Kvaterniot

LuK-tutkielma
Leskelä Heli
2510514
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2019

Sisältö

Johdanto

Kvaternioiden keksijänä voidaan pitää William Rowan Hamiltonia, joka tunnetaan myös esimerkiksi sähkömagnetismissa käytetystä Hamiltonin formalismista. Hän tiesi, että kompleksiluvut voidaan esittää pistepareina, joita voidaan lisätä ja kertoa yhteen. Hamiltonin tavoitteena oli laajentaa tämä kaksiulotteinen lukualue kolmanteen ulottuvuuteen, mutta 13 vuoden yrityksestä huolimatta hän ei saanut pistekolmikon välistä tuloa toimimaan. Hän ei kuitenkaan halunnut heittää kovaa työtään hukkaan, joten hän siirtyi tutkimaan pistenelikkoja. (Katso [1], s. 20-21.)

Lopulta, vuonna 1843, Hamilton sai tulon toimimaan luopumalla kommutatiivisuudesta, ja näin kvaternioiden muodostama algebra sai alkunsa. Kvaterniot ovat tärkeitä tänäkin päivänä, sillä niitä käytetään tietokonegrafiikassa kolmiulotteisen liikkeen mallintamisessa. (Katso [1], s. 21-22.)

Tämän tutkielman ensimmäisessä osassa määritellään kvaternioiden muodostama algebra ja käydään läpi kvaternioiden ominaisuuksia. Työn toisessa osassa määritellään funktio, joka kuvaa vektorimuodossa olevat kvaterniot neliömatriiseiksi. Esitietoina lukijalta vaaditaan vektorilaskennan perusteita sekä matriisien summan ja tulon tunteminen. Kompleksilukujen tuntemisesta on myös hyötyä lukijalle.

Työssä käytetään lähteinä John Stillwellin kirjaa Naive Lie Theory [1], ja Hansjörg Geigesin teosta The Geometry of Celestial Mechanics [2]. Tutkielman esimerkit on keksitty itse, ja todistuksissa on käytetty mallina lähteissä esitettyjä todistuksia.

1 Perusominaisuuksia

Olkoon $\mathbb{R}^4$ neliulotteinen vektoriavaruus, jonka kanta on vektorijoukko $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= (1,0,0,0) \\ \mathbf{i} &= (0,1,0,0) \\ \mathbf{j} &= (0,0,1,0) \\ \mathbf{k} &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Kantavektoreille määritellään

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}, \tag{1}$$

missä vektori $\mathbf{1}$ on kertolaskun neutraalialkio.

Määritelmä 1.1. Kantavektoreilla määritelty tulo laajennetaan koskemaan kaikkia avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreita käyttämällä osittelulakeja ja assosiatiivisuutta. Kvaternioiden muodostama algebra $\mathbb{H}$ on vektoriavaruus $\mathbb{R}^4$ varustettuna edellä määritetyllä tulolla. Nyt algebran $\mathbb{H}$ vektoreita, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{a} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

missä a_0, a_1, a_2 ja a_3 ovat reaalilukuja, kutsutaan *kvaternioiksi.* Kvaternion *reaaliosa* on $a_0\mathbf{1}$ ja $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ on kvaternion *imaginääriosa.*

Lemma 1.2. *Kantavektorien tuloille on voimassa suraavat laskusäännöt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{jk} & -\mathbf{i} &= \mathbf{kj} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{ki} & -\mathbf{j} &= \mathbf{ik} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{ij} & -\mathbf{k} &= \mathbf{ji}. \end{aligned} \tag{2}$$

Todistus. Nämä laskusäännöt seuraavat suoraan yhtälöstä (1). Esimerkiksi tulot $\mathbf{ij}$ ja $\mathbf{ji}$ saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ijk}^2 = (-\mathbf{ijk})\mathbf{k} = \mathbf{k} \\ \mathbf{ji} &= \mathbf{ji}(-\mathbf{ijk}) = -\mathbf{ji}^2\mathbf{jk} = \mathbf{j}^2\mathbf{k} = -\mathbf{k}. \end{aligned}$$

□

Lause 1.3. *Kahden kvaternion tulo on muotoa*

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} =&(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ =&(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) \\ &+ (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\ &+ (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} \\ &+ (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Todistus. Olkoon vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kvaternioita. Lasketaan niiden tulo

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} =& (a_0+a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ =& \ a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k} + a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{i}^2 \\ &+ a_1b_2\mathbf{ij} + a_1b_3\mathbf{ik} + a_2b_0\mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{ji} + a_2b_2\mathbf{j}^2 \\ &+ a_2b_3\mathbf{jk} + a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{ki} + a_3b_2\mathbf{kj} + a_3b_3\mathbf{k}^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Sijoittamalla Lemman 1.1 kantavektorien tulot yhtälöön (4) saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} =& \ a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k} + a_1b_0\mathbf{i} - a_1b_1 \\ &+ a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} + a_2b_0\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} - a_2b_2 \\ &+ a_2b_3\mathbf{jk} + a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} - a_3b_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Yhteenlaskun kommutatiivisuuden nojalla yhtälön (5) termit voidaan järjestellä uudelleen. Nyt kvaternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ tuloksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} = &a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3\\ &+ a_0b_1\mathbf{i} + a_1b_0\mathbf{i} + a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i}\\ &+ a_0b_2\mathbf{j} + a_2b_0\mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j}\\ &+ a_0b_3\mathbf{k} + a_3b_0\mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Otetaan vielä kantavektorit yhteiseksi tekijöiksi jolloin tuloksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} = &(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)\\ &+ (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}\\ &+ (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j}\\ &+ (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

Seuraus 1.4. *Reaaliluvun ja kvateernion tulo on kommutatiivinen. Toisin sanoen reaaliluvun λ ja kvaternion $\mathbf{a}$ tulolle pätee*

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda. \tag{6}$$

Todistus. Reaaliluku λ voidaan ajatella kvaternioksi $\lambda\mathbf{1}$, jolla ei ole imaginääriosaa. Olkoon nyt siis $\lambda\mathbf{1}$ ja $\mathbf{a}$ avaruuden $\mathbb{H}$ alkioita, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Näiden tulo on

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{1})\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{1}(a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\\ &= (\lambda a_0)\mathbf{1} + (\lambda a_1)\mathbf{i} + (\lambda a_2)\mathbf{j} + (\lambda a_3)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Vektoriavaruuden skalaaritulon nojalla λ voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi. Nyt saadaan

$$(\lambda\mathbf{1})\mathbf{a} = \lambda(a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}).$$

Vastaavasti tulosta $\mathbf{a}(\lambda\mathbf{1})$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\lambda\mathbf{1}) &= (a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\lambda\mathbf{1}\\ &= (a_0\lambda)\mathbf{1} + (a_1\lambda)\mathbf{i} + (a_2\lambda)\mathbf{j} + (a_3\lambda)\mathbf{k}\\ &= \lambda(a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Siis $\lambda\mathbf{1a} = \mathbf{a}\lambda\mathbf{1}$. Koska $\mathbf{1}$ on yksikköalkio, jolla kertominen ei muuta tulon alkioita, voidaan kirjoittaa $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$. □

Määritelmä 1.5. Kvaternion $\mathbf{a}$ *konjugaatti* $\bar{\mathbf{a}}$ on

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.$$

Kvatenion $\mathbf{a}$ *normi* määritellään seuraavasti

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Lause 1.6. *Kvaternion* $\mathbf{a}$ *ja sen konjugaatin* $\bar{\mathbf{a}}$ *tulo on reaaliluku ja*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}}\ .$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{a}$ kvaternio algebrassa $\mathbb{H}$ ja $\bar{\mathbf{a}}$ sen konjugaatti. Nyt niiden tuloksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}) \\
&= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
&\quad + (-a_0a_1 + a_1a_0 - a_2a_3 + a_3a_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (-a_0a_2 + a_2a_0 - a_3a_1 + a_1a_3)\mathbf{j} \\
&\quad + (-a_0a_3 + a_3a_0 - a_1a_2 + a_2a_1)\mathbf{k} \\
&= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Siis tulo $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}$ on reaaliluku. Lisäksi nähdään, että $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}}$. □

Esimerkki 1.7. Olkoon $\mathbf{a} = 1 + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ kvaternio. Määritelmän 1.5 nojalla sen konjugaatti on

$$\bar{\mathbf{a}} = 1 - 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.$$

Kvaternion $\mathbf{a}$ ja sen konjugaatin $\bar{\mathbf{a}}$ tulo on Lauseen 1.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} &= (1 - 3\cdot(-3) - 2\cdot(-2) - (-1)\cdot 1) \\
&\quad + (1\cdot(-3) + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-2))\mathbf{i} \\
&\quad + (1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) - 3\cdot 1)\mathbf{j} \\
&\quad + (1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-2) - 2\cdot(-3))\mathbf{k} = 15.
\end{aligned}$$

Kvaternion $\mathbf{a}$ normiksi saadaan

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}.$$

Määritelmä 1.8. Algebralla tarkoitetaan reaalista vektoriavaruutta X, jossa on tulo-operaatio ja kaavat

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \\
\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})
\end{aligned} \tag{7}$$

ovat voimassa kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in X$. Toisin sanoen vektoriavaruuden tulo on distributiivinen avaruuden $\mathbb{R}$ yli, ja skalaarilla kertominen on kommutatiivinen operaatio.

Määritelmä 1.9. *Jakoalgebra* on algebra, jonka jokaisella nolla-alkiosta $\mathbf{0}$ poikkeavalla alkiolla on käänteisalkio tulon suhteen.

Lause 1.10. *Kvaternioiden muodostama neliulotteinen avaruus $\mathbb{H}$ on assosiatiivinen ja epäkommutatiivinen jakoalgebra.*

Todistus. Osoitetaan epäkommutatiivisuus vastaesimerkillä. Olkoon $\mathbf{a} = -\mathbf{i}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{2k}$. Lasketaan tulo $\mathbf{ab}$ seuraavasti

$$\mathbf{ab} = (-\mathbf{i})(2\mathbf{k}) = -2\mathbf{ik} = 2\mathbf{j}.$$

Tulo $\mathbf{ba}$ saadaan vastaavasti

$$\mathbf{ba} = (2\mathbf{k})(-\mathbf{i}) = -2\mathbf{ki} = -2\mathbf{j}.$$

Koska tulot eivät ole yhtäsuuria, kvaternioiden muodostama avaruus ei ole kommutatiivinen.

Assosiatiivisuus seuraa suoraan tulon määritelmästä. Olkoon $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ kvaternioneja. Lasketaan aluksi tulo $(\mathbf{ab})\mathbf{c}$ seuraavasti

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ab})\mathbf{c} &= \Big((a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\Big)(c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= \Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\Big) \\
&\quad \cdot (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\
&= \Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_0 - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)c_1 \\
&\quad - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)c_2 - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_3\Big) \\
&\quad + \Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_1 - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)c_0 \\
&\quad - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_2\Big)\mathbf{i} \\
&\quad + \Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_2 - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)c_0 \\
&\quad - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)c_3\Big)\mathbf{j} \\
&\quad + \Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)c_3 - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)c_0 \\
&\quad - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)c_1\Big)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Reaalilukujen assosiatiivisuuden nojalla termit voidaan järjestellä uudelleen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \Big(&(a_0(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) - a_1(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2) \\
&- a_2(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3) - a_3(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)) \\
&+ (a_0(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2) + a_1(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+ a_2(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3))\mathbf{i} \\
&+ (a_0(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3) + a_2(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+ a_3(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1))\mathbf{j} \\
&+ (a_0(b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+ a_1(b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2))\mathbf{k}\Big) \\
= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\Big(&(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) \\
&+ (b_0c_1 + b_1c_0 + b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} \\
&+ (b_0c_2 + b_2c_0 + b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} \\
&+ (b_0c_3 + b_3c_0 + b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}\Big) \\
= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\Big(&(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \cdot (c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})\Big) \\
= \mathbf{a}(\mathbf{bc}).&
\end{aligned}$$

Siis $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

Se, että avaruus $\mathbb{H}$ on jakoalgebra seuraa suoraan käänteisalkion määritelmästä: Jokaiselle nollasta poikkeavalle kvaterniolle $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ tulo $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|^2$ on reaalinen ja nollasta poikkeava. Tällöin

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Osoitetaan vielä, että $\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}$. Nyt Seurauksen 1.4 ja Määritelmän 1.5 perusteella saadaan

$$\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a}\frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a}|^2} = |\mathbf{a}|^2\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a}|^2} = \mathbf{1}$$

ja

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a}|^2} = |\mathbf{a}|^2\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a}|^2} = \mathbf{1}.$$

□

Lause 1.11. *Olkoon* $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *kvaternioita avaruudessa* $\mathbb{H}$. *Tällöin on voimassa*

$$\overline{\mathbf{ab}} = \overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{a}} \tag{8}$$

ja

$$|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \tag{9}$$

Todistus. Todistetaan aluksi yhtälö (8). Kvaternion tulon ja konjugaatin määritelmien nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{ab}} &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) - (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\
&\quad - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\
&= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (-a_0b_2 - a_2b_0 - a_3b_1 + a_1b_3)\mathbf{j} + (-a_0b_3 - a_3b_0 - a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Kvaternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ konjugaatit ovat

$$\overline{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathbf{b}} = b_0 - b_1\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_3\mathbf{k}.$$

Nyt konjugaattien tuloksi saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{b}}\ \overline{\mathbf{a}} &= (b_0 - b_1\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_3\mathbf{k})(a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}) \\
&= (b_0a_0 - b_1a_1 - b_2a_2 - b_3a_3) \\
&\quad + \Big(b_0(-a_1) + (-b_1)a_0 + (-b_2)(-a_3) - (-b_3)(-a_2)\Big)\mathbf{i} \\
&\quad + \Big(b_0(-a_2) + (-b_2)a_0 + (-b_3)(-a_1) - (-b_1)(-a_3)\Big)\mathbf{j} \\
&\quad + \Big(b_0(-a_3) + (-b_3)a_0 + (-b_1)(-a_2) - (-b_2)(-a_1)\Big)\mathbf{k} \\
&= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (-a_0b_2 - a_2b_0 - a_3b_1 + a_1b_3)\mathbf{j} + (-a_0b_3 - a_3b_0 - a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Siis $\overline{\mathbf{ab}} = \overline{\mathbf{b}}\ \overline{\mathbf{a}}$.

Todistetaan seuraavaksi yhtälö (9). Kvaternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ tulon itseisarvo on Lauseen 1.6 nojalla

$$|\mathbf{ab}| = \sqrt{(\mathbf{ab})(\overline{\mathbf{ab}})} = \sqrt{\mathbf{ab}\overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{a}}} = \sqrt{\mathbf{a}(\mathbf{b}\overline{\mathbf{b}})\overline{\mathbf{a}}}. \tag{10}$$

Nyt huomataan että tulo $\mathbf{b}\overline{\mathbf{b}}$ on kvaternion $\mathbf{b}$ normin neliö, eli $|\mathbf{b}|^2$. Koska tämä on reaaliluku, voidaan Seurauksen 1.4 nojalla muuttaa yhtälön (10) tulon järjestystä neliöjuuren sisällä. Täten

$$\begin{aligned} |\mathbf{ab}| &= \sqrt{\mathbf{a}|\mathbf{b}|^2\overline{\mathbf{a}}} = \sqrt{\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}}|\mathbf{b}|^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2} \\ &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \end{aligned} \tag{11}$$

Siis $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. □

Huomautus 1.12. Kvaternion normin neliö on reaaliluku, joten reaalilukujen tulon kommutatiivisuuden nojalla yhtälö (11) voidaan kirjoittaa muotoon

$$|\mathbf{ab}| = \sqrt{|\mathbf{b}|^2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2} = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|.$$

Määritelmä 1.13. Kvaternio $\mathbf{a} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, jonka reaaliosa $a_0\mathbf{1}$ on nolla, on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jota kutsutaan *puhtaaksi kvaternioksi.* Puhdas kvaternio on siis muotoa

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Nämä kvaterniot muodostavat avaruuden $\mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$, joka on ortogonaalinen avaruuden $\mathbb{R}\mathbf{1}$ kanssa. Avaruuden $\mathbb{R}\mathbf{1}$ vektoreita kutsutaan *reaalikvaternioiksi*, ja ne ovat muotoa $a_0\mathbf{1}$.

Määritelmä 1.14. Kahden puhtaan kvaternion ristitulo on muotoa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \tag{12}$$

Huomautus 1.15. Kantavektorien ristitulolle pätee

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

missä $\mathbf{0}$ on nollavektori. Kantavektoreille on voimassa myös seuraavat laskusäännöt:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} & -\mathbf{i} &= \mathbf{k} \times \mathbf{j} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{k} \times \mathbf{i} & -\mathbf{j} &= \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i} \times \mathbf{j} & -\mathbf{k} &= \mathbf{j} \times \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Lemma 1.16. *Olkoon* $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *puhtaita kvaternioita avaruudessa* $\mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$. *Nyt näiden tulolle pätee*

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{14}$$

missä $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *on pistetulo. Lisäksi jos alkion* $\mathbf{a}$ *itseisarvolle pätee* $|\mathbf{a}| = 1$*, niin*

$$\mathbf{aba} = \mathbf{b} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}. \tag{15}$$

Todistus. Tarkastellaan ensin yhtälöä (14). Nyt Lauseen 1.3 perusteella saadaan kvaternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ tuloksi

$$\mathbf{ab} = (-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Lasketaan seuraavaksi kvaternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ pistetulo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Puhtaiden kvternioiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ristitulo saadaan Määritelmästä 1.14. Nyt yhtälön (14) oikealta puolelta saadaan

$$\begin{aligned} -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{ab} \end{aligned}$$

Näin ollen $\mathbf{ab} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöä (15) ja oletetaan, että $|\mathbf{a}| = 1$. Nyt tulosta $\mathbf{aba}$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{aba} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= \Big(- (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 - (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \Big) \\ &\quad + \Big((-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)a_2 \Big)\mathbf{i} \\ &\quad + \Big((-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)a_3 \Big)\mathbf{j} \\ &\quad + \Big((-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)a_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)a_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)a_1 \Big)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Järjestelemällä yhtälön termit uudelleen saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{aba} &= \Big(b_1(-a_1^2 + a_3^2 + a_2^2) - 2a_1a_2b_2 - 2a_1a_3b_3 \Big)\mathbf{i} \\ &\quad + \Big(- 2a_1a_2b_1 + b_2(-a_2^2 + a_1^2 + a_3^2) - 2a_2a_3b_3 \Big)\mathbf{j} \\ &\quad + \Big(- 2a_1a_3b_1 - 2a_2a_3b_2 + b_3(-a_3^2 + a_2^2 + a_1^2) \Big)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Koska kvaternion $\mathbf{a}$ normi on $|\mathbf{a}| = 1$, niin $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Tämän perusteella edellisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{aba} &= \Big(b_1(-2a_1^2+1) - 2a_1a_2b_2 - 2a_1a_3b_3\Big)\mathbf{i} \\
&\quad + \Big(-2a_1a_2b_1 + b_2(-2a_2^2+1) - 2a_2a_3b_3\Big)\mathbf{j} \\
&\quad + \Big(-2a_1a_3b_1 - 2a_2a_3b_2 + b_3(-a_3^2+1)\Big)\mathbf{k} \\
&= \Big(b_1 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)a_1\Big)\mathbf{i} \\
&\quad + \Big(b_2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)a_2\Big)\mathbf{j} \\
&\quad + \Big(b_3 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)a_3\Big)\mathbf{k} \\
&= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{b} - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mathbf{aba} = \mathbf{b} - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$.

□

Esimerkki 1.17. Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ puhtaita kvaternioita. Yhtälön (15) vasemmalta puolelta saadaan

$$\mathbf{aba} = \mathbf{j}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\mathbf{j} = (-\mathbf{k} - \mathbf{1} - \mathbf{i})\mathbf{j} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

ja oikalta puolelta tulee

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - 2(\mathbf{j}\cdot(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}))\mathbf{j} \\
&= (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - 2\mathbf{j} \\
&= \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

2 Matriisiesitys

Vektorimuodossa olevat kompleksiluvut voidaan esittää matriisina

$$a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

missä a ja b ovat reaalilukuja. Samalla tavalla voidaan esittää kvaterniot neliömatriisina. Määritellään siis seuraavaksi funktio Φ joka liittää vektorimuodossa olevat kvaterniot matriisiin.

Määritelmä 2.1. Määritellään

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{H} &\longmapsto M_2(\mathbb{C}) \\
a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i & -a_1 - a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 i \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{16}$$

missä i on imaginääriyksikkö $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Huomaa, että matriisiesityksestssä kantavektorit on määritelty seuraavasti

$$\Phi(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \Phi(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Lause 2.2. *Olkoon* $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *vektorimuotoisia kvaternioita ja* λ *reaaliluku. Nyt funktiolle* Φ *on voimassa seuraavat ehdot:*

a) $\Phi(\mathbf{a}) + \Phi(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

b) $\Phi(\mathbf{a})\Phi(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{ab})$

c) $\Phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\Phi(\mathbf{a})$

d) Funktio Φ *on injektio.*

Todistus. a) Laskemalla kvaternion $\mathbf{a}$ kuvan ja kvaternion $\mathbf{b}$ kuvan summa saadaan

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{a}) + \Phi(\mathbf{b}) &= \Phi(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + \Phi(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i & -a_1 - a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_3 i & -b_1 - b_2 i \\ b_1 - b_2 i & b_0 - b_3 i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i + b_0 + b_3 i & -a_1 - a_2 i - b_1 - b_2 i \\ a_1 - a_2 i + b_1 - b_2 i & a_0 - a_3 i + b_0 - b_3 i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0 + b_0) + (a_3 + b_3)i & -(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)i \\ (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)i & (a_0 + b_0) - (a_3 + b_3)i \end{pmatrix} \\
&= \Phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}).
\end{aligned}$$

Siis $\Phi(\mathbf{a}) + \Phi(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
b) Olkoon $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektorimuotoisia kvaternioita. Lasketaan aluksi yhtälön

vasen puoli:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{a})\Phi(\mathbf{b}) &= \Phi(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\ \Phi(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i & -a_1 - a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 + b_3 i & -b_1 - b_2 i \\ b_1 - b_2 i & b_0 - b_3 i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0 + a_3 i)\cdot(b_0 + b_3 i) + (-a_1 - a_2 i)\cdot(b_1 - b_2 i) & (a_0 + a_3 i)\cdot(-b_1 - b_2 i) + (-a_1 - a_2 i)\cdot(b_0 - b_3 i) \\ (a_1 - a_2 i)\cdot(b_0 + b_3 i) + (a_0 - a_3 i)\cdot(b_1 - b_2 i) & (a_1 - a_2 i)\cdot(-b_1 - b_2 i) + (a_0 - a_3 i)\cdot(b_0 - b_3 i) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0b_0 + a_0b_3 i + a_3b_0 i + a_3b_3 i^2 - a_1b_1 + a_1b_2 i - a_2b_1 i + a_2b_2 i^2 & -a_0b_1 - a_0b_2 i - a_3b_1 i - a_3b_2 i^2 - a_1b_0 + a_1b_3 i - a_2b_0 i + a_2b_3 i^2 \\ a_1b_0 + a_1b_3 i - a_2b_0 i - a_2b_3 i^2 + a_0b_1 - a_0b_2 i - a_3b_1 i + a_3b_2 i^2 & -a_1b_1 - a_1b_2 i + a_2b_1 i + a_2b_2 i^2 + a_0b_0 - a_0b_3 i - a_3b_0 i + a_3b_3 i^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0b_0 - a_3b_3 - a_1b_1 - a_2b_2) + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i & -(a_0b_1 - a_3b_2 + a_1b_0 + a_2b_3) - (a_0b_2 + a_3b_1 - a_1b_3 + a_2b_0)i \\ (a_1b_0 + a_2b_3 + a_0b_1 - a_3b_2) - (-a_1b_3 + a_2b_0 + a_0b_2 + a_3b_1)i & (-a_1b_1 - a_2b_2 + a_0b_0 - a_3b_3) - (a_1b_2 - a_2b_1 + a_0b_3 + a_3b_0)i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan suraavaksi yhtälön oikea puoli:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{ab}) &= \Phi\Big((a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\
&\qquad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\Big) \\
&= \begin{pmatrix} (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i & -(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)i \\ (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) - (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)i & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) - (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Järjestelemällä termejä uudelleen saadaan yhtälön oikea ja vasen puoli yhtäsuuriksi. Näin ollen $\Phi(\mathbf{a})\Phi(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{ab})$.

c) Kun lasketaan skalaarilla λ kerrotun kvaternion $\mathbf{a}$ kuva saadaan

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda\mathbf{a}) &= \Phi\big((\lambda a_0)\mathbf{1} + (\lambda a_1)\mathbf{i} + (\lambda a_2)\mathbf{j} + (\lambda a_3)\mathbf{k}\big) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + \lambda a_3 i & -\lambda a_1 - \lambda a_2 i \\ \lambda a_1 - \lambda a_2 i & \lambda a_0 - \lambda a_3 i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Matriisien laskusääntöjen mukaan skalaari voidaan ottaa matriisin ulkopuolelle kertoimeksi. Nyt saadaan

$$\Phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i & -a_1 - a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 i \end{pmatrix} = \lambda\Phi(\mathbf{a}).$$

Funktiolle Φ siis pätee $\Phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\Phi(\mathbf{a})$.

d) Asetetaan $\Phi(\mathbf{a})$ nollaksi

$$\Phi(\mathbf{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_0 + a_3 i & -a_1 - a_2 i \\ a_1 - a_2 i & a_0 - a_3 i \end{pmatrix} = 0.$$

Tämä matriisi on nolla jos ja vain jos matriisin jokainen alkio on nolla. Asetetaan jokainen matriisin alkio nollaksi:

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 i &= 0 \\ -a_1 - a_2 i &= 0 \\ a_1 - a_2 i &= 0 \\ a_0 - a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Huomataan, että yllä olevat yhtälöt toteutuvait vain silloin kuin jokainen luku a_n on nolla. Siis ehto täyttyy jos ja vain jos $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Tästä seuraa, että kvaternio $\mathbf{a}$ on muotoa

$$\mathbf{a} = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Koska funktio Φ on lineaarikuvaus kohtien a) ja b) nojalla, ja $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$ on ainoa vektori jolle $\Phi(\mathbf{a}) = 0$, niin funktio Φ on injektio. $\square$

Lähdeluettelo

[1] John Stillwell: *Naive Lie Theory*, Springer, New York, 2008.

[2] Hansjörg Geiges: *The Geometry of Celestial Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.