Logiikan perusteet lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Essi Ylipeura
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

1 Johdanto

Sanotaan, että elämässä pysyvää on ainoastaan muutos. Sama pätee koulumaailmaan. Tällä hetkellä julkisen keskustelun keskiöön on noussut matematiikka. Mediassa on puhuttanut niin suomalaisten heikentynyt matematiikan taito [31, 4, 15] kuin korkeakoulujen vuonna 2020 voimaan tuleva valintaperusteiden uudistaminen, joka on monilla aloilla nostanut matematiikan ylioppilasarvosanan merkitystä [13, 18]. Korkeakoulujen opiskelijavalinnoissa painottunut matematiikka on jopa herättänyt keskustelua yleissivistyksen katoamisesta lukiossa ja negatiivisista vaikutuksista myös matematiikan oppimiseen [14, 26]. Oman lusikkansa soppaan ovat pistäneet myös juuri sähköistyneet ylioppilaskirjoitukset, jotka ovat herättäneet huolta oppilaiden tasavertaisuudesta ja siitä, että itse matematiikan oppimien jää sivurooliin teknisen puolen seurauksena [10, 20].

On hienoa, että keskustelua matematiikan osaamisesta ja sen opettamisen tulevaisuudesta on syntynyt, sillä teknologisen kehityksen myötä on selvää, että matematiikan osaajia tarvitaan paljon myös tulevaisuudessa. Nyt on alettava pohtimaan keinoja oppimistulosten parantamiseksi ja kiinnostuksen lisäämiseksi kautta maan. Lukiomatematiikan opetusta ohjailee hyvin vahvasti ylioppilaskirjoitusten rakenne. Ylioppilaskirjoituksissa on sähköistymisen myötä otettu jättiharppaus kohti modernimpaa matematiikan opetusta, joten oppimateriaalienkin on seurattava esimerkkiä. Perinteistä opetuskulttuuria on tuuletettava ja opetusta on muokattava vastaamaan entistä paremmin yhteiskunnan tarpeita. Yhteiskunnan tarpeet voivat kuitenkin muuttua mitä arvaamattomimmilla tavoilla ja ensisijaisen tärkeää on kehittää matematiikan opetusta niin, että se vahvistaa ja kehittää oppilaiden kykyä ja luovuutta soveltaa oppimiaan taitoja yllättäviinkin tilanteisiin.

Tämä Pro gradu—tutkielma on osa Oulun yliopiston oppimateriaaliprojektia, jossa pyritään tuottamaan moderneja, tieteelliseen tietoon pohjautuvia materiaaleja vapaaseen käyttöön. Tämä tutkielma on ensimmäinen osa pitkän matematiikan kurssin MAA11 ”Lukuteoria ja todistaminen”- kirjaa, ja tässä käsitellään logiikan alkeiden kokonaisuus. Formaalia logiikkaa ei suomalaisessa matematiikan opetuksessa tule järjestelmällisesti missään muualla kuin MAA11-kurssilla. Kuitenkin logiikan perusteiden hallitseminen on ensiarvoisen tärkeää esimerkiksi ohjelmoinnissa. Ohjelmoinnin ammattilaisista on jo tällä hetkellä pulaa, ja tulevaisuudessa kysyntä osaavista ohjelmoijista vain kasvaa [5, 23]. Tutkielmassa onkin kiinnitetty erityistä huomiota nimenomaan loogisten perusoperaatioiden hahmottamisen ja ymmärtämisen parantamiseksi.

Olemme projektiryhmän kanssa jakaneet kurssin MAA11 oppimateriaalin viiteen osaan. Olemme yhdessä sopineet pedagogisten painotusten lähtökohdat ja raamit koko kirjalle. Jokainen toteuttaa näitä periaatteita omassa kirjan osassaan. Oppimateriaalissa on pyritty vastaamaan tarpeeseen luoda oppilaslähtöistä materiaalia, joka soveltuu monipuolisesti niin itsenäiseen suorittamiseen kuin opettajan vetämille kursseille. Oppimateriaaleissa on huomioitu myös mielekkäällä tavalla teknisten apuvälineiden käyttö. Kaikki sisällöt on tehty tällä hetkellä voimassa olevan opetussuunnitelman (LOPS2016) [21] mukaisiksi. Oppimateriaalin ytimessä ovat pohdintatehtävät, joilla pyritään viemään teoriaa eteenpäin oppilaiden ymmärrys edellä. Pohdintatehtävien avulla pyritään erottautumaan perinteisestä opettajajohtoisesta mallista, jossa opettaja antaa teorian oppilaille kokonaisuudessaan ja sen jälkeen tehdään koko tunti samankaltaisia rutiinitehtäviä. Pohdintatehtävien tarkoitus on aktivoida oppilaita itse pohtimaan omien pohjatietojensa kautta erilaisia matemaattisia ominaisuuksia ja sitten laajentaa ja syventää oppimaansa täsmällisiin määritelmiin. Pohdintatehtävät käsittelevät monipuolisesti erilaisista näkökulmista opittavia aiheita ja niiden avulla on pyrkimys saada aikaan syvempää oppimista ja ymmärrystä kuin perinteisemmässä opetuksessa.

Tämä työ on jaettu viiteen osaan. Kaksi ensimmäistä kappaletta käsittelevät oppikirjan yleisiä tavoitteita, lähtökohtia sekä sisältää oppimateriaalin perustelun. Kolmannessa osassa (A) on varsinainen oppimateriaali, jota seuraa tiivis opettajan opas (B) ja harjoitustehtävien ratkaisut (C). Perusteluosassa on valaistu yleisten tavoitteiden lisäksi sitä, miten tieteellistä tietoa on hyödynnetty oppimateriaalin suunnittelussa. Opettajan oppaassa on ajankäyttöehdotus, sekä vinkkejä pohdintojen purkamiseen oppilaiden kanssa. Oppimateriaali koostuu neljästä luvusta, joista ensimmäinen ”Mitä on logiikka?” toimii johdantona ja mielenkiinnon herättäjän. Kappaleessa ”Formaali kieli — konnektiivit ja totuusarvot” käsitellään yleisimmät loogiset konnektiivit ja niiden totuustaulut. ”Totuustaulut”-kappaleessa syvennytään tarkemmin totuustaulujen toimintaperiaatteeseen ja niiden hyödyllisyyteen laajemmissa kokonaisuuksissa. Viimeinen kappale ”Looginen ekvivalenssi ja tautologia” nivoo yhteen logiikkakokonaisuuden ja siinä esitellään tunnetuimpia tautologioita ja päättelyn lakeja.

2 Oppikirjan tavoitteet ja rakenne

Tämä oppimateriaali on tehty vuonna 2016 voimaan tulleen lukion opetussuunnitelman (LOPS16) tavoitteita noudattaen. Kirjan tarkoituksena on irtautua perinteisestä matematiikan oppikirjan rakenteesta, missä valmiiksi annettuja teorialaatikoita seuraa kymmenittäin laskutehtäviä. Kirjassa teoriaa lähestytään erittäin pohdintapainotteisesti ja asioiden purkeskeluun ja ymmärtämiseen on varattu paljon aikaa tuntityöskentelystä. Tunnilla tehtäväksi tarkoitettuja harjoitustehtäviä on perinteisestä kirjaa vähemmän. Tehtävissä on kuitenkin pyritty siihen, etteivät ne olisi keskenään liian samanlaisia ja tutkittavia matemaattisia ominaisuuksia lähestytään monipuolisesti erilaisista näkökulmista. Opetussuunnitelman lisäksi tehtävien ja kirjan tavoitteiden laatimisessa on käytetty pohjana erityisesti artikkeleita *Collaborative Learning in Mathematics* [30] ja *Habits of Mind* [7]. Seuraavissa kappaleissa käydään tarkemmin läpi sekä opetussuunnitelman että yllämainittujen artikkeleiden vaikutusta tämän kirjan sisältöön.

2.1 Opetussuunnitelma

Opetushallituksen laatimissa opetussuunnitelman perusteissa [21] on määritelty lukio-opetuksen arvopohja ja oppimiskäsitys. Oppimiskäsityksessä korostetaan oppilaan omaa aktiivista roolia oppimisessa itseohjautuvana ja tavoitteellisena toimijana. Oppilas tulkitsee, analysoi ja arvioi eri lähteistä ja eri muodossa saatua informaatiota. Erityisesti oppilaan kyky analysoida ja arvioida saatavilla olevia tietoja korostuu tässä kirjassa. Opetussuunnitelmassa kuvailtu oppimiskäsitys on hyvin konstruktivistinen, mitä on luonnollista soveltaa matematiikan oppimiseen. Matematiikka on luonteeltaan kumulatiivista, eli uusi tieto rakentuu aina edellisten tietojen luomien tukipilareiden varaan. Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä oppilas aktiivisesti itse käsittelee uutta tietoa ja liittää sitä osaksi aiemmin oppimaansa kokonaisuutta [25]. Kontruktivistisen näkemyksen lisäksi opetussuunnitelmassa on käytetty myös sosiaalisen oppimiskäsityksen peruspiirteitä [25]. Opetussuunnitelmassa oppiminen määritellään yhteisölliseksi tilanteeksi, jossa oppilaat vuorovaikuttavat niin keskenään kuin koulun henkilökunnan kanssa. Koulumatematiikka on perinteisesti nähty yksinäisenä puurtamisena, mutta tässä kirjassa erityisesti pohdintatehtävien avulla haetaan oppimiseen ja opettamiseen sosiaalista luonnetta. Opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksessa korostuvat oppilaan aktiivinen tutkimuksellinen ja kokeileva ote oppimiseen, ongelmanratkaisutaidot ja luova ajattelu. Yhteisöllisyyden ja yhdessä tekemisen lisäksi opetuksessa tulee kiinnittää huomiota siihen, että oppilaille annetaan mahdollisuuksia yksilölliseen etenemiseen [21]. Tämän kirjan sisältö on suunniteltu niin, että pohdinnat voidaan käydä tunnilla yhdessä miettien opiskelutovereiden ja opettajan kanssa, mutta niissä annetaan myös tarpeeksi eväitä itsenäiseen opiskeluun ja etenemiseen. Lisäksi opetussuunnitelmassa mainitaan opetuksen lähtökohtina oppilaita kiinnostavat aiheet ja ilmiöt. Tätä on kirjassa toteutettu muun muassa viittauksilla populaarikulttuuriin.

Nykyisen opetussuunnitelman lisäksi tähän kirjaan on otettu suuntaa opetushallituksen julkaisemasta uuden opetussuunnitelman luonnoksesta [22], jossa oppimiskäsitys on hyvin samankaltainen kuin tällä hetkellä voimassa olevassa LOPS16:ssa. Luonnoksessa matematiikan yleisinä tavoitteina on nostettu enemmän esiin oppilaan tottumista pitkäjänteiseen työskentelyyn sekä matematiikan esiin tuomista niin itsenäisenä tieteenalana kuin käyttökelpoisena välineenä monitieteellisessä tutkimuksessa[22]. Lisäksi luonnoksessa mainitaan, että matematiikan opinnoissa oppilas vahvistaa omaa matemaattista pohjaa jatko-opinnoilleen [22]. Loogisten konnektiivien osaaminen on erityisesti tietotekniikan aloilla tärkeä taito, ja tässä kirjassa onkin pyritty nostaamaan esille yhteyksiä tietotekniikkaan.

Nykyisen opetussuunnitelman spesifit tavoitteet kurssille MAA11 on listattu alla. Kurssilla oppilas:

- perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista
- hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujen ominaisuuksien tutkimisessa.[21]

Tässä työssä tavoitteista käydään läpi logiikan alkeet sekä teknisten apuvälineiden hyödyntäminen logiikkaa vaativissa tehtävissä. Keskeisimmät opetussuunnitelmassa mainitut sisällöt ovat tässä kokonaisuudessa konnektiivit ja totuusarvot. MAA11-kurssi on ainoa opintokokonaisuus sekä lukiossa että peruskoulussa, jossa logiikan alkeita käsitellään järjestelmällisesti ja formaalisti. Kirjassa lähdetäänkin liikkeelle hyvin perustavanlaatuisista asioista, eikä oppilaalla tarvitse olla pohjatietoja logiikkaan liittyen.

2.2 Ajattelun taidot

Usein arkielämässä harhaudutaan kuvittelemaan, että matemaattinen ajattelu ja matemaattinen osaaminen tarkoittaa hyvää päässälaskutaitoa. Kuitenkin matemaattinen ajattelu on suurimmaksi osaksi lähes kaikkea muuta kuin ainoastaan laskutaitoa. Tätä on pyritty korostamaan niin nykyisessä opetussuunnitelmassa luovan ajattelun ja kokeilevan oppimisen korostamisena kuin myös ylioppilaskokeissa [21]. Viime vuosina matematiikan ylioppilaskokeissa on alkanut esiintyä aiempaa enemmän tehtäviä, joissa ei mitata oppilaan laskutaitoa, vaan erilaisten vastausten ymmärtämistä ja virheiden löytämistä. Esimerkkejä tällaisista tehtävistä on kevään 2018 ja syksyn 2017 kokeissa [35, 34]. Miten sitten oppimateriaalit voivat tukea monipuolisesti erilaisten matemaattisten ajattelutaitojen kehittymistä? Tämän kirjan materiaalin pohjalla on käytetty artikkelia *Habits of Mind: Organizing Principle for Mathematics Curricula* [7]. Artikkelissa on kuvailtu erilaisia matemaattisen ajattelun ja jäsentämisen taitoja, joiden opettamiseen tulisi koulumaailmassa keskittyä enemmän pelkän asiasisällön lisäksi. Tähän kirjaan olemme pyrkineet tuomaan tehtävien sisällön ja ulkoisen ilmeen avulla näkyväksi ja harjoiteltavaksi artikkelissa mainittuja ajattelun taitoja. Olemme valinneet kirjaamme artikkelista neljä pääteemaa, jotka kulkevat mukana läpi kirjan:

- Säännönmukaisuuksien löytäminen (pattern sniffing)
- Nikkaroiminen (tinkering)
- Kuvaileminen (describing)
- Visualisointi (visualizing) [7]

Yhteyksien ja säännönmukaisuuksien löytäminen on yksi keskeisimpiä matemaattisia taitoja. Matematiikan ulkopuolella säännönmukaisuuksien löytäminen on myös hyödyllinen taito jokapäiväisessä elämässä. Esimerkiksi oman liikkumisen ajoittaminen niin, että välttää kaupungin ruuhkahuiput voi parantaa sekä mielialaa että tehostaa ajankäyttöä. Säännönmukaisuuksien löytäminen tuo järjestystä niin arkeen kuin matematiikkaankin. Logiikassa esimerkiksi totuustauluissa on hyvin tarkka struktuuri, jota on kuitenkin helppo tulkita, kun huomaa ja oppii säännönmukaisuudet, joiden perusteella totuustaulu rakennetaan. Totuustaululla voidaan hallita yksinkertaisesti laajoja kokonaisuuksia, joista voi muuten olla vaikeaa löytää punaista lankaa.

Nikkaroimisella puolestaan tarkoitetaan tässä yhteydessä taitoa pilkkoa ja paloitella ideat, ajatukset ja väitteet pienempiin palasiin ja koota ne uudelleen. Nikkaroimiseen kuuluu kyky kokeilla estottomasti uusia, erilaisia ja myös vääriä vaihtoehtoja. Tämä on tärkeää erityisesti logiikassa, sillä monimutkaisetkin loogiset lauseet voidaan aina pilkkoa ja jakaa pienempiin ja pienempiin osiin sekä lopulta atomilauseisiin, joita kokoamalla (esimerkiksi totuustauluun) saadaan näkyville niiden yhteisvaikutus. Nikkaroimisessa on myös tärkeää nähdä miten pienemmät kokonaisuudet vaikuttavat lopputulokseen ja onko esimerkiksi lauseiden järjestyksen vaihtamisella merkitystä lopputuloksen kannalta. Esimerkiksi erilaisten atomilauseiden kokoaminen väärin on oppilaiden ajattelun kannalta kehittävää ja auttaa paremmin näkemään, miten eri osat vaikuttavat toisiinsa.

Kuvaileminen liittyy vahvasti matematiikan kieleen. Oppilaita tulisi kannustaa käyttämään matematiikan kieltä monipuolisemmin ja muotoilemaan erilaisten loogisten ketjujen esityksiä. Lisäksi kuvailemisen taitoihin kuuluvat väitteiden puolesta argumentointi, perustelu ja todistaminen. Todistamisen näkökulmasta puolestaan loogisten operaatioiden ja säännönmukaisuuksien ymmärtäminen on välttämätöntä. Valitsemamme ajattelun taidot eivät siis ole toisistaan irrallisia vaan ne tukevat ja täydentävät toisiaan.

Neljäs valitsemamme matemaattisen ajattelun taito on visualisointi. Visuaalisten esitysten avulla voidaan usein päästä käsiksi myös sellaisiin matemaattisiin ongelmiin, jotka eivät alun perin ole visuaalisia. Totuustaulut ja Venn-diagrammit ovat esimerkkejä sellaisista visualisoinnin keinoista, joita logiikassa voi kohdata jatkuvasti. Visualisoinnin ei aina tarvitse olla ohjattua ja määrättyä, vaan erilaiset oppilaiden itse vapaasti tuottamat graafiset esitykset voivat toimia oppimisen ja ratkaisun tukena. Oppimistyylejä on usein kuvattu niin kutsutulla VAK-mallilla, jossa erilaisia oppimistyylejä on määritetty olevan visuaalinen, auditiivinen ja kinesteettinen oppimistyyli [29]. VAK-malli on saanut viime vuosina paljon kritiikkiä ja nykyisin sitä pidetään monin tavoin myyttinä [24, 19, 16]. Tässä työssä ei olekaan tarkoitus rajata ja jaotella tehtäviä tai oppilaita oppimistyylien mukaan vahingollisella tavalla. Tarkoitus on monipuolisesti huomioida erilaisia näkökulmia oppimiseen ja tarjota oppilaille mahdollisuuksia niiden hyödyntämiseen. Visuaalinen näkökulma on oleellinen osa matematiikkaa ja tarkoitettu ehdottomasti kaikenlaisille oppijoille. Tiedon esittäminen visuaalisessa muodossa voi avata monille täysin uusia ja syvällisempiä ymmärryksen tasoja.

Kun heijastaa tässä esitellyt matemaattisen ajattelun taidot nimenomaan formaalin logiikan alaan, voi huomata, että kyseiset taidot ja ominaisuudet ovat suorastaan logiikan ymmärtämisen elinehto. Nämä yhdessä valitsemamme ajattelun taidot ovat siis hyvin valideja huomioita ja tarkastelun kohteita tämän tutkielman työstämisessä, ja ne ovat hyviä apuvälineitä opetussuunnitelman tavoitteiden saavuttamiseen.

2.3 Tehtävätyypit

Oppimateriaalissa käytetään kolmen tyylisiä tehtäviä: pohdintoja, mallitehtäviä ja harjoitustehtäviä. Pohdintatehtävillä on kirjassa suurin painoarvo ja teoriaa pyritään viemään eteenpäin mahdollisimman paljon pohdintojen avulla. Pohdintoja voidaan käyttää monipuolisesti, sillä ne tarjoavat sekä mahdollisuuden itseopiskeluun että vilkkaaseen luokkahuonekeskusteluun opettajan ja oppilaiden välillä. Mallitehtävät puolestaan ovat valmiiksi ratkaistuja tehtäviä, joita oppilas voi käyttää apunaan työskennellessään harjoitustehtävien parissa. Harjoitustehtäviä on kappaleesta riippuen 4-6 ja ne ovat pääsääntöisesti tarkoitettu kotitehtäviksi tai tehtäväksi aivan tunnin lopuksi.

Nämä kirjassa esiintyvät tehtävätyypit on suunniteltu artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* [30] esiin tuotujen tehtävämallien avulla. Artikkelista olemme valinneet läpi kirjan kantaviksi teemoiksi kolme:

- päättelyn ja ratkaisujen analysointi (analysing reasoning and solutions),
- matemaattisten lauseiden ja väitteiden arviointi (evaluating mathematical statements), sekä
- omien ongelmien ja tehtävien luominen (creating problems) [30].

Päättelyn ja ratkaisujen analysointia vaativissa tehtävissä kiinnitetään huomiota siihen, miten eri tavoilla ratkaisuihin voidaan päätyä ja miten päättely etenee. Logiikassa on tavallisesti useita mahdollisia etenemistapoja ja omaa päättelyä voi mallintaa esimerkiksi visuaalisilla välineillä kuten Venn-diagrammeilla, taulukointimenetelmillä kuten totuustauluilla, tai muunlaisella vaiheittaisella päättelyllä. Erilaisten ratkaisutapojen ymmärtäminen jäsentää kokonaisuuksien hahmottamista ja erilaisilla menetelmillä pyritään tukemaan erilaisia oppijoita. Monipuoliset ja erilaiset ratkaisumetodit tukevat erilaisten oppilaiden oppimista. Päättelyn ja ratkaisun analysointia vaativat tehtävät tukevat myös opetussuunnitelman tavoitteita oppilaista kriittisinä tulkitsijoina [21]. Lisäksi tätä tehtävätyyppiä on viime vuosina alettu käyttää myös ylioppilaskirjoituksissa. Onkin siis tärkeää, että oppilaat harjaantuvat jo kurssien aikana vastaamaan analysointitaitoja vaativiin tehtäviin.

Päättelyn ja ratkaisujen analysointiin kuuluu myös päättelyn virheiden korjaaminen. Yleisimpien väärinymmärrysten löytäminen ja huomaaminen toisten ajattelussa voi helpottaa myös omien virheiden huomaamista. Lauseiden ja väitteiden arviointi on tärkeä taito matematiikassa ja se näkyy myös nykyisissä ylioppilaskokeissa. Kun oppilaita pyydetään pohtimaan voiko väite olla aina, joskus tai ei koskaan paikkansa pitävä, joutuvat he väkisin miettimään ongelmaa useammalta kantilta ja he oppivat huomaamaan, millaiset tekijät vaikuttavat lauseiden totuusarvoihin.

Omien ongelmien ja pulmatilanteiden keksiminen parantaa luovuutta ja on myös hyvä keino syvemmän ymmärryksen saamiseksi. Oppilaiden matemaattisen luovuuden kehittäminen on yksi opetussuunnitelman keskeisiä tavoitteita ja siksi erittäin tärkeää myös tämän kirjan toteuttamisessa [21]. Kun oppilaat laitetaan tekemään ongelmia toisilleen, he saavat myös toimia ohjaajina ja opettajina vertaisilleen, mikä parantaa matematiikan sanallistamis- ja perustelemiskykyä.

3 Oppimateriaalien perustelu

3.1 Mitä on logiikka?

Logiikan oppiminen pulmien ja arvoitusten avulla on tehokasta, sillä se herättää oppilaiden mielenkiinnon aiheeseen, ja ymmärrys rakentuu pulman ratkaisun edetessä [1, 33]. Lukiossa ei voi kuitenkaan luottaa pelkkien pulmien tuomaan autuuteen formaalien taitojen oppimisessa, mutta kurssin aloittavaksi johdannoksi sellainen sopii. Pulma on valittu nuorten keskuudessa suositusta ja tunnetusta fantasiakirjasta "Harry Potter ja viisasten kivi" [27]. Tuttuus toimii mielenkiinnon herättäjänä ja auttaa huomaamaan, miten matematiikkaa voi löytyä yllättävistäkin paikoista. J.K. Rowlingin alkuperäisessä arvoituksessa ei ole esitetty kuvaa pullorivistä, mikä tekee pulman ratkaisemista erittäin haastavaa. Kuitenkin Roger Howe on Mathematics Teacher-lehden artikkelissaan [11] esittänyt kuvauksen ongelman ratkaisusta, jonka pohjalta pohdintatehtävän kuva on laadittu. Jaana Kaparin suomennos ei ole runomuotoiselle vihjeelle aivan yhtä yksiselitteinen kuin Rowlingin alkuperäisteksti, joten suomenkielisen vihjeen vieressä näytetään myös englanninkielinen versio arvoituksesta. Tämä osaltaan tukee myös laaja-alaista oppimista.

Lisätieto-laatikossa kerrotaan merkittävistä loogikoista ja nostetaan esiin yhteydet populaarikulttuuriin. Tällä pyritään kannustamaan opiskelijoita ottamaan selvää kiinnostavista asioista erilaisten mediaformaattien kautta ja rikkomaan käsitystä siitä, että tiede olisi aina "tylsää".

3.2 Formaali kieli — konnektiivit ja totuusarvot

Formaalia logiikkaa ei ole opetettu lainkaan ennen pitkän matematiikan kurssia MAA11, eikä oppilailla siten ole laajamittaisia ennakkotietoja. Jotkut oppilaat ovat kuitenkin voineet filosofian kursseilla törmätä argumentoitiin ja päättelyvirheisiin. Monien konnektiivien merkitys näkyy käytännön elämässä, mitä voidaan hyödyntää oppitunneilla monipuolisten pohdintatehtävien ja keskustelujen kautta. Kappaleessa hyödynnetään oppilaiden arkista tietoa, vaikka arkijärki voi usein aiheuttaa myös väärinymmärryksiä [6]. Näiden korjaamiseen kiinnitetään erityishuomiota nostamalla yleisimmät väärinymmärryksen esille oppilaiden nähtäväksi ja pohdittavaksi.

On havaittu, että oppilailla on usein ongelmia formaalin kielen kääntämisessä luonnolliselle kielelle [28, 8, 6]. Tämä hankaluus vaikeuttaa loogisten kokonaisuuksien ymmärtämistä ja johtaa epäyhtenäiseen käsitykseen esimerkiksi loogisesta ekvivalenssista ja totuustauluista. Myöhemmin se aiheuttaa matematiikan opiskelussa huomattavia vaikeuksia todistuksien laatimisessa [8, 2]. Erityisesti negaation muodostamisessa on vaikeuksia monimutkaisempien rakenteiden kohdalla [6]. Tätä vaikeutta on selitetty sillä, että oppilaat eivät osaa kääntää formaalia kieltä arkielämän tilanteisiin, jolloin ymmärrys jää ainoastaan abstraktille tasolle [6].

Näiden vaikeuksien ja ongelmien huomioimiseksi kirjan ensimmäinen kappale aloitetaan käsittelemällä yleisesti konnektiiveja ja niiden kääntämistä luonnolliselle kielelle, ja päinvastoin. Mekaanisia kääntämistehtäviä ei kuitenkaan ole paljon, vaan kääntämistä on ripoteltu tasaisesti ympäri kirjaa ja piilotettu muiden tehtävien sisälle. Tällä tavoitellaan kääntämisen automatisoitumista asioiden edetessä. Lisäksi läpi kirjan käytetään paljon aikaa ja huomiota eri konnektiivien vertailemiseen, millä pyritään saamaan oppilaille kokonaisvaltaisempi käsitys konnetiiveista ja niiden ominaisuuksista.

Totuusarvoja käsitellään heti lauseiden formalisoinnin jälkeen. Tavallisesti oppilailla on totuustaulusta hyvin rikkonainen ja mekaaninen käsitys [8, 9], vaikka se onkin hyödyllinen loogisen ajattelun konkretisoinnin väline. Tämän ennaltaehkäisemiseksi totuusarvojen käsittely otetaan aikaisin mukaan konnektiivien kanssa työskentelyyn. Tällöin totuusarvot tulevat luonnollisesti osaksi konnektiivien ymmärrystä, mikä myöhemmin helpottaa myös totuustaulujen näkemistä kokonaisuutena [8]. Jokainen konnektiivi ja sen totuustaulu käydään yksitellen läpi, mutta niiden ominaisuuksia vertaillaan keskenään ja oppilaiden tulee miettiä, millaisiin tilanteisiin eri konnektiivit soveltuvat. Vertailun avulla pyritään huomaamaan eri konnektiivien yhtäläisyyksiä ja eroja, minkä on myös havaittu tuottavan vaikeuksia oppilaille [9, 6, 28]. Samalla pohditaan totuustaulun rivien merkityksiä ja rakennetta.

Konnektiivien ja suljetun lauseen määritelmä annetaan oppilaille kirjan alussa suoraan. Pohdinnassa A.8 oppilas kuitenkin pääsee pohtimaan totuusarvon ja suljetun lauseen luonnetta niin matemaattisen kuin luonnollisen esimerkin avulla. Pohdinnassa oppilaat huomaavat lisäksi, että totuusarvo on joskus ehdollinen. Luku 4 on aina jaollinen luvulla 2, mutta luku 6 on jaollinen kokonaisluvulla n ainoastaan jos $n = 1, 2, 3$ tai 6. Pohdinnassa A.9 pyritään edelleen konkretisoimaan totuusarvon käsitettä sitomalla se konkreettisiin ja helposti ymmärrettävään tilanteeseen. Pohdinnassa lisäksi annetaan oppilaalle tilaa luovuuteen ja mahdollisuus yhdistellä konnektiiveja haluamallaan tavalla.

Kun formaalia kieltä käännetään luonnolliselle kielelle, voi vastaan tulla semantiikkaan liittyviä ongelmia, joita käsitellään Pohdinnassa A.10. Oppilaan on tärkeä ymmärtää, että matematiikan kieli on yksikäsitteistä, mutta ihmisten välinen luonnollinen kieli voi jättää varaa tulkinnalle. Pohdinnassa A.11 pyritään siirtymään negaation totuustauluun hyvin käytännönläheisen ja helposti ymmärrettävän esimerkin avulla. Negaation totuustaulu on yksinkertainen ja se käsitellään siksi ensimmäisenä. Kysymyksillä pyritään siihen, että oppilas itse huomaisi käytännön ja totuustaulun välisen yhteyden. Tällaisilla pohdinnoilla pyritään vahvistamaan opetussuunnitelman tavoittelemaa oppilaan roolia aktiivisena tiedon rakentajana ja muokkaajana [21]. Pohdinnan 11 avulla pyritään varmistamaan, että oppilaan ymmärrys totuustauluista olisi eheä heti alusta saakka.

Konjunktio on tutkimusten mukaan "helppo" konnektiivi [9], ja se vastaakin merkitykseltään täysin suomenkielen sanaa "ja". Koska konnektiivin merkitys on oppilaille intuitiivisesti verrattain selvä, voidaan konjunktion tapauksessa pohtia totuustaulun muodostamista tarkemmin. Pohdinnassa A.12 oppilaat täydentävät totuustaulun itse, millä pyritään luomaan vahvempaa ymmärrystä niin konnektiivin merkityksestä kuin totuustaulun rakentesta.

Toisin kuin konjunktio, disjunktion määritelmä poikkeaa oppilaiden arkikäsityksestä. Disjunktio ei suoraan vastaa suomenkielen sanaa "tai" eikä englanninkielen sanaa "or". Kenties juuri siitä syystä sen on huomattu tuottavan oppilaille vaikeuksia [6]. Disjunktioon siirrytään tässä kirjassa vertailemalla sitä konjunktioon ja pyrkimällä sitä kautta huomaamaan konnektiivien eroavaisuuksia (Pohdinta A.14). Venn-diagrammeissa disjunktion vaihtoehdot ovat eri tavoin visualisoitu, mikä edistää vahvasti visuaalisten oppijoiden oppimista, ja yleisesti oppilaiden kykyä nähdä asiat erilaisista näkökulmista.

Implikaatiota lähestytään klassisen Wasonin valintakokeen [32] avulla (Pohdinta A.15). Alkuperäisessä tutkimuksessaan Wason havaitsi, että ainoastaan 10% oppilaista onnistui ratkaisemaan tehtävän oikein. Myöhemmissä tutkimuksissa on havaittu vastaava tulos [9, 28, 2]. Perinteisessä Wasonin kokeessa oppilaille annetaan ensin valintatehtävä, joka sisältää abstraktin kontekstin (kuviot ja numerot), minkä jälkeen sama testi on korvattu arkisella konkreettisen maailman ongelmalla (poliisi ja juhlat). Tutkimuksissa havaittiin, että konkreettinen ongelma saadaan merkittävän paljon useammin ratkaistua kuin abstrakti [32, 9].

Ongelmat ja väärinkäsitykset implikaation ymmärtämisessä ovat yksi laajimmin raportoiduista vaikeuksista formaalin logiikan saralla [12, 17, 9, 28, 2]. Wasonin valintakoe on valittu johdattelevaksi pohdinnaksi mielenkiinnon herättämisen vuoksi. Kyseessä ei ole nyt testi, vaan opetustilanne, joten aiempien tutkimusten nojalla kirjassa aloitetaan konkreettisella ja tutulla esimerkillä, jonka ratkaiseminen oppilailta onnistuu. Tarkoituksena on, että oppilaat pystyvät soveltamaan ensimmäisen pohdinnan ratkaisumallia seuraavaan, jossa tilanne on viety abstraktiin kontekstiin. Tämän jälkeen oppilaiden tulee itse täydentää implikaation totuustaulu kokonaan aiempien pohdintojen ja avustavien kysymysten perusteella. Oppilas saa nähdä melko paljon vaivaa implikaation totuustaulun keksimiseksi Pohdinnassa A.16, millä pyritään vahvan muistijäljen ja syvemmän ymmärryksen luomiseen. Lukiolaisten juhlia koskeva pohdinta toimii myös vahvana ja helposti muistettavana esimerkkinä, johon oppilaat voivat palata aina uudelleen implikaatioon liittyvien tehtävien yhteydessä [3].

Yksi implikaation ymmärtämiseen liittyvistä vaikeuksista on implikaation ja ekvivalenssin eron huomaaminen ja ymmärtäminen [6, 9]. Implikaation totuustaulu käsiteltiin aiemmassa pohdinnassa hyvin perinpohjaisesti, joten ekvivalenssia lähestytään tutkimalla sen ominaisuuksia verraten implikaatioon. Pohdinnassa A.18 oppilaat pääsevät itse pohtimaan ekvivalenssin luonnetta totuustaulun ja kysymysten avulla, mikä auttaa muistamaan ja ymmärtämään konnektiivin paremmin. Erityisesti ekvivalenssia tarkastellaan myöhemmissä kappaleissa runsaasti totuustaulujen avulla, joten on alusta saakka tärkeää, että oppilaat huomaavat itse ekvivalenssin merkityksen. Implikaation ja ekvivalenssin eroa voi visualisoida totuustaulun lisäksi myös Venn-diagrammeilla, joita on pohdinnan lopussa tukemassa monipuolista ymmärrystä.

Kappaleen lopussa on käsitelty konnektiivien ja logiikan yhteyttä ohjelmointiin. Nykyisessä opetussuunnitelmassa sekä uudessa luonnoksessa korostetaan tietoteknisiä taitoja[21, 22]. Lisäksi ohjelmoinnin oppimisen tarvetta on nostettu esiin julkisessa keskustelussa viime aikoina, sillä Suomen työmarkkinoilla on suuresti pulaa alan osaajista [23, 5]. Pohdinnassa A.19 totuusarvot on yhdistetty yksinkertaiseen ohjelmoinnilliseen esimerkkiin. Tämän tarkoituksena on sekä laaja-alaisuus että totuusarvon syvempi ymmärtäminen. Pohdinnassa oppilaan tulee itse tutkia koodirivejä ja soveltaa siihen juuri oppimaansa. Oppilaalla ei tarvitse olla aiempaa kokemusta ohjelmoinnista, joten pohdinta sopii kaiken tasoisille oppilaille ja tuo helpolla tavalla näkyviin yksinkertaista koodia. Pohdinnassa tulee ilmi ohjelmoinnissa paljon käytetty "if-else-rakenne, mikä voi olla joillekin oppilaille vieras, joten se on selitetty pohdinnassa auki. Jälkimmäisissä esimerkkiohjelmissa havainnollistetaan disjunktion ja konjunktion eroa. Tekniikasta tai ohjelmoinnista kiinnostuneille oppilaille pohdinta toimii hyvänä motivointikeinona.

Harjoitustehtäviä tässä kappaleessa on kuusi, ja niissä pyritään varmistamaan ymmärrys erilaisista konnektiiveista, totuusarvoista ja niiden yhteydestä luonnolliseen kieleen. Ensimmäinen tehtävä koskee konnektiivien kääntämistä. Toisessa ja kolmannessa tehtävässä on pyritty liittämään konnektiiveja myös oppilaille ennestään tuttuihin matemaattisiin ominaisuuksiin ja matematiikan visuaalisiin puoliin, kuten jaollisuuteen ja geometrisiin kuvioihin. Tehtävässä neljä on haettu laaja-alaista oppimista tiedonhakuun liittyen. Tehtävässä viisi harjoitellaan valmiiden vastausten analysointia, päättelyn sanallistamista ja päättelyssä esiintyvien virheiden löytämistä. Tehtävässä kuusi, joka on kappaleen viimeinen, herätellään jo hieman ajatusta seuraavissa kappaleissa esiin tulevasta kaikkien vaihtoehtojen läpikäymisestä. Kaikissa kappaleen tehtävissä korostuu erityisesti kyky analysoida päättelyä ja ratkaisuja sekä kyky arvioida väitteitä ja lauseita. Tehtävillä pyritään kehittämään oppilaan ongelman kuvailun ja säännönmukaisuuksien löytämisen taitoja.

3.3 Totuustaulut

Totuustauluja otettiin esille jo aiemmassa kappaleessa, mutta nyt niiden käsitettä laajennetaan koskemaan suurempia kokonaisuuksia. Oppilaita ohjataan ja opetetaan muodostamaan totuustauluja itse ja ratkaisemaan ongelmia niiden avulla. Totuustaulujen mekaaninen tuottaminen on tutkimusten mukaan oppilaille yleensä helppoa, toisin kuin niiden tulkitseminen [8, 6]. Tätä ongelmaa on käsitellyt esimerkiksi professori Susanne Epp on omassa tutkimuksessaan ja opetuksessaan. Hän on painottanut omilla kursseillaan ja koeasetelmissaan totuustaulujen sanallista selittämistä ja vaatinut totuustaulun tuottamisen lisäksi selitystä siitä, mitä ja miksi totuustaulu tehtävän ratkaisusta kertoo [6]. Tässä kirjassa totuustaulujen syvempää ymmärtämistä tavoitellaan käsittelyjärjestyksellä sekä Eppin tavoin jatkuvalla tulkinnan korostamisella. Yksittäisten konnektiivien totuustaulut ovat käsitelty jo kirjan ensimmäisessä kappaleessa, joten totuustaulujen perimmäinen idea ja rakenne on oppilaille tuttu.

Totuustaulun on havaittu olevan hyödyllinen työkalu oppilaille loogisen päättelyn konkretisoimiseen: tehdessään totuustauluja oppilaat osaavat pääsääntöisesti taulukoida tapahtumien kaikki mahdolliset vaihtoehdot, toisin kuin muiden päättelyn työkalujen avulla [9]. Totuustaulujen rakenne on hyvin kurinalainen ja aloittaessaan totuustaulun rakentamista, oppilaat etenevät määrätietoisesti vaihe vaiheelta, jolloin kaikki vaihtoehdot tulevat luonnostaan käytyä läpi. Sen sijaan vapaamuotoisemmissa ratkaisumenetelmissä oppilaiden ratkaisujen on huomattu olevan vajavaisia [9]. Tutkimuksissa on kuitenkin havaittu, että vaikka oppilaat pääsevätkin totuustaulujen avulla oikeisiin lopputuloksiin, he näkevät ja hahmottavat totuustaulun hyvin rikkonaisena kokonaisuutena. Hawthrone on havainnut, että oppilaat usein tarkastelevat totuustaulun rivejä ja sarakkeita itsenäisinä kokonaisuuksina ja tekevät tulkintoja ainoastaan yksittäisten ruutujen perusteella. Myös Epp on tehnyt samankaltaisia havaintoja [8, 6]. Tässä kirjassa totuustaulujen tulkitsemista on avattu oppilaille pohdintojen lisäksi myös mallitehtävän muodossa ja värikoodauksella. Näillä on pyritty voimakkaammin tuomaan näkyväksi, mistä yksittäisitä osista totuustaulu koostuu, ja miten nämä nivoutuvat yhtenäiseksi kokonaisuudeksi.

Totuustauluja käsiteltiin paljon jo aiemmassa kappaleessa, mutta nyt syvennytään niiden merkitykseen ja mahdollisuuksiin laajempien kokonaisuuksien konkretisoimisessa. Kun totuustaulujen käyttötarkoitus ja rakenne on sisäistetty, ne ovat hyvin mekaaninen työkalu. Pohdinnassa A.20 pyritään siihen, että oppilaat saisivat ohjeiden perusteella itse generoitua totuustaulun ongelmalle, joka jätettiin pohtimisen asteelle edellisen kappaleen lopussa. Sillä, että oppilaat saavat itse luoda totuustaulun, pyritään ehkäisemään tutkimuksissa havaittua rikkonaista totuustaulukäsitystä. Oppilaat joutuvat tekemään töitä totuustaulun luomiseen ja pohtimaan tarkkaan, millä peusteella sarakkeet toteutetaan ja kuinka aiemmat sarakkeet ja rivit vaikuttavat lopputulokseen. Esimerkkiin A.21 on vielä koottu vaihe vaiheelta ohjeet totuustaulun luomiseen. Eri vaiheet on värikoodattu niin, että oppilas voi helposti hahmottaa, miten totuustaulu on rakentunut. Pohdinnassa A.22 lähdetään liikkeelle hyvin yksinkertaisesta asetelmasta, jossa oppilaan tulee itse löytää kaikki mahdolliset vaihtoehdot Millan suunnitelmille. Pohdinnassa tarkoituksena on, että oppilas huomaa kirjata totuustauluun kaikki mahdolliset premissien kombinaatiot, ja oppii arkielämän tilanteen avittamana tulkitsemaan sen sisällön. Pohdinnassa korostuu sulkeiden merkitys, mitä havainnollistetaan vielä lisää Esimerkissä A.24.

Valehtelijoiden ja totuudenpuhujien saari on klassinen esimerkki loogisista pulmista, joita voi käyttää opetuksen tukena [1]. Sitä voidaan käyttää myös esimerkkinä totuustaulujen hyödyntämisestä ongelmanratkaisun apuvälineenä. Pohdinnassa A.25, joka on valittu alkumietinnäksi ennen haastavampaa pulmaa, on ensiksi tapaus, jonka vihjeeseen tiedämme varmasti vastauksen. Oppilaat pystyvät järkeilemään pohdinnan ratkaisun ilman totuustaulun käyttämistä. Halutessaan oppilas voi kuitenkin myös tässä tehtävässä käyttää totuustauluja, mikä edistää ymmärrystä totuustaulun ja käytännön yhteydestä. Haastavampi pulma on tuotu esille mallitehtävän muodossa, sillä totuustaulun käyttäminen tällaisessa kontekstissa ei ole ennestään tuttua oppilaille ja näin suuren totuustaulun laatiminen voi tuntua liian vaikealta. Mallitehtävässä on käytetty eri värejä hahmottamaan tilannetta. Lisäksi harjoitustehtävänä on toinen variaatio valehtelijoiden ja totuudenpuhujien saarelta, joten oppilaat voivat katsoa siihen tarvittaessa vinkkejä mallitehtävästä.

Vaikka totuustaulujen tekeminen saattaa olla oppilaille helppoa, koetaan se työlääksi [9]. Mikäli oppilas osaa tulkita totuustauluja, ei välttämättä joka tilanteessa ole tarpeen itse muodostaa sitä. Siksi kappaleen lopussa on annettu linkki WolframAlpha- sivustolle. Sivulla on esitelty WolframAlphan Boolen algebran laskutoimintoja ja siellä voi muun muassa generoida totuustauluja, Venn-diagrammeja ja loogisia piirejä. Tällaisiin apuvälineisiin tutustuminen on myös opetussuunnitelman peräänkuuluttamaa mielekästä teknisten apuvälineiden hyödyntämistä[21]. Koska sivu on englanninkielinen, siihen tutustuminen on ainerajat ylittävää oppimista. Myös matemaattisen osaamisen, jatko-opintojen ja tiedonhaun näkökulmasta on hyödyllistä tutustua engalnninkieliseen termistöön ja nettisivuihin.

Harjoitustehtäviä kappaleeseen on tehty neljä. Tehtävät seitsemän ja yhdeksän vaativat laaja-alaista uuden tiedon omaksumiskykyä ja taitoa soveltaa sitä matemaattiseen kontekstiin. Tehtävässä seitsemän käsitellään dominoivia ja resessiivisiä geenejä ja tehtävä on hyvin läheisessä yhteydessä biologian kursseihin. Tehtävä yhdeksän puolestaan lähestyy logiikkaa elektroniikan ja tietotekniikan näkökulmasta. Tehtävien seitsemän ja yhdeksän tarkoituksena on sekä herättää oppilaiden kiinnostusta matematiikan sovellusmahdollisuuksia kohtaan että opettaa oppilaita huomaamaan erilaisia tilanteita, missä matematiikan taidoista on hyötyä. Tehtävät eivät kuitenkaan ole sellaisia, joihin tarvitsisi olla taustatietoa muilta kursseilta. Tehtävässä kahdeksan käsitellään totuudenpuhujien ja valehtelijoiden saaren pulmaa, johon oppilas voi tarvittaessa katsoa esimerkkiä Mallitehtävästä A.26. Tehtävä mittaa sekä kykyä luoda että tulkita totuustauluja. Tehtävässä kymmenen mitataan myös totuustaulujen tulkitsemistaitoa ja konnektiivien vaikutusten ymmärtämistä.

3.4 Looginen ekvivalenssi ja tautologia

Kappaleen alussa palataan ekvivalenssiin liityvään pohdintaan ja annetaan virallinen määritelmä ilmiölle, jonka olemassaolo on huomattu jo aiemmin kappaleessa Totuustaulut. Tämän tarkoituksena on helpottaa ymmärtämistä ja auttaa oppilasta liittämään uutta tietoa aiemmin opittuun. Tällainen eteneminen edistää oppilaan mahdollisuutta kontruktivistieen oppimiseen [25]. Pohdinnassa A.29 tulee keksiä lauseita, jotka ovat ekvivalentteja keskenään. Tämä antaa mahdollisuuden luovuudelle, mutta toisaalta oppilaan tulee huolellisesti miettiä, miten eri konnektiivien yhdistelmät vaikuttavat totuusarvoihin. Kontradiktion käsite otetaan esiin käytännön kautta. Kun lause ilmaistaan konnektiivien avulla, ei oppilas välttämättä suoraan näe sen ristiriitaisuutta. Kuitenkin kun lauseille p ja q annetaan jotkin konkreettiset määreet, on helppo huomata, ettei lause voi pitää paikkaansa. Tässä kohtaa oppilaat voivat palata miettimään ensimmäisen kappaleen pohdintoja, joissa todettiin, ettei lause ja sen negaatio voi olla totta yhtäaikaisesti. Pohdinnassa A.29 tämä tuttu havainto yhdistetään totuustauluihin.

Perinteisesti matematiikan kirjoissa määritelmät annetaan valmiina. Pohdinnassa A.31 oppilaan täytyy itse muotoilla määritelmä. Koska kaikki tarvittava tieto sitä varten on esitetty juuri aiemmin, pohdinta mittaa oppilaan kykyä sitoa asiat yhteen ja vahvistaa ymmärrystä kokonaisuudesta ja eri käsitteiden välisistä yhteyksistä [25]. Lisäksi määritelmän itse muotoileminen kehittää oppilaiden kykyä tuottaa matemaattista tekstiä, mikä on yksi opetussuunnitelman keskeisiä tavoitteita [21]. Pohdinnassa A.32 tarkoituksena on, että oppilaat huomaavat itse loogiset lait. Kaksoiskiellon laki on monille tuttu jo vieraiden kielten tunneilta, joten sillä on intuitiivista aloittaa. Kontraposition laki ei ole kovin intuitiivinen ja moni oppilaista voi tehdä virheitä pohdinnan (b)-kohdan kanssa. Tässä kohtaa mitataankin, kuinka hyvin oppilas on ymmärtänyt tautologian ja loogisen ekvivalenttiuden määritelmät, varsinkin jos oppilas tekee totuustauluja väärälle väittämälle. Voi olla, että oppilas saa nähdä paljon vaivaa oikean vaihtoehdon löytämiseen, mutta se auttaa myöhemmin muistamisessa. Pohdinnan viimeisessä kohdassa tutkitaan DeMorganin lakeja Venn-diagrammien avulla. Venn-diagrammeja on käytetty jo useaan otteeseen ja niiden tulkintaa pyritään automatisoimaan.Venn-diagrammit on hyvin voimakas tapa visualisoida konnektiiveja, ja niiden avulla voidaan synnyttää vahvoja muistijälkiä, joihin palata myöhemmin [3]. Looginen ekvivalenssi ja tautologia -kappaleessa tulee täysin uutena asiana ainoastaan päättelyn lait. Kappaleen ensisijaisena tarkoituksena onkin koota yhteen koko logiikan perusteiden opintokokonaisuus. Tämän kappaleen pohdinnoissa oppilaat ovat saaneet hyvin paljon huomata ja selittää itse logiikan sääntöjä, minkä on tarkoitus edesauttaa oppilaiden kokonaisuuden hahmottamista.

Kappaleessa on neljä harjoitustehtävää ja yksi lisätehtävä. Tehtävät testaavat visuaalisuutta, uuden ja vanhan yhdistämistä sekä erityisesti soveltamistaitoja. Tehtävässä 11 laajennetaan Venn-diagrammi esitystä koskemaan yhden konnektiivin sijasta kokonaista lausetta ja tehtävän ratkaiseminen vaatii usean aikaisemmin opitun asian ymmärtämistä. Tehtävässä 12 haetaan yhteyttä logiikan ja aiemmin tuttujen matemaattisten ominaisuuksien välille. Tehtävässä 13 hyödynnetään päättelynsääntöjä, jotka mahdollistavat loogisten ekvivalenssien tutkimisen ilman totuustaulua. Tehtävä 14 mahdollistaa ja vahvistaa oppilaan luovuuden käyttöä testaten samalla konnektiivien ja totuusarvojen hallintaa. Lisätehtävänä on esitetty klassinen Einsteinin arvoitus, mikä on mukava pähkinä logiikkakokonaisuuden päätökseen. Arvoitus voi olla monille oppilaille tuttu jo ennestään, mikä toimii mielenkiinnon herättäjänä.

Viitteet

[1] Mária Bakó. Why we need to teach logic and how can we teach it? *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 2002.

[2] Patricia W. Cheng, Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett, and Lindsay M. Oliver. Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. *Cognitive Psychology*, 18:293–328, 1986.

[3] John Clement. Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30:1241–1257, 1993.

[4] Paula Collin. Suomalaiset osaavat matematiikkaa yhä huonommin, vaikka sitä tarvittaisiin koko ajan enemmän – professori: Teknologinen kehitys lisää matematiikan merkitystä. https://yle.fi/uutiset/3-10353905, 2018. Noudettu 17.9.2019.

[5] Paula Collin. Jopa 10 000 työpaikkaa koodareille, mutta tekijät puuttuvat - "vaatii kaikkien osapuolten aktivoitumista". https://yle.fi/uutiset/3-10669492, 2019. Noudettu 17.9.2019.

[6] Susanna S. Epp. The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly*, 110:886–899, 2003.

[7] E. P. Goldenberg, J. Mark, and A. Cuoco. Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15:375–402, 1996.

[8] Casey Hawthorne and Chris Rasmussen. A framework for characterizing students' thinking about logical statements and truth tables. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(3):337–353, 2015.

[9] Geoffrey L. Herman, Michael C. Loui, Lisa Kaczmarczyk, and Craig Zilles. Describing the what and why of students' difficulties in Boolean logic. *ACM Transactions on Computing Education*, 12:1–28, 2012.

[10] Jenni Honkanen. Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä – YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin. https://yle.fi/aihe/artikkeli/2018/02/13/matematiikan-sahkoistyminen-herattaa-kritiikkia-ytl-vastaa-useimmiten, 2018. Noudettu 17.9.2019.

[11] Roger Howe. Hermione Granger's solution. *Mathematics Teacher*, pages 86–89, 2002.

[12] Celia Hoyles, Dietmar Küchemann, and Bedford Way. Students ' understandings of logical implication. 9:193–223, 2002.

[13] Anssi Karjalainen. Miksi matematiikasta saa parhaat pisteet, jos haluaa opiskella englantia yliopistossa? Ellen nosti keskustelun somessa: "Tätäkö varten vedin itteni burnoutiin?" – nyt uudistuksen vetäjä vastaa. https://www.iltalehti.fi/kotimaa/a/86eefdf4-cf48-445e-9aa0-30be2d3a4153, 2019. Noudettu 17.9.2019.

[14] Kreeta Karvala. Pääkirjoitus: Yleissivistyksen piti olla lukion ydin, mutta jatkossa se on pitkä matematiikka. https://www.iltalehti.fi/paakirjoitus/a/cb93bb96-04d6-4f3b-a791-75f2e97535da, 2019. Noudettu 17.9.2019.

[15] Marja Keso. Matematiikan osaaminen hiipuu – ja se vaarantaa ohjelmoitavan maailman. https://www.tekniikkatalous.fi/kumppaniblogit/dna/matematiikan-osaaminen-hiipuu-ja-se-vaarantaa-ohjelmoitavan-maailman/79254e80-91ef-3a73-9a2e-854783a4794b, 2018. Noudettu 17.9.2019.

[16] Paul A. Kirschner. Stop propagating the learning styles myth. *Computers and Education*, 106:166–171, 2017.

[17] J.T. Longino, Michael Loui, and Craig Zilles. Student misconceptions in an introductory logic design course. In *Proceedings of the American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition (ASEE'06)*, 2006.

[18] Jecaterina Mantsinen. Matematiikan lukiomenestyksestä halutaan antaa etumatkaa yliopistoon – "Ymmärrämme hyvin, miksi tähän on päädytty". https://www.aamulehti.fi/uutiset/matematiikan-lukiomenestyksesta-halutaan-antaa-etumatkaa-yliopistoon-ymmarramme-hyvin-miksi-tahan-on-paadytty-200637558, 2018. Noudettu 17.9.2019.

[19] Stephanie Moser and Joerg Zumbach. Exploring the development and impact of learning styles: An empirical investigation based on explicit and implicit measures. *Computers and Education*, 2018.

[20] Anniina Nirhamo. Tekniset apuvälineet ja ajankäyttö mietityttivät ensimmäisessä sähköisessä matematiikan yo-kokeessa. https://yle.fi/aihe/artikkeli/2019/03/28/tekniset-apuvalineet-ja-ajankaytto-mietityttivat-ensimmaisessa-sahkoisessa, 2019. Noudettu 17.9.2019.

[21] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. 2015.

[22] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. 2019.

[23] Vatanen Panu. Kilpailu koodareista on nyt veristä: pelkkä kova palkka ei riitä, vaan työntekijöitä houkutellaan myös parturipalveluilla ja nimikko-oluella. https://yle.fi/uutiset/3-10254656, 2018. Noudettu 17.9.2019.

[24] Harold Pashler, Mark Mcdaniel, Doug Rohrer, and Robert Bjork. Learning styles: A critical review of concepts and evidence. *Psychological Science in the Public Interest*, 9:105–119, 2009.

[25] Siljander Pauli. *Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen: Peruskäsitteet ja pääsuuntaukset*. Tampere: Vastapaino, 2014.

[26] Petra Ristola and Kaisu Jansson. Syökö pitkän matikan suosio yleissivistystä? Yle kysyi rehtoreilta – "Opiskelijoiden jaksaminen on heikentynyt ja taito- sekä taideaineiden opiskelu on vähentynyt". https://yle.fi/uutiset/3-10826054, 2019. Noudettu 17.9.2019.

[27] J.K Rowling. *Harry Potter ja viisasten kivi*. Tammi, 9. painos, 2000.

[28] John Selden and Annie Selden. Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29:123–151, 1995.

[29] S.K. Sreenidhi and Helena Tay Chinyi. Styles of learning based on the research of Fernald, Keller, Orton, Gillingham, Stillman, Montessori and Neil D Fleming. *Internatiolan Journal for Innovative Research in Multidisciplinary Field*, 3:17–25, 2017.

[30] Malcolm Swan. Collaborative learning in mathematics. *National Institute of Adult Continuing Education*, pages 162–176, 2006.

[31] Emmi Tuomisto. Suomalaisten nuorten matematiikan osaaminen notkahti - "Opiskelu ei kiinnosta". https://www.ess.fi/uutiset/kotimaa/art2409147, 2017. Noudettu 17.9.2019.

[32] P. C. Wason. Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 20:273–281, 1968.

[33] Jui Feng Weng, Shian Shyong Tseng, and Tsung Ju Lee. Teaching boolean logic through game rule tuning. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 3:319–328, 2010.

[34] Ylioppilastutkintolautakunta. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä, S2017. 2017.

[35] Ylioppilastutkintolautakunta. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä, K2018. 2018.

A Logiikan perusteet

A.1 Mitä on logiikka?

J.K Rowlingin tunnetussa romaanissa "Harry Potter ja viisasten kivi" on esitetty seuraavanlainen pulma.

Pohdinta A.1 Pöydällä on 7 pulloa. Tiedetään, että niistä kahdessa on viiniä, kolmessa myrkkyä, yksi vie eteenpäin ja yksi vie taaksepäin. Harryn ja Hermionen tehtävänä on valita pullo, jonka avulla he pääsevät eteenpäin. He saavat runomotoisen vihjeen:

"Vaikka myrkky ovelasti piiloitua taitaa,
vasemmalta silti aina hipoo viinin laitaa.
Kokonaan on erilainen kumpikin reunan pitäjä,
mutta eteenpäin jos aio, jae muualta ystävä.
Kuten omin silmin näet, olemme eri kokoa,
ei kääpiö ei jättiläinen juojalleen tuo kuoloa.
Toinen sekä oikealta että vasemmalta
näöstänsä huolimatta maistuu samalta"

- J.K Rowling, suom. Jaana Kapari

"First, however slyly the poison tries to hide
You will always find some on nettle wine's left side
Second, different are those who stand at either end,
But if you would move onward, neither is your friend
Third, as you see clearly, all are different size
Neither dwarf nor giant holds death in their insides
Fourth, the second left and the second on the right
Are twins once you taste them, though different at first sight."

- J.K Rowling

Mikä pulloista pitää valita?

Romaanissa Hermione toteaa Harrylle, että pulma on helppo, sillä se ei vaadi lainkaan taikuutta vaan ainoastaan järkeilyä!

"Järkeilyn" tieteenala on *logiikka*, joka tutkii päättelyn ja ajattelun muotoja, päättelyn oikeellisuutta, ilmaisujen välisiä suhteita sekä totuusehtoja. Logiikka-sana on johdettu kreikankielen sanasta *logos*, "sana", "järjestys" , "järki". Logiikkaa on alunperin pidetty osana filosofiaa, ja ensimmäiset logiikkaa koskevat tekstit, jotka ovat säilyneet nykyaikaan, ovat peräisin Aristoteleelta (384-322 eaa.). Nykyaikainen matemaattinen logiikka alkoi kehittyä 1800-luvulla. 1900-luvulla logiikka on vahvasti muodostanut oman tieteenalansa, jonka tutkimus on edistänyt niin matematiikan, tietojenkäsittelytieteiden kuin tekoälyn tutkimusta. Logiikan perustermien ja sääntöjen ymmärtäminen onkin välttämätöntä esimerkiksi ohjelmoinnissa ja matemaattisten tulosten todistamisessa.

Lisätieto A.2 Kuuluisia logiikan tutkijoita ja kehittäjiä

- **George Boole** (*1815-1864*) kehitti algebrallisen rakenteen, joka on edelleen nykyaikaisen tietokonearitmetiikan perusta. Tätä rakennetta kutsutaan *Boolen algebraksi*. Boolea pidetään yhtenä tietojenkäsittelytieteen perustajista, vaikka hänen elinaikanaan ei vielä ollut tietokoneita.

- **Bertrand Russell** (*1872-1970*) vei suuresti eteenpäin sekä logiikan että matematiikan perustan tutkimustyötä. Russell oli tunnettu tieteen popularisoija. Hän havaitsi varhaisessa joukko-opissa nykyisin *Russellin paradoksiksi* nimitetyn ristiriidan, joka voidaan esittää konkreettisesti seuraavanlaisena "parturin paradoksina":

  Kylän parturi ajaa parran niiltä, ja vain niiltä kyläläisiltä, jotka eivät itse aja partaansa. Ajaako hän silloin oman partansa?

  Mikäli parturi ajaa oman partansa silloin hänen ei pitäisi ajaa omaa partaansa, ja toisinpäin.

  Russell oli myös yhteiskunnallinen ajattelija ja tunnettu pasifisti, joka vei hänet kahdesti vankilaan. Russellin elämää on kuvattu esimerkiksi sarjakuvakirjassa *Logicomix : Nerouden ja hulluuden rajalla (2008)*.

- **Alan Turing** (*1912-1954*) on modernin tietojenkäsittelytieteen merkittävimpiä uranuurtajia. Hän on tunnettu esimerkiksi varhaista mekaanista tietokonetta muistuttavan algoritmisen *Turingin koneen* keksimisestä ja varhaisesta tekoälyn inhimillistä ajattelukykyä testaavasta kokeesta, jotan nykyisin kutsutaan *Turinigin testiksi*. Turing on kuuluisa myös saksalaisen *Enigma*-koodin ratkaisemisesta toisen maailmansodan aikana. Koodin ratkaisua ja Turingin elämää kuvataan useita Oscar-ehdokkuuksia saaneessa elokuvassa *The Imitation Game (2014)*

A.2 Formaali kieli -Konnektiivit ja totuusarvot

Olen iloinen ja käyn kaupassa.
Jos paistaa aurinko, menen ulos.
Syön banaanin tai suklaapatukan.

Yllä olevat lauseet ovat esimerkkejä *luonnollisen kielen* lauseista. Ihmiset kommunikoivat luonnollisella kielellä, joka on kehittynyt, muovautunut ja elänyt tuhansien vuosien saatossa. Luonnollisessa kielessä lauseita yhdistetään toisiinsa erilaisten konjunktioiden avulla, joita ovat esimerkiksi *että, jotta, koska, jos, ja, joko – tai*.

Matematiikkaa sen sijaan ilmaistaan *formaalin kielen* keinoin. Formaalilla kielellä on täysin yksiselitteinen ja universaali kielioppi. Formaalia kieltä käytetään matematiikan lisäksi erityisesti tietotekniikassa ja ohjelmoinnissa. Luonnollisen kielen tavoin myös formaalissa kielessä tarvitaan merkintöjä, jotka liittävät lauseiden merkitykset toisiinsa. Näitä kutsutaan *konnektiiveiksi.* Seuraavassa määritelmässä on esitetty käytetyimmät konnektiivit ja niiden lukutapa.

Määritelmä A.3 Konnektiivit

Symboli	Konnektiivi	Luetaan
$\neg p$	negaatio	ei p
$p \wedge q$	konjunktio	p ja q
$p \vee q$	disjunktio	p tai q
$p \Rightarrow q$	implikaatio	jos p, niin q
$p \Leftrightarrow q$	ekvivalenssi	p jos ja vain jos q

Huomautus A.4 Negaatiolla voidaan kuvata yhden lauseen vastakohtaa, mutta kaikki muut konnektiivit kuvaavat kahden tai useamman lauseen välisiä yhteyksiä.

Atomilause tarkoittaa formaalissa kielessä yksinkertaista väitelausetta, joka ei sisällä konnektiiveja eli sen mikään osa ei voi toimia itsenäisenä lauseena. Atomilauseita merkitään kirjaimilla, kuten p, q, A ja B. Atomilauseista voidaan muodostaa konnektiivien avulla *yhdistettyjä lauseita* (vrt. suomenkieliopissa käsitteeseen *virke*). Formaalin kielen lauseita voidaan kääntää luonnolliselle kielelle ja toisinpäin.

Esimerkki A.5 Olkoon A: "On kesä" ja B: "Olen lomalla".

Suomennetaan konnektiivein ilmaistu lause:

$A \wedge B$ = "On kesä ja olen lomalla"

Formalisoidaan suomenkielinen lause:

"On kesä tai en ole lomalla"= $A \vee \neg B$

Formaalissa kielessä lauseille on määritelty *totuusarvo*. Totuusarvo on aina joko *tosi* tai *epätosi*. [1]

Määritelmä A.6 Lausetta, jolle voidaan liittää yksikäsitteinen totuusarvo kutsutaan *suljetuksi lauseeksi*.

Määritelmä A.7 Totuusarvo

Mikäli suljettu lause p on tosi, on sen totuusarvo 1.
Mikäli suljettu lause p on epätosi, on sen totuusarvo 0.

Pohdinta A.8 Perustele, voiko seuraaville lauseille määrätä totuusarvoa? Jos voi, niin määritä totuusarvo.

(a) Luku 4 on jaollinen luvulla 2.

(b) Luku 6 on jaollinen kokonaisluvulla n.

(c) Lasse pelaa lentopalloa.

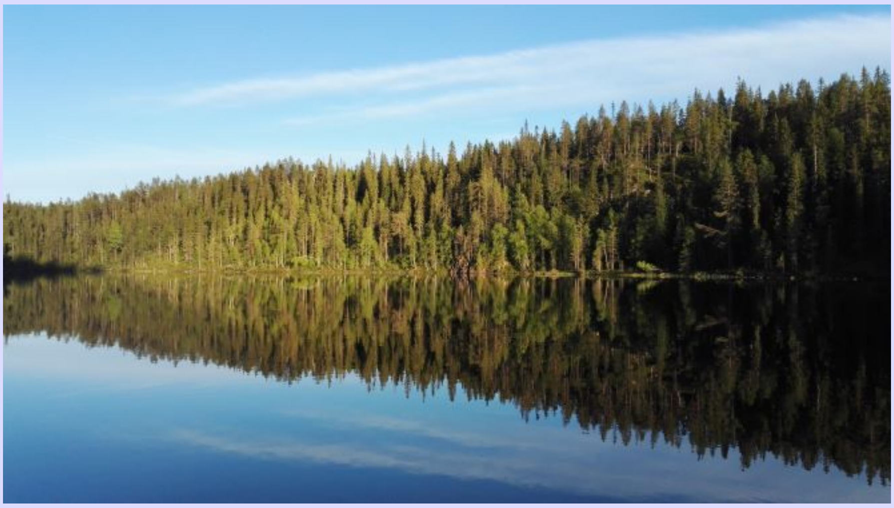
(d) Lähdetäänkö rannalle?

[1] *Sumea logiikka* on perinteisen matemaattisen logiikan laajennus, jossa lauseiden totuusarvo voi olla mitä tahansa suljetulla välillä nollasta ykköseen. Esimerkiksi tekoälyn tutkimuksessa hyödynnetään sumeaa logiikkaa. Tämän kurssin puitteissa sumeaa logiikkaa ei kuitenkaan tarkastella.

Pohdinta A.9 (a) Olkoon lauseet A : "Aurinko paistaa" ja B : "Tuulee".

Muodosta atomilauseista A ja B konnektiivien avulla ainakin neljä erilaista yhdistettyä lausetta, ja suomenna ne.

(b) Tarkastele (a)-kohdassa muodostamiasi yhdistettyjä lauseita. Päättele, mikä on niiden totuusarvo alla olevan kuvan tilanteessa.



Seuraavissa kappaleissa tutkitaan yksityiskohtaisemmin konnektiiveja ja niiden totuusarvoja.

A.2.1 Negaatio $\neg p$

Pohdinta A.10 Oppilaat yrittävät muodostaa negaatiota lauseelle A :"Ulkona on kylmä". He päätyvät kolmeen erilaiseen vaihtoehtoon.

1. $\neg A$: "Ulkona ei ole kylmä"
2. $\neg A$: "Ulkona on lämmin"
3. $\neg A$: "Ei ole niin, että ulkona on kylmä"

Arvioi oppilaiden keksimiä vaihtoehtoja, ovatko kaikki oikein?

Negaatiolle, ja muille konnektiiveille voidaan määrittää *totuusarvotaulukko* eli *totuustaulu*, jossa näkyy konnektiivien totuusarvot tietyillä atomilauseen arvoilla. Konnektiivien totuustaulut ovat konnektiivien määritelmiä.

Pohdinta A.11 Olkoon lause p : "Laura on koulussa."
Lauseen negaatio $\neg p$ on siten "Laura ei ole koulussa."

Alla on negaation totuustaulu.

p	$\neg p$
1	0
0	1

(a) Miten voit selittää totuustaulun Laura-esimerkin avulla?

(b) Miksi totuustaulussa p ja $\neg p$ molemmat eivät saa arvoa 0 yhtäaikaa?

(c) Mitä tapahtuu, jos lause ei saa arvoa 0 eikä 1?

Totuustauluja luetaan aina vaakariveittäin ja vaakarivien lukumäärä kertoo mahdollisten vaihtoehtojen lukumäärän. Yhdeltä vaakariviltä voidaan lukea aina lähtötilanne (*premissi*), ja siitä seuraava johtopäätös. Totuustaulun ylärivillä on tutkittavat lauseet. Negaation tapauksessa todesta lauseesta p seuraa, että sen negaatio $\neg p$ on epätotta ja mikäli lause p on epätosi, on sen negaatio $\neg p$ totta.

Pohdinnassa havaittiin kaksi logiikan peruspilaria:

Kielletyn ristiriidan laki: *Mikään lause ei voi olla yhtä aikaa sekä totta, että epätotta.*

Kielletyn kolmannen laki: *Lause on aina joko epätosi tai tosi.*

A.2.2 Konjunktio $p \wedge q$

Pohdinta A.12 "Konjunktio $p \wedge q$ on totta silloin, kun sekä p että q ovat totta."

Täydennä tämän perusteella konjunktion totuustaulu .

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

(a) Miksi konjunktion totuustaulussa on enemmän rivejä kuin negaation totuustaulussa?

(b) Miksi rivejä on juuri 4 kappaletta?

(c) Millaista tilannetta kuvaa totuustaulun kolmas rivi?

A.2.3 Disjunktio $p \vee q$

Määritelmä A.13 Disjunktion totuustaulu

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

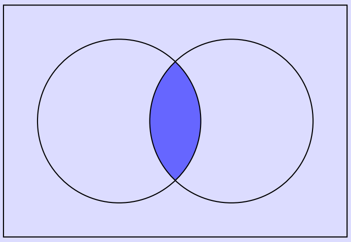
Seuraavassa pohdinnassa tutkitaan konnektiiveja totuustaulujen ja Venn-diagrammien avulla.Venn-diagrammit kehitteli matemaatikko ja filosofi John Venn vuonna 1881. Venn-diagrammella kuvataan loogisia tai matemaattisia suhteita joukkojen välillä. Venn-diagrammeja voidaan käyttää logiikan lisäksi mm. joukko-opissa, tilastotieteessä, todennäköisyyslaskennassa, kielitieteessä ja tietojenkäsittelytieteessä.

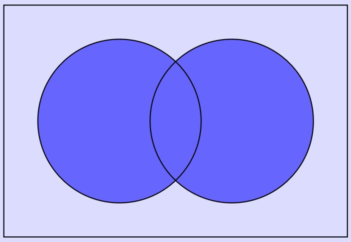
Pohdinta A.14 Tutki disjunktion totuustaulua ja vastaa kysymyksiin.

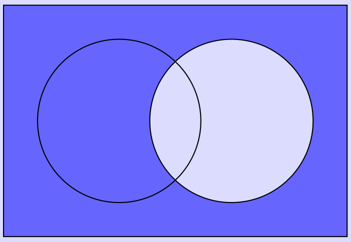
(a) Miten disjunktion totuustaulu eroaa konjunktion totuustaulusta?

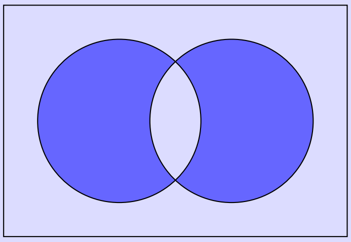
(b) Vastaako disjunktio $\vee$ arkikielen sanaa "tai"?

(c) Mikä seuraavista Venn-diagrammeista kuvaa disjunktiota?

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

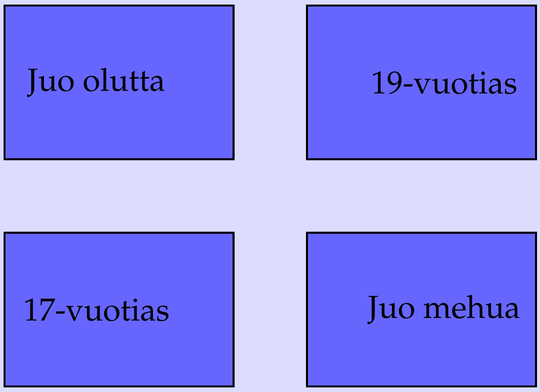
Voit tutkia tarkemmin konnektiivien muodostamia Venn-diagrammeja alla olevan GeoGebra-ohjelman avulla.
https://www.geogebra.org/m/wagbsg99

(d) Joona puhuu aina totta ja hänen väitteensä ovat loogisesti päteviä. Hän kertoo menevänsä aamulla uimaan tai illalla kalastamaan. Mitkä ovat mahdolliset lopputulemat hänen päivälleen?

A.2.4 Implikaatio $p \Rightarrow q$

Pohdinta A.15 Tutki alla olevia loogisia pulmia.

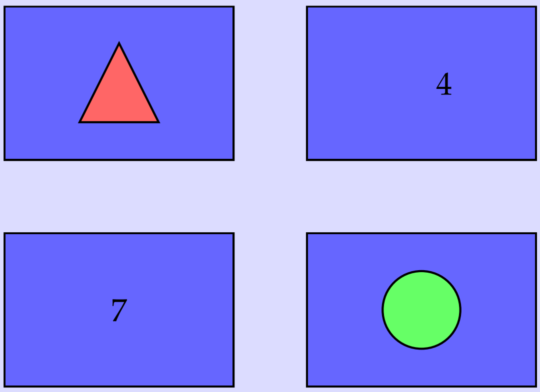
(a) Poliisi saapuu lukiolaisten juhliin. Poliisi löytää paikalta neljä nuorta, joista on saatavilla seuraavat tiedot:



Mikäli henkilö juo alkoholijuomaa, hänen on oltava vähintään 18-vuotias. Keistä poliisin tulee saada lisätietoa tarkistaakseen, ettei juhlissa rikota lakia?

Perustele vastauksesi.

(b) *Jos kortin toisella puolella on kolmio, niin sen toisella puolella on pariton luku.*



Mitä kortteja sinun tulee kääntää varmistaaksesi onko väite totta?

Perustele vastauksesi.

Pohdinta A.16 Pohdinnassa $A.15$ käsiteltiin implikaatiota. Käytetään pohdinnasta $A.15$ (a) saatuja tietoja implikaation totuustaulun täydentämiseen vaihe vaiheelta.

Mikäli juhlissa noudatetaan lakia, implikaatio saa totuusarvon 1, mikäli lakia rikotaan implikaation totuusarvo on 0.

1. Mitkä ovat pohdinnassa lauseet p ja q?
2. Milloin p on 1 ja milloin 0? Entä q?
3. Missä tilanteessa lakia rikotaan?
4. Missä tilanteissa lakia noudatetaan?

p	q	$p \Rightarrow q$

Tutki muodostamaasi totuustaulua. Mitä tarkoitetaan sanonnalla "Epätodesta voi seurata mitä tahansa"?

Selitä pohdinnan $A.15$ (b) ratkaisu totuustaulun avulla.

A.2.5 Ekvivalenssi $p \Leftrightarrow q$

Määritelmä A.17 Ekvivalenssin totuustaulu

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pohdinta A.18 Pohditaan ekvivalenssia.

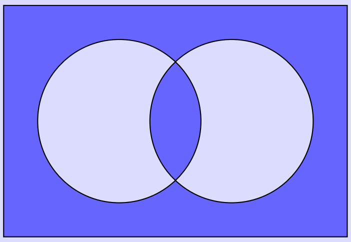
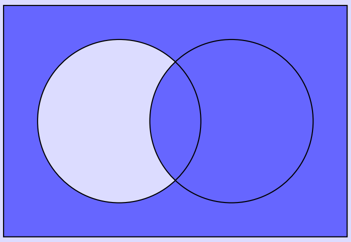
(a) Tutki ekvivalenssin totuustaulua ja esitä sanallisesti, mitä ekvivalenssi tarkoittaa.

(b) Mitä eroa on lauseilla "Jos ulkona sataa, niin Fatima menee ulos" ja "Fatima menee ulos jos ja vain jos ulkona sataa"?

Kumpi lauseista on arkielämän kannalta mielekkäämpi?

(c) "Jos A niin B, ja jos B niin A."
Perustele, tarkoittaako ylläoleva lause samaa kuin A:n ja B:n ekvivalenssi.

(d) Myös ekvivalenssi ja implikaatio voidaan kuvata Venn-diagrammien avulla. Päättele, kumpi alla olevista diagrammeista kuvaa ekvivalenssia ja kumpi implikaatiota. Perustele vastauksesi.

(a)  (b) 

A.3 Totuusarvot ja konnektiivit ohjelmoinnissa

Loogiset operaatiot ovat jokapäiväisiä työkaluja tietotekniikan ja koodauksen kanssa toimiville henkilöille. Totuusarvojen avulla saatavaa informaatiota hyödynnetään esimerkiksi ohjelmoinnissa ja elektroniikassa. Yksinkertaisimmillaan voidaan vertailla, onko eri muuttujiin tallennetut arvot samoja ja tuottaako luotu koodi halutun lopputuloksen. Konnektiivien avulla puolestaan voidaan määritellä ohjelmalle erilaisia ehtoja, joiden mukaan se toimii. Alla olevissa pohdintetehtävissä on esitelty yksinkertaisia esimerkkejä konnektiivien ja totuusarvojen käyttämisestä MatLab-ohjelmistossa.

Huom! Ohjelmointikielissä "=" tarkoittaa sijoitusoperaatiota ja merkintä "==" vertailuoperaatiota.

Pohdinta A.19 Alla on kuvia MatLab-ohjelmistolla suoritetuista operaatioista. Tutki kuvia ja vastaa niiden pohjalta kysymyksiin.

```
y=1; %Tallennetaan muuttujaan y kokonaisluku 1
x=2; %tallennetaan muuttujaan x kokonaisluku 2
y==x %Verrataan muuttujia x ja y keskenään

ans =

  logical

   0
```

Mitä takoittaa, kun ohjelma antaa vastaukseksi "logical 0"?

```
f(x)= 2*x+3;
g(y)= 3*y^2+4;
f(2)==g(1)

ans =

  logical

   1
```

Mitä näillä kolmella rivillä tehtiin, ja miten tulkitset vastauksen "logical 1"?

Seuraavissa kohdissa annetaan ohjelmalle ehtoja, jonka mukaan toimia eli käytetään niin kutsuttua if-else-rakennetta. Rakenteessa "if" -sanaa seuraa ehto. Jos ehto pätee, ohjelma suorittaa ehdon jälkeen määritellyn toiminnon. Mikäli ehto ei päde, ohjelma siirtyy kohtaan "else" ja suorittaa sen alla määritellyn toiminnon. Tutki koodia.

```
if and(a>0 ,a<b)
    fprintf("a+b")
else
    fprintf("a-b")
end
```

fprintf-komento tulostaa näytölle suluissa määritellyn lauseen. Mitä ohjelma tulostaa, kun

1. $a = 1$ ja $b = -3$
2. $a = 1$ ja $b = 2$?

Muokataan ohjelmaa hieman.

```
if or(a>0 ,a<b)
    fprintf("a+b")
else
    fprintf("a-b")
end
```

Mitä ohjelma tulostaa nyt kun

1. $a = 1$ ja $b = -3$
2. $a = 1$ ja $b = 2$?

Harjoitukset

1. Olkoon
A: "Tiina pelaa jalkapalloa."
B: "Mikko pelaa jääkiekkoa."
C: "Anssi lukee kirjoja."

Suomenna seuraavat formaalit lauseet

(a) $A \wedge B$

(b) $B \vee (A \wedge C)$

(c) $\neg B \Rightarrow (\neg C \vee A)$

Formalisoi seuraavat suomenkieliset virkkeet.

(d) "Jos ja vain jos Mikko ei pelaa jääkiekkoa ja Tiina ei pelaa jalkapalloa, Anssi lukee kirjoja."

(e) "Jos ja vain jos Mikko pelaa jääkiekkoa, Tiina pelaa jalkapalloa tai Anssi ei lue kirjoja."

2. Olkoon lauseet:
A: "n on pariton kokonaisluku."
B: "n on jaollinen luvulla 3."

Tutki alla olevia yhdistettyjä lauseita. Mikä on lauseiden totuusarvo, kun $n = 31$?

(a) $A \vee B$

(b) $\neg A \vee B$

(c) $\neg(A \vee B)$

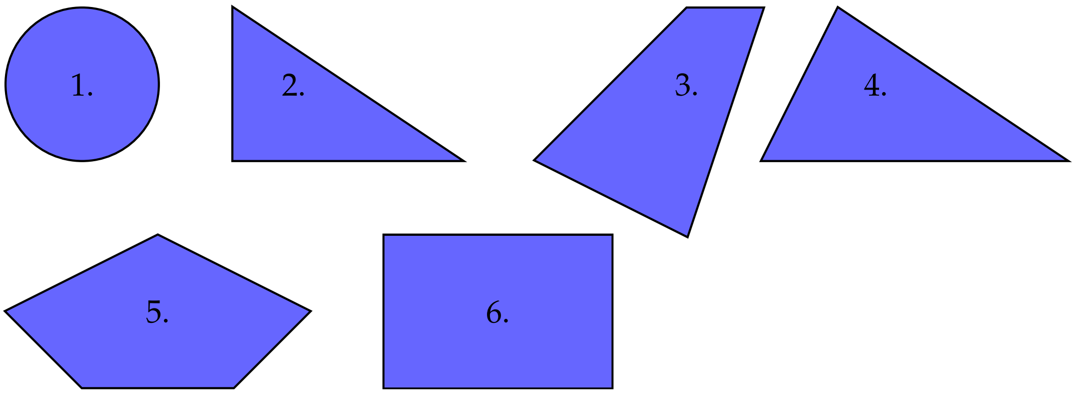
Onko mahdollista löytää sellainen kokonaisluku n, jolle kaikki yhdistetyt lauseet (a), (b) ja (c) ovat yhtäaikaa tosia?

3. Olkoon lauseet:
A: "Tasokuvion kulmien summa on enemmän kuin 180°."
B: "Tasokuviossa on ainakin yksi suora kulma."

Millä alla olevita tasokuvioista yhdistetty lause saa totuusarvon 1?

(a) $A \vee B$

(b) $A \wedge B$?



Voiko lauseista A ja B muodostaa sellaisen lauseen, että se on tosi kaikilla tasokuvioilla $1 - 6$?

4. Internetin hakukoneet, kuten Google, hyödyntävät myös loogisia konnektiiveja. Oppilaat ovat tehneet kolme erilaista hakua. Yhdistä haku ja sitä vastaavat hakutulokset.

1. Mopo AND katsastus
2. Katsastus OR mopo
3. (Mopo OR vene) AND katsastus

(a) "Tuo veneesi meille jo tänään katsastettavaksi!"

(b) "Keskustele! Minne mopo katsastukseen?

(c) "Katsastuskeskus palvelee teitä joka arkipäivä klo $8 - 16$"

5. Ella kertoo syövänsä jäätelöä, jos aurinko paistaa. Ellan pikkusisko huomaa, että ulkona on pilvistä ja päättelee, ettei Ella syö jäätelöä.
Perustele, menikö päättely oikein.

6. Olkoon
A: "Anna on taitava koodaamaan."
B: "Anna osaa hyvin formaalia logiikkaa."

$B \Rightarrow A$.

Esitä sanallisesti kaikki ne tilanteet, joissa implikaatio $B \Rightarrow A$ on totta.

A.4 Totuustaulut

Edellisessä kappaleessa käsiteltiin eri konnektiivien totuustauluja. Totuustauluilla voidaan kuitenkin hallita myös monimutkaisten yhdistettyjen lauseiden kokonaisuuksia järjestelmällisellä tavalla. Tässä kappaleessa perehdytään siihen.

Pohdinta A.20 Aiemmin todettiin, että ekvivalenssi on lyhennys lauseesta "Jos A niin B ja jos B niin A." Perustellaan väittämä totuustaulujen avulla.

(a) Formalisoi yhdistetty lause. Millaisista osista se koostuu?

(b) Täydennä totuustaulun otsikkoriville tarkasteltavat osat niin, että viimeiseen sarakkeeseen tulee lopullinen tulos, jonka totuusarvot halutaan selvittää.

A	B	$A \Rightarrow B$		
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

(c) Jokaisessa sarakkeessa on nyt operaatio, joka voidaan suorittaa yhden konnektiivin avulla. Täydennä sarakkeisiin niiden totuusarvot.

(d) Tulkitse viimeinen sarake. Vertaa sitä aiemmin käsiteltyyn ekvivalenssin totuustauluun, mitä voit päätellä?

Monimutkaisista lauseista voidaan siis muodostaa totuustauluja siten, että puretaan formalisoitu lause niin pieniin palasiin kuin mahdollista. Sitten tarkastellaan jokaisen palasen totuusarvot erikseen ja vedetään niiden avulla johtopäätös koko lauseen totuusarvoista. Vaakariveittäin voidaan määritellä tilanteet, jolloin johtopäätös on totta tai epätotta.

Esimerkki A.21 Muodostetaan totuustaulu lauseelle $A \Leftrightarrow (A \vee B)$

1. Taulukoidaan ensin lauseiden A ja B totuusarvojen kombinaatiot.
2. Määritetään lauseen $A \vee B$ totuusarvot.
3. Määritetään tutkittavan lauseen $A \Leftrightarrow (A \vee B)$ totuusarvot.

A	B	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

Lause $A \Leftrightarrow (A \vee B)$ on siis totta silloin kun lause A on totta ja silloin kun sekä lauseet A että B ovat epätosia.

Pohdinta A.22 Milla kertoo menevänsä kesällä mummolaan ja käy uimassa tai käy kalastamassa. Puhekielessä ei käytetä sulkeita, joten Millan suunnitelmat voidaan tulkita usealla eri tavalla.

(a) Formalisoi erilaiset tavat tulkita Millan suunnitelmat.

(b) Tee eri tulkinnoista totuustaulut. Mitä tapahtuu totuustaulun rivien määrälle, kun premissien määrä onkin kahden sijasta kolme?

(c) Vertaile saamiasi totuustauluja, onko niissä jotain eroa? Mitä totuustaulut kertovat Millan suunnitelmista?

Formalisoiduissa lauseissa sulut toimivat samojen sääntöjen mukaan kuin muuallakin matematiikassa, eli niiden avulla voidaan muokata konnektiivien suoritusjärjestystä. Myös samoin kuin plus- ja kertolaskuilla, on konnektiiveillakin tietty suoritusjärjestys.

Määritelmä A.23 Loogisten konnektiivien suoritusjärjestys:

1. negaatiot $\neg$
2. konjunktiot $\wedge$ ja disjunktiot $\vee$
3. implikaatiot $\Rightarrow$
4. ekvivalenssit $\Leftrightarrow$

Esimerkki A.24 Alla olevissa yhdistetyissä lauseissa suluilla on muokattu konnektiivien suoritusjärjestystä.

1. $A \Rightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.
2. $A \Rightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A) \vee B$.
   Verrataan yhdistettyjen lauseiden totuustauluja.

1.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow \neg B$	$A \Rightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Leftrightarrow \neg A$	$(\neg B \Leftrightarrow \neg A) \vee B$	$A \Rightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A) \vee B$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Totuustauluista huomataan, että yhditsetty lause 1 on totta ainoastaan silloin, kun lause A on epätosi, mutta yhdistetty lause 2 on totta myös silloin kun sekä A että B ovat totta.

A.4.1 Loogisia arvoituksia totuustaulujen avulla

Monia arvoituksia voidaan ratkaista totuustaulujen avulla. Useat loogiset pulmat sijoittuvat niin sanotulle "valehtelijoiden ja totuudenpuhujien saarelle"(usein myös "kelmien ja ritarien saari"). Saaren asukkaista valehtelijat valehtelevat aina ja totuudenpuhujat puhuvat aina totta. Saarelle saapuvan vieraan tulee annettujen vihjeiden perusteella päätellä, ketkä ovat valehtelijoita, ja ketkä puhuvat totta. Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa ongelmaa saarelta.

Pohdinta A.25 Ollaan totuudenpuhujien ja valehtelijoiden saarella.

(a) Paula kertoo, että jos 34 on pariton luku niin, hän puhuu totta.
Puhuuko Paula totta vai valetta?

(b) Kalle sanoo: "Jos minä puhun totta, niin luku 34 on pariton. Väitän, että Paula valehtelee."

Muuttaako Kallen kertoma tilannetta, kumpi valehtelee ja kumpi puhuu totta?

Mallitehtävä A.26 Edellisessä pohdinnassa voitiin nojata siihen, että tiedetään varmasti, onko luku 34 pariton luku. Kaikissa pulmissa näin ei kuitenkaan ole. Ratkaistaan seuraavaksi tällainen esimerkki totuustaulujen avulla.

Alvar, Bert ja Calvin ovat saaren asukkaita. Alvar sanoo: "Olemme kaikki valehtelijoita", mutta Bert väittää, että "Vain yksi meistä puhuu totta". Päättele ovatko Alvar, Bert ja Calvin valehtelijoita vai totuudenpuhujia.

Olkoon lauseet
A: "Alvar puhuu totta.",
B: "Bert puhuu totta."ja
C: "Calvin puhuu totta."

Alvar väittää:"Olemme kaikki valehtelijoita", joka voidaan ilmaista lauseiden A, B, C avulla:

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C.$

Bert puolestaan väittää: "Vain yksi meistä puhuu totta".
On siis kolme vaihtoehtoa: joko Alvar puhuu totta ja muut valehtelevat, Bert puhuu totta ja muut valehtelevat tai Calvin puhuu totta ja muut valehtelevat. Ilmaistaan tämä ehto lauseiden A, B, C avulla:

$$\underbrace{(A \wedge \neg B \wedge \neg C)}_{X} \vee \underbrace{(\neg A \wedge B \wedge \neg C)}_{Y} \vee \underbrace{(\neg A \wedge \neg B \wedge C)}_{Z}.$$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	X	Y	Z	$X \vee Y \vee Z$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Kun analysoidaan totuustaulua, muistetaan että **valehtelija valehtelee aina ja totuudenpuhuja puhuu aina totta.**

Oletetaan, että Alvar puhuu totta. Hän väittää, että kaikki ovat valehtelijoita, jolloin hän olisi itsekin valehtelija. Alvar ei siis voi puhua totta.

Pystytään kiinnittämään tieto, että Alvarin on pakko olla valehtelija. Hänen väittämänsä ei ole totta eli kaikki eivät ole valehtelijoita, mutta Alvar on. Vaihtoehdoiksi jää siten ainoastaan rivit $5, 6, 7$.

Tarkastellaan nyt rivejä $5, 6, 7$. Jos Bert valehtelee, rivit 5 ja 6 eivät voi pitää paikkaansa. Jää jäljelle rivi 7, joka ei voi myöskään pitää paikaansa, sillä rivillä 7 lause $X \vee Y \vee Z$ on tosi, mutta valehtelijan lauseesta on seurattava epätosi lopputulos.
Bertin on siis pakko puhua totta. Vaihtoehtoja ovat enää rivit $5, 6$.Bert puhuu totta, joten lauseeseen $X \vee Y \vee Z$ on oltava tosi.

Rivi 6 on siis ainoa mahdollinen.

Oikea vastaus katsotaan siis riviltä 6: Alvar on valehtelija, Bert puhuu totta ja Calvin on valehtelija.

Lisätieto A.27 Totuustauluja voidaan luoda myös erilaisilla tietokoneohjelmilla. Tutustu WolframAlpha nimiseen sivustoon, ja luo sen avulla Pohdinnan A.23 totuustaulut.

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/logic-and-set-theory/boolean-algebra/

Harjoitukset

7. Ihmisellä pisamia aiheuttaa dominoiva geeni ja pisamattomuutta resessiivinen geeni. Jokaisella ihmisellä on geenipari, joka määrää pisamoiden olemassaolon. Toinen geeni on peräisin äidiltä ja toinen isältä. Dominoivan geenin ominaisuus tulee näkyviin aina, jos toiselta vanhemmalta on peritty dominoiva geeni.
Merkitään dominoivaa geeniä P ja resessiivista geeniä p

(a) Voiko lapsi, jonka isällä on geenipari PP ja äidillä geenipari Pp, olla pisamaton?

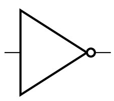
(b) Näytä totuustaulun avulla, millä todennäköisyydellä lapsella on pisamia, jos sekä hänen äidillään, että isällään on geenipari Pp.

(c) Mitä konnektiivia dominoiva ominaisuus vastaa käyttäytymiseltään?

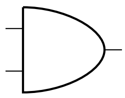
8. Olet jälleen valehtelijoiden ja totuudenpuhujien saarella ja pääset pois ainoastaan ratkaisemalla ketkä kolmesta satamamestarista ovat valehtelijoita.

Aida: "Minä puhun totta ja Bahir on valehtelija"
Bahir: "Aida on valehtelija"
Carita: "Aida on valehtelija tai Bahir on valehtelija"

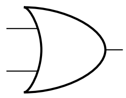
9. Digitaalisia piirejä käytetään elektroniikassa ja tietokonetekniikassa. Ne toimivat loogisten sääntöjen perusteella. Digitaaliset piirit koostuvat loogisista porteista, jotka vastaavat tiettyjä konnektiiveja.



NOT-portti, $\neg$

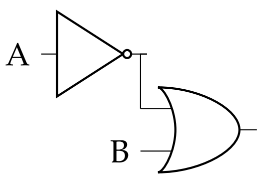


AND-portti, $\wedge$



OR-portti, $\vee$

(a) Formalisoi alla olevan digitaalisen piirin lause ja tutki totuustaulun avulla, millä ehdoilla piirissä kulkee virtaa (eli milloin viimeisen portin ulostulo on 1).



(b) Piirrä digitaalinen piiri lauseelle $(A \vee B) \wedge \neg C$. Näytä totuustaulun avulla, milloin piirissä kulkee virtaa.

10. Täydennä alla olevaan totuustauluun sellaiset atomilauseista A ja B koostuvat lauseet niin, että totuustaulu pitää paikkaansa.

A	B			
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

A.5 Looginen ekvivalenssi ja tautologia

Aiemmin todistettiin totuustaulujen avulla, että merkintä $A \Leftrightarrow B$ on lyhenneys lauseesta $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Tarkastelua varten muodostettiin totuustaulu:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Tätä totuustaulua verrattiin ekvivalensiin totuustauluun:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Totuustauluja vertailemalla huomattiin, että samoista lähtökohdista seuraa aina sama lopputulos, joten lauseet tarkoittavat samaa.

Määritelmä A.28 Lauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit* eli *loogisesti yhtäpitävät*, mikäli ne saavat aina samat totuusarvot.

Pohdinta A.29 Loogisesti ekvivalentit lauseet.

(a) Muodosta atomilauseista p,q kaksi sellaista yhdistettyä lausetta, jotka ovat keskenään loogisesti ekvivalentit.

(b) Muodosta keksimistäsi loogisesti ekvivalenteista lauseista sellainen totuustaulu, joka on muotoa "Lause 1 $\Leftrightarrow$ Lause 2". Tulkitse totuustaulu.

(c) Olkoon p : "Jalkapallo on maailman suosituin joukkuelaji" ja
q: "Suomen jalkapallomaajoukkue on nimeltään Huuhkajat."
Suomenna seuraava yhdistetty lause.

$$p \wedge (q \wedge \neg p)$$

Onko lause järkevä? Tutki sen totuusarvoja totuustaulukon avulla.

(d) Tutki totuustaulujen avulla, ovatko seuraavat ilmaisut loogisesti ekvivalentit

- $A \Rightarrow \neg B$ ja $\neg B \Rightarrow A$

- $A \Rightarrow B$ ja $\neg B \Rightarrow \neg A$

Määritelmä A.30 Lause, joka on aina tosi on *tautologia*.
Lause, joka on aina epätosi on *kontradiktio* (ristiriita).

Pohdinta A.31 Muotoile loogisen ekvivalenssin määritelmä niin, että käytät siinä käsitettä tautologia. Vinkkiä voit katsoa Pohdinnasta A.29

A.5.1 Päättelyn lakeja

Tautologian avulla saadaan määriteltyä sääntöjä, jotka ovat aina tosia. Tällaiset säännöt ovat loogisen päättelyn lakeja.

Pohdinta A.32 Loogiset päättelylait ovat muotoa Lause 1 $\Leftrightarrow$ Lause 2. Tutkitaan seuraavaksi muutamia päättelylakeja.

(a) Lauseen p negaatio $\neg p$ on "Helsinki ei ole Suomen pääkaupunki.".
Mikä on negaation $\neg p$ negaatio?
Täytä totuustaulu

p	$\neg p$	$\neg\neg p$

Päättele totuustaulun avulla, mitä tarkoittaa "kaksoiskiellon laki" ja kirjoita sen muotoilu konnektiivien avulla.

(b) "Jos ulkona on lämmin, niin William menee uimaan."
Pohdi seuraavia lauseita, mikä niistä on loogisesti ekvivalentti alkuperäisen lauseen kanssa.

(a) "Jos ulkona ei ole lämmin, niin William ei mene uimaan."

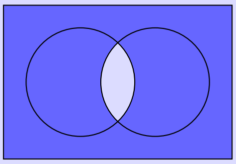
(b) "Jos William ei mene uimaan, niin ulkona ei ole lämmin."

(c) "Jos William menee uimaan, niin ulkona on lämmin"

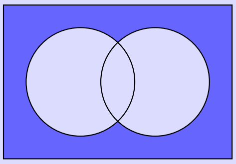
Formalisoi alkuperäinen lause, ja lause jonka uskot olevan ekvivalentti sen kanssa.
Tarkista totuustaulun avulla olitko oikeassa.

(c) Brittiläinen matemaatikko Augustus De Morgan löysi kaksi loogista päättelylakia, jotka on nimetty hänen mukaansa De Morganin laeiksi.

Alla on esitetty kyseiset lait Venn-diagrammien avulla. Yhdistä Venn-diagrammit oikeaan lakiin ja kirjoita lait sanallisesti.



$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$



$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Seuraavassa taulukossa on esitettynä merkittäviä tautologioita

Tautologioita

Kaksoiskiellon laki $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

De Morganin lait $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

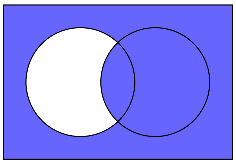
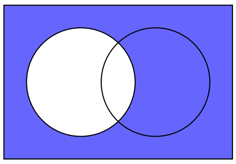
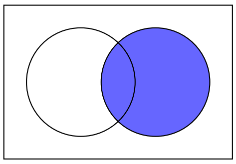
Kontraposition laki $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Vaihdantalaki $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Liitäntälaki $p \wedge (q \wedge r) \Leftarrow (p \wedge q) \wedge r$

Harjoitukset

11. Formalisoi Venn-diagrammien avulla esitetty lause.

 $\Leftrightarrow$  $\vee$ 

Tutki, onko lause tautologia.

12. Osittelulaki voidaan ilmaista konnektiivien avulla seuraavasti:

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

.

(a) Osittelulaki on tuttu polynomilaskennasta. Kirjoita osittelulaki tuttujen kerto- ja plusoperaatioiden avulla.

(b) Näytä, että osittelulaki on tautologia.

13. Osoita seuraavat lauseet tautologiaksi ilman totuustauluja.

(a) $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg A \Leftrightarrow \neg A$

(b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

(c) $\neg(-3 < x < 1) \Leftrightarrow \neg(x > -3 \wedge x < 1)$

14. Muodosta lauseista A ja B sellainen lause, joka on yhtäpitävä lauseen C kanssa.

A	B	C
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Lisätehtävä

15. Ohessa on kuuluisa arvoitus, jonka väitetään olevan Albert Einsteinin keksimä. Käytä vapaasti tähän mennessä oppimiasi loogisia päättelysääntöjä kun yrität ratkaista arvoitusta.

Samalla kadulla on viisi taloa, joista jokainen on eri värinen. Jokaisen talon omistaja on eri kansallisuutta.

Talojen omistajista, jokainen juo eri juomaa, polttaa eri merkkistä savuketta ja omistaa eri lemmikkieläimen.

Kenelläkään ei siis ole samaa lemmikkiä, kukaan ei juo samaa juomaa, polta samaa savukemerkkiä eikä ole samaa kansallisuutta kuin toinen.

Selvitä, *kuka omistaa kalan*.

Tiedetään, että:

Britti asuu punaisessa talossa.
Ruotsalaisella on koiria lemmikkeinä.
Tanskalainen juo teetä.
Vihreä talo on valkoisen talon vasemmalla puolella.
Vihreän talon omistaja juo kahvia.
Henkilö, joka polttaa Pall Mallia, kasvattaa lintuja.
Keltaisen talon omistaja polttaa Dunhillia.
Henkilö, joka asuu keskimmäisessä talossa, juo maitoa.
Norjalainen asuu ensimmäisessä talossa.
Henkilö, joka polttaa Blendiä, asuu kissan omistajan naapurissa.
Henkilö, jolla on hevonen asuu sen naapurissa joka polttaa Dunhillia.
Henkilö, joka polttaa Bluemastersia, juo olutta.
Saksalainen polttaa Princeä.
Norjalainen asuu sinisen talon naapurissa.
Henkilöllä, joka polttaa Blendiä, on naapuri joka juo vettä.

B Opettajan opas

B.1 Yleinen opas kirjaan

Tämä materiaali on tarkoitettu opetusmateriaaliksi pitkän matematiikan kurssille MAA-11: Lukuteoria ja todistaminen. Tässä osassa käsitellään logiikan alkeita. Materiaali soveltuu sekä 75 minuutin että 45 minuutin oppitunneille. Alla ehdotus tuntijaosta.

Formaali kieli - konnektiivit ja totuusarvot	1 x 75 min	tai 2 x 45 min
Totuustaulut	1 x 75 min	tai $1,5$ x 45 min
Looginen ekvivalenssi ja tautologia	1 x 75 min	tai $1,5$ x 45 min

Materiaali on suuniteltu niin, että pohdintatehtävät vievät teoriaa eteenpäin ja oppilaat pääsevät hyvin paljon itse tutkimaan ja miettimään logiikan mekanismeja. Materiaalissa on huomioitu ainerajat ylittävä oppiminen, mikä näkyy niin pohdinta- kuin harjoitustehtävissä. Pohdintatehtävät mahdollisavat taitaville oppilaille itsenäisen etenemisen, mutta erityisesti heikommat oppilaat tarvivat opettajan ohjausta siihen, ettei pohdinnoissa jäädä jumiin. Pohdintojen kautta etenemiseen menee perinteiseen luennointityyliin nähden enemmän aikaa, ja materiaali onkin suunniteltu niin, että suurin osa tunnista käytetään teorian opiskelemiseen. Jotta teorian opiskelu ei menisi liian raskaaksi, pohdinnoista on tehty monipuolisia ja niissä hyödynnetään paljon visuaalisia elementtejä. Harjoitustehtäviä on vain muutama jokaisessa kappaleessa ja ne on tarkoitettu pääosin kotitehtäviksi tai aivan tunnin loppuun. Kappaleessa "Formaali kieli - konnektiivit ja totuusarvot" harjoitustehtäviä on hieman enemmän kuin muissa kappaleissa, sillä konnektiivien monipuolinen ymmärtäminen on merkittävää jatkon kannalta.

B.2 Pohdintatehtävät

Tässä kappaleessa kerrotaan lyhyesti, mitä pohdintatehtävissä halutaan oppilaan huomaavan ja annetaan vinkkejä siihen, miten niitä voidaan käydä tunnilla läpi sekä millaisia johdattelevia kysymyksiä oppilaille voisi esittää.

Mitä on logiikka?

Pohdinta A.1

Tehtävän on tarkoitus herättää oppilaita pohtimaan loogista ajattelua mielenkiintoisen pulman avulla.
Runomuodossa olevat vihjeet tulee ensin järkeillä auki. Runo on ilmoitettu pohdinnassa sekä suomeksi, että alkuperäismuodossaan englanniksi. Tällä pyritään ehkäisemään väärinymmärryksiä vihjeiden tulkinnassa.
Suomennoksessa mainittu *"vasemmalta silti aina hipoo viinin laitaa"* antaa ymmärtää, että myrkyn täytyisi olla suoraan viinin vasemmalla puolella, mutta alkuperäisessä

tekstissa sanotaan *"You will always find some on nettle wine's left side"*, mikä tulee tulkita niin, ettei myskyn tarvi olla "kiinni" viinipullossa, kunhan se on viinipullon vasemmalla puolella.

1. Myrkkypullo on aina viinipullon vasemmalla puolella.
2. Pullot 1 ja 7 sisältävät eri juomaa, mutta kumpikaan niistä ei vie eteenpäin.
3. Pienin ja suurin pullo ei sisällä myrkkyä.
4. Pulloissa 2 ja 6 on samaa juomaa.

Ratkaisu:
Pullosta 3 pääsee eteenpäin
Pullosta 7 pääsee taaksepäin
Pulloissa 2 ja 6 on viiniä
Pulloissa 1, 4, 5 on myrkkyä

Formaali kieli- konnektiivit ja totuusarvot

Pohdinta A.8

Tosi ja epätosi ovat arkikielestä tuttuja. Tässä pohdinnassa on tarkoitus huomata, milloin lause on yksikäsitteisesti tosi tai epätosi. Erityisesti lauseisiin (b) ja (c)- on hyvä kiinnittää huomiota. Oppilaita voi herättää pohtimaan esittämällä kysymyksiä kuten; Milloin tämä lause on totta?

Ratkaisu:
Lause (a) on aina tosi (suljettu lause).
Lause (b) tarvitsee lisämäärittelyn siitä, mikä luku n on. Lause voi olla siis tilanteesta riippuen joko tosi tai epätosi (avoin lause).
Lause (c) on tosi tai epätosi (suljettu lause). Riippuu Lassesta. Huomaa kuitenkin ero lauseeseen (b)-nähden!
Lause d) kysymyslauseeseen ei voida liittää totuusarvoa.

Pohdinta A.9

Pohdinnassa yhdistyy luovuus ja totuusarvojen ankkuroiminen konkreettisiin tilanteisiin. Oppilaat muodostavat itse lauseita konnektiivien avulla ja tämä on hyvä välietappi, jossa tarkistaa ovatko kaikki pysyneet kärryillä. On mahdollista, että oppilailla menee tässä pohdinnassa disjunktio sekaisin arkikielen sanaan "tai", mutta se ei haittaa tässä vaiheessa kurssia.

Esimerkkejä muodostetuista lauseista ja niiden totuusarvoista:

"Aurinko paistaa ja tulee" = $A \wedge B$, totuusarvo 0, kuvassa ei tuule.
"Aurinko ei paista tai tuulee" = $\neg A \vee B$, totuusarvo 0, kumpikaan ei toteudu.
"Aurinko paistaa ja ei tuule" = $A \wedge \neg B$, totuusarvo 1, molemmat ehdot toteutuvat.
"Aurinko paistaa tai ei tuule" = $A \vee \neg B$, totuusarvo 1, molemmat ehdot toteutuvat.

Mikäli totuusarvon määrittäminen tuntuu oppilaille hankalalta, on syytä kerrata totuusarvon määritelmä uudelleen.

Pohdinta A.10

Luonnollisen kielen semantiikkaan liittyvät seikat ovat oleellinen osa formaalien lauseiden kääntämisessä ja muodostamisessa. Mikäli lämpötila määritellään kaksiarvoiseksi muuttujaksi, on kaikki oppilaiden keksimät vaihtoehdot oikein. Lämpötilaa ei kuitenkaan yleensä määritellä kaksiarvoisena ja oppilaiden kanssa onkin hyvä miettiä, mitä muuta lämpötila voi olla kuin kylmä ja kuuma ja mitä negaatio tässä tilanteessa sulkee pois. Oppilailta voi kysyä esimerkiksi, mitä heidän mielestään tarkoittaa leuto tai viileä ilma ja ovatko ne sama asia kuin kylmä tai kuuma.

Pohdinta A.11

Konkreettisen esimerkin avulla pyritään selittämään negaation totuustaulu niin, että se on helposti ymmärrettävä ja jää oppilaiden mieleen. Pohdinnassa yritetään myös saada oppilaat itse huomaamaan kielletyn ristiriidan laki. Tässä pohdinnassa konkreettinen esimerkki ensimmäistä kertaa liitetään matemaattiseen määritelmään. Lause p ja sen negaatio $\neg p$ eivät voi olla yhtäaikaa voimassa, sillä silloin Laura olisi yhtäaikaa sekä koulussa että olematta koulussa. On hyvä huomauttaa oppilaille, että negaatio tarkoittaa kaikkia niitä tilanteita kun Laura on jossain muualla kuin koulussa. Kielletyn kolmannen lain ajatusta voi herätellä pohdinnan viimeisen kohdan avulla. Jos lause ei saa kumpaakaan totuusarvoa, on tilanne mieletön. Tämän avulla oppilaat huomaavat luonnollisesti myös sen, että suljetulla lauseella on aina olemassa totuusarvo.

Pohdinta A.12

Pohdinnassa mennään oppilaiden arkitieto ja intuitio edellä. Konjunktio eli "ja" on helposti ymmärrettävä ja sen avulla totuustaulun luominen ja tulkitseminen on helpompaa. Tässä vaiheessa on vielä hyvä nostaa esiin 1 ja 0 merkitys totuustaulussa, jos opiskelijoilla on vaikeuksia tehtävän kanssa. Totuustaulun syvällinen ymmärtäminen voi olla oppilaille helpompaa, kun jatkuvasti teroitetaan totuusarvojen merkitystä. Muuten voi olla, että numerot vain pyörivät oppilaan papereissa mekityksettöminä. Lauseiden p ja q paikalle voi keksiä myös jotkin konkreettiset esimerkit, kuten negaation kohdalla.
Totuustaulun rakennetta tutkitaan vertalemalla negaatioon ja oppilaiden tulee huomata, että jokainen totuustaulun rivi kuvaa yhtä mahdollista p ja q lauseen kombinaatiota. Kombinaatioita on yhteensä neljä ja siksi myös totuustaulussa on neljä riviä. Totuustaulun kolmannella rivillä lause p on epätotta ja lause q on totta, lauseiden konjunktio

on silloin epätosi. Konjunkiton kohdalla on hyvä pitää mielessä ja huomauttaa, että konnektiivi vastaa täysin arkikielen sanaa "ja".

Totuustaulu:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Pohdinta A.14

Tässa vaiheessa oppilaiden on huomattava ero arkikielen sanaan "tai". Tutkiessaan disjunktion totuustaulua, oppilaat voivat kertoa esimerkiksi olevan käänteinen konjukntion totuustauluun verrattuna, mikä ei pidä paikkaansa. Jos oppilaat eivät itse huomaa tai nosta esille eroa sanaan "tai", on siitä hyvä puhua. Arkikielessä "tai" tarkoittaa tilannetta, jossa vain jompikumpi lauseista on totta ja lauseet ovat jollain tapaa toisensa poissulkevia. (Esimerkiksi "Ulkona on lämmin, tai ulkona sataa lunta"). Disjunktiossa lauseet eivät ole kuitenkaan poissulkevia ja myös tilanne, jossa molemmat lauseet ovat yhtäaikaa tosia, on mahdollinen. Venn-diagrammeista ii)-kuvaa disjunktiota. Voi olla, että opiskelijat eivät enää muista, miten Venn-diagrammit toimivat, joten tarvittaessa se on syytä kerrata. Venn-diagrammeja tutkitaan myös tulevissa tehtävissä, joten niiden perusperiaate tulee olla selvillä.

(i)-diagrammi $p \wedge q$
(ii)-diagrammi $p \wedge \neg q$
(v)-diagrammissa on ekslusiivinen eli poissulkeva disjunktio $\veebar$ (XOR), joka tarkoittaa samaa kuin arkikielen "tai".

Diagrammien (i), (ii), (iv) merkitystä ei ole välttämätön käydä heti läpi, vaan opiskelijat voivat ensin tutustua ensin GeoGebra-ohjelmaan, jossa he voivat itse testata, miten erilaisten konnektiivien yhditselmät vaikuttavat diagrammin. Tämän jälkeen voi palata selvittämään (i), (ii) ja (iv)- diagrammit. Diagrammeissa on näkyvissä konnektiivit $\vee$ ja $\veebar$, ja onkin hyvä vielä erikseen huomauttaa oppilaita, että he huomaavat eron.

Pohdinnan (d)-kohdassa disjunktion määritelmä tulee vielä kerran esille, tällä kertaa arkielämän esimerkissä ja mikäli edelliset kohdat ovat onnistuneet, (d) pitäisi olla melko yksinkertainen.

Joonan päivä voidaan kirjoittaa auki esimerkiksi seuraavalla tavalla:
"Joona ui aamulla ja kalasti illalla."
"Joona ei uinut aamulla, mutta kalasti illalla."
"Joona ui aamulla, mutta ei kalastanut illalla."

Pohdinta A.15

Poliisin tulee saada selville, mitä 17-vuotias juo ja mikä on olutta juovan ikä. 19-vuotias saa juoda vapaasti joko mehua tai alkoholia ja kaiken ikäset saavat juoda mehua, jolloin heihin ei ole syytä kiinnittää huomiota. Seuraavassa pohdinnassa täytyy kääntää kolmio ja numero 4. Ympyrän takana voi olla mikä luku tahansa, sitä ei rajoita mikään. Toisaalta ehto ei määrää, että jokaisen parittoman luvun takana täytyisi olla kolmio, jote myös numeron 7 takana voi olla mitä tahansa. Sen sijaan jos numeron 4 takana on myös kolmio, sääntö menee rikki.

Pohdinnan b)-kohta voi tuntua huomattavasti vaikeammalta, ja ongelmatilanteessa voi ohjata oppilaita hyödyntämään kohtaa (a), vertailemalla sääntöjä ja yhdistämällä niitä. Esimerkiksi "Juo olutta" = kolmio"ja "17-vuotias" = 4.

Pohdinta A.16

Yksi tapa totuustaulun täydentämiseen on tarkastella jokainen tilanne erikseen
p: Henkilö juo alkoholijuomaa.
q: Henkilö on täysi-ikäinen.

Vaihtoehtoisesti lauseet voidaan määrittää myös esimerkiksi:
p: Henkilö on ala-ikäinen.
q:Henkilö juo mehua.

Lakia rikotaan vain silloin jos henkilö ei ole täysi-ikäinen mutta juo alkoholia eli

$$p : 0,\ q : 1, p \Rightarrow q : 0.$$

Muissa tilanteissa lakia noudatetaan, ja niiden tilanteiden variaatioista saadaan loput kolme riviä totuustauluun.
Totuustauluun voi myös ensimmäisenä täyttää p ja q sarakkeet kokonaan ja sitä kautta miettiä saraketta $p \Rightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

"Epätodesta voi seurata mitä tahansa" viitataan siihe, että implikaatiossa epätodesta lähtöarvosta p voi seurata sekä tosi, että epätosi lopputulos.
Pohdinnan 15 (b) kohdan voi selitää totuustaulujen avulla merkitsemällä p =kolmio ja q =pariton luku. Implikaation totuustaulusta huomataan, että implikaatio on epätosi ainoastaan, jos kolmion takana on ei pariton luku. Totuustaulun kolmannesta rivistä nähdään, että vaikkei numeron 7 takana olisikaan kolmiota, implikaatio pätee silti ja samoin ympyrän takana (ei-kolmio) voi olla mikä tahansa luku ja implikaatio pysyy

edelleen totena.

Pohdinta A.18

Kysymyksessä (a) pyritään siihen , että opiskelijat pystyvät sanallistamaan, mitä ekvivalenssin totuustaulu tarkoittaa, sekä huomaamaan sen eron implikaation totuustauluun.
Esimerkiksi: "Ekvivalenssi on totta silloin kun lauseet p ja q ovat joko molemmat tosia tai molemmat epätosia."
Pohdintakysymyksessä (b) voi miettiä aiheuttaako Fatiman ulosmeneminen sen, että sataa. Tällä kysymyksellä on tarkoitus nähdä konkreettisesta tilanteessa implikaation ja ekvivalnessin ero.
Kysymyksessä (c) on tarkoitus pohtia tarkoittaako lause samaa kuin ekvivalenssi ja miettiä keinoja, miten sen voisi perustella. Kuitenkaan totuustaulua ei vielä opeteta käyttämään tämän kaltaisten ongelmien ratkaisemiseen. Kysymyksen voi jättää esimerkiksi kotiin pohdittavaksi, sillä seuraava kappale alkaa pohdinnasta, jossa ratkaistaan tämä ongelma totuustaulujen avulla.
Kohdassa (d) (a)-diagrammi kuvaa ekvivalenssia ja [b)-implikaatiota. Tämä voi tuntua joillekkin oppilaista haastavalta ja silloin voi palata tutkimaan aiempia Venn-diagrammeja. Totuustaulujen tulkitseminen on avainasemassa diagrammien hoksaamisessa.

Pohdinta A.19

Pohdinnassa A.19 käsitellään konnektiivien yhteyttä ohjelmoimiseen. Pohdinta voidaan käsitellä yhdessä luokan kanssa tai jättää oppilaiden oman harrastuneisuuden varaan. Vaikka pohdintaa ei käytäisi yhdessä läpi, on hyvä kuitenkin kannustaa oppilaita tutustumaan ohjelmointitehtäviin. Pohdinnan pystyy tekemään ilman aiempaa kokemusta ohjelmoinnista, mutta siinä tapauksessa oppilasta on hyvä ohjata merkintöjen kanssa. $'' = ''$ ja $'' == ''$ ovat ohjelmoinnissa hyvin yleisiä merkintöjä, mutta poikkeavat hieman siitä, miten oppilaat ovat yleensä tottuneet ne käsittämään.

Ensimmäisessä kuvassa ratkaisu "logical 0″ tarkoittaa, ettei muuttujiin x ja y sijoittetut luvut ole yhtäsuuret ts. $1 \neq 2$.
Toisessa kuvassa puolestaan tallennettiin ensin funktioksi $f(x)$ lauseke $2x + 3$ ja funktioksi $g(y)$ lauseke $3y^2 + 4$ ja sen jälkeen funktioiden arvoja verrattiin kun $x = 2$ ja $y = 1$. Vastauksena saatu "logical 1″ kertoo, että kyseisillä muuttujan arvoilla funktioiden arvot ovat samat. Oppilaat voivat tarkistaa tämän myös laskemalla.

Kolmannessa ja neljännessä kuvassa täytyy ymmärtää rakenteen "if-else-toimintaperiaate, ja se on hyvä käydä yhdessä. Konnektiivit $\wedge$ ja $\vee$ voidaan kirjoittaa MatLabin syntaksissa kuvaissa näkyvillä sulkumerkinnöillä. Kuvassa kolme oleva "if-else"rakenne voidaan siis suomentaa:

"Jos $a > 0$ ja $a < b$ niin tulosta näytölle "$a + b$", muutta tapauksessa printtaa "$a - b$"

Kuvassa kolme ohjelma tulostaa 1. kohdassa $a - b$ ja kohdassa 2. $a + b$.
Kuvan neljä koodi voidaan suomentaa:
"Jos $a > 0$ tai $a < b$ niin tulosta näytölle "$a + b$", muutta tapauksessa printtaa "$a - b$".

Kuvassa neljä tulostuu siis sekä kohdassa 1 että 2 "$a + b$". Kuvissa kolme ja neljä on siis kyse lopulta ainoastaan konnektiivien $\wedge$ ja $\vee$ tulkitsemisesta.

Totuustaulut

Pohdinta A.20

1. Formalisoitu lause $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

2. Tulee kiinnittää huomiota siihen, miten formalisoidun lauseen voi pilkkoa osiin. Kun sarakkeiden otsikoiksi on saatu yksinkertaiset lauseet, jotka voidaan toteuttaa aiemmassa kappaleessa opeteltujen konnektiivien avulla, yksittäisten sarakkeiden täyttämien pitäisi onnistua melko helposti. Jos tuntuu vaikealta, niin voi kaivaa esille implikaation ja konjunktion totuutaulu.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

   Lause on totta ainoastaan silloin jos A ja B saavat samat totuusarvot, mikä on sama kuin ekvivalenssin totuustaulussa. Ekvivalenssi ja tutkittu lause tarkoittavat siis samaa asiaa.

Pohdinta A.22

Tässä pohdinnassa opiskelijat saavat jälleen huomata, että luonnollinen kieli ei ole niin täsmällistä kuin formaali. Sulkujen vaikutus ja tietty laskujärjestys on tuttua muualta matematiikasta ja nyt sitä sovelletaan loogisiin operaatioihin.

Ensimmäisessä tilanteessa Milla menee mummolaan A. Sen lisäksi Milla käy uimassa tai kalastamassa $A \wedge (B \vee C)$. Toinen mahdollisuus on, että Milla menee mummolaan ja uimaan $A \wedge B$ tai Milla käy kalastamassa $(A \wedge B) \vee C$. Opiskelija saa itse päättää, millä kirjaimilla merkitsee eri atomilauseita.

Kolmen atomilauseen totuustaulussa on kahdeksan riviä, koska mahdollisten kombinaatioiden määrä tuplaantuu. Opiskelijoita kannattaa opastaa merkitsemään vaihtoehdot alla olevalla standarditavalla, sillä siten kaikki vaihtoehdot tulee helposti käytyä läpi. Kuitenkin myös muut tavat ovat sallittuja. Tässä kohtaa on hyvä ottaa esiin ja yrittää saada oppilaat huomaamaan, millä säännöllä totuustaulun rivien määrä lisääntyy atomilauseiden lisäntyessä ($2^n, n$ =atomilauseiden lukumäärä).

Totuustaulu:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0

Jälkimmäisessä kohdassa ei ole välttämätön laittaa sulkuja $A \wedge B$ ympärille, mutta se helpottaa hahmottamista, ja selkeyttää vastausta, joten näin mielellään tehdään. Jos molemmat tapaukset kirjataan samaan totuustauluun, on niiden arvoja helpompi verrata ja päästään vähemmällä vaivalla, mutta toisaalta se voi sekoittaa oppilaiden ajatuksia. Totuustauluista huomataan, että jos tulkitaan Millan suunnitelmia tavalla $(A \wedge B) \vee C$ on tosi mahdollisuuksia enemmän kuin tilanteessa $A \wedge (B \vee C)$.

Pohdinta A.25

Pohdinnassa A.25 on ensimmäinen kosketus valehtelijoiden ja totuudenpuhujien saareen. Saarta käsitellään vielä Mallitehtävässä A.26 ja Harjoitustehtävässä 8.

Paulan sanoma on implikaatio $p \Rightarrow q$ missä p: "34 on pariton" ja q: "Paula valehtelee". Luku 34 ei ole pariton ja implikaation totuustaulun nojalla siis implikaatio pätee sekä tosilla, että epätosilla q:n arvoilla. Tämän perusteella ei siis voida sanoa onko Paula valehtelija vai ei.

Kalle lisää "Jos minä puhun totta, niin luku 34 on pariton. Väitän, että Paula valehtelee."

Tutkitaan Kallenkin sanomisia implikaation totuustaululla. Tiedämme, että luku 34 ei ole pariton, joten voidaan tarkastella totuustaulusta rivejä joilla q:n ("luku 34 on pariton") arvo on epätosi. Implikaatio pätee ainoastaan jos Kalle valehtelee.

Kalle on valehtelija ja valehtelee aina ja siitä voidaan päätellä, että hän valehtelee myös Paulasta, joten Paula puhuu totta.

Looginen ekvivalenssi ja tautologia

Pohdinta A.29

Pohdinnan (a)- kohdassa opiskelijan tulee miettiä huolellisesti eri konnektiivien vaikutuksia lauseen totuusarvoihin. Esim.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Seuraavassa kohdassa keksityt esimerkkilauseet laitetaan samaan totuustauluun ja huomataan että saatu ekvivalenssilause on aina tosi.

$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
0	0	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

Kohdassa (c) haetaan kontradiktiota arkielämän esimerkin avulla. Suomennetaan ensin formalisoitu lause:

"Jalkapallo on maailman suosituin joukkuepeli ja Suomen jalkapallomaajoukkue on nimeltän Huuhkajat ja jalkapallo ei ole maailman suosituin joukkuelaji."

Oppilaat huomaavat luultavasti heti, ettei lauseessa ole mitään järkeä. Tehdään kuitenkin totuustaulu ja varmistetaan asia.

p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$p \wedge (q \wedge \neg p)$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0

Totuustaulusta nähdään, ettei yhdistetty lause ole ikinä totta.

(d) Totuustaulut:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg B \Rightarrow A$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0

Lauseet eivät ole siis loogisesti ekvivalentit.

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Lauseet ovat siis loogisesti ekvivalentit. Implikaation sekoittaminen ekvivalenssiin on hyvin yleistä varsinkin silloin kun mukaan tulee negaatioita. Oppilaiden kanssa on siis syytä keskustella kunnolla lauseiden merkityksestä.

Pohdinta A.31

Kaikki määritelmäää varten tarvittavat tiedot on esitetty aiemmissa pohdinnoissa ja määritelmissä. Määritelmän voi muotoilla esimerkiksi:

"Lauseet A ja B ovat loogisesti ekvivalenti, mikäli $A \Leftrightarrow B$ on tautologia."

Huom! Oppilaat voivat haluta kirjoittaa "mikäli A ja B ovat tautologioita", mikä on väärin. Lauseiden A ja B ei itsessään tarvitse olla tautologioita

Pohdinta A.32

Negaation negaatio eli $\neg\neg p$ olisi suomennettuna "Ei ole niin, että Helsinki ei ole Suomen pääkaupunki." Kaksoikiellon laki tarkoittaa, että kaksi negaatiota kumoavat toisensa (voi verrata tilanteeseen $-(-a) = a$). Konnektiivien avulla kaksoikiellon laki voidaan kirjoittaa $p \Leftrightarrow \neg\neg p$.

Olkoon kohdassa (b) lauseet p: "Ulkona on lämmin". ja q: "William menee uimaan"eli alkuperäinen lause on $p \Rightarrow q$.
Vaihtoehdot formalisoituna:
(a) $\neg p \Rightarrow \neg q$
(b) $\neg q \Rightarrow \neg p$
(c) $p \Rightarrow q$.
Mikäli oppilas formalisoi heti kaikki väitteet, voi nopeasti huomata aiempien pohdintojen nojalla, että ainoastaan väite (b) voi olla ekvivalentti alkuperäisen lauseen kanssa. Voi olla, että oppilas tekee kaikista väitteistä totuustaulun, mutta sellaisessa tapauksessa on hyvä muistuttaa aikaisemmin opituista säännöistä ja siitä, että usein pääsee helpommalla kun miettii asiaa ensin kunnolla.

Kohdassa (c) opetellaan jälleen loogisten sääntöjen sanallistamista ja visuaalista tulkintaa. Ylempi Venn-digrammi yhdistyy lakiin $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, ja alempi lakiin $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

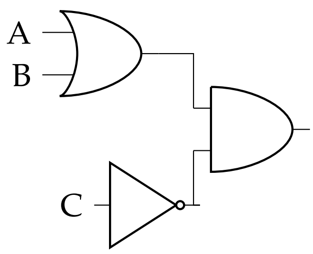
C Harjoitusten vastaukset

Formaali kieli- konnektiivit ja totuusarvot

1. (a) Tiina pelaa jalkapalloa ja Mikko pelaa jääkiekkoa.
   (b) Mikko pelaa jääkiekkoa tai Tiina pelaa jalkapalloa ja Anssi lukee kirjoja.
   (c) Jos Mikko ei pelaa jääkiekkoa, niin Anssi ei lue kirjoja tai Tiina pelaa jalkapalloa.
   (d) $\neg B \wedge \neg A \Leftrightarrow C$
   (e) $B \Leftrightarrow (A \vee \neg C)$
2. (a) 1
   (b) 0
   (c) 1
3. (a) $2, 3, 5, 6$
   (b) 6
4. 1-b, 2-c,3-a
5. Päättely on väärin, sillä Ellan väite ei kerro mitään siitä, mikä Ella aikoo tehdä pilvisellä säällä.
6. (a) Anna osaa hyvin formaalia logiikkaa ja Anna on taitava koodaamaan.
   (b) Anna ei osaa hyvin formaalia logiikkaa, mutta Anna on taitava koodaamaan.
   (c) Anna ei osaa hyvin formaalia logiikkaa, eikä Anna ole taitava koodaamaan.

Totuustaulut

7. (a) Ei.
   (b) 3/4
8. Aida valehtelee, Bahir ja Carita puhuvat totta.
9. (a) $\neg A \vee B$
   (b)



10.

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg(A \vee \neg B)$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

Looginen ekvivalenssi ja tautologia

11. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
12. (a) $a(b + c) = ab + ac$
    (b) Tee totuustaulu tilanteesta.
13. (a) Kaksoiskielto
    (b) Kontrapositio
    (c) De Morgan
14. Esim. $\neg(A \vee B)$
15. Saksalainen omistaa kalan.