehtäviä käsitelleessä kappaleessa 2.1.2 todettiin.

Paraabelin määritelmään liittyy apukäsitteet polttopiste ja johtosuora. Näiden käsitteiden merkitystä siihen, millaisia paraabeleita ja paraabeliyhtälöitä muodostuu, haluttiin tarkastella kappaleessa paraabelin käsitteen syvällisen ymmärtämisen vuoksi. Johtosuoran, polttopisteen sekä paraabelin avautumissuunnan suhdetta pyritään selkeyttämään GeoGebra-appletin sekä kuvien avulla. GeoGebra-appletti toimii samalla myös pohjustuksena sille, että paraabeli voi johtosuorasta riippuen aueta muihinkin suuntiin kuin ylös ja alas. Siinä ei ollut riittävästi ainesta pohdintatehtäväksi, mutta paraabelin kuvaajan riippuvuutta johtosuorasta ja polttopisteestä tulisi pohtia ryhmän kanssa GeoGebra-appletilla. Kuviin on piirretty tyypillisimmät paraabelit, ylös ja alas sekä vasemmalle ja oikealle aukevat paraabelit. Näihin on merkitty paraabelin kannalta keskeiset käsitteet: edellisten lisäksi paraabelin avautumissuunnan näyttävä symmetria-akseli sekä huippu. Jälkimmäisenä mainittujen käsitteiden ymmärtämisessä onkin havaittu vaikeuksia [11, 3]. Myös näiden käsitteiden määritelmiä havainnollistetaan visuaalisesti sekä GeoGebran että kuvien avulla.

Pohdinnassa B.5 opiskelijat pääsevät harjoittelemaan paraabeleiden piirtämistä GeoGebralla, kun johtosuora ja polttopiste tunnetaan. Paraabelin avautumissuuntaa tarkastellaan nyt johtosuoran yhtälön näkökulmasta sekä pyritään huomaamaan paraabelin yhtälön muoto erisuuntaisten paraabeleiden tapauksissa. Pohdinnan tarkoituksena on täten myös huomata akseleiden suuntaisten paraabeleiden yhtälön muoto ja näin alustaa paraabelin yleinen yhtälö y- ja x-akselien suuntaisille paraabeleille. Tällä pyritään palauttamaan aiemmin kuvaajina nähdyt asiat - paraabeli ja sen johtosuora - matemaattiseen muotoon sekä parantamaan eri esitysmuotojen yhteyden tunnistamista. Kappaleen loppupuolella tarkastellaan paraabelin yleistä yhtälöä lauseiden ja yhden mallitehtävän muodossa. Mallitehtävässä määritetään esimerkkiparaabelin yleinen yhtälö pistejoukon yhtälön periaatteella.

Harjoitustehtävissä tutustutaan lisää paraabelin kannalta keskeisiin apukäsitteisiin ja niiden riippuvuussuhteisiin. Paraabelin aukeamissuuntaa käsittelevässä tehtävässä harjoitellaan visualisointia, joka kuuluu Habits of Mind -tavoitteisiin. Siinä pyritään kuvittelemaan, minkälainen paraabeli muodostuu annetusta johtosuoran yhtälöstä ja polttopisteestä. Paraabelin yhtälön muodostamista harjoitellaan kolmen rutiinitehtävän muodossa, vaikkakin ylioppilastehtävä lähestyy soveltavaa tehtävää tehtävänannon sanamuodon vuoksi. Väitetehtävässä arvioidaan väittämiä, joilla tähdätään hankaliksi koettujen huipun käsitteen ja paraabelin symmetrian [11] syvällisempään ymmärtämiseen.

2.3.2 Paraabelin huippu

Paraabelin yhtälöä tarkastellaan tässä kappaleessa enemmän. Alkuosa kappaleesta keskittyy paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön, kun taas loppuosassa keskiössä on huipun koordinaattien määritys muilla menetelmillä.

Pohdinnassa B.9 tutkitaan paraabelin kuvaajan ja yhtälön yhteyttä käyttämällä apuna GeoGebra-applettia, jolla voi säätää paraabelin termien kertoimia. Tämä pohdintatehtävä pitää siis sisällään kokeilemista, joka oli yksi oppikirjaan valituista Habits of Mind -tavoitteista. Pohdinnan tarkoituksena on selittää kuvaajasta löydetty tieto paraabelin yhtälön avulla ja luoda näin kuvaajan ja yhtälön välille selkeä yhteys. Tutkimuksissa onkin havaittu, että paraabelin algebrallisten ja graafisten esitysten yhdistäminen voi tuottaa vaikeuksia opiskelijoilla [5, 11].

Parametrien a ja c vaikutuksiin keskitytään erityisesti, sillä paraabelin avautumissuunta ja huipun liikkuminen vain yhteen suuntaan on helppo havaita ja perustella. Tästä on luontevaa jatkaa paraabelin $y = ax^2 + c$ huipun paikantamiseen. Parametrin b tullessa mukaan opiskelija pohjustaa ja perustelee huippumuotoista yhtälöä. Pohdinnassa paraabelin kertoimia haluttiin tarkastella huipun sijainnin näkökulmasta ja niiden vaikutusten tulkinta minimoitiin. Parametritehtävien kysymyksenasettelussa täytyikin olla tarkkana, sillä parametrien vaikutuksiin liittyy lukuisia virhekäsityksiä [16]. Esimerkiksi kerrointa a on pidetty paraabelin kulmakertoimena [16, 11] eikä sen kykyä siirtää paraabelin huippua ole havaittu [11].

Paraabeli, jonka yhtälö on $y = (x - x_0)^2$, on sama kuin paraabeli $y = x^2$, jota on siirretty horisontaalisesti. Tutkimuksen, jossa selvitettiin toisen asteen koulun opiskelijoiden käsityksiä paraabeleiden siirtämisestä vaakasuunnassa, mukaan opiskelijoilla on taipumus tukeutua muistin varaan siirtymissuunnan päättelemisessä [17]. Pohdintatehtävän B.9 kohta, jossa huipun sijaintia perustellaan huippumuotoisesta yhtälöstä, keskittyy myös huipun siirtymiseen vaakasuunnassa. Pohdinnassa vaaditaan huipun sijainnin perustelua paraabelin yhtälöllä, jotta opiskelija joutuisi todella tutkimaan tätä yhtälöä ja sen vaikutusta paraabelin kuvaajaan. Perusteluilla pyritään välttämään ulkoa opettelu ja istuttamaan tapa tulkita käyrän yhtälöitä. Toisin sanoen, tässäkin pohdinnassa harjoitellaan ymmärtämiseen tähtäävää oppimistyyliä ja visualisoinnin taitoa. Opiskelijoilla on myös todettu olevan vaikeuksia muodostaa huippumuotoinen yhtälö paraabelin yleisestä yhtälöstä [11, 16], minkä vuoksi kyseistä laskuprosessia harjoitellaan jo pohdintatehtävän yhteydessä. Tätä prosessia tuetaan myös mallitehtävällä, jossa on esitetty huippumuotoisen yhtälön muodostaminen täydentämällä yleinen yhtälö binomin neliöön.

Paraabelin huipun koordinaatit voidaan määrittää usealla tavalla. Yhtälön muokkaaminen huippumuotoon ei ole usein helppo tai nopea tapa siihen, joten on kannattavaa esitellä useampi menetelmä. Sitä paitsi, useamman menetelmän osaaminen lisää joustavuutta ongelmanratkaisuun, mikä tarkoittaa (a) useamman ratkaisutavan tietämistä ja (b) näiden tapojen suhteellisen tehokkuuden tuntemusta [13]. Opiskelijan ei tarvitse keksiä kaikkia ratkaisutapoja itse oppiakseen joustavaksi laskijaksi, vaan opettajien lyhyet strategiaopastukset on todettu hyödyllisiksi tutkimuksessa, jossa pyrittiin lisäämään joustavuutta yhtälönratkaisuun [13]. Pohdinnassa B.12 opiskelijan tulisi oivaltaa paraabelin kuvaajassa näkyvien nollakohtien avulla sekä paraabelin symmetrian perusteella huipun x-koordinaatti. Koska kaikki paraabelit eivät leikkaa x-akselia, käsitellään lyhyesti myös menetelmä tällaisiin tapauksiin. Symmetriaan perustuvaa ja huippumuotoiseen yhtälöön liittyvää menetelmää verrataan keskenään, mikä lisää joustavuutta [15, 12]. Eriyttävässä osassa pohditaan perusteluita ratkaisumenetelmän kannalta parhaan y-arvon valintaan, mikä kuuluu selkeästi jo Bloomin taksonomian analysointi -tasolle [8].

Kappaleen harjoitustehtävissä jatketaan teoriaosan asioiden harjoittelua paraabelin yhtälön eri esitysmuotojen käsittelyn, huipun paikantamisen sekä kuvaajan ja yhtälön liittämisen parissa. Enemmistö tehtävän 12 tapauksista on peräisin Greenin artikkelista [7]. Väitetehtävässä tarkastellaan kriittisesti väittämiä, jotka koostuvat tutkimuksissa huomatuista virhekäsityksistä [5, 16]. Virhekäsityksistä eroon pääsemiseksi suositellaan yleisesti, että opiskelija asetetaan tilanteeseen, jossa alkuperäiset käsitykset osoittautuvat vääriksi [17]. Esimerkiksi Eraslan ym. tutkivat high school opiskelijan taitoja piirtää paraabelin kuvaaja sen yhtälön perusteella. Kyseisellä opiskelijalla oli harhakäsitys, jonka mukaan paraabelin huipun koordinaatit määräytyisivät suoraan yleisen yhtälön kertoimista b ja c [5]. Paraabelin kuvaajan luonnostelu sen yhtälön perusteella on syntetisointitason tehtävä [8], jossa tulee hyödyntää tietoa paraabelin symmetrisyydestä ja huipun sijainnista suhteessa nollakohtiin tai paraabelin muihin saman y-arvon omaaviin pisteisiin. Tämän tyyppisellä tehtävällä voi testata, kuinka hyvin opiskelija on sisäistänyt paraabelin keskeiset ominaisuudet ja kuinka hän osaa yhdistellä oppimiaan asioita.

Lähdeluettelo

[1] Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). *Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research.* Review of educational research, 70(2), 181-214.

[2] Carroll, W. M. (1994). *Using worked examples as an instructional support in the algebra classroom.* Retrieved from ERIC Retrieved from https://search.proquest.com/docview/62735544?accountid=13031

[3] Childers, A. B., & Vidakovic, D. (2014). *Students' Understanding of the Concept of Vertex of Quadratic Functions in Relation to their Personal Meaning of the Concept of Vertex.* International Journal for Mathematics Teaching & Learning.

[4] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula.* The Journal of Mathematical Behavior, 15(4), 375-402.

[5] Eraslan, A., Aspinwall, L., Knott, L., & Evitts, T. A. (2007). *Quadratic Functions: Students' Graphic and Analytic Representations.* The Mathematics Teacher, 101(3), 233-237.

[6] Gagnon, G. W., & Collay, M. (2001). *Designing for learning: Six elements in constructivist classrooms.* Corwin Press.

[7] Green, K. H. (2010). *Matching functions and graphs at multiple levels of bloom's revised taxonomy.* Primus : Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 20(3), 204-216. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/213434544?accountid=13031

[8] Karaali, G. (2011). *An evaluative calculus project: Applying Bloom's taxonomy to the calculus classroom*, Primus, 21(8), 719-731.

[9] Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). *Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching.* Educational psychologist, 41(2), 75-86.

[10] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus.

[11] Ozaltun Celik, A. & Bukova Guzel, E. (2017). *Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons.* International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3(1), 122-134.

[12] Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). *Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations.* Journal of Educational Psychology, 99(3), 561.

[13] Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). *Flexibility in problem solving: The case of equation solving.* Learning and Instruction, 18(6), 565-579. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

[14] Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). *Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the principles and standards for school mathematics.* The Mathematics Enthusiast, 4(1), 103-114.

[15] Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics. A Challenge to our Beliefs.*

[16] Zaslavsky, O. (1997). *Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions.* Focus on Learning Problems in Mathematics, 19(1), 20-44. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/62641856?accountid=13031

[17] Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003). *Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting.* The Journal of Mathematical Behavior, 22(4), 435-448.

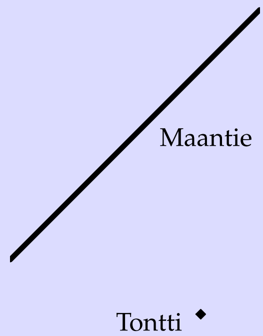
A Pisteen etäisyys suorasta

Pohdinta A.1 GG

Otto haluaa rakentaa tontilleen talon, joka sijaitsee lyhyen matkan päässä suorasta maantiestä. Sitä ennen maantien ja tontin välille tulee kuitenkin tehdä mahdollisimman lyhyt, suora tie.

1. Kuvaile, mistä kohdasta tietä on lyhin matka tontille.
2. Maantietä edustaa kartalla suora $y = x - 3$ ja tonttia piste $A = (6, -1)$. Piirrä nämä koordinaatistoon.
3. Muodosta nyt sen suoran yhtälö, joka kulkee kohdassa 1. valitsemasi maantien pisteen ja tontin kautta. Piirrä kyseinen suora GeoGebraan.
4. Miten saadaan selville valitsemasi pisteen koordinaatit? Määritä ne.
5. Määritä tien pituuden (kartalla) tarkka arvo.

6* Perustele Pythagoraan lauseen avulla, miksi valisemasi suoran piste on lähimpänä pistettä A.



Vinkki pohdinnan kohtaan 3 löytyy sivun alaosasta. [1]

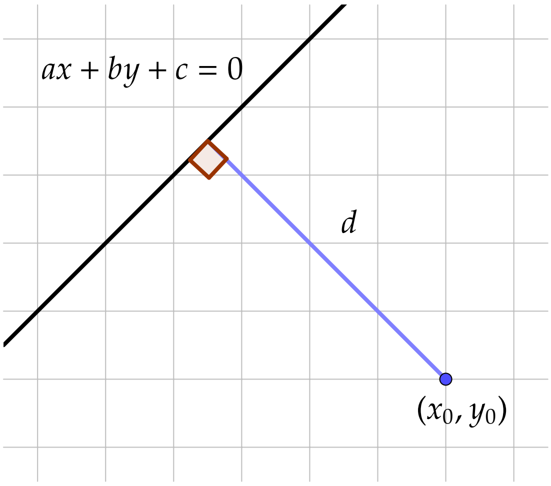
Määritelmä A.2 *Pisteen etäisyys suorasta* tarkoittaa lyhintä mahdollista pisteen ja suoralla olevien pisteiden välistä etäisyyttä.

Pohdintatehtävässä esiintyneen menetelmän lisäksi pisteen etäisyys suorasta voidaan laskea myös seuraavan kaavan avulla.

[1] Suoralle piirretty normaali

Lause A.3

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ on
$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

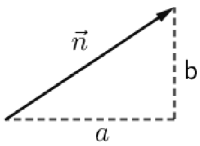


Todistus. Tarkastellaan suoraa $ax+by+c = 0$. Suoran yhtälön ratkaistu muoto on tällöin

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

eli suoran kulmakerroin on $-\frac{a}{b}$. Suoralle piirretyn normaalin kulmakerroin on kohtisuoruusehdon perusteella $\frac{b}{a}$. Toisin sanoen, kun liikutaan normaalia pitkin a yksikön verran x-suunnassa, liikutaan b yksikön verran y-suunnassa.

Esitetään edellä mainittu siirtymä suoran normaalivektorin $\vec{n}$ avulla.
Muodostetaan normaalivektorin suuntainen yksikkövektori. Normaalivektorin $\vec{n}$ pituus on Pythagoraan lauseen perusteella

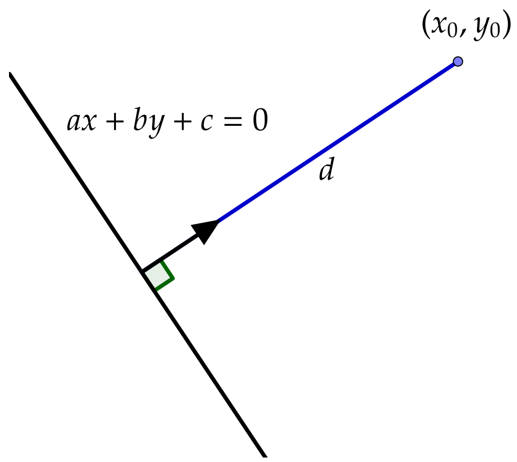


$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Näin ollen normaalivektorin suuntaiselle yksikkövektorille $\vec{n}_0$ pätee

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\vec{n}.$$

Merkitään pisteen (x_0, y_0) etäisyyttä suorasta $ax+by+c = 0$ kirjaimella d. Nyt d edustaa myös normaalivektorin $\vec{n}$ suuntaisen yksikkövektorin pituuskerrointa. Kun liikutaan pisteestä (x_0, y_0) vektorin $-\vec{n}$ suuntaisesti d yksikön verran, päädytään suoran pisteelle (x, y).



Toisin sanoen

$$(x, y) = \left(x_0 - d \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 - d \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Koska (x, y) on suoran $ax + by + c = 0$ piste, suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$a\left(x_0 - d\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\left(y_0 - d\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + c = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöstä d.

$$\begin{aligned}
&ax_0 + by_0 + c - d\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 0 \\
&ax_0 + by_0 + c = d\sqrt{a^2+b^2} \quad \| : (\sqrt{a^2+b^2}) \\
&d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

Luvun d on oltava aina positiivinen, joten

$$d = |d| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

Pohdinta A.4

Jukka ja Tiina laskivat pisteen $(-2, 2)$ etäisyyttä suorasta $y = -3x + 4$. He päätyivät kuitenkin eri vastauksiin. Jukan ja Tiinan ratkaisut on esitetty alapuolella. Kumman opiskelijan vastaus oli oikein? Mikä oli virheenä ratkaisussa, joka johti väärään vastaukseen?

Jukan ratkaisu:

$y = -3x + 4, \quad (x_0, y_0) = (-2, 2)$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|-3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} \\
&= \frac{|6 + 2 + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

Pisteen etäisyys suorasta on $\frac{12}{\sqrt{10}}$.

Tiinan ratkaisu:

$y = -3x + 4, \quad (x_0, y_0) = (-2, 2)$
$-3x - y + 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|-3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}} \\
&= \frac{|6 - 2 + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

Pisteen etäisyys suorasta on $\frac{8}{\sqrt{10}}$.

Pohdinta A.5 Heikin ja Annen tehtävänä oli määrittää suorien $y = 2x + 5$ ja $y = 2x - 1$ välinen lyhin etäisyys. He osasivat laskea pisteen etäisyyden suorasta, mutta eivät suoran etäisyyttä suorasta.

a) Miten ongelma voitaisiin palauttaa pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskemiseen? Perustele.

b) Laske suorien $y = 2x + 5$ ja $y = 2x - 1$ välinen lyhin etäisyys.

c) Anne ehdotti, että yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys saataisiin pääteltyä kahden suoran yhtälön vakiotermien erotuksesta. Onko Annen ehdotus tosi aina, joskus vai ei koskaan?

Mallitehtävä A.6 Määritä kaikki sellaiset pisteet, joiden x-koordinaatti on 5 ja ja etäisyys suorasta $y = \frac{4}{3}x + 2$ on 2.

Ratkaisu: Muokataan aluksi suoran yhtälö normaalimuotoon.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4}{3}x + 2 \quad \| \cdot 3 \\
3y &= 4x + 6 \\
4x - 3y + 6 &= 0
\end{aligned}
$$

Merkitään pisteen y-koordinaattia kirjaimella t. Lasketaan pisteen $(5, t)$ etäisyys suorasta $4x - 3y + 6 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 5 - 3 \cdot t|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|20 - 3t + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-3t + 26|}{\sqrt{25}} = \frac{|-3t + 26|}{5}$$

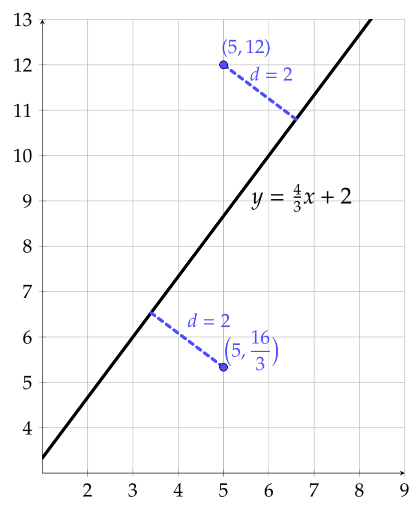
Tehtävänannon mukaan $d = 2$, joten

$$
\begin{aligned}
\frac{|-3t + 26|}{5} &= 2 \quad \| \cdot 5 \\
|-3t + 26| &= 10
\end{aligned}
$$

Itseisarvoyhtälölle saadaan kaksi ratkaisua:

$$
\begin{aligned}
-3t + 26 &= 10 \\
-3t &= -16 \quad \|: (-3) \\
t &= \frac{16}{3}
\end{aligned}
\qquad \text{tai} \qquad
\begin{aligned}
-3t + 26 &= -10 \\
-3t &= -36 \quad \|: (-3) \\
t &= 12
\end{aligned}
$$

Vastaus: Ehdot toteuttavat pisteet ovat $(5, \frac{16}{3})$ ja $(5, 12)$.

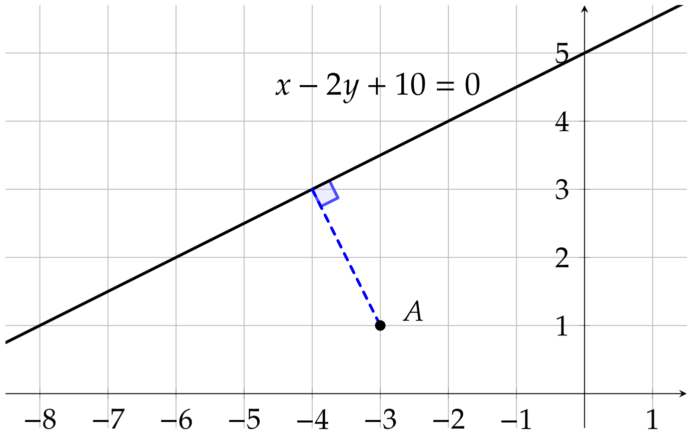


Harjoitustehtävät

1. Laske pisteen A etäisyys suorasta $x - 2y + 10 = 0$ käyttäen

a) Lauseen 1 laskukaavaa

b) Pythagoraan lausetta



2. Määritä pisteen $(3, -2)$ etäisyys suorasta

a) $-x + y + 2 = 0$

b) $y = -\frac{4}{5}x + 2$

c) $4x - 3y = 2$ (S2011/3c)

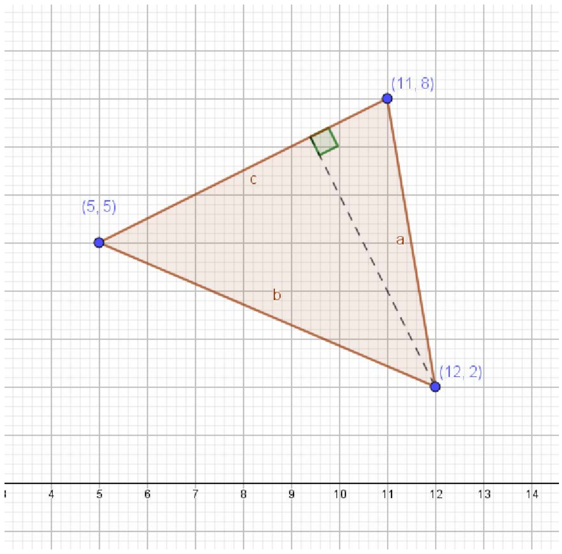
3. Tarkastellaan suoria, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran $4x + 2y - 14 = 0$ kanssa. Kuinka monen tarkasteltavan suoran etäisyys pisteestä $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ on täsmälleen $2\sqrt{5}$? Määritä kyseisten suorien yhtälöt.

4. Suora kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta, ja vektori $2\bar{i} + 3\bar{j}$ on sen normaalivektori. Määritä pisteen $(2, 2)$ etäisyys suorasta. (S2002/5)

5. Pisteet $(5, 5), (11, 8)$ ja $(12, 2)$ muodostavat kuvan mukaisen kolmion. Laske

a) kolmion korkeusjanan pituus

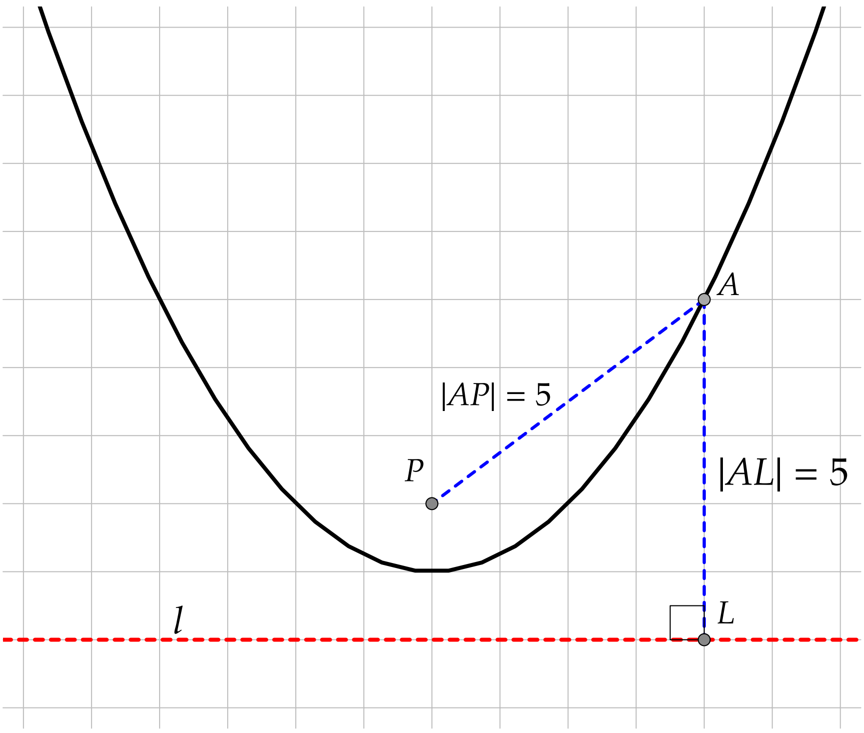
b) pinta-ala



B Paraabelit

B.1 Paraabelin ominaisuuksia

Määritelmä B.1 Olkoon l suora xy-tasossa ja P piste, joka ei sijaitse suoralla l. *Paraabeli* on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä P on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta l. Pistettä P kutsutaan *polttopisteeksi* ja suoraa l *johtosuoraksi*.



GG: Paraabelin määritelmä

Pohdinta B.2 Alla on esitettynä esimerkkitapaus, kuinka paraabelin yhtälö muodostetaan johtosuoran ja polttopisteen avulla. Kuvaile, mitä vaiheissa (1) - (4) on laskettu ja miksi se on laskettu.

Määritetään paraabelin yhtälö, kun $P = (4, 3)$ ja johtosuoran l yhtälö on $y = 1$.

Ratkaisu: Valitaan pisteeksi A mielivaltainen paraabelin piste, ts. $A = (x, y)$.

$$|AP| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \tag{1}$$

$$|AL| = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y - 1| \tag{2}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = |y - 1| \tag{3}$$

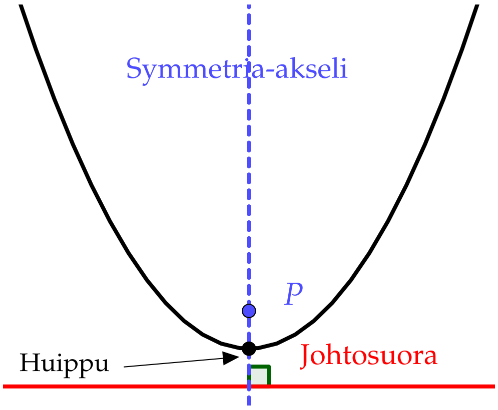
$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & (x-4)^2 + (y-2)^2 = (y-1)^2 \qquad (4) \\ & x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2y + 1 \\ & x^2 - 8x + 24 = 4y \\ & y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

Vastaus: Kyseessä olevan paraabelin yhtälö on $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$.

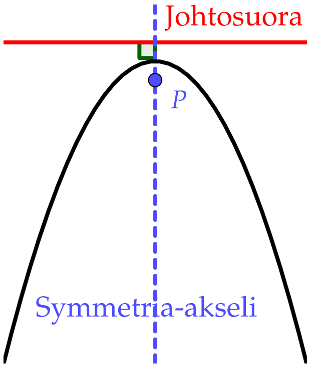
Määritelmä B.3 Paraabelin polttopisteen kautta kulkeva johtosuoran normaali on paraabelin *symmetria-akseli*. Paraabelin *huipulla* tarkoitetaan pistettä, jossa paraabeli leikkaa symmetria-akselinsa.

Symmetria-akselin ja huipun käsitteiden havainnollistamiseen on käytössä alla oleva appletti, jolla voi tutkia johtosuoran ja polttopisteen vaikutusta paraabelin kuvaajaan.

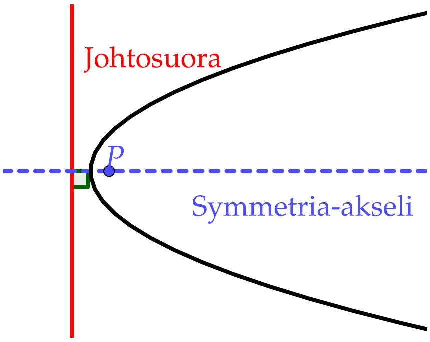
GG: Paraabeli ja johtosuora



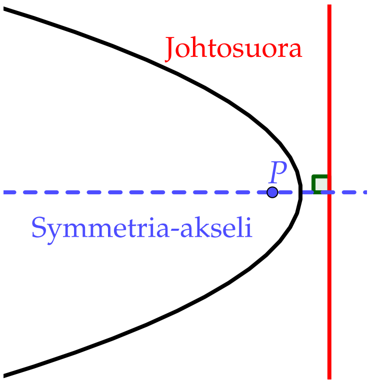
Ylöspäin aukeava paraabeli



Alaspäin aukeava paraabeli



Oikealle aukeava paraabeli



Vasemmalle aukeava paraabeli

Lisätieto B.4 GG Paraabelin piirtäminen GeoGebralla:

1. Piirrä jokin piste piirtoalustalle.
2. Piirrä haluamasi johtosuora esimerkiksi kirjoittamalla sen yhtälö syöttökenttään.
3. Katso pisteen ja suoran nimet. Esim. A ja f.
4. Kirjoita syöttökenttään "paraabeli(A, f)"
5. Piirretyn paraabelin yhtälön voi lukea piirtoalueen vasemmalta puolelta.

Pohdinta B.5 GG

Etene ohjeiden mukaisesti ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Millainen paraabelin johtosuoran yhtälön tulee olla, että muodostuu ylöspäin tai alaspäin aukeava paraabeli? Piirrä yksi sellainen paraabeli käyttäen GeoGebran paraabeli-käskyä.

b) Millainen johtosuoran yhtälön tulee olla, että muodostuisi oikealle tai vasemmalle aukeava paraabeli? Piirrä myös tällainen paraabeli.

c) Tarkastele piirtämiesi paraabeleiden yhtälöitä. Saako yhtälöt ratkaistua helposti toisen muuttujan suhteen, eli saako yhtälöt muokattua muotoon $y = \ldots$ tai muotoon $x = \ldots$? Muokkaa yhtälöt kyseiseen muotoon, mikäli se on mahdollista.

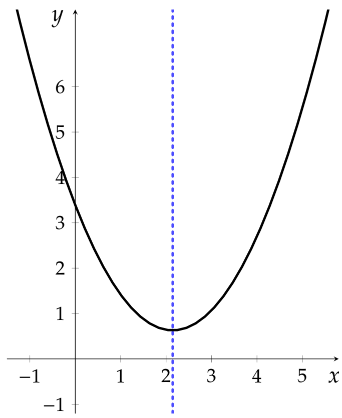
d) Vertaa piirtämiesi paraabeleiden yhtälöitä. Löydätkö niistä yhteisiä piirteitä? Kumpi yhtälö kuuluu x-akselin suuntaiselle paraabelille ja kumpi y-akselin suuntaiselle paraabelille?

e*) Millainen johtosuoran tulisi olla, että saataisiin "vino"paraabeli? Vinon paraabelin symmetria-akseli ei ole yhdensuuntainen x- tai y-akselin kanssa.

f*) Tarkastele "vinon"paraabelin yhtälöä. Saako sen muokattua helposti muotoon $x = \ldots$ tai $y = \ldots$?

Lause B.6 Jos paraabelin symmetria-akseli on y-akselin suuntainen, paraabelin yleinen yhtälö on vakiokertoimien $a,\ b$ ja c avulla lausuttuna

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ missä } a \neq 0.$$



Todistus. Johtosuoran on oltava y-akselin suuntaiselle paraabelille muotoa $y = l,\ l \in \mathbb{R}$. Merkitään polttopistettä pisteellä (x_0, y_0) ja yleistä paraabelin pistettä pisteellä (x, y).

Paraabelin määritelmän perusteella pisteiden (x_0, y_0) ja (x, y) välisen janan pituus on yhtä suuri kuin pisteen (x, y) etäisyys suorasta $y = l$. Toisin sanoen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |y-l| \\
&(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (y-l)^2 \\
&x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = y^2 - 2ly + l^2 \\
&2(y_0-l)y = x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y_0^2 - l^2 \quad \| : 2(y_0-l) \\
&y = \frac{1}{2(y_0-l)}x^2 - \frac{2x_0}{2(y_0-l)} + \frac{x_0^2+y_0^2-l^2}{2(y_0-l)} \\
&y = \frac{1}{2(y_0-l)}x^2 - \frac{x_0}{y_0-l} + \frac{x_0^2+y_0^2-l^2}{2(y_0-l)}
\end{aligned}$$

Merkitään vakiokertoimia kirjaimilla a, b ja c :

$$a = \frac{1}{2(y_0-l)}, \quad b = -\frac{x_0}{y_0-l} \text{ ja } \quad c = \frac{x_0^2+y_0^2-l^2}{2(y_0-l)}.$$

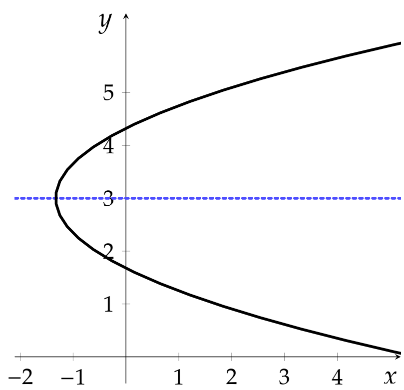
Tällöin paraabelin yhtälöksi saadaan

$$y = ax^2 + bx + c.$$

□

Lause B.7 Jos paraabelin symmetria-akseli on x-akselin suuntainen, paraabelin yleinen yhtälö on vakiokertoimien a, b ja c avulla lausuttuna

$$x = ay^2 + by + c, \text{ missä } a \neq 0.$$



Todistus vastaavasti kuin edellisessä tapauksessa.

Mallitehtävä B.8 Vasemmalle aukeava paraabeli kulkee pisteiden $(-10,-1)$, $(2,2)$ ja $(-4,5)$ kautta. Määritä paraabelin yhtälö.

Ratkaisu:

Vasemmalle aukeava paraabeli on x-akselin suuntainen, joten sen yleinen yhtälö on $x = ay^2 + by + c$. Pisteet $(-10,-1)$, $(2,2)$ ja $(-4,5)$ toteuttavat paraabelin yhtälön, joten sijoitetaan nämä arvot yhtälöön ja ratkaistaan parametrit a, b ja c. Tällöin saadaan yhtälöjoukko

$$\begin{cases} -4 & = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ -10 & = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 2 & = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4 & = 25a + 5b + c \\ -10 & = a - b + c \\ 2 & = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Ratkaisemalla kolmannesta yhtälöstä c saadaan $c = -4a - 2b + 2$. Sijoitetaan tämä ensimmäiseen ja toiseen yhtälöön:

$$\begin{cases} -4 & = 25a + 5b - 4a - 2b + 2 \\ -10 & = a - b - 4a - 2b + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -6 & = 21a + 3b \\ -12 & = -3a - 3b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -6 & = 21a + 3b \\ b & = -a + 4 \end{cases}$$

Sijoitetaan toinen yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan a:

$$-6 = 21a + 3(-a + 4) = 21a - 3a + 12 = 18a + 12 \quad \Rightarrow \quad 18a = -18 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\Rightarrow b = -(-1) + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$\Rightarrow c = -4 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 2 = 4 - 10 + 2 = -4$$

Paraabelin yhtälö on $x = -y^2 + 5y - 4$.

Vastaus: $x = -y^2 + 5y - 4$

Harjoitustehtävät

6. Päättele ilman teknisiä apuvälineitä paraabelin aukeamissuunta, kun sen

a) johtosuora on $y = 3$ ja polttopiste $(5, 2)$

b) johtosuora on $x + \frac{1}{2} = 0$ ja polttopiste $(2{,}5; -1)$

c) johtosuora on $y = -x$ ja polttopiste $(1, 1)$

7. Määritä paraabelin yhtälö, kun sen

a) johtosuora on $x = 2$ ja polttopiste $(1, 3)$

b) johtosuora on $y - \frac{3}{4} = 0$ ja polttopiste $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Tarkasta saamasi vastaus piirtämällä paraabeli GeoGebraan.

8. Muodosta sen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(2, 0)$, $(4, 2)$ ja $(10, -1)$ kautta.

9. Tasokäyrä K muodostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin suorasta $y = 2$.

Muodosta käyrän K yhtälölle muoto $y = f(x)$. (K2016/7a)

10. Onko väite tosi aina, joskus vai ei koskaan? Perustele tarvittaessa.

a) Paraabelin huippu sijaitsee symmetria-akselilla.

b) Paraabeli saa joko suurimman tai pienimmän y-arvonsa huipun x-koordinaatissa.

c) y-akselin suuntaisen paraabelin pisteen (x, y) etäisyys johtosuorasta on $|y|$

d) Paraabelin polttopiste voi sijaita johtosuoralla.

e) Alaspäin aukeava paraabeli saa saman y-arvon, kun $x = x_0$ ja $x = -x_0$.

f) Paraabelin pisteelle löytyy toinen piste, jonka etäisyydet polttopisteestä ja johtosuorasta ovat samat kuin alkuperäisen pisteen.

B.2 Paraabelin huippu

Pohdinta B.9 GG

GeoGebraan on piirretty parametreista riippuva paraabeli $y = ax^2+bx+c$ ja paraabeli $y = x^2$ vertailua varten. Tarkkaile tehtävän aikana paraabelin kuvaajaa sekä sen yhtälöä. Paraabelin kertoimet

1) Tarkastellaan paraabelia $y = ax^2$. Toisin sanoen, pidä toistaiseksi parametrit b ja c nollana.

   a) Kuvaile, mitä paraabelin kuvaajalle tapahtuu, kun $a > 1$ ja kun $0 < a < 1$. Selitä havaintosi paraabelin yhtälön avulla.
   Vinkki: Kannattaa vertailla paraabeleiden y-arvoja, kun $x = 1$ tai $x = -2$ jne.

   b) Mihin suuntaan paraabeli aukeaa, kun parametri a saa negatiivisia arvoja? Kokeile sitten arvoa $a = -1$ ja vertaile paraabeleiden y-arvoja erilaisilla x-arvoilla. Mitä huomaat?

2) Vaihtele seuraavaksi kertoimen c arvoja.

   c) Kuvaile, kuinka parametrin c arvot vaikuttavat paraabelin huipun sijaintiin.

   d) Tarkastellaan paraabelia, jonka yhtälö on $y = x^2 + 1$. Miksi huippu sijaitsee juuri pisteessä $(0, 1)$? Toisin sanoen, miksi paraabeli saa pienimmän arvonsa, kun $x = 0$? Perustele paraabelin yhtälön avulla.

3) Kokeile nyt parametrin b eri arvoja.

   e) Mihin suuntiin paraabelin huippu voi liikkua, kun parametrin b arvot vaihtelevat?

   f) Aseta liukusäätimet siten, että saat paraabelin yhtälöksi $y = x^2 - 4x + 1$. Missä pisteessä paraabelin huippu nyt sijaitsee?

   g) Muokkaa edellisen paraabelin yhtälö muotoon $y = (x-h)^2+k$, missä h ja k ovat vakioita. Määritä piste (h, k) ja vertaa sitä kohtaan f). Mitä huomaat?
   Vinkki: Päättele h ja k, kun $(x - h)^2 + k = x^2 - 2hx + h^2 + k$

   h) Selitä edellisessä kohdassa muodostetun paraabelin yhtälön avulla, miksi huippu sijaitsee juuri kohdan g) mukaisessa pisteessä. (Eli miksi paraabeli saa tässä pisteessä pienimmän arvonsa)

Lause B.10 Olkoon piste (x_0, y_0) paraabelin huippu. y-akselin suuntaisen paraabelin yhtälö voidaan esittää voidaan esittää yleisen muodon lisäksi myös *huippumuodossa*

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2,$$

josta voi lukea huipun koordinaatit.

Vastaavasti x-akselin suuntaisen paraabelin huippumuotoinen yhtälö on

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2.$$

Mallitehtävä B.11 Määritä paraabelin huipun koordinaatit ja muodosta sen huippumuotoinen yhtälö, kun paraabelin yleinen yhtälö on $x = -y^2 - 3y + \frac{11}{4}$.

Ratkaisu: Paraabeli on nyt x-akselin suuntainen, koska y:llä esiintyy toisen asteen eksponenttia ja x:llä vain ensimmäistä astetta. Se aukeaa vasemmalle (negatiivisen x-akselin suuntaan), koska $a < 0$.

Muokataan paraabelin yleinen yhtälö binomin neliön kaavan avulla huippumuotoiseen yhtälöön $x - x_0 = a(y - y_0)^2$.

$$\begin{aligned} x &= -y^2 - 3y + \frac{11}{4} = -\left(y^2 + 3y - \frac{11}{4}\right) \\ &= -\left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y - \frac{11}{4}\right) = -\left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} - \frac{20}{4}\right) \\ &= -\left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + 5 = -\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + 5 \end{aligned}$$

Huipun koordinaatit ovat siis $(x_0, y_0) = \left(5, -\frac{3}{2}\right)$ ja huippumuotoinen yhtälö

$x = -(y + \frac{3}{2})^2 + 5$.

Vastaus: $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$, $x = -(y + \frac{3}{2})^2 + 5$.

Pohdinta B.12

OSA 1:

Paraabelin $y = -x^2 + 5x - 4$ kuvaaja on piirretty tehtävään avuksi. Määritetään paraabelin huipun koordinaatit.

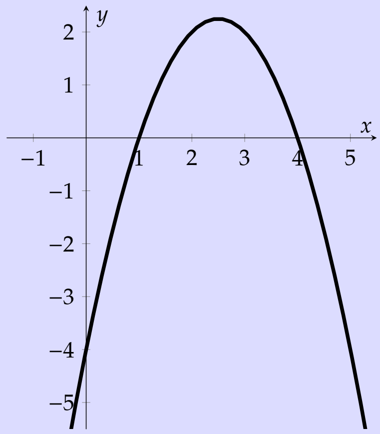
a) Etsi kaksi muuttujan x arvoa, joilla paraabeli saa samat arvot.

b) Missä kohdassa paraabelin huippu sijaitsee suhteessa edellisen kohdan x-arvoihin? Mihin se perustuu?

c) Määritä huipun x-koordinaatti.

d) Määritä huipun y-koordinaatti.

e) Minkälaisessa tapauksessa edellä esitetty menetelmä on tehokkaampi kuin paraabelin yhtälön saattaminen huippumuotoon?



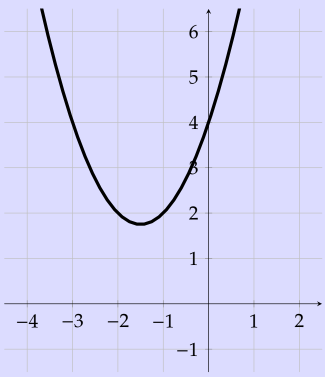
OSA 2:

Tiedetään, että paraabelilla $y = x^2+3x+4$ ei ole nollakohtia ja että se leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 4)$.

a) Laske, missä toisessa kohdassa paraabeli saa saman y-arvon, ja tarkista se alla olevasta kuvaajasta.

b) Määritä huipun x-koordinaatti.

c*) Yleisesti y-akselin suuntaisen paraabelin huipun määrityksessä paraabelin y-arvoksi voidaan valita sen pisteen y-koordinaatti, jossa paraabeli leikkaa y-akselin. Mainitse kaksi syytä, miksi on erityisen kätevää valita juuri tämä y:n arvo.



Harjoitustehtävät

11. Päättele paraabelin yhtälön perusteella, mihin suuntaan paraabeli aukeaa.

a) $y = -2x^2 + x + 5$

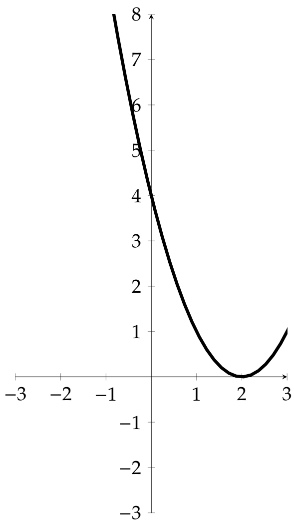
b) $y^2 - 4 - x = 0$

c) $x = -\frac{3}{2}(y-1)^2$

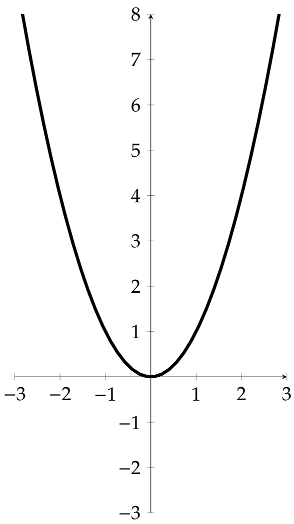
12. Yhdistä paraabelin yhtälö ja kuvaaja. Perustele myös vastauksesi.

a) $y = x^2$ b) $x = (y-3)^2 - 1$ c) $y = (x-2)^2$

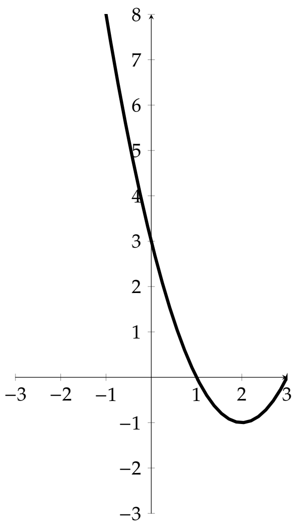
d) $y = 2x^2$ e) $y = (x-2)^2 - 1$ f) $x = (y-1)^2 - 3$



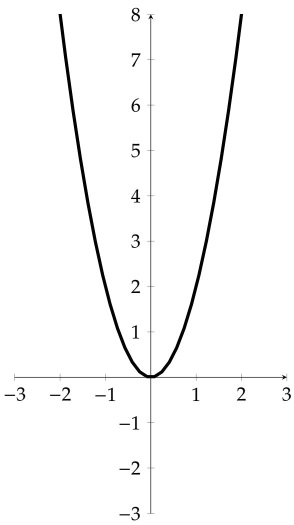
1.



2.

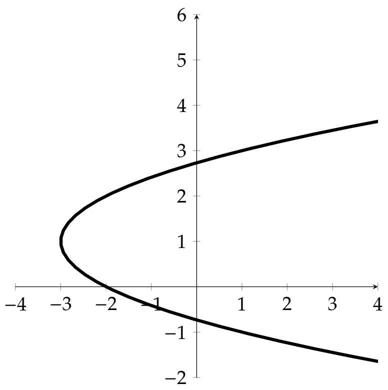


3.

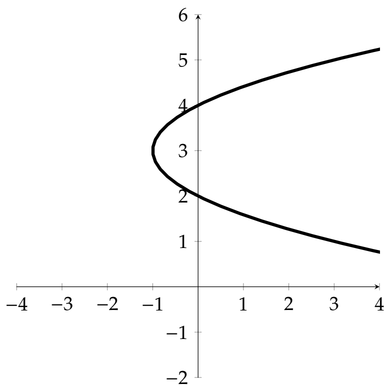


4.

5.



6.



13. a) Muokkaa paraabelin yhtälö $x = 2y^2 - 12y + 11$ huippumuotoon

b) Ratkaise huipun koordinaatit myös paraabelin symmetrian avulla.

14. Tarkastellaan paraabeleita, jotka ovat muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Onko väite totta aina, joskus vai ei koskaan? Perustele.

a) vakio c kertoo huipun y-koordinaatin.

b) paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

c) vakio a on paraabelin kulmakerroin.

d) vakio b ilmaisee, kuinka monta yksikköä paraabeli on siirtynyt x-akselin suunnassa.

15. Hahmottele paraabelin $y = -x^2 - 3x + 5$ kuvaaja ruutupaperille ilman teknisiä apuvälineitä. Tarkista piirtämäsi kuvaaja esimerkiksi GeoGebralla.

16. a) Osoita, että paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ huipun x-koordinaatti x_0 voidaan laskea yhtälöstä

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Vinkki: Oleta, että paraabeli saa arvon c.

b) Mikä paraabelin piste on edellisessä kohdassa saatu $(0, c)$?

c) Määritä paraabelin $y = 3x^2 + 2x - 1$ huipun koordinaatit.

C Opettajan opas

Opettajan opas sisältää ajankäyttösuunnitelman, keskeiset oppimistavoitteet kappalekohtaisesti, vinkkejä teorian käsittelyyn sekä apukysymyksiä, joilla ohjata opiskelijoiden ajattelua tarkoituksenmukaiseen suuntaan. Lisäksi opettajan oppaassa on käsitelty jokainen oppimateriaalin pohdintatehtävä, annettu vinkkejä niiden toteuttamiseen ja annettu vastaukset kysymyksiin.

C.1 Ajankäyttösuunnitelma

Ajankäyttösuunnitelma on tehty 75 minuutin oppitunneille ja aiheita on yhteensä kolme.

Pisteen etäisyys suorasta	1 (h)
Paraabelin ominaisuuksia	1 (h)
Paraabelin huippu	1 (h)

Todennäköisesti jokaista harjoitustehtävää ei ehdi tehdä oppituntien ja kotitehtävien puitteissa, mutta ylijääneitä tehtäviä voi hyödyntää esimerkiksi kertaavilla laskutunneilla.

C.2 Pisteen etäisyys suorasta

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet:

- Opiskelija osaa laskea pisteen etäisyyden suorasta
- Opiskelija osaa soveltaa pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskukaavaa erilaisiin ongelmiin

Pohdinta A.1 Tehtävässä mietitään lyhintä reittiä koordinaattipisteeltä suoralle ja määritetään kyseisen reitin pituus aiemmin opitun tiedon, kuten janan pituuden ja normaalin, avulla. Lyhimmän reitin ajatuksen muokkaaminen matematiikaksi voi olla osalle vaikeaa, minkä vuoksi sivun alalaitaan on kirjattu vinkki. Mikäli opiskelija käyttää vinkin, on varmistettava, että hän ymmärtää normaalin olevan lyhyin reitti pisteeltä suoralle. Suoran normaalin yhtälön saa selville myös GeoGebralla, mutta tässä on toisaalta oiva mahdollisuus kerrata normaalin yhtälön muodostamista käsin. Pisteen ja suoran välinen etäisyys tulee laskea tarkasti käsin, sillä GeoGebra antaa vain likiarvon. Merkki * tarkoittaa ylöspäin eriyttävää lisätehtävää nopeimmille opiskelijoille.

Vastaus:

1. Kohta, josta pääsee maantietä vastaan kohtisuorasti tontille.
3. Normaalin yhtälö: $y = -x + 5$

4. Määritetään suoran ja sen normaalin leikkauspiste. $(4, 1)$.

5. $\sqrt{8}$

6.* "Vino"tie maantielle vastaa suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa, joka on aina pidempi kuin kateetit. Tämä on helposti osoitettavissa Pythagoraan lauseen avulla.

Pohdinta A.4

Tässä pohdinnassa tutustutaan pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskukaavan käyttöön. Pohdinnalla halutaan ennaltaehkäistä helposti tapahtuvaa virhettä eli väärässä muodossa olevan suoran yhtälön käyttämistä kaavaan sijoituksessa. Toinen ratkaisu sisältää virheen ja toinen ratkaisu on tehty oikein. Tässä tehtävässä tulee varmistaa, että opiskelijat ovat huomanneet perimmäisen syyn virheelliseen vastaukseen johtaneessa ratkaisussa. Tämän pohdinnan yhteydessä on hyvä paikka korostaa myös suoran yhtälön sieventämistä helpoimpaan muotoon. Esimerkiksi, miksi on sijoituksen kannalta järkevää muokata yhtälö $\frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2} = 0$ muotoon $x - 2y + 3 = 0$.

Vastaus: Jukan ratkaisu on väärin. Hän ei muokannut yhtälöä yleiseen muotoon, minkä seurauksena hän sijoitti väärän arvon laskukaavaan.

Pohdinta A.5

Opitun tiedon on soveltaminen on keskeisessä asemassa tämän pohdinnan kohdalla. Ideana on huomata, että laskukaavaa voi käyttää muunkin tyyppisiin ongelmiin kuin annetun pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskemiseen. Vinkkejä ohjaamiseeen:

- **a.** Mitä tietoja tarvitaan opitun laskukaavan käyttämiseen? Mitä tässä on annettu ja mitä puuttuu? Saako puuttuvan tiedon muodostettua jotenkin "ylimääräisestä"tiedosta?
- **a.** Miksi pisteen etäisyys suorasta on sama asia kuin yhdensuuntaisten suorien välinen lyhin etäisyys?
- **c.** Kannattaa tarkastella aluksi vaaka- ja pystysuuntaisia suoria, lopuksi kaltevia suoria.
- **c.** Kaltevan suoran vastaesimerkin saa helposti tehtävänannon suorista.

Vastaus:

a) Valitaan jokin suoran piste ja lasketaan sen etäisyys toisesta suorasta. Suorien välinen lyhin etäisyys on vakiosuuruinen kohtisuora etäisyys, joten voidaan valita mikä tahansa piste toiselta suoralta.

b) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

c) Joskus. Väite on tosi ainoastaan, kun suora on jomman kumman akselin suuntainen.

C.3 Paraabelin ominaisuuksia

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet:

- Opiskelija osaa
  - määrittää paraabelin yhtälön johtosuoran ja polttopisteen avulla
  - päätellä paraabelin avautumissuunnan johtosuoran ja polttopisteen perusteella
- Opiskelija ymmärtää paraabelin symmetrisyyden sekä huipun käsitteen
- Opiskelija muistaa paraabelin yleisen yhtälön

Määritelmän B.1 yhteydessä kannattaa pohtia ryhmän kanssa hieman, miksi paraabelin kuvaaja näyttää sellaiselta kuin se näyttää. Miksi esimerkiksi suora ei täytä paraabelin määritelmän ehtoja? Paraabelin kuvaajan muodostumista voi tarkastella lähtien paraabelin huipusta liikkumaan reunoille. Paraabelin pisteen (x, y) liikkuessa polttopisteestä kauemmas oikealle myös pisteen ja johtosuoran etäisyyden tulee kasvaa yhtä paljon, mikä pakottaa pisteen liikkumaan samalla ylöspäin. Täysin vastaava tilanne syntyy, kun piste liikkuu huipusta vasemmalle, eli paraabelin kuvaaja on symmetrinen. GeoGebra-appletti sopii apuvälineeksi tämän käsittelyyn.

Kappaleessa on käytössä toinenkin GeoGebra-appletti: *Paraabeli ja johtosuora*. Tämän appletin avulla voi aluksi havainnollistaa symmetria-akselin ja huipun määritelmää ja sitten pohtia ryhmän kanssa, miten paraabelin avautumissuuntaa voi säädellä. Sopivia kysymyksiä voisivat olla esimerkiksi

- Miksi huippu sijaitsee polttopisteen ja johtosuoran puolessa välissä?
- Mitä pitäisi tehdä, että saataisiin paraabeli aukeamaan oikealle päin?
- Miten saadaan aikaan vasemmalle aukeava paraabeli ja mikä on keskeisin eroavaisuus edellisestä tapauksesta? (Polttopiste sijaitsee toisella puolella johtosuoraa)

Paraabelin käsitteeseen liittyvät keskeiset apukäsitteet ovat paraabelin symmetria ja huippu. Nämä käsitteet tulisi selittää huolellisesti tarkasteltaessa eri suuntiin aukeavien paraabeleiden kuvaajia. Symmetria tarkoittaa tässä tapauksessa, että yhtä y:n arvoa vastaa kaksi muuttujan x arvoa. Ainoastaan huippu tekee poikkeuksen, minkä vuoksi se on erityinen piste. Huipun käsitettä kannattaa kuvailla lisää - välttäen kuitenkin virhekäsitystä huipusta aina paraabelin suurimpana tai pienimpänä arvona.

Pohdinta B.2

Tässä pohdinnassa tutustutaan paraabelin yhtälön muodostamiseen sen määritelmän pohjalta sekä harjoitellaan kuvailemaan ratkaisun kannalta keskeisiä vaiheita. Opettajan tulisi tarkistaa, että oppilaat miettivät vaiheita riittävän syvällisesti, sillä tehtävän on tarkoitus sitoa aiemmin opittuja asioita uuteen aiheeseen. Alla on kaksi kysymystä, jotka opettaja voi esittää eriyttävinä kysymyksinä.

- Pystyisikö janan pituuden $|AL|$ päättelemään tässä tapauksessa myös jollakin muulla tavalla?
- Pohdi, miksi vaiheessa (3) saa ongelmitta korottaa yhtälön potenssiin kaksi.

Vastaus:

(1) Paraabelin pisteen A ja polttopisteen P välisen janan pituus, janan pituuden kaava.

(2) Paraabelin pisteen A etäisyys johtosuorasta, laskukaava.

(3) Määritelmän nojalla edellä mainittujen janojen pituudet on asetettu yhtä suuriksi.

(4) Yhtälö korotetaan toiseen potenssiin, jolloin neliöjuuri häviää ja ratkaistava yhtälö muuttuu helpommaksi.

Pohdinta B.5

Tarkoituksena on tutkia eri suuntaisten paraabeleiden yhtälöitä sekä niiden riippuvuutta johtosuoran yhtälöstä. Paraabeleiden piirtämiseen löytyy ohjeet, joten opiskelijoiden tulisi pärjätä melko itsenäisesti. Opettajan tärkeimpänä tehtävänä on varmistaa, että opiskelijat saavat kirjoitettua paraabeleiden yhtälöt oikeaan muotoon ja liittämään kummallekin paraabelityypille oikean yhtälön. Lisätehtävässä pääsee tutustumaan vinoon paraabeliin ja, kuinka sen yhtälö poikkeaa selvästi akseleiden suuntaisista paraabeleista.

Vastaus:

a) muotoa $y = a$, missä $a \in \mathbb{R}$

b) muotoa $x = a$, missä $a \in \mathbb{R}$

d) x-suuntainen muotoa $x = ay^2 + by + c$, y-suuntainen muotoa $y = ax^2 + bx + c$

e*) nouseva tai laskeva johtosuora, ts. $y = kx + b$, $k \neq 0$

f*) ei saa.

C.4 Paraabelin huippu

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet:

Opiskelija oppii

- tutkimaan paraabeleita yhtälöiden avulla
- yhdistämään paraabelin graafisen ja algebrallisen esityksen
- muodostamaan paraabelin huippumuotoisen yhtälön
- määrittämään paraabelin huipun koordinaatit paraabelin yhtälön pohjalta

Pohdinta B.9

Tässä monivaiheisessa pohdinnassa tutkitaan parametrien vaikutusta paraabelin kuvaajaan sekä perustellaan huipun sijaintia tulkitsemalla paraabelin yhtälöä. Opiskelijoita pitää muistuttaa perustelemaan havaintojaan riittävän syvällisesti, sillä tässä pohdinnassa ollaan kiinnostuneempia perusteluista kuin vastauksista. Huipun sijainnin perustelu on selkeästi haastavin osuus. Kannattaa ohjeistaa opiskelijoita tarkastelemaan, minkälaisia y:n arvoja positiivisilla ja negatiivisilla x:n arvoilla saadaan aikaan, ja miettimään paraabelin pienintä arvoa. Lopuksi voi kysyä ryhmältä, noudattaako myös paraabeli $y = x^2 + 1$ huippumuotoista yhtälöä.

Vastaus:

1. a) Kun $a > 1$, paraabelin y-arvot kasvavat paraabeliä $y = x^2$ nopeammin kertoessa luvulla a.
   b) Alaspäin. Paraabeli on peilautunut x-akselin alapuolelle.
2. c) Nostavat tai laskevat huippua.
   d) Termi x^2 on aidosti positiivinen nollasta eroavilla arvoilla, jolloin y saa suuremman arvon kuin 1.
3. e) Vaaka- ja pystysuunnassa.
   f) $(2, -3)$
   g) $y = (x - 2)^2 - 3$. Piste (h, k) on sama kuin huipun koordinaatit. Tästä yhtälön muodosta näkee suoraan huipun sijainnin.
   h) Tässä vastaavasti termi $(x - 2)^2$ tuottaa nollan, kun $x = 2$. Muilla x arvoilla termi on aidosti positiivinen, minkä seurauksena yhtälöstä saatavat y arvot ovat suurempia kuin arvoa $x = 2$ vastaava y arvo. Kun huippumuotoiseen yhtälöön sijoitetaan $x = 2$, saadaan $y = -3$.

Pohdinta B.12

Pohdinnan tarkoituksena on esitellä toisen tyyppinen menetelmä huipun koordinaattien ratkaisemiseen, mikä perustuu paraabelin symmetriaan ja huipun määritelmään. Tässä pohdintatehtävässä siis sovelletaan käsitetietoa paraabelin ominaisuuksista. *Osassa 1* opiskelijoilta voi kysyä, löytävätkö he muita pisteitä, joista voisi päätellä huipun x-koordinaatin. Menetelmien vertailussa opiskelijoiden tulisi pohtia hieman menetelmien hyviä ja huonoja puolia. *Osassa 2* tarkastellaan tilannetta, jossa paraabelilla ei ole nollakohtia. Pohdinnan lopussa on eriyttävä kohta, jossa tarkastellaan ratkaisun kannalta tehokkaimman y-arvon valintaa. Harjoitustehtävä 16 liittyy tähän pohdintaan.

Vastaus: Osa 1:

a) $x = 1$ ja $x = 4$ tai $x = 0$ ja $x = 5$

b) x-arvojen puolivälissä. Perustuu paraabelin symmetriaan.

c) $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$

d) $y = \frac{9}{4} = 2{,}25$

e) Kun huipun koordinaatit eivät ole "helppoja"lukuja, huippumuotoisen yhtälön muodostaminen on usein työlästä.

Osa 2:

b) $-\frac{3}{2}$

c*) **1.** Ensimmäinen x-koordinaatti on aina nolla, jolloin tarkasteltava y:n arvo on suoraan paraabelin yleisen yhtälön vakiotermi.
2. Kun yhtälöön sijoitetaan $y = c$ (missä c on paraabelin yhtälön vakiotermi), ratkaistava yhtälö yksinkertaistuu muotoon $ax^2 + bx = 0$. Tästä on helppo ratkaista huipun toinen x-koordinaatti.

D Tehtävien vastaukset

Pisteen etäisyys suorasta

1. a) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$

2. a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{8}{\sqrt{41}}$ c) $\frac{16}{5}$

3. $4x + 2y + 22 = 0$ ja $4x + 2y - 18 = 0$

4. $\frac{1}{\sqrt{13}}$

5. a) $\frac{13}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{13}{6}$

Paraabelin ominaisuudet

6. a) alaspäin b) oikealle c) oikeaan yläviistoon, suoran $y = x$ suuntaan

7. a) $x = \frac{1}{2}y^2 + 3y - 3$ b) $y = -2x^2 + \frac{5}{8}$

8. $x = 3y^2 - 5y + 2$

9. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

10. a) Aina b) Joskus c) Joskus d) Ei koskaan e) Joskus f) Joskus

Paraabelin huippu

11. a) alaspäin b) oikealle c) vasemmalle

12. a) 2 b) 6 c) 1 d) 4 e) 3 f) 5

13. a) $x + 7 = 2(y - 3)^2$ b) $(3, -7)$

14. a) Joskus b) Aina c) Ei koskaan d) Joskus

16. b) Paraabelin ja y-akselin leikkauspiste c) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right)$

Hakemisto