OULUN YLIOPISTO

Pykäläaho Reetta

Matemaattisen ajattelun opettamisen proseduuria etsimässä

Kasvatustieteen kandidaatintyö

KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA

Luokanopettajakoulutus

2019

Oulun yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta
Matemaattisen ajattelun opettamisen proseduuria etsimässä (Reetta Pykäläaho)
Kandidaatintutkielma, 32 sivua
Heinäkuu 2019

Tutkielmassa käsitellään matematiikkaa peruskoulun oppiaineena ja pyritään selvittää, mistä matemaattinen ajattelu koostuu ja kuinka se kehittyy. Teorioiden käsitystä matemaattisesta ajattelusta peilataan Opetussuunnitelman perusteiden (2014) tavoitteisiin ja sisältöihin matematiikan osalta. Tutkielma on toteutettu kuvailevana kirjallisuuskatsauksena, jotta aiheesta saadaan mahdollisimman laaja käsitys.

Matemaattisen ajattelun pohjana on duaalisuus, jossa yhdistyy konseptuaalinen sekä proseduraalinen käsitys matemaattisesta objektista, eli miten jokin asia tehdään ja miksi se tehdään kyseisellä tavalla. Teorioiden pohjalta tarkastellaan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon ominaisuuksia ja niiden toisiaan täydentäviä luonteita. Matemaattisen ajattelun kehittyminen perustuu matemaattisen objektin eri osa-alueiden tavoittamiseen ja se tapahtuu vaiheittain. Käsiteltyjen teorioiden mukaan proseduraalinen ymmärrys kehittyy helpommin, jonka jälkeen konseptuaalinen käsitys voidaan saavuttaa kognitiivisen ponnistelun ja ulkopuolisen puuttujan avulla.

Matemaattisen objektin osa-alueita ja matemaattisen ajattelun kehityksen teorioita peilataan Opetussuunnitelman perusteisiin (2014). Matematiikan tavoitteet ja sisällöt viittaavat matematiikan duaalisuuteen, mutta erityisesti kosnseptuaalinen käsitys korostuu tavoitteissa. Proseduraalinen ymmärrys vaikuttaa olevan vain välivaihe ennen konseptuaalista käsitystä objektista. Tutkimuksen myötä matematiikan opettamisen perusteet selkiytyivät, mutta herätti kysymyksen, millainen ymmärrys opettajilla on matematiikasta ja sen opettamisesta.

Avainsanat: matematiikka, matemaattinen ajattelu, perusopetus, ajattelun kehittyminen

Sisältö

1 Johdanto

Kandidaatintutkielman aiheena on matemaattinen ajattelu ja sen kehittyminen yleisellä tasolla. Oma mielenkiintoni aiheeseen nousee sivuaineesta, jonka myötä minusta tulee myös matematiikan aineenopettaja yläasteelle luokanopettajan lisäksi. Pystyn vastaamaan oppilaiden tarpeisiin paremmin, kun olen tutustunut oppiaineen ja oppimisen taustalla vaikuttaviin tekijöihin. Aihe on merkittävä tällä hetkellä suomalaisten lasten ja nuorten heikentyneen matemaattisen osaamisen takia (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 18). PISA-tutkimuksessa 2012 painotettiin erityisesti matematiikkaan ja suomalaisten tulokset olivat heikentyneet selkeästi verrattuna vuoteen 2003, jolloin matematiikka oli viimeksi painotettuna. Suomalaisten lasten ja nuorten osaaminen on kuitenkin edelleen hyvällä tasolla muihin PISA-tutkimukseen osallistuneihin maihin verrattuna, mutta erityisesti nuoret tulisi saada motivoitumaan uudestaan matematiikasta. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 18.)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista tarkastellaan matematiikan osiota vuosiluokkien 3-6 kohdalta sekä oppimiskäsitystä yleisesti ja kohdistettuna matematiikkaan. Opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden ja sisältöjen pohjalta pohditaan, mitä tarkoitetaan erilaisilla matematiikan oppimiseen liittyvillä termeillä. Nykyisessä Opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 280) käytetään termiä matemaattinen ajattelu, jonka kehittäminen on yksi oppiaineen päätavoitteista. Joutsenlahti (2003, s. 7) arvioi matemaattisen ajattelun käsitettä ja kritisoi sen käyttämistä useissa virallisissa dokumenteissa ilman sen selkeää määrittelyä. Tässä tutkielmassa lähestytään matemaattisen ajattelun käsitettä kognitiivisesta ja yksilöllisestä näkökulmasta tiettyjen teorioiden kautta.

Käsitys matematiikasta tieteenä ja oppiaineena pohjautuu tässä tutkielmassa Hiebert'n ja Lefevren (1986), Sfard'n (1991) ja Tall'n (2004) määrittelyihin. Matemaattisen ajattelun tarkastelu vaatii aluksi matematiikan rakenteeseen paneutumista. Tutkielman painopiste on matematiikan rakenteen selvittämisessä ja sitä kautta matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Matemaattisen ajattelun kehitykseen otetaan kognitiivinen näkökulma ja ympäristön vaikutus sivuutetaan, vaikkakin sen merkitys kehitykseen tunnustetaan. Matematiikan rakennetta ja ajattelun kehittymistä tarkastellaan eri teoreetikoiden kautta ja peilataan niitä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin.

2 Menetelmä

Tutkielman menetelmänä on kuvaileva kirjallisuuskatsaus, sillä näin pystytään rajaamaan aineistoa ja tarkentamaan sen avulla tutkimuskysymyksiä, mutta myös tutkimuskysymysten avulla kohdentamaan aineistoa. Aineisto ja kysymykset ovat käyneet dialogia koko prosessin ajan heti alusta lähtien. Alussa suuntaa-antavat tutkimuskysymykset ohjasivat etsimään aineistoa ja näin ohjasi ja rajasi tutkimuskysymyksiä mielekkäämmäksi.

Kuvaileva kirjallisuuskatsaus on kasvatustieteellisessä tutkimuksessa pääosin laadullinen menetelmä ja tieteellisesti hyvin vapaamuotoinen, sillä siinä ei ole tarkoin määriteltyjä sääntöjä (Salminen, 2011, s. 6). Kyseinen menetelmä valittiin, sillä aihe on monitahoinen ja sihen on useita erilaisia lähestymistapoja, ja kuvailevan kirjallisuuskatsauksen avulla saadaan mahdollisimman laaja käsitys aiheesta. Tavoitteena on saada kattava kuva aiheesta, ja kuvaileva kirjallisuuskatsaus on mielekkäin metodi siihen. Haasteena kuvailevassa kirjallisuuskatsauksessa on aineiston rajaaminen ja relevanttien aineistojen löytäminen. Koska tutkimus käsittelee matemaattisen ajattelun kehittymisen teorioita yleisesti, eikä tietyn teoreetikon tai ajanjakson näkökulmasta, on vastuu aineiston rajaamisesta täysin kirjoittajan. Kirjoitusprosessin aikana aineistoa on myös rajattu näkökulman tarkentuessa. Systemaattinen kirjallisuuskatsaus ei ollut relevantti, sillä aiheesta löytyy hyvin paljon tietoa pitkältä ajanjaksolta. Tavoitteena oli saada mahdollisimman kattava kuva aiheesta, joten tarkasteltavat teoriat ovat eri vuosikymmeniltä, mutta kuitenkin yhteydessä toisiinsa.

Tarkasteltava aineisto perustuu lähes kokonaan laadullisiin tutkimuksiin, muutamaa määrällistä tutkimusta lukuun ottamatta. Tutkielmassa pyritään huomioimaan aineistojen välisiä yhteyksiä ja luomaan dialogia niiden välille. Erityisesti tutkimusten käsityksiä matemaattisesta ajattelusta peilataan Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden matematiikan tavoitteisiin 3.-6. -luokka-asteilla. Suomalaista matematiikan opetusta tarkastellessa pohjana on Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet sekä kotimainen tutkimus matematiikan opetuksesta. Ulkomaisen aineiston käyttö ei ole juuri tämän aiheen kohdalla relevanttia, sillä suomalainen koulujärjestelmä ja opetusperinteet eroavat merkittävästi esimerkiksi muista länsimaalaisista pohjoismaita lukuun ottamatta.

Tarkastellut teoriat ovat tunnettuja ja käytettyjä matemaattisen ajattelun tutkimuksessa. Hiebert'n ja Lefevren (1986) teoria käsittelee matemaattisen tiedon muodostumista. Moni myöhempi teoria, kuten käsittelemäni Sfard'n (1991) käsitys duaalisesta matematiikasta perustuu Hiebert'n ja Lefevren (1986) käsitykseen matemaattisen tiedon muodostumisesta. Myös suomalainen tutkimus aiheesta käyttää molempia teorioita pohjana, kun käsitellään matemaattista ajattelua yleisellä tasolla. Grayn ja Tall'n (1994) prosepti-käsite yhdistää matematiikan molemmat tiedon osa-alueet ja teorioiden mukaan juuri kahden erilaisen tiedon yhdistyminen on avain luovaan matemaattiseen ajatteluun. Sfard (1991) ja Tall (2004) käsittelevät matemaattisen ajattelun kehitystä erilaisten vaiheiden avulla, kuten myös Silfverbergin (1999) esittelemät van Hielen tasot.

3 Tutkimuskysymykset

Tutkimusaihe nousee omasta kokemuksestani koulutuksen aikana. Matematiikan sivuaineopintojen myötä olen kokenut, etten saa riittäviä valmiuksia opettaakseni matematiikka erityisesti yläkoulussa. Tutkielman teko alkoi erilaisten tutkimusten kartoittamisesta ja nopeasti pääaineisto painottui ulkomaalaisiin aineistoihin. Niiden pohjalta pyritään selvittää, millaisia teorioita matemaattisesta ajattelusta ja sen kehityksestä on, sekä millä tavalla nämä teoriat heijastuvat Valtakunnallisessa perusopetuksen opetussuunnitelmassa. Tavoitteena on saada selville Opetussuunnitelman perusteiden tieteellisiä perusteita matematiikan tavoitteille ja ymmärtää niitä paremmin teorioiden avulla.

1. Miten matemaattinen ajattelu kehittyy?
2. Mistä matemaattinen ajattelu koostuu?

4 Teoreettinen viitekehys

Matemaattisen ajattelun tutkiminen aloitetaan tutkielmassa matemaattisen käsitteen määrittelyllä, sillä se on läpi teorioiden kantava käsite. Toisaalta sen luonne määrittyy eri teorioissa hieman eri tavoin ja määritelmä laajentuu ja tarkentuu tutkielman edetessä syvemmälle matemaattisen ajattelun tarkasteluun. Oppimiskäsitys matematiikan kontekstissa käsitellään erityisesti suomalaisen tutkimuksen kautta, sillä tavoitteena on tarkastella Suomen Opetussuunnitelman perusteita. Matemaattisen ajattelun tarkastelu aloitetaan matemaattisen tiedon muodostumisesta, eli minkälaisia osa-alueita siihen liittyy. Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon kautta siirrytään matemaattisen tiedon osa-alueisiin, jossa käsitellään erityisesti Grayn ja Tall'n (1994) prosepti-käsitettä, joka yhdistää edellä mainitut tiedon alueet. Matemaattisen kehityksen vaiheita tarkastellaan Sfard'n (1991), Tall'n (2004) ja Silverbergin (1999) esittelemien van Hielen tasojen kautta, joissa jokaisessa on tavoitteena saavuttaa syvällinen konseptuaalinen ymmärrys matemaattisesta objektista. Joskin van Hielen tasot käsittelevät geometrian osa-aluetta ja Sfard'n (1991) sekä Tall'n (2004) teoriat painottuvat vahvemmin algebraan sekä aritmetiikkaan, mutta kaikki teoriat ovat jossain määrin sovellettavissa matematiikan kaikille osa-alueelle.

4.1 Matemaattisen käsitteen määrittelyä

Alustava käsitys matematiikasta tutkielmassa perustuu Malatyn (2003) käsityksiin matematiikan sisällöistä ja rakenteista. Matematiikka koostuu objekteista, joilla on määrä ja muoto, sekä objektien välisistä abstrakteista rakenteista. Objektin määrällä ja muodolla tarkoitetaan fyysisestä maailmasta nousevista havaintoja, joiden perusteella rakentuu abstraktit ominaisuudet ja rakenteet. Abstrakteja rakenteita, määriä, objektien välisiä suhteita ja operaatioita havainnollistetaan symboleilla. Malatyn (2003, 15) mukaan matematiikan oppiminen ei kuitenkaan ole vain symbolien oppimista tai sääntöjen noudattamista, vaan sen oppiminen vaatii kognitiivista ponnistelua.

Matemaattisen tiedon luonnetta ja matemaattista ajattelua tutkittaessa tärkein määre on käsite. Käsitteellä voidaan ilmaista abstrakteja matemaattisia ideoita, kuten esimerkiksi rationaalilukuja tai kertolaskun laskusääntöjä. Silfverberg (1999, s. 25) toteaa käsitteiden olevan oppimisen välineitä ja kohteita. Leinonen (2018, s. 20; 2003, s. 57) määrittelee käsitteen ajattelun ja kommunikaation välineenä. Näillä käsitteillä pyritään omaksumaan, että välittämään tietoa. Matematiikassa käsitteet määrittelevät tiettyjä yksiselitteisiä kohteita ja todistavat täsmällisesti kohteesta esitettyjä väitteitä. (Leinonen, 2018, s. 20-21.) Matemaattiset käsitteet mahdollistavat myös päättelyn ja sitä kautta uuden tiedon konstruoinnin (Silfverberg, 1999, s. 25). Tutkielmassa käytetään Leinosen (2018, 2003) määritelmää käsitteestä pohjana tutkittaessa eri teorioita matemaattisen tiedon rakenteesta ja ajattelun rakentumisesta. Matematiikka tarjoaa tarkasti määriteltyjen sisältöjen ja tiukkojen rakenteiden kautta ainutlaatuisen alueen pohtia tietokäsityksiä sekä tiedon rakentumista yksilön kognitiivisten prosessien kautta.

Repo (2004, s. 318-319) jakaa matemaattisen käsitteet kolmeen ryhmään; objekti-, operaatio- ja riipuvuuskäsitteisiin. Revon (1998, s. 318-320) määrittelemät luokat ohjaavat matematiikan duaalisuuteen, sillä monet matemaattiset käsitteet ovat luonteeltaan operationaalisia, mutta ne täytyy tulkita abstrakteiksi objekteiksi, jotta niitä pystyy käsittelemään ja kohdistamaan niihin toimintoja. Revon (1998) jaottelu on hyvin samankaltainen kuin myöhemmin esiteltävän Grayn ja Tall'n (1994) prosepti-käsitteen rakentuminen. Myös Leinonen (2003, s. 57) jakaa käsitteet, mutta käyttää jaottelussa kriteerinä, viitataanko käsitteellä yhteen erilliseen asiaan vai suurempaan kokonaisuuteen. Tässä tutkielmassa käsitteellä viitataan suurempiin kokonaisuuksiin ja pohditaan Revon (1998) mainitsemien osa-alueiden yhteyttä matemaattisen tiedon rakentumisessa.

Matemaattinen käsite kuvaa Sfard'n (1991, s. 3) mukaan matemaattista objektia täsmällisesti ja virallisesti, joka on myös Leinosen (2018; 2003) määritelmän perusajatus. Sfard (1991, s. 3) lisää käsitteen pariksi käsityksen, joka on yksilön henkilökohtainen sisäinen ymmärrys matemaattisista käsitteistä ja niiden muodostamista rakennelmista. Matemaattisten käsitteiden esittäminen vaatii erilaisia symboleita, matematiikan abstraktiuden vuoksi. Jokaisen yksilön omien käsitysten ja käytettävissä olevien symbolien takia jokainen ilmaistu matemaattinen käsite on yksi representaatio itsestään, sillä abstraktin objektin esittämiseen on useita tapoja. (Sfard, 1991, s. 3.)

4.2 Oppimiskäsitys matematiikan kontekstissa

Valtakunnallisen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, s. 15) oppimiskäsitys perustuu käsitykseen oppilaasta aktiivisena toimijana. Oppimisen kannalta tärkeintä on oppilaan oma motivaatio oppia ja kehittyä. Usein alkuopetuksessa oppilaat ovat hyvin innoissaan kaikesta uudesta, mutta monesti into hiipuu mitä vanhemmaksi oppilaat kasvavat. Erityisesti matematiikka saattaa tuntua inhottavalta oppiaineelta, varsinkin jos sisällöt ovat vaikeasti tavoitettavissa. Monissa teorioissa korostetaan merkityksellistä oppimista juuri matematiikan osalta, jotta oppilaan motivaatio säilyisi ja saavutettaisiin syvempi ymmärrys sisällöistä. Oppilaalta vaaditaan aktiivista roolia ja tiedon rakentamista. Opettajan rooli on tarjota oppilaille sopivan tasoista ohjausta ja mahdollisuus kehittää omaa ajattelua. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 16; Opetushallitus, 2014, s. 15; Sfard, 1991, s. 17; Yrjönsuuri, 2004, s. 130 ja 2007, s 43.).

Oppiminen käsitetään prosessina, joka tapahtuu pikkuhiljaa yksilöllisesti (Opetushallitus, 2014, s. 15). Tämän perusteella voi ymmärtää oppimisen konstruktiiviseksi kognitiiviseksi toiminnaksi. Kognitiivisella toiminnalla tarkoitetaan mielensisäisiä toimintoja, joita ovat esimerkiksi muistaminen ja havaitseminen (Piaget, 1988, 13). Haapasalo (1994, s. 47) kannustaa matematiikan konstruktiiviseen opettamiseen ja oppimiseen, jossa oppilaan annetaan muodostaa ensin luonnostaan muodostuvat taidot. Konstruktivistisen näkemyksen mukaan matematiikan oppiminen on ajatteluprosessien kehittymistä, jossa rakentuu sääntöjä, toimintakaavoja ja niiden välisiä yhteyksiä (Haapasalo, 1994, s. 47).

Yrjönsuuri (2007, s. 27) käsittää oppimisen yksilön ajattelun sisäisenä muutoksena, johon vaikuttavat oppilaan omakohtaiset kokemukset. Myös Joutsenlahti (2005, s. 52) tuo esille oppilaan oman kokemusmaailman ja uskomusten vaikutuksen oppimiseen. Joutsenlahden (2005, 53) mukaan erityisesti oppilaiden uskomukset saattavat olla esteenä uuden oppimiselle ja muutoksille ajattelussa. Tämän takia oppilaiden osallisuus ja heidän käsitysten selvittäminen on merkityksellistä jo ennen varsinaista uuden asian opettelua. Yrjönsuuri (2007, s. 28) korostaa oppilaan kokemusta tekijänä ja kokijana oppimisprosessissa, sillä omakohtaiset kokemukset edistävät oppimista. Matematiikassa on yleensä ongelmaan yksikäsitteinen ratkaisu, mutta ratkaisuun voi päästä useita eri teitä. Matematiikan oppimisessa täytyy ymmärtää asia juuri oikealla tavalla, jotta sitä voi käyttää, mutta ymmärrykseen voi päätyä monia eri reittejä. Jokaisella oppilaalla on oikeus yksilölliseen ohjaukseen ja omantahtiseen oppimiseen. (Opetushallitus, 2014, s. 13.)

Matematiikan opetuksessa olennaista on huomata oppilaiden erilaiset tavat lähestyä uusia asioita. Erilaiset lähestymistavat hyödyttävät kaikkia oppilaita matematiikan monimutkaisen rakenteen takia. Matematiikan opetuksen tulisi ohjata ymmärrykseen ja sitä kautta soveltamiseen, eli joustavaan kokonaiskäsitykseen ja käsitteelliseen ymmärrykseen. Opettajan rooli on ensisijaisesti ohjata oppilasta huomaamaan ja muodostamaan itse tietoa. (Richland, Stigler, Holyoak, 2012, s. 193.) Radford, Schubring ja Seeger (2011, s. 149) vaativat oppimiskäsityksen muuttamista konstruktivistisempaan suuntaan, jolloin oppilaan oma toimijuus korostuu ja sitä kautta voidaan saavuttaa paremmin luova ja kriittinen ajattelutapa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ovat ohjaamassa oppimista ja opettajien toimintaa juuri Radford, Schubringin ja Seegerin (2011) vaatimaan suuntaan, mutta opettajien vastuulla on toteuttaa vaaditut muutokset.

4.3 Matemaattisen tiedon muodostuminen

Matemaattinen tieto pohjautuu kahteen, luonteeltaan erilaisiin, mutta toisiaan täydentävään tiedon osa-alueisiin. Hiebert ja Lefevre (1986, s. 2) käsittelevät osa-alueita konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon nimityksillä ja Sfard (1991, s. 4) operationaalisen ja strukturaalisen tiedo nimikkeillä. Molemmat käsittelevät kuitenkin matemaattisen tiedon duaalisuutta, eli käsitteiden ja operaatioiden suhdetta. Teorioissa selvitetään, millaisia ominaisuuksia erityyppisillä tiedoilla on ja miten ne ovat yhteydessä toisiinsa.

Hiebert ja Lefevre (1986, s. 4) määrittelevät konseptuaalisen tiedon eli käsitetiedon tietoverkkoina, joissa kaikki tieto on yhteydessä toisiinsa. Konseptuaalinen tieto-yksikkö ei voi olla muista erillinen informaatioyksikkö; tieto on konseptuaalista, jos se on yhteydessä johonkin muuhun tietokokonaisuuteen. Konseptuaalinen tieto voidaan jakaa primääriin ja reflektoituun tietoon. Primäärillä tasolla tietoyksiköiden väliset yhteydet ovat rakentuneet samalla tasolla kuin informaatio on vastaanotettu eli yhteys on samalla abstraktion tasolla kuin informaatio itse. Abstraktius ja abstraktion taso kuvaavat tässä, millä tavalla tieto on yhteydessä kontekstiin. Alemmilla abstraktion tasoilla tieto on tiukasti yhteydessä kontekstiin, mutta ylemmillä tasoilla tietoa voidaan käsitellä jo kokonaan irti lähtökontekstista. Primäärillä tasolla tietoyksiköiden väliset yhteydet eivät voi olla korkeammalla abstraktion tasolla kuin tieto itse. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4-6.)

Reflektoivalla tasolla tietoyksiköt yhdistyvät korkeammalla abstraktion tasolla, mitä tieto itsessään on. Tällä tasolla yhteydet ovat abstrakteja ja varsinainen tieto konkreettisempaa. Yhteydet ovat myös irrallisempia kontekstista kuin primaarilla tasolla ja näin myös tietoa voidaan käsitellä irrallisina kontekstistaan. Yhteyksiä luodaan tunnistamalla samankaltaisia ydintekijöitä erillisistä tietoyksiköistä. Reflektoitu tieto vaatii syvällisemmän tiedonkäsittelyn prosessin kuin primaari; tietoa tarkastellaan pienemmissä osissa ja lopulta yhteydessä muuhun informaatioon. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 5-7.)

Hiebert ja Lefevre (1986, s. 8) käsittävät proseduraalisella eli menetelmätiedolla symbolijärjestelmästä ja algoritmeista koostuvan tiedon. Virallisesti määriteltyjen symbolien ja kielen avulla pystytään esittämään matemaattisia objekteja. Algoritmejä ja sääntöjä käytetään matemaattiseen ongelmanratkaisuun, jotta ratkaisuun päädyttäisiin mahdollisimman tehokkaasti. Algoritmien avulla prosessit suoritetaan oikeassa järjestyksessä ja oikealla tavalla. Alakoulussa matemaattinen ongelmanratkaisu perustuu lähinnä erilaisten symboliesitysten saattamiseen haluttuun tulosmuotoon. Pääosassa ongelmanratkaisussa on symbolien käsittely niitä koskevien sääntöjen avulla. Nykyään kiinnitetään enemmän huomiota ei-symbolisiin ongelmanratkaisutehtäviin, joissa ongelma esitetään konkreettisten objektien tai muiden, ei virallisesti määriteltyjen matemaattisten asioiden kautta. Tämän tyyppisiä tehtäviä suositaan erityisesti esi- ja alkuopetuksessa. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8-11.)

Matemaattinen ongelmanratkaisu vaatii usein monien erilaisten proseduurien suorittamista ja niiden hallintaa. Koska erilaisia proseduureja on satoja, niiden kaikkien muistaminen ei ole mahdollista. Tällöin konseptuaaliset tietoverkkojen avulla samankaltaisista tiedoista voidaan johtaa käyttökelpoisia operaatioita. Proseduurien käytössä yhdistyy myös proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto. Matemaattisessa ongelmanratkaisussa yhteydet selkeyttävät esitystapoja ja tämän myötä proseduraalisten vaatimusten yksinkertaistaminen. Proseduurien valinta helpottuu ja niiden väliset siirtymät helpottuvat. Konseptuaalisen tiedon kannalta symbolit ja proseduurit yhdessä proseduraalisen tiedon kanssa vahvistavat konseptuaalista tietokäsitystä ja yhteyksiä tietoyksiköiden välillä. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 11.)

Proseduraalinen tieto osaltaan edistää symboleiden merkitysten rakentumista, proseduurien mieleenpalauttamista ja niiden käyttöä. Symbolien merkitys matemaattisten objektien esittämisessä ja käsittelyssä on hyvin suuri ja sen takia oppilaille merkittävää oppia. Symbolien ymmärtäminen luo pohjan matemaattiselle kompetenssille. Pelkkä proseduraalinen ymmärrys matemaattisista symboleista ei riitä, vaan niiden tehokkaaseen ja tarkoituksenmukaiseen käyttöön vaaditaan myös konseptuaalinen ymmärrys. Esimerkiksi pienille lapsille "+"-merkillä ei ole merkitystä muuten kuin visuaalisena merkkinä, mutta viimeistään koulussa lapsi huomaa sen tarkoittavan yhteenlaskua. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 13.)

Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistyminen on Hiebert'n ja Lefevren (1986, s. 11) mukaan avaintekijä matemaattiseen ajatteluun. Yhteyksien rakentuminen ei kuitenkaan ole yksinkertaista ja nopeasti tapahtuva toiminto. Ensimmäinen ja yksinkertaisin selitys siihen, ettei yhteyksiä informaation välille synny, on tiedon puuttuminen tai sen epätäydellisyys. Toisena on vaikeus huomata eri tietoyksiköiden välisiä yhteyksiä. Oppilaiden voi olla vaikea nähdä aikuisille ilmiselviä yhteyksiä eikä opettaja saisi unohtaa oppilaiden erilaista ajattelun tasoa aikuiseen nähden. Kolmas selittävä tekijä on tiedon liian tarkka jaottelu, jolloin tieto on käytettävissä vain omassa kontekstissaan eikä sitä voi yhdistää muissa konteksteissa esiin tulleisiin samankaltaisiin asioihin. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 11-12.)

Matematiikka on Hiebert'n ja Lefevren (1986, s. 2) mukaan duaalisuuteen perustuva, hierarkinen rakennelma, jonka peruspilarit ovat prosessi ja käsite. Jokaisessa matemaattisessa objektissa on proseduraalinen ja konseptuaalinen puoli, jotka täydentävät toisiaan. Konseptuaalisen tiedon ymmärtäminen antaa valmiudet soveltamiseen ja ongelmanratkaisuun. Konseptuaalinen ymmärrys kohteesta tarkoittaa tiedon irrottamista lähtökontekstistaan ja yhdistämistä muuhun tietoon. Konseptuaalisella tiedolla ei kuitenkaan pelkästään saavuteta luovaa matemaattista ajattelua, vaan oppilaan tulee myös hallita proseduraalinen tieto, jotta pystyy myös suorittamaan ongelmanratkaisussa vaadittavat proseduurit. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 19).

Sfard (1991, s. 4) jakaa matemaattisen tiedon operationaaliseen ja strukturaaliseen tietoon, joiden kautta hän käsittelee myös matemaattisten objektien muodostumista. Sfard'n (1991, s. 2) mukaan matemaattisissa toiminnoissa prosessi, jolla päästään tulokseen, ja itse tulos ovat yhtä tärkeitä tekijöitä. Tämä tuo prosessien suorittajan eli yksilön mukaan yhtälöön, minkä takia psykologista näkökulmaa ei voi olla sivuuttamatta. Tämän pohjalta hän on kehittänyt duaalista näkemystä matematiikan rakenteesta sekä matemaattisesta ajattelusta ja ymmärtämisestä. Matemaattinen tieto koostuu kahdesta osa-alueesta: operationaalisesta ja strukturaalisesta. Näiden osa-alueiden välillä on kuitenkin suuri ontologinen ero siinä, miten tiedon luonne käsitetään. Toisaalta erilaiset ontologiset näkemykset täydentävät toisiaan ja luovat ehjemmän kokonaisuuden. (Sfard, 1991, s. 2-4.)

Operationaalinen tieto ymmärretään erilaisina jatkuvina ja mahdollisesti päällekäisinä prosesseina. Keskiössä on tieto toimintana, joka on dynaamista, yksityiskohtaista ja jatkuvaa.

Tämä tarkoittaa yksilön kohdalla esimerkiksi erilaisten laskutoimitusten käyttämistä, eli tietoa, kuinka toimia. Strukturaalinen osa-alue käsittää tiedon pysyvänä ja muuttumattomana rakenteena, jossa tieto on jotain yksilön saavutettavaa. Strukturaalisen tiedon saavuttaminen on perinteisesti ollut oppimisen tavoitteena, sillä sen avulla yksilö ymmärtää, miksi toimitaan kyseisellä tavalla. Yksilön oppimisessa kahden ontologisesti erilaisen käsityksen oivaltaminen on keskeinen tekijä saavuttaakseen aidon matemaattisen ymmärryksen. (Sfard, 1991, s. 4.)

Oppimisessa näitä kahta käsitystä ei voi erottaa toisistaan tai käsitellä erillisinä, ne ovat hyvin riippuvaisia toisistaan. Tästä syntyy myös matemaattisen tiedon kokonaisuus. Uutta käsitettä opeteltaessa prosessi on usein tärkein tieto, jonka avulla voidaan päästä tulokseen. Operationaalisella tiedolla ja käsityksellä on siis usein varhaisen ymmärryksen tasolla suurempi merkitys riippumatta, onko oppija alakoululainen kertolaskujen parissa vai yliopisto-opiskelija matriisien kanssa, kumpikin lähtee todennäköisesti operationaalisesta käsityksestä ja toiminnasta liikkeelle ratkaistaessa pulmaa. (Sfard, 1991, s. 4-5.)

Hiebert'n ja Lefevren (1986) sekä Sfard'n (1991) teoriat matematiikan rakenteesta ovat hyvin samankaltaisia. Hiebert'n ja Lefevren (1986) proseduraalinen ja Sfard'n (1991, s. 6) operationaalinen osa-alue ovat jollain tavoin päällekkäisiä, mutta Hiebert ja Lefevre (1986) käsittelevät ennemmin tiedon rakentumista ja Sfard (1991) matemaattisen ajattelun osa-alueita. Hiebert'n ja Lefevren (1986) perustavat teoriansa vankasti symboleiden sekä algoritmien pohjalle, eli saavutetaan tieto, miten jokin matemaattinen prosessi tai toiminto suoritetaan. Konseptuaalinen ja strukturaalinen tieto sen sijaan käsitetään molemmissa teorioissa laajempana ymmärryksenä, miksi jokin prosessi tehdään ja miksi se tehdään juuri kyseisellä tavalla.

4.4 Matemaattisen ajattelun osa-alueet

Hiebert'n ja Lefevren (1986) sekä Sfrad'n (1991) matemaattisen tiedon rakentumisen pohjalta muodostuu myös ajattelun osa-alueet. Operationaalista ja proseduraalista tietoa hyödynnetään erilaisia toimintoja suorittaessa, kuten mekaanisissa laskutoimituksissa. Konseptuaalisen ja strukturaalisen tiedon avulla voidaan ymmärtää ja käsitellä laajempia kokonaisuuksia. Gray ja Tall (1994) käsittelevät matemaattista objektia ja sen kautta matemaattista ajattelua prosepti-käsitteen kautta.

Prosepti-käsite on Grayn ja Tall'n (1994) muodostama matemaattista ajattelua kuvaava käsite. Pyrkimyksenä on tavoittaa sen avulla ajattelun kaksi puolta: prosessi (process) sekä käsite (concept). Prosessin ja käsitteen välillä on duaalinen yhteys, joka edellyttää tahojen vuoropuhelua. Matemaattisen objektin ymmärtäminen vaatii duaalisuuden takia siis sekä prosessin että käsitteen omaksumista. (Gray & Tall, 1994, s. 116.) Prosepti rakentuu kolmesta tekijästä; prosessista, objektista ja symboleista. Prosessi tuottaa kyseisen objektin, jota käsitellään symbolien avulla ja symbolit edustavat objektia. Proseptuaalinen ajattelu on konseptuaalisen ja proseduraalisen ajattelun yhdistelmä, jossa näkyy sekä prosessin että tuloksen merkitys. Proseduraalisessa ajattelussa korostuu matemaattisten objektien käsittely ja menetelmät eli algoritmit, joilla niitä käsitellään. Käsittelyt voi toteuttaa konkreettisesti, kielen avulla ja mielikuvilla. Konseptuaalisessa ajattelussa paneudutaan ajattelun joustavuuteen ja kognitiiviseen prosessiin, jota esimerkiksi Sfard (1991, s. 4) erityisesti käsittelee ontologisen harppauksen muodossa. (Gray & Tall, 1994, s. 121.)

Prosepti on muotoutuva käsitys objektista, joka rikastuu ja laajenee oppimisen myötä. Proseptuaalisen ajattelun ytimessä on kyky käsitellä objektia symbolien avulla joko prosessin tai käsitteen kautta. Avainasemassa on erilaisten symbolien ja symboli-esitysten hallinta. Symbolien haasteena on niiden monitulkintaisuus ja -muotoisuus. Gray ja Tall (1994, s. 123) määrittelevät proseptuaalisen ajattelun avaintekijäksi matemaattisessa ajattelussa. Se kehittyy vaiheissa, joissa tutun tiedon avulla tutustutaan uuteen asiaan. Aiemmasta tiedosta pystytään johtamaan uusi tieto, mutta tiedon johtamisen onnistuminen ja sen ymmärtäminen riippuu aiemman tiedon hallinnasta. Uuden tiedon epäonnistunutta johtamista sanotaan proseptien hajaantumiseksi, mikä on Grayn ja Tall'n mukaan yleisin syy matemaattiseen turhautumiseen ja oppimisvaikeuksiin. (Gray & Tall, 1994, s. 130.)

Chin (2003) tutkii prosepti-käsitteen soveltuvuutta edistyneempään matematiikkaan, jossa painottuu vahvasti konseptuaalinen ymmärrys. Proseptin kolme eri tekijää näkyvät myös edistyneemmässä matematiikassa, jossa painopiste on erilaisten teoreemien ja lauseiden todistamisessa. Niissäkin oppilas aloittaa yksinkertaisemmista lauseista, joista siirtyy vähitellen haastavampiin sisältöihin. Edistyneessä matematiikassa proseptin symbolit edustavat väitettä, joka todistetaan ja prosessi on vaiheittaiset päätelmät, joiden avulla päästään varsinaiseen lauseeseen, jota pystytään käsittelemään ja ymmärtämään kokonaisuutena ilman todistuksen erillisiä välivaiheita. (Chin, 2003, s. 214-215.) Grayn ja Tall'n (1994) käsitys proseptista soveltuu paremmin peruskoulun matematiikkaan. Heidän teoriassaan proseduraalinen tieto ja osaaminen ovat tie konseptuaaliseen tietoon, kun taas

Chinin (2003, s. 215) teoriassa konseptuaalinen osaaminen on jo hyvin vahvaa ja proseduraalista tietoa käytetään apuna saavuttamaan syvempi konseptuaalinen ymmärrys. Tall (2007, s. 147) pohtii prosepti-käsitteen soveltuvuutta eri matematiikan osa-alueisiin ja huomaa myös, ettei kaikki matemaattiset käsitteet mahdu proseptin määritelmään. Toisaalta Tall (2007, s. 147) löytää proseptista erilaisia ulottuvuuksia, joiden myötä käsitettä pystyy hyödyntämään paremmin esimerkiksi algebrassa.

Sfard (1991) sekä Gray ja Tall (1994) painottavat teorioissaan matematiikan aritmeettista ja algebrallista puolta, kun taas Silfverberg (1999) tutkii van Hielen tasojen avulla geometrian osa-aluetta ja sen kautta matemaattisen ajattelun kehitystä. Geometrinen ajattelu on yksi osa matemaattista ajattelua ja Silfverbergin (1999, s. 65) mukaan myös geometriassa nousee esiin matematiikan duaalisuus ja proseptuaalinen ajattelu, mutta hieman eri tavalla kuin aritmetiikassa. Geometria painottuu peruskoulussa ja erityisesti alakoulussa konseptuaaliseen ajatteluun, sillä kuviota käsitellään vain harvoin puhtaasti symbolien avulla. Opetuksessa painottuu suuresti geometristen käsitteiden merkitykset ja niiden väliset yhteydet. (Silfverberg, 1999, s. 77.) Tall (2004) käsittelee matemaattisen tiedon duaalista luonnetta proseptin käsitteen avulla, jossa yhdistetään prosessiin sitoutuva sekä käsitteellinen tieto. Silfverberg (1999, s. 65) perustaa geometrisen ajattelun matematiikan duaalisuuteen, joskaan se ei niin voimakkaasti tule esille kyseisellä matematiikan osa-alueella.

4.5 Matemaattisen ajattelun kehittyminen

Sfard (1991, s. 16) ja Tall (2004, s. 30) pohtivat, kehittyykö operationaalinen käsitys aina ennen strukturaalista käsitystä uutta matemaattista ideaa opittaessa ja päätyvät tulokseen, että joskus strukturaalinen käsitys voi kehittyä ensin, mutta se on epätyypillistä. Sfard'n (1991, s. 18) mukaan ei voida edes olettaa oppijan saavuttavan strukturaalista käsitystä ilman operationaalista käsitystä, eli ensin opitaan, miten jokin toiminto tehdään ja vasta sitten tulee ymmärrys, miksi se tehtiin niin. Myös ulkopuolisen puuttujan merkitys on suuri matemaattisten käsitteiden oppimisessa. Usein tämä puuttuja on opettaja, jonka avulla oppija voi saavuttaa jotain sellaista, mihin ei yksin kykenisi. (Sfard, 1991, s. 17.)

Sfard (1991, s. 18) hahmottaa matematiikan ymmärtämisen ontologisena muutoksena, joka tapahtuu kolmessa vaiheessa. Sfard käyttää vaiheista englanninkielistä termiä "degrees of structuralization", jonka voi määritellä matemaattisten käsitteiden operationaalisen ja strukturaalisen puolen omaksumiseksi. Englanninkielinen termi viittaa strukturaalisen käsityksen saavuttamiseen, jossa operationaalisia käsityksiä käytetään apukeinoina. Sfard'n englanninkieliset nimet vaiheille ovat "inteorization", "condensation" ja "reification". Vaiheet ovat hierarkkisia keskenään, eikä myöhempiä tasoja voi saavuttaa ennen alempaa. (Sfard, 1991, s. 18.)

Ensimmäisessä vaiheessa (interorization) oppija tutustuu uuteen prosessiin, joka luo pohjan käsitteelle ja erityisesti sen strukturaaliselle puolelle. Oppija pystyy suorittamaan prosessin tutuilla objekteilla. Lopulta prosessi on automatisoitunut ja oppija voi suorittaa sen vain kognitiivisten toimintojen avulla ilman tarvetta esimerkiksi merkitä paperille aputuloksia tai käyttää sormia laskemisen apuna. Oppija on saavuttanut operationaalisen käsityksen ideasta. Seuraavassa vaiheessa (condensation) pitkät ja yksityiskohtaiset prosessit tiivistyvät helpommin käsiteltäväksi kokonaisuudeksi. Nyt oppijan ei tarvitse paneutua jokaiseen yksityiskohtaan suorittaessaan prosessia. Tämä vaihe on operationaalisen ja strukturaalisen käsityksen välivaihe, jossa matemaattisen käsitteen ymmärrys syntyy ja kokonaiskuva saavutetaan. Kokonaisuutta käsitellään kuitenkin vielä prosessin kautta. (Sfard, 1991, s. 18-19.)

Viimeisessä vaiheessa (reification) tapahtuu ontologinen muutos ajattelussa ja tuttu prosessi nähdään uudella tavalla. Aikaisemmista vaiheista eroten, ontologinen muutos tapahtuu kerralla ja prosessista muodostuu staattinen rakenne. Tämä vaihe on myös vaikeimmin saavutettavissa ja vaatii vaivannäköä sekä mahdollisesti ulkoisen puuttujan. Kokonaisuutta ei tarvitse enää tarkastella prosessin kautta, vaan sitä pystytään käsitellä itsenäisenä abstraktina objektina, jolla on tietynlaiset ominaisuudet. Oppija ymmärtää lopulta, miksi prosessi toimii kyseisellä tavalla sen lisäksi, että kykenee suorittamaan prosessin. Muutos tapahtuu kognitiivisten skeemojen uudelleenjärjestelyn ja uusien lisäämisen myötä. Matematiikan kumulatiivisuuden takia ensimmäinen vaihe alkaa uudestaan ja tutustutaan taas uuteen prosessiin. (Sfard, 1991, s. 19-20.)

Tall (2004) käsittelee matematiikkaa ja erityisesti matemaattista ajattelua kolmen erillisen, mutta toisiinsa liittyvän maailman sekä proseptin käsitteen kautta, joka myös liittyy matematiikan maailmoihin (Tall, 2004; Gray & Tall, 1994). Nämä maailmat perustuvat Piaget'n (1988) kognitiivisen kehityksen eri vaiheisiin. Matemaattinen tietokäsitys ymmärtää tiedon itsenäisesti olemassa olevana asiana, ja ihmisen tehtävänä on saavuttaa tieto. Psykologia ja erityisesti Piaget'n (1988) teoria nojaa konstruktivistiseen tietokäsitykseen, jossa kaikki tieto rakentuu ihmisestä käsin sisäisten prosessien avulla. Kahden erilaisen tietokäsityksen yhdistäminen on suuri haaste muodostaessa eheää käsitystä matemaattisen ajattelun kehityksestä. (Tall 1991, s. 5.)

Tall'n (2004, s, 33) maailmat perustuvat matemaattisen tiedon kumulatiiviseen luonteeseen ja sen takia maailmat ovat hierarkkisia toisiinsa nähden. Mahdollisimman hyvän matemaattisen ymmärryksen saavuttamiseen vaaditaan kaikkien kolmen maailman saavuttaminen ja jokaisella yksilöllä on oma reittinsä niiden läpi. Jokainen maailma perustuu erilaisiin kognitiivisiin toimintoihin ja omaavat eri oikeutukset tiedon suhteen. Ensimmäinen maailma perustuu merkitysten rakentamiseen havainnoista, toisessa maailmassa merkitykset rakentuvat matemaattisten prosessien kautta ja kolmannessa matemaattisesti määriteltyjen objektien kautta. (Tall, 2004, s. 31-33.) Hannula (2014) jakaa Tall'n matemaattisen ajattelun aspektit havaintoihin, symboleihin ja formaaleihin teorioihin. Tutkielmassa käytetään Hannulan (2014) suomennoksia matematiikan maailmoista; ensimmäinen eli ilmenevä maailma, toinen eli symbolinen maailma ja kolmas eli formaali maailma.

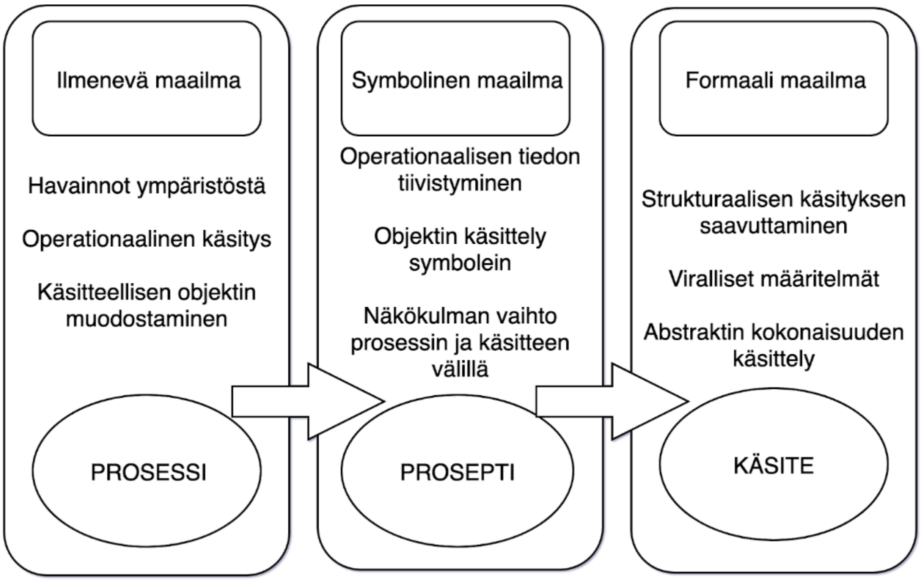
Ilmenevässä maailmassa avaintekijänä on yksilön havainnot ympäristöstä, mutta myös sisäiset tuntemukset. Havainnot ovat ajattelun kohteena, eli ajattelu perustuu pääosin hyvin konkreettisiin tai helposti kuviteltaviin objekteihin. Tall (2004, s. 30) nimeää ensimmäisen maailman "conceptual-embodied world" tai lyhyemmin "embodied world". Ilmenevän maailman havaintoja pyritään käsittelemään kielen kautta, jolloin havainnot muuttuvat osaksi yksilön sisäistä maailmaa. Ensimmäisen maailman kohdalla pyritään muodostamaan konkreettisista havainnoista käsitteellisiä objekteja. (Tall, 2004, s. 30.)

Toinen maailma nousee symboleista, joilla matemaattisia objekteja käsitellään, esimerkiksi erilaiset laskutoimitukset ja algoritmit. Symboleiden avulla yksilö voi käsitellä prosesseja ja vaihtaa näkökulmaa prosessin ja käsitteen välillä. Prosessin ja konseptin käsittelyn yhteydessä Tall (2004, s. 31) käyttää prosepti-käsitettä, jossa yhdistyy molempien näkökulmien ominaisuudet. Prosepti korostaa objektien duaalista luonnetta. Prosepti yhdistää aikaisemman ilmenevän maailman konkreettiset havainnot symboleihin, jolloin matemaattinen objekti muuttuu astetta abstraktimmaksi. (Tall, 2004, s. 31.)

Formaali maailma on lähimpänä koulussa opetettavaa matematiikkaa ja käsitystä matemaattisesta tiedosta. Kolmas maailma perustuu matemaattisten rakenteiden virallisiin määritelmiin. Formaalissa maailmassa yhdistyy kahden edellisen maailman ominaisuudet; formaali maailma nousee siis konkreettisista havainnoista ja symbolisista prosesseista.

Viimeinen maailma sisältää samoja piirteitä kuin Sfard'n (1991, s. 19-20) matemaattisen ajattelun kehityksen viimeinen vaihe; ajattelussa tapahtuu ontologinen muutos, joka mahdollistaa asian aidon ymmärryksen ja ajattelun joustavuuden. (Tall, 2004, s. 32-33.)

Sfard'n (1991) teoria painottuu selvittämään matematiikan eri tiedon osa-alueiden kehittymistä, kun taas Tall (2004) pyrkii selittämään matematiikan rakentumista kolmen eri maailman kautta. Molemmat teoriat kuitenkin selventävät, millä tavoin matemaattisen ajattelun kehitys voi kulkea. Tall'n (2004) käsitys matemaattisesta ajattelusta ja sen kehittymisestä pohjautuu Hiebert'n ja Lefevren (1986) sekä Sfard'n (1991) mukaan matematiikan duaaliseen luonteeseen. Prosepti-käsitteeseen kiteytyy matemaattisten objektien proseduraalinen ja käsitteellinen puoli, jotka ovat myös Grayn ja Tall'n (1994, s. 116) mukaan toisiaan täydentäviä. Käsitteellinen ymmärrys kasvaa proseptin kautta kolmessa maailmassa, joissa havainnoista edetään symbolien avulla käsitteelliseen ja viralliseen ymmärrykseen kohteesta. (Gray & Tall, 1994; Tall, 2004.)



Kuvio 1. Sfard'n (1991) ja Tall'n (2004) ajattelun kehityksen vaiheita mukaillen.

Kuvio esittää Tall'n (2004) ja Sfard'n (1991) teorioita mukaillen ajattelun kehityksen vaiheet. Vaiheen nimi ylhäällä selventää, mihin tieto kyseisessä vaiheessa pohjautuu. Kuviossa jokaisen vaiheen ymmärryksen tavoite on ympyröity. Ensimmäinen laatikko kuvaa ilmenevää maailmaa, jossa tieto nousee havainnoista, joista päädytään prosessin ymmärtämiseen. Symbolisessa maailmassa operationaalinen tieto tiivistyy helpommin hallittavaksi ja abstraktimmaksi, jolloin proseptuaalinen käsitys alkaa rakentua. Symbolit mahdollistavat objektin käsittelyn ja näkökulman vaihdon. Formaalin maailman tavoitteena on saavuttaa käsitteellinen, eli strukturaalinen ymmärrys. Käsitteelinen ymmärrys mahdollistaa objektin käsittelyn kokonaisuutena erillisenä lähtökontekstistaan.

Sfard'n (1991, s. 18) teorian ensimmäisessä vaiheessa tutustutaan uuteen prosessiin, myös Tall'n (2004, s. 30) teoriassa kiinnitäydytään joko uuteen ulkoiseen havaintoon tai sisäiseen tuntemukseen. Ensimmäisessä vaiheessa Sfard'n (1991, s. 18) teoriassa muodostetaan operationaalinen käsitys ja Tall'n (2004, 30-31) mukaan konkreettisesta havainnosta muodostetaan käsitteellinen objekti. Molemmissa teorioissa ensimmäisessä vaiheessa saavutetaan ymmärrys prosessista. Toinen vaihe on Sfardilla (1991, s. 18-19) välivaihe, jossa operationaalinen tieto tiivistyy helpommin käsiteltäväksi kokonaisuudeksi. Tall'n (2004, s. 30-31) toisessa maailmassa kiteytyy symbolien merkitys matematiikassa, joiden avulla voidaan vaihtaa näkökulmaa prosessin ja käsitteen välillä. Symbolisessa maailmassa yhdistyy prosessin ja konseptin molemmat puolet, josta Tall (2004, s. 30) käyttää nimitystä prosepti. Kolmannessa maailmassa syntyy viralliset määritelmät matemaattisista käsitteistä eli Sfard'n (1991, s. 19-20) teorian mukaan saavutetaan strukturaalinen käsitys matemaattisesta tiedosta. Kolmannessa vaiheessa tai maailmassa pystytään siis toimimaan abstraktien käsitteiden avulla, ilman konkreettisia objekteja ja tarvetta palata prosessin yksityiskohtiin.

Sfard (1991) ja Tall (2004) vastaavat teorioissaan matemaattisen ajattelun kehitykseen ja selkeyttävät kehitystä eri vaiheiden ja maailmojen avulla. Molemmat jäsentävät ajattelun kehitystä kolmella vaiheella, joissa rakentuu käsitteellinen ymmärrys matemaattisesta objektista. Käsityksen rakentaminen alkaa oppilaan tekemistä havainnoista, joiden perusteella tavoitetaan objektin prosessiluonne. Saavutettu tieto tiivistyy helpommin käsiteltäviksi kokonaisuuksiksi ja muuttuu abstraktimpaan muotoon, mutta tietoa käsitellään kuitenkin vielä prosessin kautta. Lopulta pitkäjänteisen työn tuloksena saavutetaan käsitteellinen ja abstrakti ymmärrys objektista.

Silfverberg (1999) käsittelee van Hielen tasoja, jotka määrittelevät geometrisen ajattelun kehitystä. Geometrinen ajattelu pohjautuu erityisesti konseptuaaliseen tietoon ja van Hielen tasot seuraavat oppijan ajattelun laadullisia muutoksia. Tasojen edetessä konseptuaalinen ymmärrys käsitteestä syvenee, eikä seuraavaa tasoa voi saavuttaa ennen kuin hallitsee jossain määrin edellisen tason sisällöt. Ensimmäisellä tasolla kuviot käsitetään kokonaisuuksina ja täysin visuaalisen muotonsa perusteella. Myös kaikki kuvioon liittyvät toiminnot suoritetaan visuaalisen hahmon mukaan. Toisessa vaiheessa kuviot nähdään liittyneenä yksinkertaisiin ominaisuuksiin ja niiden avulla voidaan analysoida ja vertailla, mutta ominaisuuksien välisiä yhteyksiä ei pystytä huomiomaan. Kolmannella tasolla kuvioiden ominaisuudet muodostavat loogisia suhteita ja neljännellä tasolla näiden suhteiden avulla pystytään päättelemään seurauksia ja todistamaan yksinkertaisia lauseita. Viidennellä tasolla eri geometrioita tarkastellaan aksiomaattisten järjestelmien avulla eli matemaattisten tosien perusoletusten kautta. (Silfverberg, 1999, s. 27-28.) Vaikka van Hiele on määritellyt tasot lähinnä geometrisen ajattelun kehityksen mukaan, Hihnala (2005, s. 32) soveltaa kolmea ensimmäistä tasoa myös algebraan ja aritmetiikkaan. Ensimmäisillä van Hielen tasoilla käsitellään yksittäistapauksia numeroiden avulla, kun kolmannella tasolla siirrytään yleistyksiin ja sääntöihin (Hihnala, 2005, s. 32).

Silfverberg (1999, s. 37) kritisoi van Hielen tasojen periaatetta, jonka mukaan tasoilla etenemisen päätekijä on opetuksen sisällöt ja opetusmetodi. Silfverbergin (1999, s. 37) mukaan tärkein tekijä on yksilön ajattelun kehittyminen, jota hän havainnollistaa Piaget'n ajattelun kehittymisen vaiheilla. Matemaattinen käsitteellinen ja abstrakti ajattelu ei voi kehittyä, jos oppilaan muu ajattelu ei ole saavuttanut abstraktia tasoa (Silfverberg, 1999, s. 38). Muut käsitellyt teoriat painottavat Silfverbergin (1999) tavoin yksilön kognitiivisen kehityksen merkitystä matemaattisessa ajattelussa. Silfverberg (1999, s. 37) pohtii tasojen tiukkaa hierarkkisuutta ja oikeutusta. Erityisesti viidennelle tasolle pääsee vain harva ja peruskoulussa kaksi viimeistä tasoa ovat melkeinpä saavuttamattomissa, kun vain harva pääsee edes kolmannelle tasolle. Yhtenä ongelmana on myös tasojen tiukat rajat, mikä ilmenee osaksi myös Sfard'n (1991) kehitysvaiheissa sekä Tall'n (2004) kolmessa matematiikan maailmassa. Usein oppilaiden ajattelussa on piirteitä eri ajattelun tasoilta, ja tarkkaan rajatut tasot ja vaiheet eivät kuvaa tarpeeksi hyvin matemaattisen ajattelun kehitystä. (Silfverberg, 1999, 37-38). Sfard'n (1991) ja Tall'n (2004) teorioissa proseduraalisesta eli menetelmätiedosta siirrytään vaiheittain konseptuaaliseen tietoon, kun taas van Hielen vaiheissa Silfverbergin (1999, s. 37) mukaan konseptuaalinen käsitys syvenee vaiheittain.

5 Matemaattinen ajattelu Opetussuunnitelman perusteissa

Matematiikka on toinen suurista oppiaineista, sillä sitä on toiseksi eniten vuosiviikkotunti tasolla heti äidinkielen jälkeen läpi koko peruskoulun (Valtioneuvosto, 2012). Myös muut luonnontieteelliset oppiaineet, erityisesti fysiikka ja kemia, sisältävät hyvin samanlaisia piirteitä kuin matematiikka, jolloin oppilas harjaantuu luonnontieteelliseen, eksaktiin ajatteluun. Toisaalta myös alakoulussa opettava ympäristöoppi on luonteeltaan samankaltainen, absoluuttisiin faktoihin perustuva oppiaine, mutta sen sisällöt ovat useasti helpommin konkretisoitavissa.

5.1 Konseptuaalinen ja proseduraalinen ajattelu Opetussuunnitelman perusteissa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014, s. 280) pohjautuu käsitykseen matematiikasta kumulatiivisena tieteenä, jonka takia opetuksen tulee olla systemaattista. Käsitellyt teoriat pohjautuvat myös matematiikan kumulatiiviseen luonteeseen, minkä takia täytyy hallita jossain määrin matemaattisten objektien eri osa-alueet, jotta voi siirtyä seuraavaan, edellistä monimutkaisempaan sisältöön (Hiebert & Lefevre, s. 17, 1986; Sfard, 1991, s. 21; Tall, 2004, s. 33). Toisaalta matemaattista ajattelua ei voi tavoittaa, jos opetus on vain toistensa päälle kasautuvia sisältöjä, ilman yhteyksiä toisiinsa (Eskola & Tuohilampi, 2017). Kaikki teoriat pohjaavat matemaattisten objektien duaaliseen luonteeseen. Gray ja Tall (1994) käsittelevät duaalisuutta prosepti-käsitteen kautta, jossa tiivistyy myös Hiebert'n ja Lefevren (1986) sekä Sfard'n (1991) ajattelu prosessista ja käsitteestä. Jokainen teoria painottaa kahden erilaisen käsityksen toisiaan täydentävää luonnetta ja niiden hallintaa luovan ja joustavan matemaattisen ajattelun saavuttamisessa. Käsitteiden ymmärtäminen ja niiden tarkoituksenmukainen käyttäminen tarkoittavat siis niiden erilaisten ominaisuuksien oppimista.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteissa näkyy matematiikan eri osa-alueet, esimerkiksi matematiikan oppiaineen kuvauksessa määritellään matematiikan opetus pohjana käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle (Opetushallitus, 2014, s. 281-282). Matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtäminen viittaa Sfard'n (1991) strukturaaliseen ja Hiebert & Lefevren (1986) konseptuaaliseen käsitykseen matemaattisista objekteista. Sfard'n (1991) strukturaalinen käsitys ohjaa juuri Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, s. 281-282) tavoitteisiin, eli kokonaisuuksien käsittelyyn ja ymmärtämiseen sekä niiden välisten yhteyksien luontiin. Sama näkökulma nousee Hiebert'n ja Lefevren (1986) konseptuaalisen matemaattisen tiedon käsityksestä, joskin he painottavat Sfard'a (1991) enemmän tietokokonaisuuksien välisten yhteyksien rakentumista. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 3-6-luokka-asteen matematiikan työskentelyn taidoissa yhtenä päätavoitteena on "ohjata oppilasta havaitsemaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä" (Opetushallitus, 2014, s. 281), eli aikaisempien teorioiden mukaan rakentaa konseptuaalista ja strukturaalista käsitystä matemaattisista objekteista.

Matemaattisten symbolien ja algoritmien, eli operationaalisen ja proseduraalisen käsityksen hallinta on perinteisesti ollut oppimisen kohteena (Sfard, 1991, s. 4-5). Matematiikan käsiteellisissä ja tiedonalakohtaisissa tavoitteissa vaaditaan opettajaa ohjaamaan oppilasta käyttämään ja ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä (Opetushallitus, 2014, s. 281-282). Käsitteiden ymmärtäminen ja käyttäminen viittaavat laajempien kokonaisuuksien hallintaan, kun taas merkinnät viittaa matemaattisten symboleiden ja sitä kautta algoritmien hallintaan. Samaa linjaa on myös tavoite matemaattisen ajattelun esittämisestä eri tavoin ja eri välineillä, sillä se sisältää välttämättä matemaattisia käsitteitä joko kirjoitettuina merkkeinä tai sanoitettuna puheessa tai kirjoituksessa. (Opetushallitus, 2014, s. 281).

Sfard (1991) sekä Hiebert ja Lefevre (1986) käsittelevät matemaattisia prosesseja ja niiden ymmärtämistä erityisesti symbolien, eli matemaattisten merkintöjen kautta. Peruskoulun matematiikka vie tavoitteiden mukaan oppilaan läpi Tall'n kahden viimeisen maailman läpi, eli symbolisen ja formaalin maailman. Kuten Sfrad'n (1991) sekä Hiebert'n ja Lefevren (1986), myös Tall'n (2004) teoriassa painottuu havaintojen lisäksi symbolien käyttö ja objektien viralliset, formaalit, määritelmät. Valtakunnallisessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa tavoitteena on saavuttaa matemaattisista objekteista proseduraalinen ja symbolinen puoli, sekä syvempi ymmärrys objektin formaaleista määritelmistä, jolloin soveltaminen ja hyödyntäminen ongelmanratkaisussa mahdollistuu (Opetushallitus, 2014, s. 281-282). Gray ja Tall (1994, s. 116) korostavat prosepti-käsitteen kautta objektien eri puolien yhdistymistä ja niiden välistä dialogia. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ei ainakaan suoraan viitata kahden osa-alueen yhdistämiseen, mutta osa-alueet ja niiden merkitys tunnistetaan, vaikka niihin ei suoraan samoin, teorioissa esitetyin, termein viitata.

Tall’n (2004) kolme maailmaa heijastuu jossain määrin Opetussuunnitelman perusteissa; erityisesti symbolien käyttö ja formaalit määritelmät korostuvat eri tavoitteissa ja sisällöissä, kuten jo aiemmin huomattiin. Tall’n (2004) ilmenevä maailma ei kuitenkaan näy Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa selkeästi. Se esiintyy 3-6-luokkien osalta lähinnä sisältöjen osuudessa ja alkuopetuksen osuudessa havainnointi näkyy selkeämmin. Alkuopetuksessa moni asia tulee uutena oppilaille, joten aiheisiin tutustuminen rauhassa ja omakohtaisesti on suuremmassa asemassa kuin ylemmillä luokilla. Toisaalta vanhempien oppilaidenkaan kohdalla ei saisi vähätellä yksilöllisen havainnoin merkitystä oppimiselle. Ilmenevän maailman havainnot ovat pohja uuden matemaattisen objektin prosessin ja käsitteen oppimiselle, mutta Opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 281-282) havainnointi vaikuttaa olevan askel kohti proseduraalista ja konseptuaalista käsitystä, kuin oma itsenäinen tavoitteensa (Tall, 2004).

Kaikki kolme teoriaa painottavat objektin eri puolien yhdistämistä sekä prosessin ja käsitteen välistä dialogia. Prosessin ja käsitteen yhdistäminen mahdollistaa luovan ja loogisen ajattelun, sekä matemaattisen ongelmanratkaisun, jotka ovat Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteita matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Matematiikassa pyritään pitkäjänteiseen ja tavoitteelliseen työskentelyyn (Opetushallitus, 2014, s. 280). Teorioissa painotetaan, ettei kattavaa ymmärrystä matemaattisesta objektista voi saavuttaa nopeasti, vaan se vaatii kärsivällistä työskentelyä. (Sfard, 1991, s. 31; Tall, 2004, s. 33; Hiebert & Lefevre, s. 20, 1986.)

5.2 Matemaattisen ajattelun oppiminen ja opettaminen

Matemaattisen tiedon luonteella on suuri merkitys ajattelussa (Joutsenlahti, 2003, s. 7-8). Opetussuunnitelmassa ei kuitenkaan ole määritelty tarkemmin matemaattisen tiedon luonnetta tai matemaattista ajattelua, jolloin osa tavoitteista voi jäädä hyvin avoimiksi. Yhtenä tavoitteena matematiikassa on ”looginen, täsmällinen ja luova matemaattinen ajattelu” sekä matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen, eli kyky käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia (Opetushallitus, 2014, 280). Tämä tavoite on lähimpänä matemaattisen ajattelun määrittelyä, mutta jättää kuitenkin hyvin paljon avoimeksi. Opettajille jää suuri vastuu tulkita, mitä matemaattinen ajattelu on ja kuinka ajattelun ja erityisesti matemaattisen ajattelun opettaminen kannattaa toteuttaa. Matemaattisen ajattelun havainnointi on myös hyvin haasteellista, mikä vaikeuttaa opettajan mahdollisuuksiin ohjata oppilaita heille sopivalla tavalla ja tasolla (Joutsenlahti, 2003, s, 10-11). Joutsenlahti (2003, s. 11) vaatiikin huomiota oppilaiden matemaattisen ajattelun kielentämiseen, jonka kautta oppilaiden oma ajattelu mahdollisesti selkiytyy ja opettaja pystyy vastaamaan oppilaiden tarpeisiin paremmin.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 280) huomioidaan matematiikan kumulatiivinen luonne, minkä takia opetuksen täytyy olla systemaattista ja edetä yksinkertaisista sisällöistä monimutkaisempiin. Eskola ja Tuohilampi (2017) huomauttavat, ettei matematiikkaa saa nähdä pelkästään toistensa päälle kasautuvina kokonaisuuksina, vaan toisiinsa lomittuvina kokonaisuuksina, jotka täydentävät toisiaan. Samalla he pohtivat, kuinka matematiikan oppimisen ei tarvitse olla kumulatiivista, vaan se voi edetä perinteisestä järjestyksestä poiketen, jolloin matematiikan ymmärrys saattaisi laajentua. Laaja-alaisista osaamiskokonaisuuksista erityisesti ajattelun ja oppimaan oppimisen kokonaisuus korostuu matematiikassa (Opetushallitus, 2014, s. 19). Ajattelun ja oppimaan oppiminen on edellytys kaikelle muulle kehitykselle ja itsensä kehittämiselle jatkossa (Opetushallitus, 2014, s. 19). Pehkonen (2011, s. 11) mainitsee ajattelun kehittämisen olevan yksi peruskoulun päätavoitteista alusta lähtien, joten matemaattisen ajattelun kehittymisen tulisi olla oppiaineen päätavoite. Keranto (2004, s. 20) kritisoi vielä jossain määrin valloillaan olevaa tapaa opettaa matematiikka. Hänen mukaansa opetus perustuu liiaksi tieteellisen tutkimuksen näkökulmaan, jolloin oppilaiden oppimisprosessia ei ole huomioitu, eikä näin ollen ole mahdollista saavuttaa kokonaisvaltaista ymmärrystä tai kehittää ajattelua ja oppiminen jää pintapuoliseksi ulkoa oppimiseksi. Keranto (2004, s. 20) vaatiikin muutosta matematiikan opetukseen, johon vuoden 2014 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ohjaa.

Edellä mainittuun laaja-alaiseen kokonaisuuteen sisältyy myös tutkiva ja luova työskentelyote (Opetushallitus, 2014, s. 19). Haapasalo (1994, s. 52) korostaa myös oppilaan asemaa aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana, johon liittyy matematiikan merkityksen ymmärtäminen arjessa. Oppilaan motivaatio pysyy yllä, kun hän näkee opittavien asioiden yhteyden omaan elämään. Oppilaan halutaan osallistuvan aidosti, eikä enää haluta tyytyä pelkkään opettajajohtoiseen opetukseen, jossa oppilaiden odotetaan omaksuvan kaiken tiedon hiljaa yksin. Haapasalo (1994, s. 52) asettaa matematiikan opetuksen päämääräksi ajattelun laajuuden tavoittamisen.

Silfverberg (2017) on tarkastellut Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita (2014) matematiikan ja luonnontieteellisten oppiaineiden tavoitteiden asettelua suhteessa vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin. Hänen tutkimuksensa perusteella matematiikan tavoitetaso peruskoulussa on noussut. Tavoitetason nousua Silfverberg (2017, s. 29) perustelee sanamuotojen muutoksella aikaisempaan Opetussuunnitelmaan nähden. Silfverberg (2017, s. 23) tutkii Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteita Bloomin tavoitetaksonomian kautta ja toteaa kolmen ylemmän vaativuustason (luominen, arvioiminen, analysoiminen) esiintyvän tekstissä aiempaa useammin. Toisaalta Silfverberg (2017, s. 29) huomauttaa, että kyse saattaa olla tahattomasta ilmiöstä, josta on syntynyt kielellinen harha. Tutkimusmenetelmä oli myös automatisoitu avainsanojen poimiminen tekstistä, joka altistaa myös vääristymälle. Silfverbergin (2017, s. 29) mukaan aineistoa tulisi tutkia eri tavalla, jolloin tavoitetason noususta voisi saada luotettavampaa tietoa.

Peruskoulun matematiikan tavoitetaso on noussut vuoden 2014 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden myötä ja tavoitteet painottuvat aikaista enemmän soveltamiseen ja luomiseen (Silfverberg, 2017, s. 27). Nämä tavoitteet edellyttävät teorioiden mukaisen konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon hallintaa. Silfverberg'n (2017, s. 22) mainitsemat korkeammat kognitiiviset toiminnot viittaavat vahvaan käsitteelliseen ymmärrykseen matemaattisista objekteista. Käsitteellisen ymmärryksen saavuttaminen soveltamisen ja luomisen tasolle voi olla joillekin oppilaille hyvin haastavaa. Tässä kohtaa opettajan asiantuntijuus omien oppilaiden kohdalla on avainasemassa, jotta kaikilla oppilailla on mahdollista saavuttaa mekaanisen laskutaidon ja proseduraalisen käsityksen lisäksi ainakin osittainen konseptuaalinen ymmärrys objektista.

Matematiikan oppimisen kohteena on matemaattisen objektin proseduraalinen ja konseptuaalinen puoli. Peruskoulussa oppilaan kohdalla tämä tarkoittaa taitoa suorittaa laskutoimituksia ja ymmärrystä, miksi ja millä tavalla hän sen tekee. Tarkasteltujen teorioiden mukaan opettajalla on suuri rooli ohjata oppilaan matemaattisen ajattelun kehitystä. Tämän myötä opettajalla tulisi olla hyvin vahva käsitys matemaattisten objektien kaksitahoisesta luonteesta ja osaamista konseptuaalisella ja proseduraalisella puolella. Opettaja ei voi olettaa oppilaiden saavuttavan Opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 281-182) vaadittuja tavoitteita, jos ei pysty tarjoamaan sopivaa ohjausta. Ongelmana on osaksi myös matematiikan arviointi peruskoulussa, joka on painottunut pitkään mekaanista laskutaitoa mittaaviin kokeisiin, joissa jo muutama sanallisesti esitetty soveltava laskutehtävä tuottaa turhautumista ja ahdistusta oppilaille. Viimeistään haasteet kokeiden sanallisissa tehtävissä pitäisi kertoa opettajalle, että ymmärrys objektista on jäänyt hyvin yksipuoliseksi, ja luovaan sekä loogiseen ajatteluun on vielä matkaa.

Proseduraalinen ja konseptuaalinen puoli matematiikasta tulee esille Opetussuunnitelman perusteissa (2014), mutta opettajien oma käsitys matemaattisen tiedon osa-alueista voi olla hyvin hatara. Luokanopettajat saavat koulutuksessaan valmiudet kaikkien peruskoulun oppiaineiden opettamiseen, mutta opintojen sisällöt vaihtelevat yliopistokohtaisesti. Opettajien oma käsitys matematiikasta voi rajoittua päällekkäisistä toiminnoista, joissa pääosassa on mekaanisten laskujen suorittaminen. Opettajien tukena on oppikirjojen ohella opettajanoppaat, mutta jos opettajalla ei laajaa käsitystä matematiikasta ja sen oppimisesta oppaiden ja oppikirjojen hyödyntäminen jää niiden ohjeiden suorittamisen tasolle. Pelkkien oppikirjojen ja oppaiden varassa opetuksen avulla oppilas ei voi saavuttaa konseptuaalista ymmärrystä ja ajattelu jää hyvin konkreetille tasolle. Opetussuunnitelman perusteiden (2014) myötä on uudistettu myös oppikirjoja vastaamaan paremmin konstruktivistisempaan oppimiskäsitykseen, mutta pelkkä uusien oppikirjojen käyttö ei ohjaa oppilasta itse tutkimaan ja rakentamaan tietoa, vaan opettajan vastuulla on tehdä muutos oppimiskäsityksestä näkyväksi.

Opetuksen myötä oppilaan tulisi pystyä yhdistämään konkreettinen havainto matemaattisten symbolien avulla abstraktiin käsitteeseen. Esimerkiksi yhteenlasku voidaan suoritta oppilaan edessä esineiden avulla. Tämän jälkeen sama asia esitetään matemaattisten symbolien, eli numeroiden ja yhteen- sekä yhtäsuuruusmerkin avulla. Alussa oppilas saattaa vaatia jokaisen symbolisen esityksen tueksi konkreettisen havainnon, mutta lopulta pystyy käsittelemään symboliesitystä kokonaisuutena ja esimerkiksi tekemään hajotelmia luvuista. Opettajalle jää suuri vastuu huolehtia jokaisen oppilaan saavan riittävät taidot tulevaisuutta varten. Jokaisen opettajan toiminnan pohjana on Opetussuunnitelman perusteet, joka antaa myös suuresti vapauksia opettajille. Matematiikan kohdalla tavoitteiden ja sisältöjen asettelut saattavat olla jopa liian väljiä, jotta jokainen opettaja, omasta matemaattisesta osaamisesta tai kiinnostuksesta riippumatta, pystyisi tarjoamaan oppilaille sopivan tasoisia sisältöjä ja ohjausta.

6 Pohdinta

Ensimmäisenä tutkimuskysymyksenä esitin “Mitä on matemaattinen ajattelu?”. Kysymykseen ei löytynyt tutkielman myötä selkeää vastausta, mutta matemaattisen ajattelun eri osa-alueiden kautta käsite selkiytyi. Kysymykseen matemaattisen ajattelun kehityksestä löytyi hyvin paljon erilaisia teorioita, joiden ydin on kuitenkin hyvin samankaltainen. Tutkielmassa tarkasteltiin erityisesti Sfard’n (1991) ja Tall’n (2004) käsityksiä matemaattisen ajattelun kehityksestä. Teorioita matemaattisesta ajattelusta peilattiin myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin (2014) ja tutkittiin, miten matemaattinen ajattelu siinä käsitetään.

Käsitellyt teoriat perustuvat duaaliseen näkemykseen matematiikasta. Jokaisessa teoriassa matemaattinen objekti nähdään kahden erilaisen tekijän yhdistelmänä. Prosessi ja käsite muodostavat kattavan kokonaisuuden matemaattisesta objektista. Prosessilla käsitetään teorioissa matemaattisen objektin käsittely ja esittäminen symboleilla sekä käsitys, miten jokin asia tehdään. Käsitteeseen sen sijaan liitetään ymmärrys objektista kokonaisuutena abstraktimmalla tasolla ja ymmärrys, miten ja miksi jokin matemaattinen objekti toimii kyseisellä tavalla. (Gray & Tall, s. 122, 1994; Hiebert & Lefevre, s. 17, 1986; Sfard, 1991, s. 29; Tall, 2004, s. 34.) Teorioiden ydin on matematiikan sisältöjen ja sen myötä matemaattisen ajattelun monijakoisuus, jossa eri osat ovat yhteydessä toisiinsa. Hiebert’n ja Lefevren (1986, s. 16) sekä Sfard’n (1991, s. 4) matematiikan maailmat koostuvat kahdesta erillisestä, mutta vuorovaikutteisesta osa-alueesta. Tall’n (2004) teoria pohjautuu kahden osaa-alueen lisäksi kolmesta maailmasta, joissa käsitteellinen ymmärrys objektista rakentuu. Kaikissa teorioissa käsitetään olevan kyseessä eri osa-alueiden välisestä ontologisesta erosta tiedon luonteen suhteen. Teorioiden mukaan aitoa ja luovaa matemaattista ajattelua ja ymmärrystä ei voi saavuttaa, jos ei hallitse jollain tasolla kumpaakin tiedon osa-aluetta. Sfard’n (1991, s. 17) mukaan ajattelussa tapahtuu ontologinen muutos, mutta siihen tarvitaan usein jokin ulkopuolinen ohjaamaan ajattelua. Hiebert’n ja Lefevren (1986, s. 20) mukaan proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välisten yhteyksien syntyminen ei myöskään tapahdu itsestään, vaan se vaatii kognitiivista työskentelyä.

Matemaattinen ajattelu on siis matemaattisen objektin kahden eri puolen ymmärtämistä, joka mahdollistaa joustavan ja luovan ajattelun sekä ongelmanratkaisun. Objektin muodostuessa prosessitiedosta ja käsitetiedosta, myös matemaattisen ajattelun voidaan käsittää koostuvan tiedosta, miten jokin asia tehdään ja miksi se toimii kyseisellä tavalla. (Gray & Tall, 1994, s. 121; Hiebert & Lefevre, 1986, s. 20; Sfard, 1991, s. 29; Tall, 2004, s. 34) Matemaattinen ajattelu ei rajoitu vain ylempiin matemaattisiin toimintoihin, kuten derivaattaan tai trigonometriaan, vaan heti oppiessaan luettelemaan lukuja ollaan matemaattisen ajattelun äärellä. Esimerkiksi pieni lapsi pystyy luettelemaan luvut järjestyksessä, joka on prosessi, mutta ei välttämättä pysty yhdistämään lukua ja lukumäärää.

Sfard (1991) ja Tall (2004) vastasivat teorioissaan matemaattisen ajattelun kehitykseen ja selkeyttivät kehitystä eri vaiheiden ja maailmojen avulla. Molemmat jäsentävät ajattelun kehitystä kolmella vaiheella, joissa rakentuu käsitteellinen ymmärrys matemaattisesta objektista. Käsityksen rakentaminen alkaa oppilaan tekemistä havainnoista, joiden perusteella tavoitetaan objektin prosessiluonne. Saavutettu tieto tiivistyy helpommin käsiteltäviksi kokonaisuuksiksi ja muuttuu abstraktimpaan muotoon, mutta tietoa käsitellään kuitenkin vielä prosessin kautta. Lopulta pitkäjänteisen työn tuloksena saavutetaan käsitteellinen ja abstrakti ymmärrys objektista. Matemaattisen ajattelun kehitys on siis vaiheittainen prosessi, joka alkaa aina alusta viimeisen vaiheen päätyttyä matematiikan kumulatiivisen luonteen takia.

Vaikka Sfard (1991, s. 18) ja Tall (2004, s. 33) ovat määritelleet vaiheiden etenevän tietyssä järjestyksessä, molemmat muistuttavat, että jokaisella oppijalla on oma tapansa ja reittinsä oppia ja kulkea matematiikan kolmen maailman läpi. Eri osa-alueiden tukiessa toisiaan on mahdollista saavuttaa ensin käsitteellinen ymmärrys, jonka avulla ymmärrys prosessista voi kehittyä. Eskola ja Tuohilampi (2017, s. 54) pohtivat perinteisestä järjestyksestä poikkeavan opetuksen mahdollisuutta rikastaa ajattelua ja ohjata oppilaita tunnistamaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä sekä huomaamaan itselle sopivia tapoja edetä matematiikan maailmoissa.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden käsitys matematiikasta perustuu käsittelemieni teorioiden mukaiseen duaaliseen matematiikkakäsitykseen (2014, s. 280-284). Ennakkokäsitykseni oli, että proseduraalinen osaaminen painottuisi Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa, mutta tosiasiassa konseptuaalinen ymmärrys on noussut suurempaan osaan tavoitteiden asettelun suhteen myös Silfverbergin (2017) tutkimuksen mukaan, jossa painottuivat käsitteellistä ymmärrystä vaativien toimintojen nousu vuoden 2014 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa. Toisaalta tavoitteiden voi käsittelemieni teorioiden pohjalta tulkita painottuvan aikaista enemmän käsitteellisen ymmärryksen tavoittamiseen. Käsitteellinen ymmärrys voi olla usein vaikeampi saavuttaa, mutta ei välttämättä tarkoita suoraa tavoitetason nousua.

Perusopetuksessa matemaattisen ajattelun tavoite on saavuttaa ymmärrys eri objektien prosessista ja käsitteestä. Käsitteellisen ymmärryksen avulla oppilaan on helpompi saavuttaa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, s. 281-282) määrittelemiä tavoitteita. Ilman käsitteellistä ymmärrystä tavoitteena olevaa joustavaa ja luovaa ajattelua ei ole mahdollista saavuttaa. Usein kuitenkin käsitteellinen ajattelu vaatii pohjalle konkreettisia havaintoja ja proseduraalista osaamista. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) tavoitteissa prosessien ymmärtäminen nousee myös selkeästi esiin, mutta ei siinä määrin kuin käsitteellinen ymmärrys. Tämän perusteella matemaattinen ajattelu peruskoulussa on ensisijaisesti käsitteellistä ja abstraktia. Käsite ja prosessi vaikuttavat olevan erillisiä asioita, jotka opitaan myös erillisinä.

Tässä tutkielmassa paneudutaan matemaattisen ajattelun konseptuaaliseen ja proseduraaliseen puoleen sekä niiden väliseen yhteyteen. Oppiminen ei kuitenkaan tapahdu tyhjiössä, vaan sosiaalisessa ja kulttuurisessa ympäristössä, johon esimerkiksi Sfard ja Cobb (2014) paneutuvat myöhemmissä kirjoituksissaan. Jatkotutkimuksena olisi mahdollista tarkastella ympäristön vaikutusta matemaattisen ajattelun kehitykseen ja matematiikan oppimiseen. Jatkotutkimuksissa voisi paneutua myös opettajien käsitykseen matemaattisesta ajattelusta ja sen opettamisesta. Oppikirjojen tutkiminen teorioiden pohjalta voisi myös tarjota uusia näkökulmia matematiikan opettamiseen ja oppimiseen.

Lähteet

Chin, E-T. (2003). Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking. *International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 213-220. Haettu osoitteesta https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500940.pdf

Eskola, A., & Tuohilampi, L. (2017). Sisällöt. Teoksessa Tuohilampi L. (toim.), *Matikkanälkä*. Jyväskylä: PS-kustannus. Sivut 51 – 66.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education 26(2),* 115 – 141.

Haapasalo, L. (1994). Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski; Jyväskylä: Medusa.

Hannula, J. (2014) Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. *Lumat 2(1),* 59 – 68.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa Hiebert J. (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Sivut 1 - 27. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Ass.

Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen - peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä* (väitöskirja, Jyväskylän yliopisto).

Joutsenlahti, J. (2003). Matemaattinen ajattelu ja kieli. Teoksessa Joutsenlahti J. (toim.), *Projekteja ja prosesseja: opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä.* Tampere: Tampereen yliopisto. Sivut 3 – 12. Haettu osoitteesta https://docplayer.fi/19701165-Matemaattinen-ajattelu-ja-kieli-mielenkiintoinen-ulottuvuus-uudessa-opetussuunnitelmassa-jorma-joutsenlahti.html

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä - 1990-luvulla pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä* (väitöskirja, Tampereen yliopisto). Haettu osoitteesta https://trepo.tuni.fi/handle/10024/67453

Keranto, T. (2004). Kriittinen ajattelu ja tieteen tuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa Räsänen P. (toim.), *Matematiikka - Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 18-38). Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti.

Kupari, P., & Hiltunen, J. (2018). Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa Joutsenlahti J., Silfverberg, H. & Räsänen P. (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen.* Porvoo: Niilo Mäki Instituutti. Sivut 16 – 52.

Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. *Kasvatus: Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja 34*, 56 – 65.

Leinonen, J. (2018). *Matematiikan ymmärtämisestä: käsitteistä käytäntöön* (väitöskirja, Lapin yliopisto). Haettu osoitteesta https://lauda.ulapland.fi/handle/10024/63282

Malaty, G. (2003). *Johdatus matematiikan rakenteeseen*. Helsinki: Opetushallitus.

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus.

Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa Pehkonen E. (toim.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (s. 11-28). Helsinki: Helsingin Yliopisto. Sivut 11 – 28.

Piaget, J. (1988). *Lapsi maailmansa rakentajana: kuusi esseetä lapsen kehityksestä* (suom. Palmgren, S., & Helkama, K.). Porvoo; Hki; Juva: WSOY.

Radford, L., Schubring, G. & Seeger, F. (2011). Signifying and Meaning-Making in Mathematical Thinking, Teaching and Learning. *Educational Studies in Mathematics 77* (2-3), 149 – 156.

Repo S. (1998). Matemaattisen käsitteen konstruoiminen symboli-laskennan ohjelman avulla. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P. & Malinen, P. (toim.). *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti. Sivut 316 – 335.

Richland, L., Stigler, J. & Holyoak, K. (2012). Teaching the Conceptual Structure of Mathematics. *Educational Psychologist 47(3)*, 189 – 203.

Salminen, A. (2011). *Mikä kirjallisuuskatsaus*? Vaasa: Vaasan Yliopisto Opetusjulkaisuja 62. Haettu osoitteesta https://www.univaasa.fi/materiaali/pdf/isbn_978-952-476-349-3.pdf

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1)*, 1 – 36.

Sfard, A., & Cobb, P. (2014). Research in Mathematics Education: What Can it Teach us about Human Learning? Teoksessa Sawyer K. R. (toim.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (2. painos). New York: Cambridge University Press. Sivut 545 – 564.

Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläsasteen oppilaan geometrinen käsitetieto* (väitöskirja, Tampereen yliopisto). Haettu osoitteesta https://trepo.tuni.fi/handle/10024/66665

Silfverberg, H. (2017). Opetussuunnitelmauudistuksen implikoima tavoitetason nousu matematiikassa ja luonnontieteissä - totta vai tarua? *FMSERA Journal 1(1).* 22 – 31. Haettu osoitteesta https://journal.fi/fmsera/article/view/61024.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Teoksessa Tall, D. (toim.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer: Holland. Sivut 3 – 21.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics, 23 (3). 29 – 33.

Tall, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *Journal of Mathematics Education 39,* 145 – 154.

Valtioneuvosto. 422/2012. *Perusopetuksen tuntijakotaulukko*. Haettu osoitteesta https://minedu.fi/documents/1410845/4123068/Perusopetuksen-tuntijako-Valtioneuvoston-asetus-28.6.2012.pdf/8c904085-afa3-46c0-9edc-12bc3eef52bf

Yrjönsuuri, R. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka - Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti. Sivut 128 – 141.

Yrjönsuuri, R. (2007). *Matematiikka mieluisaksi: psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arvioimiseen*. Helsinki: Oppilo.