Eräiden p-adisten L-arvojen irrationaalisuudesta

Pro gradu -tutkielma
Jonne Muhonen
2186980
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2019

Sisältö

Johdanto

Dirichlet'n L-sarjaan kokonaislukupisteissä $s > 1$ liittyy monia ratkaisemattomia kysymyksiä. On hyvin tiedossa, että jos Dirichlet'n karakteerilla $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on sama pariteetti kuin kokonaisluvulla s, niin $L(s,\chi)$ on luvun π^s algebrallinen monikerta, missä

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Tällöin $L(s,\chi)$ on siten transkendenttinen luku. Asia on monimutkaisempi kun karakteerilla χ on vastakkainen pariteetti kuin luvulla s. Ainoa irrationaalisuustulos on luvun $\zeta(3)$ irrationaalisuus, jonka R. Apéry todisti työssään [4].

Tutkielman päätuloksena todistamme p-adisten lukujen $\zeta_2(2), \zeta_2(3), \zeta_3(2), \zeta_3(3)$ ja $L_2(2,\chi_8)$ irrationaalisuudet. Irrationaalisuustulokset perustuvat seuraavien Laurentin sarjojen Padé-approksimaatioihin:

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1},$$
$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1},$$
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+2},$$

missä B_n on n:s Bernoullin luku ja $t_n = (2^{n+1} - 2)B_n$.

Luku 1

Aritmeettiset näkökohdat

Todistaaksemme, että p-adinen luku α on irrationaalinen, muodostamme approksimaation c_n/d_n, joka suppenee p-adisesti kohti lukua α tarpeeksi nopeasti, missä (c_n) ja (d_n) ovat kokonaislukujonoja. Seuraava lemma antaa juuri tällaiset ehdot.

Lemma 1.1. *Olkoot α p-adinen luku ja $(c_n), (d_n), n = 0, 1, 2, \ldots,$ kaksi kokonaislukujonoa, joille on voimassa*

$$\lim_{n\to\infty} \max(|c_n|, |d_n|)|c_n - \alpha d_n|_p = 0$$

ja $c_n - \alpha d_n \neq 0$ äärettömän monella n:n arvolla. Tällöin α on irrationaalinen.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että α on rationaalinen eli $\alpha = A/B$, missä $A, B \in \mathbb{Z}$ ja $B > 0$. Silloin

$$|c_n - \alpha d_n|_p = \left| c_n - \frac{A}{B} d_n \right|_p = \frac{|Bc_n - Ad_n|_p}{|B|_p}.$$

Olkoot $c_n - \alpha d_n \neq 0$ ja $Bc_n - Ad_n = \pm p^{a_n} t_n$, missä $p \nmid t_n \in \mathbb{Z}^+$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$p^{a_n} t_n = |Bc_n - Ad_n| \leq 2 \max(|A|, B) \max(|c_n|, |d_n|).$$

Täten

$$|c_n - \alpha d_n|_p \max(|c_n|, |d_n|) = \frac{p^{-a_n}}{|B|_p} \max(|c_n|, |d_n|)$$

$$\geq \frac{p^{-a_n}}{|B|_p} \cdot \frac{p^{a_n} t_n}{2\max(|A|, B)}$$
$$\geq \frac{1}{2|B|_p \max(|A|, B)},$$

joten raja-arvo, kun $n \to \infty$, ei voi olla nolla. Näin ollen α on irrationaalinen. $\square$

Lemma 1.2. *Jos $q > 0$ ja $0 \leq x \leq 1$, niin $q^x \leq (q-1)x + 1$.*

Todistus. Merkitään $f(x) = (q-1)x + 1 - q^x$. On siis osoitettava, että $f(x) \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$. Nyt

$$f'(x) = (q-1) - \log(q)q^x \quad \text{ja siten} \quad f''(x) = -\log^2(q)q^x.$$

Erityisesti $f''(x) < 0$, kun $0 \leq x \leq 1$. Täten $f(x)$ on konkaavi kyseisellä välillä. Koska edelleen $f(0) = f(1) = 0$, niin on $f(x) \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$. Näin ollen $q^x \leq (q-1)x + 1$. $\square$

Määritelmä 1.3. Kaikilla rationaaliluvuilla β ja luonnosilla luvuilla n määritellään

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1) \qquad \text{ja} \qquad (\beta)_0 = 1.$$

Lemma 1.4. *Olkoon β rationaaliluku, jonka nimittäjä on $F \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Tällöin $(\beta)_n/n!$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun*

$$\mu_n(F) = F^n \prod_{q|F} q^{\lfloor n/(q-1) \rfloor},$$

missä tulo on yli kaikkien alkulukujen q, jotka jakavat luvun F. Edelleen alkuluku p jakaa luvun $(\beta)_n/n!$ nimittäjän vähintään $n(r + 1/(p-1)) - \log n/\log p - 1$ kertaa, missä r on määritelty yhtälöllä $|F|_p = p^{-r}$.

Todistus. Olkoon $\beta = b/F, b \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\frac{(\beta)_n}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(b/F + k)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(b + Fk)}{F^n n!}.$$

Olkoon q alkuluku, joka jakaa luvun F. Näin ollen q ei jaa tuloa $\prod_k(b+Fk)$ ja siten q on luvun $(\beta)_n/n!$ nimittäjässä yhtä monta kertaa kuin luvussa $F^n n!$. Edelleen q on luvussa $n!$

$$\lfloor n/q \rfloor + \lfloor n/q^2 \rfloor + \lfloor n/q^3 \rfloor + \cdots$$

kertaa, joka puolestaan on ylhäältä rajoitettu luvulla

$$n/q + n/q^2 + n/q^3 + \cdots = \frac{n}{q-1}.$$

Tämä selittää tekijän $q^{\lfloor n/(q-1) \rfloor}$ luvun $\mu_n(F)$ määritelmässä. Jotta voisimme todistaa, että luvun $(\beta)_n/n!$ nimittäjä jakaa luvun

$$\mu_n(F) = F^n \prod_{q|F} q^{\lfloor n/(q-1) \rfloor},$$

on osoitettava, että mikäli alkuluku $p \nmid F$, niin jokaisella $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on voimassa

$$\#\{1 \leq k \leq n \quad | \quad p^s \,|\, k\} \leq \#\{0 \leq k \leq n-1 \quad | \quad p^s \,|\, (b+Fk)\}.$$

Olemme nähneet, että

$$\#\{1 \leq k \leq n \quad | \quad p^s \,|\, k\} = \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor.$$

Merkitään

$$r_1 = \#\{0 \leq k \leq n-1 \quad | \quad p^s \,|\, (b+Fk)\}$$

ja olkoon k_1 pienin alkio joukossa

$$\{0 \leq k \leq n-1 \quad | \quad p^s \,|\, (b+kF)\}.$$

Tällöin

$$b + Fk_1 \equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Näin ollen

$$k_1, k_1+p^s, k_1+2p^s, \ldots, k_1+(r_1-1)p^s \in \{0 \leq k \leq n-1 \quad | \quad p^s \,|\, (b+Fk)\},$$

josta edelleen

$$r_1 \leq \frac{n-1-k_1}{p^s} + 1.$$

Täten ottamalla maksimiarvo nähdään, että

$$\max\{r_1\} = \left\lfloor \frac{n-1-k_1}{p^s} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{n}{p^s} - 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor,$$

mikä osoittaa, että p ei jaa luvun $(\beta)_n/n!$ nimittäjää. Merkitään

$$z = \left\lfloor \frac{\log n}{\log q_1} \right\rfloor \qquad \text{ja} \qquad \epsilon = \frac{\log n}{\log q_1} - z,$$

jolloin

$$n = q_1^{z+\epsilon} \qquad \text{ja} \qquad 0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Nyt Lemman 1.2 nojalla saadaan alaraja

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{z} \left\lfloor \frac{n}{q_1^k} \right\rfloor &\geq \sum_{k=1}^{z} \left(\frac{n}{q_1^k} - 1 \right) \\
&= \frac{n}{q_1} \cdot \frac{1 - 1/q_1^z}{1 - 1/q_1} - z \\
&= \frac{n}{q_1 - 1} \left(1 - \frac{1}{q_1^z} \right) - z \\
&= \frac{n}{q_1 - 1} - \frac{n}{(q_1 - 1) q_1^z} - z \\
&= \frac{n}{q_1 - 1} - \frac{q^\epsilon}{q_1 - 1} - z \\
&\geq \frac{n}{q_1 - 1} - \frac{(q_1 - 1)\epsilon + 1}{q_1 - 1} - z \\
&= \frac{n-1}{q_1 - 1} - z - \epsilon \\
&= \frac{n-1}{q_1 - 1} - \frac{\log n}{\log q_1}.
\end{aligned}$$

Täten alkuluku q_1 jakaa luvun $(\beta)_n/n!$ nimittäjän vähintään

$$nr + \frac{n-1}{q_1 - 1} - \frac{\log n}{\log q_1} \geq n \left(r + \frac{1}{q_1 - 1} \right) - \frac{\log n}{\log q_1} - 1,$$

kertaa, missä $|F|_{q_1} = q_1^{-r}$. $\square$

Luku 2

Differentiaaliyhtälöt

Tässä kappaleessa tarkastelemme 2. ja 3. asteen lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja ja johdamme joitain yleisluonteisia tuloksia ratkaisujen Taylorin sarjojen kertoimiin liittyen.

Olkoon R sellainen kokonaisalue, että $\mathrm{char}(R) = 0$ ja $Q(R)$ sitä vastaava osamääräkunta. Tarkastellaan differentiaalioperaattoria

$$L_2(y) = zp(z)y'' + q(z)y' + r(z)y,$$

missä $p(z), q(z), r(z) \in R[z]$ ja $p(0) = 1$.

Määritelmä 2.1. Arvoa $W_0(z)/z$, missä $W_0(z) \in R[[z]]$ ja $W_0(0) = 1$, sanotaan yllä mainitun operaattorin L_2 *Wronskin determinantiksi* mikäli

$$\left(\log\left(\frac{W_0(z)}{z}\right)\right)' = -\frac{q(z)}{zp(z)},$$

missä *logaritmi* on määritelty yleisesti potenssisarjakehitelmänä renkaassa $R[[z]]$.

Lemma 2.2. *Olkoon $f(z) \in Q(R)[[Z]]$. Tällöin*

$$\int_0^z f(t)\log t\,\mathrm{d}t = \log z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

ja

$$\int_0^z f(t)\log^2 t\,\mathrm{d}t = \log^2 z\int_0^z f(t)\mathrm{d}t - 2\log z\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$+ 2\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Todistus. Jos $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots \in Q(R)[[z]]$, niin

$$\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t = a_0 z + (a_1/2)z^2 + \cdots,$$

ja täten

$$\left[\log z \int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t\right]_0^z = \log z \int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Näin ollen ensimmäiselle lausekkeelle saadaan osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\int_0^z f(t)\log t\,\mathrm{d}t &= \int_0^z \log t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \log z \int_0^z f(t)\mathrm{d}t - \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vastaavasti toinen lauseke seuraa osittaisintegroimalla kahdesti:

$$\begin{aligned}\int_0^z f(t)\log^2 t\,\mathrm{d}t &= \left[\log^2 z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t\right]_0^z - \int_0^z \frac{2\log x}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \log^2 z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t - \left[2\log z\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right]_0^z \\ &\quad + 2\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \log^2 z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t - 2\log z\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\quad + 2\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3. *Oletetaan, että $y_0(z) \in R[[z]], y_0(0) = 1$, on differentiaaliyhtälön*

$$L_2(y) = zp(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0$$

ratkaisu. Tällöin Wronskin determinantti $W_0(z)/z$ on olemassa ja

$$y_1(z) = y_0(z)\int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

on myös kyseisen differentiaaliyhtälön ratkaisu. Lisäksi, $y_0(z)$ ja $y_1(z)$ ovat lineaarisesti vapaita.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että Wronskin determinantti $W_0(z)/z$ on olemassa. Tämä nähdään helposti asettamalla

$$\begin{aligned} zp(z) &= z(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots), \\ q(z) &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots, \end{aligned}$$

missä $p_i, q_i \in R$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Edelleen

$$-\frac{q(z)}{zp(z)} = -\frac{q_0}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

missä $c_i \in R$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$, joten erityisesti tällöin

$$\begin{aligned} W_0(z) &= z \cdot \exp\left(-\int \frac{q(t)}{tp(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= z \cdot \exp\left(-q_0 \log z + c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \cdots\right) \\ &= z \cdot z^{-q_0} \cdot \exp\left(c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Kohta nähdään, että $q_0 = 1$, joten yllä oleva määrittää Wronskin determinantin. Tehdään vastaoletus, että on toinenkin formaali ratkaisu ja merkitään näiden ratkaisujen erotusta $y(z)$. Tällöin

$$\begin{aligned} y(z) &= C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots, \\ y'(z) &= C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 + \cdots, \\ y''(z) &= 2C_2 + 6C_3 z + \cdots, \end{aligned}$$

missä $C_0 = 0$, sillä molemmat ratkaisut toteuttavat ehdon $y_0(0) = 1$. Merkitään $f(z) = W_0(z)/z$, jolloin $f'(z)/f(z) = -q(z)/(zp(z))$. Koska

$$\begin{aligned} W_0(z) &= 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots, \\ f(z) &= \frac{1}{z} + d_1 + d_2 z + \cdots, \\ f'(z) &= -\frac{1}{z^2} + d_2 + 2d_3 z + \cdots, \end{aligned}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z} + \cdots = -\frac{q(z)}{zp(z)},$$

on

$$\frac{q(z)}{p(z)} = 1 + \cdots, \text{ joten } \quad \frac{q(0)}{p(0)} = 1.$$

Oletuksen mukaan $p(0) = 1$, joten $q(0) = 1$. Sijoittamalla nyt funktio $y(z)$ ja sen derivaatat differentiaaliyhtälöön

$$L_2(y) = zp(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0$$

ja asettamalla $z = 0$ nähdään, että $C_1 = 0$. Differentioimalla yhtälöä

$$L_2(y) = zp(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0$$

ja sijoittamalla $y(z)$ nähdään, että $C_i = 0$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

On siis osoitettava, että $y_1(z)$ on toinen lineaarisesti vapaa ratkaisu. Nyt

$$y_1(z) = y_0(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

joten

$$y_1'(z) = y_0'(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{W_0(z)}{zy_0(z)}$$

ja

$$\begin{aligned} y_1''(z) &= y_0''(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t + y_0'(z)\frac{W_0(z)}{zy_0^2(z)} + \left(\frac{W_0(z)}{z}\right)' \frac{1}{y_0(z)} - y_0'(z)\frac{W_0(z)}{zy_0^2(z)} \\ &= y_0''(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t + \left(\frac{W_0(z)}{z}\right)' \frac{1}{y_0(z)} \\ &= y_0''(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{y_0(z)}\frac{q(z)W_0(z)}{z^2p(z)}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} L_2(y_1(z)) = zp(z) &\left(y_0''(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{y_0(z)}\frac{q(z)W_0(z)}{z^2p(z)} \right) \\ q(z) &\left(y_0'(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{W_0(z)}{zy_0(z)} \right) \\ r(z) &\left(y_0(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{q(z)W_0(z)}{zy_0(z)} + \frac{q(z)W_0(z)}{zy_0(z)} = 0.$$

Siten $y_1(z)$ on toinen differentiaaliyhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisu. Differentiaaliyhtälöiden teorian mukaan, jos Wronskin determinantti $W_0(z) \neq 0$, niin ratkaisut ovat lineaarisesti vapaita. $\square$

Huomautus 2.4. Huomautuksena mainittakoon, että

$$\frac{W_0(z)}{z} = y_1'(z)y_0(z) - y_1(z)y_0'(z).$$

Tämä nähdään suoraan derivoimalla funktiota

$$y_1(z) = y_0(z) \int_0^z \frac{W_0(t)}{ty_0^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 2.5. *Voidaan kirjoittaa* $y_1(z) = y_0(z)\log z + \tilde{y}_0(z)$, *missä* $\tilde{y}_0(z) \in Q(R)[[z]]$. *Lisäksi, formaalin sarjan* $\tilde{y}_0(z)$ *n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun* $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)$.

Todistus. Olkoot

$$\begin{aligned}
W_0(z) &= 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots, \\
y_0(z) &= 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots, \\
y_0^2(z) &= 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

missä $d_i, b_i, c_i \in R$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
y_1(z) &= y_0(z) \int_0^z \frac{1}{t}\left(\frac{1 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots}{1 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots}\right)\mathrm{d}t \\
&= y_0(z) \int_0^z \frac{1}{t} \cdot (1 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t \\
&= y_0(z)\log z + y_0(z)\left(e_1 z + \frac{e_2}{2}z^2 + \frac{e_3}{3}z^3 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Näin ollen voidaan valita

$$\tilde{y}_0(z) = y_0(z)\left(e_1 z + \frac{e_2}{2}z^2 + \frac{e_3}{3}z^3 + \cdots\right) \in Q(R)[[z]].$$

Jos nyt

$$\tilde{y}_0(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots,$$

missä $a_i \in Q(R)$, niin

$$a_n = b_{n-1}e_1 + \frac{b_{n-2}e_2}{2} + \frac{b_{n-3}e_3}{3} + \cdots + \frac{b_0 e_n}{n}.$$

Erityisesti kertoimen a_n nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)$. $\square$

Määritelmä 2.6. Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ kaksi reaalilukujen joukossa määriteltyjä funktioita. Tällöin merkitään

$$f(x) = O(g(x)),$$

jos ja vain jos tarpeeksi suurella muuttujan x arvolla on olemassa sellainen positiivinen $M \in R$, että

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Lause 2.7. *Differentiaaliyhtälöllä $L_2(y) = 1$ on yksikäsitteinen ratkaisu $g(z) = z + O(z^2) \in Q(R)[[z]]$. Lisäksi, n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun* $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$.

Todistus. Asetetaan

$$g(z) = y_1(z) \int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z) \int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} g'(z) = y_1'(z) &\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t + y_1(z)\frac{y_0(z)}{p(z)W_0(z)} \\ &- y_0'(z) \int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z)\frac{y_1(z)}{p(z)W_0(z)} \\ = y_1'(z) &\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0'(z) \int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} g''(z) = y_1''(z) &\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t + y_1'(z)\frac{y_0(z)}{p(z)W_0(z)} \\ &- y_0''(z) \int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0'(z)\frac{y_1(z)}{p(z)W_0(z)}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla yllä saadut arvot yhtälöön $L_2(y)$ saadaan

$$\begin{aligned}
L_2(g(z)) &= zp(z)\left(y_1'(z)\frac{y_0(z)}{p(z)W_0(z)} - y_0'(z)\frac{y_1(z)}{p(z)W_0(z)}\right)\\
&\quad + zp(z)\left(y_1''(z)\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0''(z)\int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\
&\quad + q(z)\left(y_1'(z)\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0'(z)\int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\
&\quad + r(z)\left(y_1(z)\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z)\int_0^z \frac{y_1(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{zp(z)}{p(z)W_0(z)}(y_1'(z)y_0(z) - y_0'(z)y_1(z)) = 1.
\end{aligned}$$

Aivan kuin Lemmassa 2.3 nähdään, että ratkaisu $g(z)$ on yksikäsitteinen. Todistaaksemme kertoimia koskevan väitteen käytetään hyväksi yhtälöä $y_1(z) = y_0(z)\log z + \tilde{y}_0(z)$ ja Lemman 2.2 integraalikaavoja. Nyt

$$\begin{aligned}
g(z) &= (y_0(z)\log z + \tilde{y}_0(z))\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z)\int_0^z \frac{y_0(t)\log t + \tilde{y}_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\\
&= (y_0(z)\log z + \tilde{y}_0(z))\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z)\int_0^z \frac{\tilde{y}_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\quad - y_0(z)\left(\log z\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)\\
&= \tilde{y}_0(z)\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t - y_0(z)\int_0^z \frac{\tilde{y}_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\quad + y_0(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

joka helpottaa funktion $g(x)$ esittämistä potenssisarjana. Olkoot

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_0(z) &= a_1z + a_2z^2 + \cdots,\\
y_0(z) &= 1b_1z + b_2z^2 + \cdots,\\
p(z) &= 1 + p_1z + p_2z^2 + \cdots,\\
W_0(z) &= 1 + d_1z + d_2z^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

missä $a_i \in Q(R)$ ja $b_i, p_i, d_i \in R$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siten

$$\tilde{y}_0(z)\int_0^z \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t = \tilde{y}_0(z)\int_0^z \frac{1 + b_1t + b_2t^2 + \cdots}{(1 + p_1t + \cdots)(1 + d_1t + \cdots)}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{y}_0(z)\int_0^z (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t \\
&= \tilde{y}_0(z)\left(z + \frac{k_1 z^2}{2} + \frac{k_2 z^3}{3} + \cdots\right),
\end{aligned}
$$

missä $k_i \in R$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Koska funktion $\tilde{y}_0(z)$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)$, nähdään, että termin $\tilde{y}_0 \int (y_0/(pW_0))$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$.
Vastaavasti kahdelle muulle termille saadaan

$$
\begin{aligned}
y_0(z)\int_0^z \frac{\tilde{y}_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t &= y_0(z)\int_0^z \frac{a_1 t + a_2 t^2 + \cdots}{(1 + p_1 t + \cdots)(1 + d_1 t + \cdots)}\,\mathrm{d}t \\
&= y_0(z)\int_0^z (l_1 t + l_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t \\
&= y_0(z)\left(\frac{l_1 z^2}{2} + \frac{l_2 z^3}{3} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
&y_0(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0(t)}{p(t)W_0(t)}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad= y_0(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1 + b_1 t + \cdots}{(1 + p_1 t + \cdots)(1 + d_1 t + \cdots)}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad= y_0(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x (1 + m_1 t + m_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad= y_0(z)\int_0^z \frac{1}{x}\left(x + \frac{m_1 x^2}{2} + \frac{m_2 x^3}{3} + \cdots\right)\mathrm{d}x \\
&\quad= y_0(z)\left(z + \frac{m_1 z^2}{2^2} + \frac{m_2 z^3}{3^3} + \cdots\right),
\end{aligned}
$$

joten myös näissä on voimassa, että n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$ ja lisäksi, $g(z) = z + O(z^2)$. □

Seuraava lause annetaan ilman todistusta.

Lause 2.8. *Differentiaalioperaattorilla $L_2(y)$ on symmetrinen neliö*

$$
L_3(y) = z^2 P(z)y''' + Q(z)y'' + R(z)y' + S(z)y,
$$

missä $P, Q, R, S \in R[z]$ ja $P(0) = 1$. Symmetrinen neliö tunnetaan ominaisuudesta, että differentiaaliyhtälön $L_3(y) = 0$ ratkaisujoukon generoivat diffenrentiaaliyhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisujen neliöt. Lisäksi, yhtälöllä $L_3(y) = 0$ on yksikäsitteinen potenssisarjaratkaisu $y_0^2(z)$, missä $y_0^2(0) = 1$.

Lemma 2.9. *Yhtälöllä $L_3(y) = 0$ on ratkaisu $y_0(z)y_1(z)$.*

Todistus. Aiemmin on osoitettu, että $y_0(z)$ ja $y_1(z)$ ovat yhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisuja. Operaattorin L_2 lineaarisuuden vuoksi myös $(y_0(z) + y_1(z))/2$ ja $(y_0(z) - y_1(z))/2$ ovat yhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisuja. Näin ollen näiden neliöt ovat yhtälön $L_3(y) = 0$ ratkaisuja, ja edelleen operaattorin L_3 lineaarisuuden vuoksi

$$y_0(z)y_1(z) = \frac{(y_0(z) + y_1(z))^2}{4} - \frac{(y_0(z) - y_1(z))^2}{4}$$

on yhtälön $L_3(y) = 0$ ratkaisu. □

Seuraavaksi merkitään funktioita $y_0(t), y_1(t), P(t)$ ja $W_0(t)$ lyhykäisyydessään y_0, y_1, P ja W_0.

Lemma 2.10. *Asetetaan*

$$h(z) = y_0^2 \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2y_0y_1 \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + y_1^2 \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tällöin $h(z)$ on yhtälön $L_3(y) = 2$ ratkaisu.

Todistus. Määritetään aluksi funktion $h(z)$ derivaatat. Nyt

$$\begin{aligned}
h'(z) &= (y_0^2)' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + y_0^2 \frac{y_1^2}{PW_0^2} - 2(y_0y_1)' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - 2y_0y_1 \frac{y_0y_1}{PW_0^2} + (y_1^2)' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + y_1^2 \frac{y_0^2}{PW_0^2} \\
&= (y_0^2)' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2(y_0y_1)' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + (y_1^2)' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h''(z) &= (y_0^2)'' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2(y_0y_1)'' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + (y_1^2)'' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + 2y_0'y_0 \frac{y_1^2}{PW_0^2} - (2y_0'y_1 + 2y_0y_1') \frac{y_0y_1}{PW_0^2} + 2y_1'y_1 \frac{y_0^2}{PW_0^2}
\end{aligned}$$

$$= (y_0^2)'' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2(y_0y_1)'' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + (y_1^2)'' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t$$

ja

$$\begin{aligned}
h'''(z) &= (y_0^2)''' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2(y_0y_1)''' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + (y_1^2)''' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + 2(y_0''y_0 + (y_0')^2)\frac{y_1^2}{PW_0^2} - 2(y_0''y_1 + 2y_0'y_1' + y_0y_1'')\frac{y_0y_1}{PW_0^2} \\
&\quad + 2(y_1y_1'' + (y_1')^2)\frac{y_0^2}{PW_0^2} \\
&= (y_0^2)''' \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2(y_0y_1)''' \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + (y_1^2)''' \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + 2(y_0')^2\frac{y_1^2}{PW_0^2} - 4y_0'y_1'\frac{y_0y_1}{PW_0^2} + 2(y_1')^2\frac{y_0^2}{PW_0^2}.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla nyt $h(z)$ ja sen derivaatat operaattoriin L_3 saadaan

$$\begin{aligned}
L_3(h(z)) &= z^2P\left(2(y_0')^2\frac{y_1^2}{PW_0^2} - 4y_0'y_1'\frac{y_0y_1}{PW_0^2} + 2(y_1')^2\frac{y_0^2}{PW_0^2}\right) \\
&= \frac{2z^2}{W_0^2}((y_0')^2y_1^2 - 2y_0'y_1'y_0y_1 + (y_1')^2y_0^2) \\
&= \frac{2z^2}{W_0^2}(y_1'y_0 - y_1y_0')^2 \\
&= \frac{2z^2}{W_0^2}\left(\frac{W_0}{z}\right)^2 = 2,
\end{aligned}$$

missä on käytetty hyväksi tietoa, että y_0^2, y_1^2 ja y_0y_1 ovat yhtälön $L_3(y) = 0$ ratkaisuja. □

Lause 2.11. *Yhtälöllä $L_3(y) = 1$ on yksikäsitteinen ratkaisu $h_1(z) = z + O(z^2) \in Q(R)[[z]]$. Lisäksi, n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun* $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3$.

Todistus. Edellisen Lemman nojalla $h_1(z) = h(z)/2$ on haluttu ratkaisu. Näin ollen voidaan laskea käyttäen funktiota $h(z)$ ja kertoa lopuksi vakiolla $1/2$. Sijoittamalla $y_1 = y_0 \log z + \tilde{y}_0$ ja käyttämällä hyväksi Lemmaa 2.2 saadaan

$$y_0^2 \int_0^z \frac{y_1^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t = y_0^2 \int_0^z \frac{y_0^2\log^2 t + 2y_0\tilde{y}_0\log t + \tilde{y}_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= y_0^2 \log^2 z \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t - 2y_0^2 \log z \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad + 2y_0^2 \int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y_0^2 \log z \int_0^z \frac{2y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - y_0^2 \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{2y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + y_0^2 \int_0^z \frac{\tilde{y}_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2y_0y_1 \int_0^z \frac{y_0y_1}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t &= (-2y_0^2 \log z - 2y_0\tilde{y}_0) \int_0^z \frac{y_0 \log t + y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -(2y_0^2 \log z + 2y_0\tilde{y}_0) \log z \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + (2y_0^2 \log z + 2y_0\tilde{y}_0) \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad - (2y_0^2 \log z + 2y_0\tilde{y}_0) \int_0^z \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

ja

$$
y_1^2 \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t = (y_0^2 \log^2 z + 2y_0\tilde{y}_0 \log z + \tilde{y}_0^2) \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t.
$$

Näin ollen yhdistämällä yllä lasketut termit nähdään, että

$$
\begin{aligned}
h(z) &= 2y_0^2 \left(\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\tilde{y}_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \right) \\
&\quad + 2y_0\tilde{y}_0 \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x - 2y_0\tilde{y}_0 \int_0^z \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + \tilde{y}_0^2 \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Täten yhtälön $L_3(y) = 1$ ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
h_1(z) &= y_0^2 \int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y - y_0^2 \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}y_0^2 \int_0^z \frac{\tilde{y}_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + y_0\tilde{y}_0 \int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x - y_0\tilde{y}_0 \int_0^z \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\tilde{y}_0^2 \int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Todistaaksemme, että $h_1(z) = z + O(z^2)$ ja että kertoimien nimittäjiä koskeva väite on tosi, asetamme

$$
\begin{aligned}
y_0(z) &= 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots, \\
y_0^2(z) &= 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_0(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\,,\\ P(z) &= 1 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots\,,\\ W_0(z) &= 1 d_1 z + d_2 z^2 + \cdots\,.\end{aligned}$$

Tarkastellaan jokaista funktion $h_1(z)$ termiä erikseen. Nyt

$$\begin{aligned}&y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\qquad= y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\int_0^x (1 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\qquad= y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{x}\left(x + \frac{e_1 x^2}{2} + \frac{e_2 x^3}{3} + \cdots\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\qquad= y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{y}\left(y + \frac{e_1 y^2}{2^2} + \frac{e_2 y^3}{3^2} + \cdots\right)\mathrm{d}y\\ &\qquad= y_0^2(z)\left(z + \frac{e_1 z^2}{2^3} + \frac{e_2 z^3}{3^3} + \cdots\right)\\ &\qquad= (1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)\left(z + \frac{e_1 z^2}{2^3} + \frac{e_2 z^3}{3^3} + \cdots\right)\\ &\qquad= z + O(z^2),\end{aligned}$$

missä termin z^n kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3$. Yllä $e_i \in R$ ja seuraavissa tarkasteluissa käytetään samaa merkintää, vaikka niissä $e_i \in Q(R)$. Edelleen

$$\begin{aligned}&y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &\qquad= y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x (e_1 t + e_2 t^2 + \cdots)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &\qquad= y_0^2(z)\int_0^z \frac{1}{x}\left(\frac{e_1 x^2}{2} + \frac{e_2 x^3}{3}\right)\mathrm{d}x\\ &\qquad= y_0^2(z)\left(\frac{e_1 z^2}{2^2} + \frac{e_2 z^3}{3^2} + \cdots\right)\\ &\qquad= \frac{e_1}{4} z^2 + O(z^3).\end{aligned}$$

Koska funktion $\tilde{y}_0$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)$, niin yllä olevan termin n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3$.

Seuraavaksi saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}&y_0(z)\int_0^z \frac{\tilde{y}_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}y_0^2(z)\int_0^z (e_1t + e_2t^2 + e_3t^3 + \cdots)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}y_0^2(z)\left(\frac{e_1z^2}{2} + \frac{e_2z^3}{3} + \cdots\right) \\
&= \frac{e_1z^2}{4} + O(z^3).
\end{aligned}$$

Jälleen huomaamalla, että funktion $\tilde{y}_0^2(z)$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$, niin yllä olevan termin kertoimiin liittyvä tulos seuraa.

Aiempien kolmen termien tuloksista saadaan kolmelle viimeiselle termille, että

$$\begin{aligned}
y_0(z)\tilde{y}_0(z)&\int_0^z \frac{1}{x}\int_0^x \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= y_0(z)\tilde{y}_0(z)\left(z + \frac{e_1z^2}{2^2} + \frac{e_2z^3}{3^2} + \cdots\right) \\
&= a_1z^2 + O(z^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0(z)\tilde{y}_0(z)&\int_0^z \frac{y_0\tilde{y}_0}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&= y_0(z)\tilde{y}_0(z)\left(\frac{e_1z^2}{2} + \frac{e_2z^3}{3} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_1e_1}{2}z^3 + O(z^4)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{y}_0^2(z)&\int_0^z \frac{y_0^2}{PW_0^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\tilde{y}_0^2(z)\left(z + \frac{e_1z^2}{2} + \frac{e_2z^3}{3} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_1^2}{2}z^3 + O(z^4).
\end{aligned}$$

Käyttämällä jälleen hyväksi tietoa, että funktion $\tilde{y}_0(z)$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)$ nähdään lopulta, että $h_1(z) = z + O(z^2)$ ja sen n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3$. $\square$

Luku 3

Eräitä identiteettejä

Tarkastellaan rationaalifunktioiden kunnan $\mathbb{Q}(x)$ täydellistymää K. Mikäli täydellistymä on diskreetin valuaation $|\cdot|$ suhteen ja $|x| > 1$, on K formaalien *Laurentin sarjojen* kunta, kerroinkuntana $\mathbb{Q}$. Palautetaan mieleen Johdannossa esitellyt Laurentin sarjat:

$$\begin{aligned}
\Theta(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}, \\
R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}, \\
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+2},
\end{aligned}$$

missä $t_n = (2^{n+1} - 2)B_n$.

Lause 3.1. *Yllä mainituille Laurentin sarjoille on voimassa*

$$T(x) = R'(x) \qquad \text{ja} \qquad \Theta(x) = R(x/2) - 2R(x).$$

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan derivoimalla sarjaa $R(x)$. Sijoittamalla $t_n = (2^{n+1} - 2)B_n$ sarjaan $\Theta(x)$ saadaan

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 2) B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x/2}\right)^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} = R(x/2) - 2R(x),
\end{aligned}
$$

mikä todistaa toisen väitteen. □

Olkoon $A(x) \in K$. Tällöin voidaan tarkastella myös sarjaa $A(x+\lambda)$, missä $\lambda \in \mathbb{Q}$, kunnan K alkiona, kun $1/(x+\lambda)$ kehitetään termin $1/x$ suhteen. Seuraavaa tulosta hyödynnetään jatkossa.

Lemma 3.2. *Olkoon $A(x) \in K$ ja oletetaan, että on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{Q}$, että $A(x) = A(x+\lambda)$. Tällöin $A(x)$ on vakio.*

Todistus. Yhtäsuuruus $A(x) = A(x+\lambda)$ on tosi myös silloin, kun vähennämme molemmilta puolilta vakiotermin a_0. Tehdään vastaoletus, että $A(x) - a_0$ ei ole identtisesti nolla. Tällöin on olemassa sellaiset $n \neq 0$ ja $a_n \neq 0$, että $A(x) - a_0 = a_n(1/x)^n +$"korkeamman asteen termejä". Mutta nyt $A(x+\lambda) - A(x) = -n\lambda a_n (1/x)^{n+1} +$"korkeamman asteen termejä", mikä on ristiriita. Näin ollen $A(x) - a_0 = 0$. □

Lause 3.3. *Formaalille sarjalle $R(x)$ on voimassa*

i. $R(x+1) - R(x) = 1/x^2$;

ii. $R(x) + R(-x) = -1/x^2$;

iii. $R(x) + R(1-x) = 0$;

iv. $R(x) + R(x+1/2) = 4R(2x)$.

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$
\begin{aligned}
R(x+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(-\frac{1}{x+1}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1},
\end{aligned}
$$

missä viimeisin yhtäsuuruus seuraa Liitteen D tuloksesta D.1. Edelleen summausindeksejä vaihtamalla ja käyttämällä Liitteen A Lausetta A.3 saadaan

$$\begin{aligned}
R(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&= -\frac{B_0}{x} + \frac{B_0 + B_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{x^2} + R(x),
\end{aligned}$$

mistä seuraa ensimmäinen väite. Koska $B_1 = -1/2$, on

$$R(x) = -\frac{1}{2x^2} + \sum_{k=0.k\neq 1}^{\infty} B_k \left(-\frac{1}{x}\right)^{k+1}$$

ja

$$R(-x) = -\frac{1}{2x^2} + \sum_{k=0,k\neq 1}^{\infty} B_k \left(\frac{1}{x}\right)^{k+1}.$$

Hyödyntämällä Liitteessä A todistettua lausetta, jonka mukaan pariton Bernoullin luku B_k on nolla, nähdään että

$$R(x) + R(-x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Kolmas väite seuraa suoraan kahdesta aikaisemmasta väitteestä, sillä

$$\begin{aligned}
R(x) + R(1-x) &= -\frac{1}{x^2} - R(-x) + R(1-x) \\
&= -\frac{1}{x^2} + (R(1+(-x)) - R(-x)) \\
&= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(-x)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Viimeisen väitteen todistamiseksi merkitään

$$A(x) = 4R(2x) - R(x) - R(x+1/2).$$

Nyt aikaisempien väitteiden nojalla

$$A(x+1/2) - A(x) = 4R(2x+1) - R(x+1/2) - R(x+1)$$

$$
\begin{aligned}
&- 4R(2x) + R(x) + R(x+1/2) \\
&= 4(R(2x+1) - R(2x)) - (R(x+1) - R(x)) \\
&= \frac{4}{(2x)^2} - \frac{1}{x^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Näin ollen Lemman 3.2 mukaan $A(x)$ on vakio. Mutta nyt

$$
A(x) = 4R(2x) - R(x) - R(x+1/2) \to 0,
$$

kun $x \to \infty$, mikä todistaa väitteen. $\square$

Lause 3.4. *Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa*

i. $T(x+1) - T(x) = -2/x^3$;

ii. $T(x) - T(1-x) = 0$;

iii. $\Theta(x+1) + \Theta(x) = -2/x^2$;

iv. $\Theta(x) = (R(x/2) - R(x/2+1/2))/2$.

Todistus. Käyttämällä nyt hyväksi Lauseita 3.1 ja 3.3 nähdään, että

$$
T(x+1) - T(x) = R'(x+1) - R'(x) = -2/x^3.
$$

Toinen väite seuraa vastaavasti. Kolmannelle väitteelle saadaan

$$
\begin{aligned}
\Theta(x+1) + \Theta(x) &= R(x/2+1/2) - 2R(x+1) + R(x/2) - 2R(x) \\
&= 4R(x) - 2R(x+1) - 2R(x) \\
&= -2(R(x+1) - R(x)) \\
&= -2/x^2.
\end{aligned}
$$

Edelleen viimeinen väite seuraa, sillä

$$
\begin{aligned}
\Theta(x) &= R(x/2) - 2R(x) \\
&= R(x/2) - \frac{1}{2}R(x/2) - \frac{1}{2}R(x/2+1/2) \\
&= (R(x/2) - R(x/2+1/2))/2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Määritelmä 3.5. Olkoon $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Tällöin kaikilla luonnollisilla luvuilla n merkitään

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Määritelmä 3.6. Määritellään *differenssioperaattori* Δ_n asettamalla

$$\Delta_n(g(n)) = g(n+1) - g(n).$$

Lause 3.7. *Kunnassa K on voimassa identiteetit*

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix},$$

$$R(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix},$$

$$T(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Todistus. Asetetaan

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Suora lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ -x \end{bmatrix} \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{n!}{(1-x)(2-x)\cdots(1+n-x)} \\
&\qquad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1+n)} \cdot \frac{n!}{(-x)(1-x)\cdots(n-x)} \\
&= \frac{(x+1+n)(n!)^2 - (1+n-x)(n!)^2}{x(x+1)\cdots(x+1+n)(1-x)(2-x)\cdots(1+n-x)} \\
&= \frac{2x(n!)^2}{x(x+1)\cdots(x+1+n)(1-x)(2-x)\cdots(1+n-x)} \\
&= 2 \cdot \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1+n)} \cdot \frac{n!}{(1-x)(2-x)\cdots(1+n-x)} \\
&= 2 \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ x+1 \end{bmatrix} = \frac{(n+1)n!}{(x+1)(x+2)\cdots(n+2+x)} = \frac{n+1}{n+2+x}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 1-x \end{bmatrix} = \frac{(n+1)n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+2-x)} = \frac{n+1}{n+2-x}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned}
\Delta_n \left(\frac{(n+1-x)(n+1+x)}{x^2} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \right)& \\
= \frac{(n+2-x)(n+2+x)}{x^2} \begin{bmatrix} n+1 \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ x+1 \end{bmatrix}& \\
- \frac{(n+1-x)(n+1+x)}{x^2} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}& \\
= \left(\frac{(n+1)^2}{x^2} - \frac{(n+1)^2 - x^2}{x^2} \right) \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}& \\
= \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}.&
\end{aligned}$$

Summaus yli kaikkien lukujen $n \in \mathbb{Z}^+$ antaa

$$\begin{aligned}
S(x) + S(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ -x \end{bmatrix} \right) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n \left(\frac{(n+1-x)(n+1+x)}{x^2} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\frac{(0+1-x)(0+1+x)}{x^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\frac{2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Näin ollen Lemman 3.2 ja Lauseen 3.4 nojalla $S(x) - \Theta(x) = 0$, mikä todistaa ensimmäisen väitteen. Muiden kohtien todistukset löytyvät Liitteestä C. $\square$

Luku 4

p-adinen Hurwitz'n sarja

Seuraavissa tarkasteluissa p on alkuluku sekä F positiivinen kokonaisluku ja a sellainen kokonaisluku, että F ei jaa lukua a.

Määritelmä 4.1. Määritellään *Hurwitz'n zeta-funktio* asettamalla

$$H(s,a,F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nF)^s}.$$

Sarja suppenee kaikilla $s \in \mathbb{C}$, joilla $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Seuraavan lauseen todistus löytyy työstä [5].

Lause 4.2. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin kaikilla F ja a on voimassa*

$$H(1-n,a,F) = -\frac{B_n(a,F)}{n},$$

missä $B_n(a,F)$ on yleistetty Bernoullin luku.

Jatkossa oletetaan, että p on sellainen alkuluku, että $p|F$ ja $p \nmid a$.

Määritelmä 4.3. *Teichmüllerin karakteeri* $\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ määritellään asettamalla

$$\omega(m) = \begin{cases} 0, & \text{kun } p|m; \\ m \mod p, & \text{kun } p \text{ on pariton ja } \mathrm{syt}(p,m) = 1; \\ (-1)^{(m-1)/2}, & \text{kun } p = 2 \text{ ja } m \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Määritelmä 4.4. Kaikille sellaisille $x \in \mathbb{Z}$, että $p \nmid x$, asetetaan

$$< x >= \frac{x}{\omega(x)}.$$

Määritelmä 4.5. Kaikille $s \in \mathbb{Z}_p$ määritellään *p-adinen Hurwitz'n zeta-funktio* asettamalla

$$H_p(s, a, F) = \frac{1}{F(s-1)} < a >^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1-s}{n} B_n \left(\frac{F}{a}\right)^n,$$

missä on huomioitava, että potenssi ja binomikerroin on määritelty p-adisesti.

Erityisesti nyt

$$\begin{aligned}
H_p(2, a, F) &= \frac{1}{F} < a >^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} B_n \left(\frac{F}{a}\right)^n \\
&= \frac{\omega(a)}{aF} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \left(\frac{F}{a}\right)^n \\
&= -\frac{\omega(a)}{F^2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(-\frac{F}{a}\right)^{n+1} \\
&= -\frac{\omega(a)}{F^2} R\left(\frac{a}{F}\right)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
H_p(3, a, F) &= \frac{1}{2F} < a >^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} B_n \left(\frac{F}{a}\right)^n \\
&= \frac{\omega(a)^2}{2a^2F} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) B_n \left(\frac{F}{a}\right)^n \\
&= \frac{\omega(a)^2}{2F^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n \left(-\frac{F}{a}\right)^{n+2} \\
&= \frac{\omega(a)^2}{2F^3} T\left(\frac{a}{F}\right).
\end{aligned}$$

Määritelmä 4.6. Olkoon $\phi : \mathbb{Z} \to \bar{\mathbb{Q}}$ jaksollinen funktio jaksolla f. Asetetaan $F = \mathrm{pyj}(f, p)$, jos p on pariton ja $F = \mathrm{pyj}(f, 4)$, jos $p = 2$. Määritellään *p-adinen Kubota-Leopoldt L-sarja* yhdistettynä funktioon ϕ asettamalla

$$L_p(s, \phi) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{F} \phi(a) H_p(s, a, F)$$

kaikilla $s \in \mathbb{Z}_p$.

Lause 4.7. *Sarjan $L_p(s,\phi)$ arvo ei muutu, vaikka valitsemme monikertaisen jakson mF, missä $m \in \mathbb{Z}^+$.*

Todistus. Koska p-adinen kokonaisluku s voidaan mieltää luonnollisista luvuista koostuvan jonon raja-arvona, on riittävää osoittaa, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}^+$ on voimassa

$$\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \phi(a)H(1-n,a,F) = \sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF} \phi(a)H(1-n,a,mF).$$

Käyttämällä hyväksi funktion ϕ jaksollisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{e^{Ft}-1}{t}\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF} \frac{t\phi(a)e^{at}}{e^{mFt}-1} &= \frac{e^{Ft}-1}{e^{mFt}-1}\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF} \phi(a)e^{at} \\
&= \frac{e^{Ft}-1}{e^{mFt}-1}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\substack{a=1+kF\\p\nmid a}}^{(k+1)F} \phi(a)e^{at} \\
&= \frac{e^{Ft}-1}{e^{mFt}-1}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \phi(a+kF)e^{(a+kF)t} \\
&= \frac{e^{Ft}-1}{e^{mFt}-1}\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \phi(a)e^{at}\sum_{k=0}^{m-1} e^{kFt} \\
&= \frac{e^{Ft}-1}{e^{mFt}-1}\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \phi(a)e^{at}\cdot\frac{1-e^{mFt}}{1-e^{Ft}} \\
&= \sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \phi(a)e^{at},
\end{aligned}$$

joten

$$\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF} \frac{t\phi(a)e^{at}}{e^{mFt}-1} = \sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F} \frac{t\phi(a)e^{at}}{e^{Ft}-1}.$$

Edelleen yleistettyjen Bernoullin lukujen avulla saadaan

$$\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF}\phi(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(a,mF)}{n!}t^n=\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F}\phi(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(a,F)}{n!}t^n,$$

josta Lauseen 4.2 nojalla

$$\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF}\phi(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-nH(1-n,a,mF)}{n!}t^n=\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F}\phi(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-nH(1-n,a,F)}{n!}t^n.$$

Kertoimia vertailemalla saadaan

$$\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{mF}\phi(a)H(1-n,a,mF)=\sum_{\substack{a=1\\p\nmid a}}^{F}\phi(a)H(1-n,a,F).$$

$\square$

Kun $\phi(n)=1$ kaikilla $n\in\mathbb{Z}$, on ϕ jaksollinen jaksolla $f=1$. Jos p on pariton, niin $F=\mathrm{pyj}(1,p)=p$, ja jos $p=2$, niin $F=\mathrm{pyj}(1,4)=4$.

Määritelmä 4.8. Määritellään *p-adinen zeta funktio* asettamalla

$$\zeta_p(s)=L_p(s,1)=\sum_{a=1}^{p-1}H_p(s,a,p),$$

kun p on pariton, ja

$$\zeta_2(s)=\sum_{\substack{a=1\\2\nmid a}}^{4}H_2(s,a,4)=H_2(s,1,4)+H_2(s,3,4),$$

kun $p=2$.

Luku 5

Eräitä p-adisia identiteettejä

Tässä kappaleessa osoitamme Laurentin sarjojen $R(x), T(x)$ ja $\Theta(x)$ yhteyksiä eräisiin p-adisiin L-sarjoihin. Jatkossa oletamme, että $a/F \in \mathbb{Q}$ ja että p on sellainen alkuluku kuin edellisessä kappaleessa, että $p|F$. Sijoittamalla $x = a/F$ Laurentin sarjaan $R(x), T(x)$ tai $\Theta(x)$ todetaan, että $(F/a)^n$ lähestyy nollaa p-adisen valuaation suhteen, joten $R(x), T(x)$ ja $\Theta(x)$ suppenevat p-adisesti. Merkitsemme sarjojen $R(x), T(x)$ ja $\Theta(x)$ p-adisia sarjoja vastaavasti $R_p(x), T_p(x)$ ja $\Theta_p(x)$.

Määritelmä 5.1. Olkoon $d \in \mathbb{N}$ annettu. Olkoon edelleen $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ kuvaus, joka toteuttaa ehdot

1. $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$;
2. Jos $m \equiv n \pmod{d}$, niin $\chi(m) = \chi(n)$;
3. $\chi(n) = 0$, jos ja vain jos $\mathrm{syt}(n, d) > 1$.

Tällöin χ on *Dirichlet'n karakteeri modulo d*. Sanotaan, että χ on *primitiivinen*, jos karakteerin pienin jakso on d. Lisäksi, χ on *parillinen*, jos $\chi(-1) = 1$.

Määritelmä 5.2. Olkoon $d > 1$ ja χ Dirichlet'n karakteeri modulo d. Kaikilla $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, asetetaan *Dirichlet'n L-funktio*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Lause 5.3. *Olkoon χ_d primitiivinen ja parillinen Dirichlet'n karakteeri modulo d. Tällöin*

(i) $\Theta_2(1/2) = -8\zeta_2(2)$;

(ii) $\Theta_2(1/6) = -40\zeta_2(2)$;

(iii) $\Theta_2(1/4) = -16L_2(2, \chi_8)$;

(iv) $\Theta_3(1/3) = -(27/2)\zeta_3(2)$;

(v) $\Theta_3(1/6) = -36L_3(2, \chi_{12})$.

Todistus. Määritelmän 4.5 yhteydessä osoitimme, että

$$R_p(a/F) = -\frac{F^2}{\omega(a)} H_p(2, a, F).$$

Käyttämällä hyväksi Lemmaa 3.4 ja tietoa, että sijoituksella $x = a/F$ tarkasteltavat Laurentin sarjat suppenevat p-adisesti, nähdään, että

$$\begin{aligned}
\Theta_p(a/F) &= \frac{1}{2}\left(R_p\left(\frac{a}{2F}\right) - R_p\left(\frac{a+F}{2F}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{4F^2}{\omega(a)} H_p(2, a, 2F) + \frac{4F^2}{\omega(a+F)} H_p(2, a+F, 2F)\right)\\
&= -2F^2\left(\frac{H_p(2, a, 2F)}{\omega(a)} - \frac{H_p(2, a+F, 2F)}{\omega(a+F)}\right).
\end{aligned}$$

Kun $p = 2$ ja m pariton, on $\omega(m) = (-1)^{(m-1)/2}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\Theta_2(1/2) &= -2 \cdot 4\left(\frac{H_2(2, 1, 4)}{\omega(1)} - \frac{H_2(2, 3, 4)}{\omega(3)}\right)\\
&= -8(H_2(2, 1, 4) + H_2(2, 3, 4))\\
&= -8\zeta_2(2).
\end{aligned}$$

Todistaaksemme väitteen (ii) käytetään hyväksi Lausetta 4.7. Olkoon $m = 3, \phi = 1$ ja $F = 4$, jolloin

$$\zeta_2(2) = \sum_{\substack{a=1\\ 2\nmid a}}^{12} H_2(2, a, 12).$$

Todistuksen alussa olevan yhtälön nojalla

$$\begin{aligned}-144\zeta_2(2) &= R_2(1/12) - R_2(3/12) + R_2(5/12) - R_2(7/12) + R_2(9/12) - R_2(11/12)\\ &= R_2(1/12) - R_2(1/4) + R_2(5/12) - R_2(7/12) + R_2(3/4) - R_2(11/12).\end{aligned}$$

Nyt myös

$$\begin{aligned}\zeta_2(2) = H_2(2,1,4) + H_2(2,3,4) &= -\frac{\omega(1)}{4^2}R_2(1/4) - \frac{\omega(3)}{4^2}R_2(3/4)\\ &= -\frac{1}{16}R_2(1/4) + \frac{1}{16}R_2(3/4),\end{aligned}$$

joten

$$R_2(1/4) - R_2(3/4) = -16\zeta_2(2).$$

Lisäksi Lauseiden 3.3 ja 3.4 avulla saadaan

$$\Theta_2(1/6) = \frac{1}{2}(R_2(1/12) - R_2(7/12)) = \frac{1}{2}(R_2(5/12) - R_2(11/12)).$$

Näin ollen

$$-144\zeta_2(2) = 4\Theta_2(1/6) + 16\zeta_2(2)$$

eli

$$\Theta_2(1/6) = -40\zeta_2(2).$$

Todistaaksemme väitteen (iii) määrätään aluksi primitiivinen ja parillinen Dirichlet'n karakteeri modulo 8. Ensinnäksin $\chi_8(1) = 1$. Koska χ_8 on parillinen, on $\chi_8(7) = \chi_8(-1) = 1$, ja $\chi_8(0) = \chi_8(2) = \chi_8(4) = \chi_8(6) = 0$.

Huomaamalla, että $3^2 \equiv 5^2 \equiv 1 \pmod 8$, on oltava $\chi_8(3) = \pm 1$ ja $\chi_8(5) = \pm 1$. Lisäksi, $5 \equiv -3 \pmod 8$, joten $\chi_8(3) = \chi_8(5)$. Jos molemmat ovat yhtäsuuria kuin 1, niin χ_8 ei ole primitiivinen. Näin ollen $\chi_8(3) = \chi_8(5) = -1$. Lauseen 3.4 mukaan

$$\begin{aligned}\Theta_2(1/4) &= \frac{1}{2}(R_2(1/8) - R_2(5/8))\\ &= -32(H_2(2,1,8) - H_2(2,5,8)).\end{aligned}$$

Käyttämällä Lauseen 3.3 identiteettiä $R(x) = -R(1-x)$ nähdään, että

$$\begin{aligned}\Theta_2(1/4) &= \frac{1}{2}(-R_2(7/8) + R_2(3/8)) \\ &= -32(H_2(2,7,8) - H_2(2,3,8)).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\Theta_2(1/4) &= -16(H_2(2,1,8) - H_2(2,3,8) - H_2(2,5,8) + H_2(2,7,8)) \\ &= -16L_2(2,\chi_8).\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi väite (iv). Jälleen Lauseen 3.3 nojalla

$$R_3(1/6) + R_3(2/3) = 4R_3(1/3) \qquad \text{ja} \qquad R_3(1/3) = -R_3(2/3).$$

Siten

$$R_3(1/6) = 5R_3(1/3) \qquad \text{ja} \qquad R_3(5/6) = -5R_3(1/3).$$

Nyt

$$\Theta_3(1/3) = \frac{1}{2}(R_3(1/6) - R_3(2/3)) = 3R_3(1/3),$$

joten

$$\begin{aligned}\zeta_3(2) &= H_3(2,1,3) + H_3(2,2,3) \\ &= -\frac{1}{9}R_3(1/3) + \frac{1}{9}R_3(2/3) = -\frac{2}{9}R_3(1/3)\end{aligned}$$

eli

$$\Theta_3(1/3) = 3R_3(1/3) = -(27/2)\zeta_3(2).$$

Viimeisen väitteen todistaaksemme huomataan, että

$$\chi_{12}(1) = \chi_{12}(11) = 1 \qquad \text{ja} \qquad \chi_{12}(5) = \chi_{12}(7) = -1.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}L_3(2,\chi_{12}) &= H_3(2,1,12) - H_3(2,5,12) - H_3(2,7,12) + H_3(2,11,12) \\ &= -\frac{1}{144}(R_3(1/12) + R_3(5/12) - R_3(7/12) - R_3(11/12))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{72}(R_3(1/12) - R_3(7/12)) \\
&= -\frac{1}{36}\Theta_3(1/6),
\end{aligned}
$$

mikä todistaa väitteen. □

Lause 5.4. *Olkoon χ_d primitiivinen ja parillinen Dirichlet'n karakteeri modulo d. Tällöin*

(i) $T_2(1/4) = 4^3\zeta_2(3)$;

(ii) $T_3(1/3) = 3^3\zeta_3(3)$;

(iii) $T_5(1/5) = (5^3/2)(\zeta_5(3) + L_5(3,\chi_5))$;

(iv) $T_5(2/5) = (5^3/2)(\zeta_5(3) - L_5(3,\chi_5))$;

(v) $T_2(1/8) = 2^8(\zeta_2(3) + L_2(3,\chi_8))$;

(vi) $T_2(3/8) = 2^8(\zeta_2(3) - L_2(3,\chi_8))$.

Todistus. Määritelmän 4.5 yhteydessä nähtiin, että

$$
H_p(3,a,F) = \frac{\omega(a)^2}{2F^3} T_p\left(\frac{a}{F}\right).
$$

Nyt ensimmäinen väite seuraa identiteetistä $T(x) = T(1-x)$, sillä

$$
\begin{aligned}
T_2(1/4) &= \frac{1}{2}(T_2(1/4) + T_2(3/4)) \\
&= 4^3\left(\frac{H_2(3,1,4)}{\omega(1)^2} + \frac{H_2(3,3,4)}{\omega(3)^2}\right) \\
&= 4^3\zeta_2(3).
\end{aligned}
$$

Edelleen väite (ii) nähdään todeksi vastaavalla laskulla:

$$
\begin{aligned}
T_3(1/3) &= \frac{1}{2}(T_3(1/3) + T_3(2/3)) \\
&= 3^3\left(\frac{H_3(3,1,3)}{\omega(1)^2} + \frac{H_3(3,2,3)}{\omega(2)^2}\right) \\
&= 3^3\zeta_3(3).
\end{aligned}
$$

Todistaaksemme väitteet (iii) ja (iv) huomataan, että χ_5 on parillinen ja primitiivinen, jos ja vain jos

$$\chi_5(1) = \chi_5(4) = 1 \qquad \text{ja} \qquad \chi_5(2) = \chi_5(3) = -1.$$

Koska

$$\begin{aligned}\zeta_5(3) = L_5(3,1) &= \sum_{a=1}^{4} H_5(3,a,5)\\ &= H_5(3,1,5) + H_5(3,2,5) + H_5(3,3,5) + H_5(3,4,5)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}L_5(3,\chi_5) &= \sum_{a=1}^{4} \chi_5(a) H_5(3,a,5)\\ &= H_5(3,1,5) - H_5(3,2,5) - H_5(3,3,5) + H_5(3,4,5),\end{aligned}$$

on tällöin

$$\begin{aligned}\zeta_5(3) + L_5(3,\chi_5) &= 2(H_5(3,1,5) + H_5(3,4,5))\\ &= \frac{\omega(1)^2}{5^3} T_5(1/5) + \frac{\omega(4)^2}{5^3} T_5(4/5)\\ &= \frac{1}{5^3}(T_5(1/5) + T_5(1-1/5))\\ &= \frac{2}{5^3} T_5(1/5)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\zeta_5(3) - L_5(3,\chi_5) &= 2(H_5(3,2,5) + H_5(3,3,5))\\ &= \frac{\omega(2)^2}{5^3} T_5(2/5) + \frac{\omega(3)^2}{5^3} T_5(3/5)\\ &= \frac{1}{5^3}(T_5(2/5) + T_5(1-2/5))\\ &= \frac{2}{5^3} T_5(2/5).\end{aligned}$$

Aikaisemmin olemme todenneet, että χ_8 on parillinen ja primitiivinen, kun

$$\chi_8(1) = \chi_8(7) = 1, \qquad \chi_8(3) = \chi_8(5) = -1$$

ja $\chi_8(0) = \chi_8(2) = \chi_8(4) = \chi_8(6) = 0$. Käyttämällä hyväksi Lausetta 4.7 arvoihin $m = 2, \phi = 1$ ja $F = 4$ nähdään, että

$$\begin{aligned}\zeta_2(3) &= \sum_{\substack{a=1 \\ 2\nmid a}}^{8} H_2(3, a, 8) \\ &= H_2(3,1,8) + H_2(3,3,8) + H_2(3,5,8) + H_2(3,7,8)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}L_2(3, \chi_8) &= \sum_{\substack{a=1 \\ 2\nmid a}}^{8} \chi_8(a) H_2(3, a, 8) \\ &= H_2(3,1,8) - H_2(3,3,8) - H_2(3,5,8) + H_2(3,7,8).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\zeta_2(3) + L_2(3, \chi_8) &= 2(H_2(3,1,8) + H_2(3,7,8)) \\ &= \frac{\omega(1)^2}{8^3} T_2(1/8) + \frac{\omega(7)^2}{8^3} T_2(7/8)) \\ &= \frac{1}{2^9}(T_2(1/8) + T_2(1-1/8)) \\ &= \frac{1}{2^8} T_2(1/8)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\zeta_2(3) - L_2(3, \chi_8) &= 2(H_2(3,3,8) + H_2(3,5,8)) \\ &= \frac{\omega(3)^2}{8^3} T_2(3/8) + \frac{\omega(5)^2}{8^3} T_2(5/8)) \\ &= \frac{1}{2^9}(T_2(3/8) + T_2(1-3/8)) \\ &= \frac{1}{2^8} T_2(3/8).\end{aligned}$$

□

Luku 6

Yleistetyt ketjumurtoluvut

Lauseketta

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ddots}}}$$

sanotaan *yleistetyksi ketjumurtoluvuksi.*

Määritellään jonot U_n ja $V_n, n = -1, 0, 1, 2, \ldots$, rekursioilla

$$U_{-1} = 0, \quad V_{-1} = 1, \quad U_0 = 1, \quad V_0 = a_0,$$

ja

$$V_n = a_n V_{n-1} + b_{n-1} V_{n-2}, \quad U_n = a_n U_{n-1} + b_{n-1} U_{n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Lemma 6.1. *Kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on voimassa*

$$\frac{V_n}{U_n} = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}.$$

Todistus. Väite on selvästi tosi, kun $n = 0$ ja $n = 1$. Oletetaan, että se on tosi kaikilla $n \leq k$. Määritellään jonot a'_n ja b'_n asettamalla

$$a'_n = a_n, \quad b'_n = b_n, \quad \text{kun } n \leq k - 1,$$

ja $a'_k = a_k + b_k/a_{k+1}$. Olkoot V'_n ja U'_n vastaavat konvergentit. Nyt

$$\frac{V'_k}{U'_k} = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_k + \cfrac{b_k}{a_{k+1}}}}}.$$

Mutta toisaalta

$$\begin{aligned}\frac{V'_k}{U'_k} &= \frac{(a_k + (b_k/a_{k+1}))V_{k-1} + b_{k-1}V_{k-2}}{(a_k + (b_k/a_{k+1}))U_{k-1} + b_{k-1}U_{k-2}}\\ &= \frac{(a_{k+1}a_k + b_k)V_{k-1} + a_{k+1}b_{k-1}V_{k-2}}{(a_{k+1}a_k + b_k)U_{k-1} + a_{k+1}b_{k-1}U_{k-2}}\\ &= \frac{a_{k+1}(a_kV_{k-1} + b_{k-1}V_{k-2}) + b_kV_{k-1}}{a_{k+1}(a_kU_{k-1} + b_{k-1}U_{k-2}) + b_kU_{k-1}}\\ &= \frac{a_{k+1}V_k + b_kV_{k-1}}{a_{k+1}U_k + b_kU_{k-1}}\\ &= \frac{V_{k+1}}{U_{k+1}},\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

6.1 Funktio $\Theta(x)$

Tässä kappaleessa osoitamme, että funktiolla $\Theta(x)$ on ketjumurtolukuesitys

$$\Theta(x) = \cfrac{1}{x^2 - x + a_1 - \cfrac{b_1}{x^2 - x + a_2 - \cfrac{b_2}{\ddots}}},$$

missä $a_n = 2n^2 - 2n + 1$ ja $b_n = n^4$.

Olkoon nyt

$$V_{-1} = 1, \quad U_{-1} = 0, \quad V_0 = 0, \quad U_0 = 1,$$

ja

$$V_{n+1} = (x^2 - x + a_{n+1})V_n + b_nV_{n-1},$$

$$U_{n+1} = (x^2 - x + a_{n+1})U_n + b_n U_{n-1}, \qquad n \geq 0.$$

Sijoittamalla $b_0 = -1$ ja $a_n = 2n^2 - 2n + 1$ ja $b_n = n^4$, kun $n \geq 1$, nähdään että

$$\begin{aligned} V_1 &= -1, \\ V_{n+1} &= (x^2 - x + a_{n+1})V_n + b_n V_{n-1} \\ &= (x^2 - x + 2(n+1)^2 - 2(n+1) + 1)V_n - n^4 V_{n-1} \\ &= (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)V_n - n^4 V_{n-1}. \end{aligned}$$

Edelleen sijoittamalla $V_n = (n!)^2 v_n$ saadaan $v_1 = -1$

$$(n+1)^2 v_{n+1} = (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)v_n - n^2 v_{n-1}.$$

Vastaavasti nähdään, että myös U_n ja u_n toteuttavat samat rekursiot kuin V_n ja v_n.

Lasketaan ensimmäiset ratkaisut $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ arvoille v_n ja u_n. Nyt

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0, \\ p_1(x) &= -1, \\ p_2(x) &= -(x^2 - x + 5)/4 \\ p_3(x) &= -(x^4 - 2x^3 + 19x^2 - 18x + 49)/36, \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1, \\ q_1(x) &= x^2 - x + 1, \\ q_2(x) &= (x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 4)/4, \\ q_3(x) &= (x^6 - 3x^5 + 22x^4 - 39x^3 + 85x^2 - 66x + 36)/36, \\ \cdots &= \cdots. \end{aligned}$$

Lause 6.2. *Tarkastellaan generoivaa sarjaa*

$$y_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n.$$

Tällöin $y_0(z)$ on potenssisarjaratkaisu toisen asteen lineaariselle differentiaaliyhtälölle

$$L_2(y) = z(z-1)^2 y'' + (3z-1)(z-1)y' + (z-1+x(1-x))y = 0.$$

Lisäksi, ratkaisu on vakiokerrtointa vaille yksikäsitteinen.

Todistus. Aluksi määrätään generoivan funktion $y_0(z)$ derivaatat:

$$y_0'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n q_n(x) z^{n-1},$$
$$y_0''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) q_n(x) z^{n-2}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} L_2(y_0(z)) &= z(z-1)^2 y_0''(z) + (3z-1)(z-1)y_0'(z) + (z-1+x(1-x))y_0(z) \\ &= (z-1)^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) q_n(x) z^{n-1}\right) + (3z^2-4z+1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n q_n(x) z^{n-1}\right) \\ &\quad + z\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n\right) + (-x^2+x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n\right). \end{aligned}$$

Järjestämällä rekursio

$$(n+1)^2 q_{n+1}(x) = (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1) q_n(x) - n^2 q_{n-1}(x)$$

muotoon

$$(-x^2+x-1) q_n(x) = (2n^2+2n) q_n(x) - (n+1)^2 q_{n+1}(x) - n^2 q_{n-1}(x)$$

nähdään, että

$$\begin{aligned} L_2(y_0(z)) = (z-1)^2 &\sum_{n=2}^{\infty} (n^2-n) q_n(x) z^{n-1} + (3z^2-4z+1)\sum_{n=1}^{\infty} n q_n(x) z^{n-1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2+2n) q_n(x) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 q_{n+1}(x) z^n \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_{n-1}(x) z^n + (-x^2+x-1) q_0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)q_n(x)(z^{n+1}-2z^n+z^{n-1}) + \sum_{n=2}^{\infty} nq_n(x)(3z^{n+1}-4z^n+z^{n-1}) \\
&\quad + q_1(x)(3z^2-4z+1) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(x)z^{n+1} + q_0(x)z + q_1(x)z^2 \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}(2n^2+2n)q_n(x)z^n - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 q_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2 q_n(x)z^{n+1} \\
&\quad + 4q_1(x)z - q_0(x)z - 4q_1(x)z^2 + (-x^2+x-1)q_0(x) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n+3n+1-(n+1)^2)q_n(x)z^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}(-2(n^2-n)-4n+(2n^2+2n))q_n(x)z^n \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}((n^2-n)+n-n^2)q_n(x)z^{n-1} \\
&\quad + (3z^2-4z+1)q_1(x) + 4q_1(x)z - 3q_1(x)z^2 - x^2 + x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen $y_0(z)$ on ratkaisu kyseiseen differentiaaliyhtälöön, ja potenssisarjaratkaisuna se on vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen. □

Lause 6.3. *Olkoon $F(a,b,c;z)$ Liitteessä B määritelty hypergeometrinen sarja. Tällöin*

$$y_0(z) = (1-z)^{x-1}F(x,x,1;z).$$

Todistus. Edellisen lauseen nojalla $y_0(z)$ on yhtälön $L_2(y)=0$ vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen potenssisarjaratkaisu. Olkoon $y(z)$ mielivaltainen ratkaisu ja kirjoitetaan $w(z) = y(z)/(1-z)^{x-1}$. Liitteen B mukaan hypergeometrinen sarja $F(a,b,c;z)$ on Eulerin hypergeometrisen differentiaaliyhtälön

$$z(1-z)w'' + (c-(a+b+1)z)w' - abw = 0$$

ratkaisu. Nyt

$$y'(z) = (1-z)^{x-1}w'(z) + (1-x)(1-z)^{x-2}w(z)$$

ja

$$y''(z) = (1-z)^{x-1}w''(z) + 2(1-x)(1-z)^{x-2}w'(z) + (1-x)(2-x)(1-z)^{x-3}w(z).$$

Sijoittamalla yllä saadut derivaatat yhtälöön $L_2(y) = 0$ saadaan

$$\begin{aligned}
&z(1-z)^2[(1-z)^{x-1}w''(z) + 2(1-x)(1-z)^{x-2}w'(z)] \\
&\quad + z(1-z)^2[(1-x)(2-x)(1-z)^{x-3}w(z)] \\
&\qquad + (3z-1)(z-1)[(1-z)^{x-1}w'(z) + (1-x)(1-z)^{x-2}w(z)] \\
&\qquad\quad + (z-1+x(1-x))(1-z)^{x-1}w(z) = 0.
\end{aligned}$$

Järjestämällä termit uudelleen ja jakamalla termillä $(1-z)^x$ nähdään, että

$$z(z-1)w''(z) + (1-(1+2x)z)w'(z) - x^2w(z) = 0.$$

Näin ollen $w(z)$ toteuttaa Eulerin hypergeometrisen differentiaaliyhtälön parametreillä $a = b = x$ ja $c = 1$. Nyt pisteen $z = 0$ ympärillä ja parametrillä $c = 1$ saadaan, että

$$w(z) = F(x, x, 1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n(x)_n}{(1)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Edelleen, koska $y_0(z)$ on potenssisarjana yksikäsitteinen yhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisu, on oltava $y_0(z) = (1-z)^{x-1}F(x, x, 1; z)$. □

Lause 6.4.

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-x)_{n-k}(x)_k^2}{(n-k)!(k!)^2}.$$

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
y_0(z) &= (1-z)^{x-1}F(x, x, 1; z) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x-1}{n}(-z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n(x)_n}{(1)_n}\frac{z^n}{n!}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}(-1)^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n^2}{(n!)^2}z^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n^2}{(n!)^2}z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-x)_{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{(x)_k^2}{(k!)^2}\right)z^n,
\end{aligned}$$

josta väite seuraa kertoimia vertailemalla. □

Lause 6.5. *Olkoon*

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) z^n.$$

Tällöin $L_2(y_1(z)) = 1$.

Todistus. Käyttämällä hyväksi tietoa, että $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ toteuttavat samat rekursiot sekä Lauseen 6.2 termien järjestelyä, nähdään että

$$L_2(y_1(z)) = p_1(x)(3z^2 - 4z + 1) + 4p_1(x)z - 3p_1(x)z^2 = p_1(x) = 1.$$

□

Määritelmä 6.6. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\Theta(n, x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Lause 6.7. *Kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *on Laurentin sarjoina voimassa*

$$p_n(x) + q_n(x)\Theta(x) = \Theta(n, x).$$

Todistus. Merkitään

$$F(k, n) = (-1)^n \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\begin{aligned}
&n^2 F(k, n-1) - (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)F(k, n) + (n+1)^2 F(k, n+1) \\
&\quad = n^2 (-1)^{n-1} \binom{k}{n-1} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\qquad\quad - (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)(-1)^n \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad + (n+1)^2 (-1)^{n+1} \binom{k}{n+1} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\quad = F(k, n) \left(-n^2 \cdot \frac{n}{k-n+1} - (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1) - (n+1)^2 \cdot \frac{k-n}{n+1} \right) \\
&\quad = F(k, n) \left(\frac{-n^3 + (k-n+1)(-x^2 + x - 2n^2 - 2n - 1 - (n+1)(k-n))}{k-n+1} \right).
\end{aligned}$$

Huomaamalla, että

$$\begin{aligned}
-n^3+&(k-n+1)(-x^2+x-2n^2-2n-1-(n+1)(k-n)) \\
&= -n^3+(k-n+1)(xk+x-x^2+k^2+k-xk) \\
&\qquad +(k-n+1)(-k^2-k-n^2-n-1-nk-k) \\
&= -n^3+(k-n+1)(x+k)(k+1-x)-(k+1)^3 \\
&\qquad +(k+1)(-n^2-n-nk)-n(-k^2-k-n^2-n-1-nk-k) \\
&= -n^3+(k-n+1)(x+k)(k+1-x)-(k+1)^3 \\
&\qquad -n(k+1)(n+1+k)+n^3+n(k^2+2k+1+n+nk) \\
&= (k-n+1)(x+k)(k+1-x)-(k+1)^3 \\
&\qquad -n(k+1)(n+1+k)+n((k+1)^2+n(k+1)) \\
&= (k-n+1)(x+k)(k+1-x)-(k+1)^3 \\
&\qquad -n(k+1)(n+k+1)+n(k+1)(n+k+1) \\
&= (k-n+1)(x+k)(k+1-x)-(k+1)^3,
\end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
n^2F(k,n-1)&-(x^2-x+2n^2+2n+1)F(k,n)+(n+1)^2F(k,n+1) \\
&= F(k,n)\left((x+k)(k+1-x)-\frac{(k+1)^3}{k-n+1}\right) \\
&= F(k,n)(x+k)(k+1-x) \\
&\qquad -(-1)^n\binom{k+1}{n}\begin{bmatrix}k+1\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+1\\ 1-x\end{bmatrix}(x+k+1)(k+2-x) \\
&= F(k,n)(x+k)(k+1-x)-F(k+1,n)(x+k+1)(k+2-x) \\
&= -\Delta_k(F(k,n)(x+k)(k+1-x)).
\end{aligned}$$

Näin ollen summaus yli kokonaislukujen $k \geq 0$ antaa

$$\begin{aligned}
n^2\Theta(n-1,x)-(x^2-x+2n^2+2n+1)\Theta(n,x)+(n+1)^2\Theta(n+1,x) \\
= -\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(F(k,n)(x+k)(k+1-x)) \\
= F(0,n)(x+0)(1-x) = 0,
\end{aligned}$$

sillä $\binom{0}{n} = 0$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, ja $F(0,0)(x+0)(1-x) = 1$. Edelleen järjestämällä uusiksi saadaan

$$(n+1)^2\Theta(n+1,x) = (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)\Theta(n,x) - n^2\Theta(n-1,x),$$

joka on sama rekursio, jonka $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ toteuttavat. Koska

$$\Theta(0,x) = \Theta(x) \quad \text{ja} \quad \Theta(1,x) = 1 + (x^2 - x + 1)\Theta(0,x),$$

niin induktiolla saadaan, että

$$p_n(x) + q_n(x)\Theta(x) = \Theta(n,x).$$

□

Koska nyt konvergentit $p_n(x)/q_n(x)$ vastaavat ketjumurtolukua

$$\cfrac{-1}{x^2 - x + a_1 - \cfrac{b_1}{x^2 - x + a_2 - \cfrac{b_2}{\ddots}}},$$

niin saadaan

$$\Theta(x) = \cfrac{1}{x^2 - x + a_1 - \cfrac{b_1}{x^2 - x + a_2 - \cfrac{b_2}{\ddots}}},$$

missä $a_n = 2n^2 - 2n + 1$ ja $b_n = n^4$.

6.2 Funktio $R(x)$

Tässä kappaleessa osoitamme, että funktiolla $R(x)$ on ketjumurtolukuesitys

$$R(x) = \cfrac{-2}{2x - 1 + \cfrac{b_1}{2x - 1 + \cfrac{b_2}{\ddots}}},$$

missä $b_n = n^4/(4n^2-1)$. Tarkastellaan konvergentteja V_n/U_n. Tällöin

$$V_{n+1} = (2x-1)V_n + \frac{n^4}{4n^2-1}V_{n-1}.$$

Sijoitetaan $V_n = (n!)^2 v_n/(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))$, jolloin saadaan

$$(n+1)^2 v_{n+1} = (2n+1)(2x-1)v_n + n^2 v_{n-1}.$$

Vastaavasti nähdään, että U_n ja u_n toteuttavat samat rekursiot. Määrätään nyt muutama yllä olevan rekursion toteuttavat $p_n(x)$ ja $q_n(x)$:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 0,\\
p_1(x) &= -2,\\
p_2(x) &= -(6x-3)/2,\\
p_3(x) &= -(60x^2-60x+31)/18,\\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1,\\
q_1(x) &= 2x-1,\\
q_2(x) &= 3x^2-3x+1,\\
q_3(x) &= (10x^3-15x^2+11x-3)/3,\\
\cdots &= \cdots .
\end{aligned}$$

Lause 6.8. *Tarkastellaan generoivaa sarjaa*

$$y_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n.$$

Tällöin $y_0(z)$ on toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$L_2(y) = (z^3-z)y'' + (3z^2+(4x-2)z-1)y' + (z+2x-1)y = 0$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Sijoittamalla funktion $y_0(z)$ derivaatat differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
L_2(y_0(z)) &= (z^3 - z)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^{n-2} \\
&\quad + (3z^2 + (4x-2)z - 1)\sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^{n-1} \\
&\qquad + (z + 2x - 1)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^{n-1} \\
&\quad + 3\sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^{n+1} + (4x-2)\sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^n \\
&\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^{n+1} + (2x-1)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + 2n + 1)q_n(x)z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} ((4x-2)n + (2x-1))q_n(x)z^n \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 q_n(x)z^{n-1} + 4q_1(x)z^2 q_0(x)z - q_1(x) + (2x-1)q_0(x) \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 q_{n-1}(x) + (2n-1)(2x-1)q_n(x))z^n \\
- &\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 q_{n+1} z^n + 4q_1(x)z^2 + 5(2x-1)q_2(x)z^2 \\
&\qquad + 3(2x-1)q_1(x)z + q_0(x)z - q_1(x) + (2x-1)q_0(x) \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)^2 q_{n+1}(x)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 q_{n+1}(x)z^n \\
&\quad (4q_1(x) + 5(2x-1)q_2(x))z^2 + (q_0(x) + 3(2x-1)q_1(x))z \\
&\qquad - q_1(x) + (2x-1)q_0(x) \\
&= [4q_1(x) + 5(2x-1)q_2(x) - 9q_3(x)]z^2 \\
&\quad + [q_0(x) + 3(2x-1)q_1(x) - 4q_2(x)]z \\
&\qquad - q_1(x) + (2x-1)q_0(x) = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen $y_0(z)$ on differentiaaliyhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisu ja se on potenssisarjana yksikäsitteinen. $\square$

Lause 6.9. *Olkoon $F(a, b, c; z)$ hypergeometrinen sarja. Tällöin*

$$y_0(z) = (1 + z)^{2x-1} F(x, x, 1; z^2).$$

Todistus. Olkoon $y(z)$ mielivaltainen differentiaaliyhtälön $L_2(y) = 0$ ratkaisu. Merkitään $w(z) = y(z)/(1 + z)^{2x-1}$. Tällöin

$$y'(z) = (1 + z)^{2x-1} w'(z) + (2x - 1)(1 + z)^{2x-2} w(z)$$

ja

$$y''(z) = (1+z)^{2x-1} w''(z)+2(2x-1)(1+z)^{2x-2} w'(z)+(2x-2)(2x-1)(1+z)^{2x-3},$$

joten

$$\begin{aligned}
&(z^3 - z)((1 + z)^{2x-1} w''(z) + 2(2x - 1)(1 + z)^{2x-2} w'(z)) \\
&\quad + (z^3 - z)((2x - 2)(2x - 1)(1 + z)^{2x-3}) \\
&\qquad + (3z^2 + (4x - 2)z - 1)((1 + z)^{2x-1} w'(z) + (2x - 1)(1 + z)^{2x-2} w(z)) \\
&\qquad + (z + 2x - 1)((1 + z)^{2x-1} w(z)) = 0.
\end{aligned}$$

Edelleen järjestämällä termit uudelleen ja jakamalla termillä $(1 + z)^{2x-1}$ saadaan

$$z(1 - z^2) w''(z) + (1 - (4x - 2)z^2) w'(z) - 4x^2 x w(z) = 0.$$

Suoraviivainen lasku osoittaa, että $F(x, x, 1; z^2)$ toteuttaa yllä olevan differentiaaliyhtälön. Näin ollen potenssisarjaratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla

$$y_0(z) = (1 + z)^{2x-1} F(x, x, 1; z^2).$$

$\square$

Lause 6.10.

$$q_n(x) = \sum_{k \le n/2} \binom{2x - 1}{n - 2k} \binom{-x}{x}^2.$$

Todistus. Edellisen lauseen perusteella

$$\begin{aligned}
y_0(z) &= (1+z)^{2x-1}F(x,x,1;z^2)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2x-1}{n}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n^2}{(n!)^2}z^{2n}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+2k=n}\binom{2x-1}{l}\frac{(x)_k^2}{(k!)^2}\right)z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\le n/2}\binom{2x-1}{n-2k}\left[\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}\right]^2\right)z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\le n/2}\binom{2x-1}{n-2k}\left[\frac{-x(-x+1)\cdots(-x-k+1)}{k!}\right]^2\right)z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\le n/2}\binom{2x-1}{n-2k}\binom{-x}{k}^2\right)z^n,
\end{aligned}$$

josta kertoimia vertailemalla saadaan haluttu tulos. □

Lause 6.11. *Olkoon $y_1(z)$ generoiva sarja*

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)z^n.$$

Tällöin $L_2(y_1(z)) = 2$.

Todistus. Koska $p_n(x)$ toteuttaa saman rekursion kuin $q_n(x)$ voidaan käyttää hyväksi Lauseen 6.8 todistusta, jolloin saadaan

$$L_2(y_1(z)) = -p_1(x) + (2x-1)p_0(x) = 2.$$

□

Määritelmä 6.12. Asetetaan

$$R(n,x) = (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}\begin{bmatrix}k\\x\end{bmatrix}.$$

Lause 6.13. *Kaikilla $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ on Laurentin sarjoina voimassa*

$$p_n(x) - q_n(x)R(x) = R(n,x).$$

Todistus. Merkitään

$$\begin{aligned}F(k,n) &= (-1)^n \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}&-n^2F(k,n-1) - (2n+1)(2x-1)F(k,n) + (n+1)^2F(k,n+1) \\ &\quad = -n^2(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k+1)\cdots(k+n)}\binom{k}{n-1}\begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \\ &\qquad - (2n+1)(2x-1)(-1)^n \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)}\binom{k}{n}\begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \\ &\qquad\quad + (n+1)^2(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)\cdots(k+n+2)}\binom{k}{n+1}\begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \\ &\quad = F(k,n)\left(\frac{n^2(k+n+1)}{k-n+1} - (2n+1)(2x-1) - (n+1)^2\frac{k-n}{k+n+2}\right).\end{aligned}$$

Edelleen suluissa olevalle lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{n^2(k+n+1)}{k-n+1} - (2n+1)(2x-1) - (n+1)^2\frac{k-n}{k+n+2} \\ &\quad = -2(2n+1)(x+k) + (2n+1)(2k+1) \\ &\qquad + \frac{n^2(k+n+1)}{k-n+1} - (n+1)^2\frac{k-n}{k+n+2} \\ &\quad = -2(2n+1)(x+k) \\ &\qquad + \frac{(2n+1)(2k+1)(k-n+1)(k+n+2)}{(k-n+1)(k+n+2)} \\ &\qquad\quad + \frac{n^2(k+n+1)(k+n+2)}{(k-n+1)(k+n+2)} \\ &\qquad\qquad - \frac{(n+1)^2(k-n)(k-n+1)}{(k-n+1)(k+n+2)}.\end{aligned}$$

Kertomalla nyt kolmesta viimeisestä termistä sulut auki ja sieventämällä nähdään, että

$$\frac{n^2(k+n+1)}{k-n+1} - (2n+1)(2x-1) - (n+1)^2\frac{k-n}{k+n+2}$$

$$= -2(2n+1)(x+k) + \frac{2(2n+1)(k+1)^3}{k-n+1)(k+n+2)}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
-n^2F(k,n-1) &- (2n+1)(2x-1)F(k,n) + (n+1)^2F(k,n+1) \\
&= F(k,n)\left(-(2(2n+1)(x+k) + \frac{2(2n+1)(k+1)^3}{(k-n+1)(k+n+2)})\right) \\
&= 2F(k+1,n)(2n+1)(x+k+1) - 2F(k,n)(2n+1)(x+k) \\
&= \Delta_k(2F(k,n)(2n+1)(x+k)).
\end{aligned}$$

Nyt summaamalla yli indeksin k saadaan

$$-n^2R(k,n-1) - (2n+1)(2x-1)R(k,n) + (n+1)^2R(k,n+1)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(2F(k,n)(2n+1)(x+k)) = 0,$$

kun $n \geq 1$. Kun $n = 0$ saadaan

$$R(1,x) = -2 + (2x-1)R(0,x).$$

Koska nyt $R(0,x) = -R(x)$, niin induktiolla nähdään, että

$$p_n(x) - q_n(x)R(x) = R(n,x).$$

kaikilla $n \geq 0$. □

6.3 Funktio $T(x)$

Tässä kappaleessa osoitamme, että funktiolla $T(x)$ on ketjumurtolukuesitys

$$T(x) = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{b_1}{a_2 - \cfrac{b_2}{a_3 - \cfrac{b_3}{\ddots}}}},$$

missä $a_n = (2n-1)(2x^2-2x+n^2-n+1)$ ja $b_n = n^6$.

Tarkastellaan rekursioita

$$V_{-1} = 1, \qquad U_{-1} = 0, \qquad V_0 = 0, \qquad U_0 = 1,$$

ja

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (2n+1)(2x^2-2x+n^2-n+1)V_n - b_n V_{n-1}, \\ U_{n+1} &= (2n+1)(2x^2-2x+n^2-n+1)U_n - b_n U_{n-1}, \end{aligned}$$

jolloin $V_1 = 1$ ja $U_1 = 2x^2-2x+1$. Sijoittamalla $V_n = (n!)^3 v_n$ saadaan

$$(n+1)^3 v_{n+1} = (2n+1)(2x^2-2x+n^2+n+1)v_n - n^3 v_{n-1}.$$

Vastaavasti nähdään, että U_n ja u_n toteuttavat samat rekursiot kuin V_n ja v_n.

Lasketaan muutamat ratkaisut $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ termeille v_n ja u_n. On jälleen huomioitava, että jonon $p_n(x)/q_n(x)$ alkiot ovat tarkasteltavan ketjumurtoluvun konvergentit. Nyt

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0, \\ p_1(x) &= 1, \\ p_2(x) &= 3(2x^2-2x+3)/4, \\ p_3(x) &= (60x^4-120x^3+360x^2-300x+251)/108, \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1, \\ q_1(x) &= 2x^2-2x+1, \\ q_2(x) &= (3x^4-6x^3+9x^2-6x+2)/2, \\ q_3(x) &= (10x^6-35x^5+85x^4-120x^3+121x^2-66x+18)/18, \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Lause 6.14. *Tarkastellaan generoivaa sarjaa*

$$Y_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n.$$

Tällöin $Y_0(z)$ on lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned} L_3(y) = {} & z^2(z-1)^2 y''' + 3z(2z-1)(z-1)y'' \\ & + (7z^2 - (4x^2 - 4x + 8)z + 1)y' + (z - 2x^2 + 2x - 1)y = 0 \end{aligned}$$

ratkaisu.

Todistus. Sijoittamalla funktion $Y_0(z)$ derivaatat termeihin eriksiin nähdään, että

$$\begin{aligned} z^2(z-1)^2 Y_0'''(z) = {} & \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)q_n z^{n-1} \\ & - 2\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)q_n z^n \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)q_n z^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3z(2z-1)(z-1)Y_0''(z) = {} & 3\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^{n-1} - 9\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^n \\ & + 6\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q_n(x)z^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7z^2 - (4x^2 - 4x + 8)z + 1)Y_0'(z) = {} & \sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^{n-1} - (4x^2 - 4x + 8)\sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^n \\ & + 7\sum_{n=1}^{\infty} nq_n(x)z^{n+1} \end{aligned}$$

ja

$$(z - 2x^2 + 2x - 1)Y_0(z) = -(2x^2 - 2x + 1)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^{n+1}.$$

Koska nyt

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n)q_n(x)z^{n-1}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}(n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n + n)q_n(x)z^{n-1}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^3 q_{n+1}(x)z^n,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-2n(n-1)(n-2) - 9n(n-1) - (4x^2 - 4x + 8)n - (2x^2 - 2x + 1))q_n(x)z^n$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}(-2n^3 + 6n^2 - 4n - 9n^2 + 9n - (2n+1)(2x^2 - 2x + 1) - 6n)q_n(x)z^n$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}(-(2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1))q_n(x)z^n$$

ja

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1)q_n(x)z^{n+1}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}(n^3 - 3n^2 + 2n + 6n^2 - 6n + 7n + 1)q_n(x)z^{n+1}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)q_n(x)z^{n+1}$$
$$= \sum_{n=4}^{\infty} n^3 q_{n-1}(x)z^n,$$

niin käyttämällä rekursiota yllä oleviin summiin ja jäljelle jääneisiin termeihin nähdään, että

$$L_3(Y_0(z)) = 0.$$

□

Lause 6.15. *Funktio $q_n(x)$ voidaan lausua muodossa*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{-x}{k}\binom{-x+k}{k}.$$

Todistus. Todistus löytyy M. Prévostin työstä [3]. □

Lause 6.16. *Olkoon $Y_1(z)$ generoiva sarja*

$$Y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) z^n.$$

Tällöin $L_3(Y_1(z)) = 2$.

Todistus. Käyttämällä hyväksi Lauseen 6.14 todistusta nähdään, että

$$L_3(Y_1(z)) = p_1(x) - (2x^2 - 2x + 1)p_0(x) = 2.$$

$\square$

Määritelmä 6.17. Asetetaan

$$T(n,x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k-n+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Lause 6.18. *Kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on Laurentin sarjoina voimassa*

$$p_n(x) - q_n(x)T(x) = T(n,x).$$

Todistus. Merkitään

$$F(k,n) = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&n^3 F(k,n-1) - (2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + n1)F(k,n) + (n+1)^3 F(k,n+1) \\
&\quad = n^3(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k+1)\cdots(k+n)} \binom{k}{n-1} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\qquad - (2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1)F(k,n) \\
&\qquad\quad + (n+1)^3(-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)\cdots(k+n+2)} \binom{k}{n+1} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\quad = F(k,n) \left(-\frac{n^3(k+n+1)}{k-n+1} - (2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1) - \frac{(n+1)^3(k-n)}{k+n+2} \right),
\end{aligned}$$

missä edelleen

$$-(2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1) = 2(2n+1)(x+k)(1-x+k)$$

$$- (2n+1)(n^2+n+1+2k^2+2k).$$

Koska nyt suora lasku osoittaa, että

$$-n^3(k+n+1)(k+n+2) - (2n+1)(n^2+n+1+2k^2+2k)(k-n+1)(k+n+2) \\ - (n+1)^3(k-n)(k-n+1) = -2(2n+1)(k+1)^4,$$

niin saadaan

$$\begin{aligned} &n^3F(k,n-1) - (2n+1)(2x^2-2x+n^2+n+n1)F(k,n) + (n+1)^3F(k,n+1) \\ &\quad = F(k,n)\left(2(2n+1)(x+k)(1-x+k) - \frac{2(2n+1)(k+1)^4}{(k-n+1)(k+n+2)}\right) \\ &\quad = 2(2n+1)(x+k)(1-x+k)F(k,n) - 2(2n+1)(x+k+1)(2-x+k)F(k+1,n) \\ &\quad = -\Delta_k(2(2n+1)(x+k)(1-x+k)F(k,n)). \end{aligned}$$

Summaamalla yli indeksin k nähdään, että

$$n^3T(k,n-1)-(2n+1)(2x^2-2x+n^2+n+n1)T(k,n)+(n+1)^3T(k,n+1) = 0,$$

kun $n \geq 1$. Vastaavasti saadaan

$$T(1,x) = 2 + (2x^2-2x+1)T(0,x),$$

kun $n = 0$. Näin ollen induktiolla nähdään, että

$$p_n(x) - q_n(x)T(x) = T(n,x)$$

kaikilla $n \geq 0$. $\square$

Luku 7

Irrationaalisuuskriteerit

Tässä kappaleessa osoitamme eräät kriteerit, milloin funktioiden $\Theta(x), R(x)$ ja $T(x)$ p-adiset arvot $\Theta_p(x), R_p(x)$ ja $T_p(x)$ ovat irrationaalisia. Jatkossa $x = a/F$ sekä p on alkuluku, joka jakaa luonnollisen luvun F ja a ei ole jaollinen alkuluvulla p.

7.1 Funktio $\Theta(x)$

Olkoon nyt $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ määritelty kuten kappaleessa 6.1 eli rekursioilla

$$(n+1)^2 p_{n+1}(x) = (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)p_n(x) - n^2 p_{n-1}(x),$$
$$(n+1)^2 q_{n+1}(x) = (x^2 - x + 2n^2 + 2n + 1)q_n(x) - n^2 q_{n-1}(x).$$

Olkoon lisäksi $\mu_n(F)$ Lemmassa 1.4 määritelty luku

$$\mu_n(F) = F^n \prod_{q|F} q^{\lfloor n/(q-1) \rfloor},$$

missä tulo on yli alkulukujen q, jotka jakavat luvun F.

Lause 7.1. *(i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $q_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)^2$.*

(ii) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $p_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$.

(iii) Kun n on riittävän suuri, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on $|p_n(a/F)|, |q_n(a/F)| < e^{\epsilon n}$.

(iv) Olkoon $p^r || F$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|p_n(a/F) - q_n(a/F)\Theta_p(a/F)|_p \leq p^2 n^2 p^{-2n(r+1/(p-1))}.$$

Todistus. Ensimmäisen väitteen todistamiseksi hyödynnetään Lausetta 6.4, jonka mukaan

$$q_n(a/F) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-a/F)_{n-k}(a/F)_k^2}{(n-k)!(k!)^2}.$$

Tarkastellaan termejä erikseen ja käytetään hyväksi Lemmaa 1.4. Nyt luvun $(1-a/F)_{n-k}/(n-k)!$ nimittäjä jakaa luvun $\mu_{n-k}(F)$ ja luvun $(a/F)_k^2/(k!)^2$ nimittäjä jakaa luvun $\mu_k(F)^2$. Näin ollen jokaisen termin nimittäjä jakaa luvun

$$\begin{aligned}
\mu_{n-k}(F) \cdot \mu_k(F)^2 &= F^{n-k} \prod_{q|F} q^{\left\lfloor \frac{n-k}{q-1} \right\rfloor} \cdot F^k \prod_{q|F} q^{\left\lfloor \frac{k}{q-1} \right\rfloor} \cdot \mu_k(F) \\
&= F^n \prod_{q|F} q^{\left\lfloor \frac{n-k}{q-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q-1} \right\rfloor} \cdot \mu_k(F) \\
&\leq F^n \prod_{q|F} q^{\left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor} \cdot \mu_k(F) \\
&= \mu_n(F) \cdot \mu_k(F) \leq \mu_n(F)^2.
\end{aligned}$$

Täten jokaisen termin nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)^2$ ja siten myös luvun $q_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)^2$.

Osoitetaan Lauseen 2.7 avulla, että luvun $p_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun $\text{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$. Lauseen 6.2 mukaan generoiva funktio $y_0(z)$ toteuttaa toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$L_2(y) = z(z-1)^2 y'' + (3z-1)(z-1)y' + \left(z - 1 + \frac{a}{F}\left(1 - \frac{a}{F}\right)\right) y = 0.$$

Nyt kertoimet eivät kuitenkaan ole kokonaisia. Määritellään

$$\lambda = \prod_{q|F} q^{\frac{1}{q-1}},$$

ja tehdään sijoitus $z \mapsto F^2\lambda^2 z$ differentiaaliyhtälöön $L_2(y) = 0$, jolloin

$$\begin{aligned}F^2\lambda^2 z(F^2\lambda^2 z - 1)^2 y''(F^2\lambda^2 z) + (3F^2\lambda^2 z - 1)(F^2\lambda^2 z - 1)y'(F^2\lambda^2 z)& \\ + \frac{1}{F^2\lambda^2}(F^4\lambda^4 z - F^2\lambda^2 + aF\lambda^2 - a^2\lambda^2)y(F^2\lambda^2 z) &= 0.\end{aligned}$$

Edelleen sijoittamalla derivaatat

$$\begin{aligned}y(z) &\mapsto y(F^2\lambda^2 z),\\ y'(z) &\mapsto F^2\lambda^2 y'(F^2\lambda^2 z),\\ y''(z) &\mapsto F^4\lambda^4 y''(F^2\lambda^2 z),\end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned}z(F^2\lambda^2 z - 1)^2 y''(z) + (3F^2\lambda^2 z - 1)(F^2\lambda^2 z - 1)y'(z)& \\ + (F^4\lambda^4 z - F^2\lambda^2 + aF\lambda^2 - a^2\lambda^2)y(z) &= 0.\end{aligned}$$

Valitaan rengas $R = \mathbb{Z}[\lambda]$, jolloin $y_0(F^2\lambda^2 z) \in R[[z]]$ on yhtälön $L_2(y) = 0$ potenssisarjaratkaisu ja siten yksikäsitteinen. Edelleen $y_0(0) = 1$, ja jos $p(z) = (F^2\lambda^2 z - 1)^2$, niin $p(0) = 1$. Vastaavat laskut osoittavat, että $y_1(F^2\lambda^2 z) \in Q(R)[[z]]$ on yksikäsitteinen differentiaaliyhtälön $L_2(y) = 1$ ratkaisu. Näin ollen Lauseen 2.7 nojalla nähdään, että luvun $p_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun $\text{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$.

Kolmas väite seuraa suoraan lukujen $p_n(a/F)$ ja $q_n(a/F)$ rekursioista, jolloin suhdetestin nojalla suppenemissäde generoiville sarjoille on 1.

Todistaaksemme viimeisen väitteen käytämme hyväksi aiempia tuloksia ja ultrametristä epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}|p_n(a/F) - q_n(a/F)\Theta_p(a/F)|_p &= |\Theta_p(n, a/F)|_p \\ &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ a/F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 - a/F \end{bmatrix}\right|_p \\ &\le \max_{n \le k \le \infty} \left\{ \left| \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ a/F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 - a/F \end{bmatrix} \right|_p \right\},\end{aligned}$$

missä binomikertoimet häviävät, kun $n > k$. Merkitään $k = \alpha + n$, missä $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tällöin saadaan yläraja binomikertoimille, nimittäin

$$\begin{aligned}\left|\binom{k}{n}\right|_p = \left|\binom{\alpha+n}{n}\right|_p &= \left|\frac{(\alpha+n)\cdots n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{\alpha! n!}\right|_p \\ &= \left|\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\alpha)}{1\cdot 2\cdots\alpha}\right|_p \leq \left|\frac{\alpha!}{\alpha!}\right|_p = 1.\end{aligned}$$

On selvää, että saadaan yläraja binomikertoimille, kun $k = n$. Edelleen Lemman 1.4 nojalla

$$\begin{aligned}\left|\begin{bmatrix} k \\ a/F\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ 1-a/F\end{bmatrix}\right|_p &= \left|\frac{k!}{a/F\cdots(a/F+k)}\cdot\frac{k!}{(1-a/F)\cdots(k+1-a/F)}\right|_p \\ &= \left|\frac{k!}{(a/F)_k(a/F+k)}\cdot\frac{k!}{(1-a/F)_k(k+1-a/F)}\right|_p \\ &\leq \left|\frac{F}{a+Fk}\cdot\frac{F}{Fk+F-a}\right|_p \cdot p^{-2\left(k\left(r+\frac{1}{p-1}-\frac{\log k}{\log p}-1\right)\right)} \\ &< p^{-2\left(k\left(r+\frac{1}{p-1}-\frac{\log k}{\log p}-1\right)\right)} \\ &= p^2k^2p^{-2k\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.\end{aligned}$$

Jälleen suurin arvo saadaan, kun $k = n$, joten

$$|\Theta_p(a/F)|_p < p^2n^2p^{-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.$$

$\square$

Lause 7.2. *Olkoon p annettu alkuluku ja r sellainen luonnollinen luku, jolle $|F|_p = p^{-r}$. Olkoon*

$$\log F + \sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1} + 1 < 2r\log p + \frac{2\log p}{p-1},$$

missä summaus on yli kaikkien alkulukujen q, jotka jakavat luvun F. Tällöin $\Theta_p(a/F)$ on irrationaalinen.

Todistus. Ensiksi haluamme osoittaa, että

$$p_n(x) - q_n(x)\Theta_p(x)$$

on erisuuri kuin nolla äärettömän monella arvolla $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että lausekkeet

$$p_n(x) - q_n(x)\Theta_p(x) = 0$$

ja

$$p_{n+1}(x) - q_{n+1}(x)\Theta_p(x) = 0$$

eivät voi olla voimassa yhtä aikaa. Mikäli näin on, niin

$$q_{n+1}(x)p_n(x) - q_{n+1}(x)q_n(x)\Theta_p(x) = 0$$

ja

$$q_n(x)p_{n+1}(x) - q_n(x)q_{n+1}(x)\Theta_p(x) = 0.$$

Vähentämällä nämä toisistaan saadaan

$$p_{n+1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n+1}(x) = 0.$$

Osoitetaan induktiolla, että

$$p_{n+1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Kun $n = 0$, saadaan

$$p_1(x)q_0(x) - p_0(x)q_1(x) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (x^2 - x + 1) = 1.$$

Oletetaan, että väite on tosi arvoilla $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Käytetään nyt luvun alussa annettuja rekursioita, jolloin

$$\begin{aligned}
&p_{k+1}(x)q_k(x) - p_k(x)q_{k+1}(x) \\
&\quad = \frac{1}{(k+1)^2}((x^2 - x + 2k^2 + 2k + 1)p_k(x) - k^2 p_{k-1}(x))q_k(x) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{(k+1)^2}((x^2 - x + 2k^2 + 2k + 1)q_k(x) - k^2 q_{k-1}(x))p_k(x) \\
&\quad = \frac{1}{(k+1)^2}((x^2 - x + 2k^2 + 2k + 1)p_k(a/F)q_k(x) - k^2 p_{k-1}(x)q_k(x)) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{(k+1)^2}((x^2 - x + 2k^2 + 2k + 1)q_k(x)p_k(a/F) - k^2 q_{k-1}(x)p_k(x))
\end{aligned}$$

$$= \frac{k^2}{(k+1)^2}(p_k(x)q_{k-1}(x) - p_{k-1}(x)q_k(x)) = \frac{1}{(k+1)^2},$$

missä viimeisessä vaiheessa on käytetty induktiohypoteesiä.

Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 7.1 nojalla termien $p_n(a/F)$ ja $q_n(a/F)$ yhteinen nimittäjä jakaa luvun $Q_n = \mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2\mu_n(F)^2$. Edelleen saman lauseen mukaan

$$\begin{aligned}
|Q_n p_n(a/F) - Q_n q_n(a/F)\Theta_p(a/F)|_p &= |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F)\Theta_p(a/F)|_p \\
&\le |Q_n|_p \cdot p^2 n^2 p^{-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \\
&\le |Q_n|_p \cdot p^{\epsilon n} p^{-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \\
&= |Q_n|_p \cdot p^{n\left(\epsilon - 2r - \frac{2}{p-1}\right)},
\end{aligned}$$

koska $p^2n^2 \le p^{\epsilon n}$, kun n on tarpeeksi suuri. Edelleen

$$\begin{aligned}
|Q_n|_p &= |\mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2\mu_n(F)^2|_p \\
&\le p^{-2\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor} \cdot p^{-2\left(nr+\frac{n}{p-1}-\frac{\log n}{\log p}-1\right)} \\
&\le p^{-2\frac{\log n}{\log p}+2} \cdot p^{-2\left(nr+\frac{n}{p-1}-\frac{\log n}{\log p}-1\right)} \\
&= p^{-2\left(nr+\frac{n}{p-1}-2\right)} \\
&= p^{-2nr-\frac{2n}{p-1}+4} \\
&\le p^{-2nr-\frac{2n}{p-1}+2\epsilon n},
\end{aligned}$$

missä on jälleen käytetty epäyhtälöä $p^2 \le p^2n^2 \le p^{\epsilon n}$. Nyt olemme valmiit käyttämään Lemmaa 1.1 arvoihin $\alpha = \Theta_p(a/F), c_n = Q_n p_n(a/F)$ ja $d_n = Q_n q_n(a/F)$. Edellisten tulosten nojalla

$$\begin{aligned}
|c_n - d_n\Theta_p(a/F)|_p &= |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F)\Theta_p(a/F)|_p \\
&\le p^{-2nr-\frac{2n}{p-1}+2\epsilon n} \cdot p^{n\left(\epsilon-2r-\frac{2}{p-1}\right)} \\
&= \exp\left(-4nr\log p - \frac{4n}{p-1}\log p + 3\epsilon n \log p\right).
\end{aligned}$$

Edelleen Lauseen 7.1 mukaan

$$|c_n|, |d_n| \le e^{\epsilon n} \cdot \mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2\mu_n(F)^2$$

$$\le e^{\epsilon n} e^{2(1+\epsilon)n} \cdot F^{2n} \prod_{q|F} q^{2\left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor}$$
$$\le \exp\left(3\epsilon n + 2n + \log\left(F^{2n} \prod_{q|F} q^{2\frac{n}{q-1}}\right)\right)$$
$$= \exp\left(3\epsilon n + 2n + 2n\log F + 2n \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1}\right)$$
$$\le \exp\left(2n\left(2\epsilon + 1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1}\right)\right),$$

missä on käytetty epäyhtälöä $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n) \le e^{(1+\epsilon)n}$. Näin ollen

$$\max\{|c_n|, |d_n|\} \cdot |c_n - d_n\Theta_p(a/F)|_p$$
$$\le \exp\left(2n\left(2\epsilon + 1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1}\right)\right) \cdot \exp\left(-4nr\log p - \frac{4n}{p-1}\log p + 3\epsilon n \log p\right)$$
$$\le \exp\left(2n\left(2\epsilon + 1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} - 2r\log p - \frac{2\log p}{p-1} + 2\epsilon \log p\right)\right).$$

Erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} \max\{|c_n|, |d_n|\} \cdot |c_n - d_n\Theta_p(a/F)|_p = 0$$

on voimassa, mikäli

$$2\epsilon + 1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} - 2r\log p - \frac{2\log p}{p-1} + 2\epsilon\log p < 0.$$

Täten $\Theta_p(a/F)$ on irrationaalinen silloin, kun

$$\log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} + 1 < 2r\log p - \frac{2\log p}{p-1}.$$

□

7.2 Funktio $R(x)$

Olkoon nyt $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ määritelty kuten kappaleessa 6.2:

$$(n+1)^2 p_{n+1}(x) = (2n+1)(2x-1)p_n(x) + n^2 p_{n-1}(x),$$

$$(n+1)^2 q_{n+1}(x) = (2n+1)(2x-1)q_n(x) + n^2 q_{n-1}(x).$$

Lause 7.3. *(i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $q_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)$.*

(ii) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $p_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2$.

(iii) Kun n on riittävän suuri, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on $|q_n(a/F)|, |p_n(a/F)| < e^{\epsilon n}$.

(iv) Olkoon $p^r || F$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|p_n(a/F) - q_n(a/F)R_p(a/F)|_p \leq (2n+1)np^{1-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.$$

Todistus. Nyt Lauseen 6.10 nojalla

$$\begin{aligned} q_n(a/F) &= \sum_{k \leq n/2} \binom{2a/F-1}{n-2k} \binom{-a/F}{k}^2 \\ &= \sum_{k \leq n/2} \binom{2a/F-1}{n-2k} \frac{(a/F)_k^2}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} \binom{2a/F-1}{n-2k} &= \frac{(2a/F-1)(2a/F-2)\cdots(2a/F-(n-2k))}{(n-2k)!} \\ &= \frac{(2aF-(n-2k))_{n-2k}}{(n-2k)!}, \end{aligned}$$

jakaa tämän luvun nimittäjä Lemman 1.4 mukaan luvun $\mu_{n-2k}(F)$. Erityisesti tällöin arvon $q_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun

$$\mu_{n-2k}(F) \cdot \mu_k(F)^2 \leq \mu_n(F).$$

Osoitetaan, että luvun $p_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2$. Generoiva funktio $y_0(z)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$L_2(y) = z(z^2-1)y'' + (3z^2 + (4a/F-2)z - 1)y' + (z + 2a/F - 1)y = 0.$$

Merkitään

$$\lambda = \prod_{q|F} q^{\frac{1}{q-1}}$$

ja otetaan avuksi rengas $R = \mathbb{Z}[\lambda]$. Tehdään sijoitus $z \mapsto F\lambda z$, jolloin

$$\begin{aligned} F\lambda z(F^2\lambda^2z^2 - 1)y''(F\lambda z) + (3F^2\lambda^2z^2 + 4a\lambda z - 2F\lambda z - 1)y'(F\lambda z) \\ + \frac{1}{F\lambda}(F^2\lambda^2 z + 2a\lambda - 1)y(F\lambda z) = 0. \end{aligned}$$

Sijoitusten

$$\begin{aligned} y(z) &\mapsto y(F\lambda z) \\ y'(z) &\mapsto F\lambda y'(F\lambda z) \\ y''(z) &\mapsto F^2\lambda^2 y''(F\lambda z) \end{aligned}$$

avulla nähdään, että $y_0(F\lambda z) \in R[[z]]$ toteuttaa differentiaaliyhälön

$$\begin{aligned} z(F^2\lambda^2z^2 - 1)y''(z) + (3F^2\lambda^2z^2 + 4a\lambda z - 2F\lambda z - 1)y'(z) \\ + (F^2\lambda^2 z + 2a\lambda - 1)y(z) = 0. \end{aligned}$$

Vastaavat laskut osoittavat, että $y_1(F\lambda z) \in Q(R)[[z]]$ on differentiaaliyhtälön $L_2(y) = 1$ ratkaisu. Näin ollen Lauseen 2.7 nojalla funktion $y_1(F\lambda z)$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2$.

Kolmas väite seuraa siitä, että funktion $R(x)$ ketjumurtolukuesityksen konvergentteihin liittyvät generoivat sarjat $y_0(z)$ ja $y_1(z)$ suppenevat aina, kun $|z| < 1$.

Viimeisen väitteen todistamiseksi käytetään hyväksi tulosta, jonka mukaan

$$p_n(a/F) - q_n(a/F)R_p(a/F) = R_p(n, a/F),$$

missä

$$R_p(n, a/F) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)} \binom{k}{n} \begin{bmatrix} k \\ a/F \end{bmatrix}.$$

Lemman 1.4 nojalla

$$\left| \begin{bmatrix} k \\ a/F \end{bmatrix} \right|_p = \left| \frac{k!}{a/F \cdot (a/F+1)\cdots(a/F+k)} \right|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{F}{a+kF} \cdot \frac{k!}{(a/F)_k} \right|_p \\
&\leq p^{-k\left(r+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{\log k}{\log p}+1} \\
&= kp^{1-k\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Lisäksi nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \binom{n}{k} \right|_p &\leq \left| \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \right|_p \\
&= \left| \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \frac{1}{k+l+1} \right|_p \\
&\leq k+n+1.
\end{aligned}
$$

Näin ollen haluttu tulos seuraa, kun valitaan maksimiarvo $k = n$. □

Lause 7.4. *Olkoon p annettu alkuluku ja F sellainen luonnollinen luku, että $|F|_p = p^{-r}$. Olkoon*

$$
\log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} + 2 < 2r \log p + \frac{2 \log p}{p-1},
$$

missä summaus on yli kaikkien alkulukujen q, jotka jakavat luvun F. Tällöin $R_p(a/F)$ on irrationaalinen.

Todistus. Ensiksi osoitamme, että

$$
p_n(x) - q_n(x) R_p(x) \neq 0
$$

on tosi äärettömän monella arvolla $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että yhtälöt

$$
p_n(x) - q_n(x) R_p(x) = 0
$$

ja

$$
p_{n+1}(x) - q_{n+1}(x) R_p(x) = 0
$$

eivät voi olla voimassa samanaikaisesti. Tällöin saadaan

$$
p_{n+1}(x) q_n(x) - p_n(x) q_{n+1}(x) = 0.
$$

Osoitetaan induktiolla, että

$$p_{n+1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n+1}(x) = (-1)^{n-1}\frac{2}{(n+1)^2},$$

jolloin saadaan ristiriita. Triviaalisti

$$p_1(x)q_0(x) - p_0(x)q_1(x) = -2 \cdot 1 - 0 \cdot (2x-1) = -2.$$

Oletetaan, että väite on tosi kaikilla $0 \leq n \leq k-1$. Nyt induktiohypoteesin nojalla

$$\begin{aligned}
&p_{k+1}(x)q_k(x) - p_k(x)q_{k+1}(x) \\
&\quad = \frac{1}{(k+1)^2}((2n+1)(2x-1)p_k(x) + k^2 p_{k-1}(x))q_k(x) \\
&\qquad - \frac{1}{(k+1)^2}((2n+1)(2x-1)q_k(x) + k^2 q_{k-1}(x))p_k(x) \\
&\quad = -\frac{k^2}{(k+1)^2}(p_k(x)q_{k-1}(x) - p_{k-1}(x)q_k(x)) \\
&\quad = -(-1)^{k-2}\frac{2}{(k+1)^2} = (-1)^{k-1}\frac{2}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 7.3 mukaan arvojen $p_n(a/F)$ ja $q_n(a/F)$ yhteinen nimittäjä jakaa luvun $Q_n = \mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2 \mu_n(F)$. Saman lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
&|Q_n p_n(a/F) - Q_n q_n(a/F) R_p(a/F)|_p \\
&\quad = |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F)R_p(a/F)|_p \\
&\quad \leq |Q_n|_p \cdot (2n+1)np^{1-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \\
&\quad \leq |Q_n|_p \cdot p^{\epsilon n} p^{-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \\
&\quad = |Q_n|_p \cdot p^{-n\left(r+\frac{1}{p-1}-\epsilon\right)},
\end{aligned}$$

missä käytettiin epäyhtälöä $(2n+1)np \leq p^{\epsilon n}$, kun n on riittävän suuri. Edelleen

$$\begin{aligned}
|Q_n|_p &= |\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^2 \mu_n(F)|_p \\
&\leq p^{-2\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} \cdot p^{-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{\log n}{\log p}+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq p^{-\frac{\log n}{\log p}} \cdot p^{-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)+\frac{\log n}{\log p}+1} \\
&= p^{1-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Sovelletaan Lemmaa 1.1 lukuihin $\alpha = R_p(a/F), c_n = Q_n p_n(a/F)$ ja $d_n = Q_n q_n(a/F)$. Nyt

$$
\begin{aligned}
|c_n - d_n\alpha|_p &= |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F)R_p(a/F)|_p \\
&\leq p^{1-n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \cdot p^{-n\left(r+\frac{1}{p-1}-\epsilon\right)} \\
&= p^{1-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)+\epsilon n} \\
&\leq p^{2\epsilon n-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \\
&= \exp\left(-2nr\log p - \frac{2n\log p}{p-1} + 2\epsilon n\log p\right)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
|c_n|, |d_n| &\leq e^{\epsilon n}\mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^2\mu_n(F) \\
&\leq e^{\epsilon n}e^{2(1+\epsilon)n}F^n\prod_{q|F} q^{\left\lfloor\frac{n}{q-1}\right\rfloor} \\
&\leq \exp\left(\epsilon n + 2n(1+\epsilon) + n\log F + n\sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1}\right),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{aligned}
&\max\{|c_n|, |d_n|\} \cdot |c_n - d_n\alpha|_p \\
&\qquad = \exp\left(\epsilon n + 2n(1+\epsilon) + n\log F + n\sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1}\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \exp\left(-2nr\log p - \frac{2n\log p}{p-1} + 2\epsilon n\log p\right).
\end{aligned}
$$

Näin ollen raja-arvo, kun $n \to \infty$, on nolla silloin, kun

$$
2 + \log F + \sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1} - 2r\log p - \frac{2\log p}{p-1} < 0,
$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

7.3 Funktio $T(x)$

Olkoon $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ määritelty kuten kappaleessa 6.3 eli rekursioilla

$$(n+1)^3 p_{n+1}(x) = (2n+1)(2x^2-2x+n^2+n+1)p_n(x) - n^3 p_{n-1}(x),$$
$$(n+1)^3 q_{n+1}(x) = (2n+1)(2x^2-2x+n^2+n+1)q_n(x) - n^3 q_{n-1}(x).$$

Lause 7.5. *(i) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $q_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)^2$.*

(ii) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $p_n(a/F)$ on rationaaliluku, jonka nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3$.

(iii) Kun n on riittävän suuri, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on $|q_n(a/F)|, |p_n(a/F)| < e^{\epsilon n}$.

(iv) Olkoon $p^r || F$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|p_n(a/F) - q_n(a/F)T_p(a/F)|_p \leq (2n+1)n^2 p^{2-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.$$

Todistus. Lauseen 6.15 mukaan

$$q_n(a/F) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{-a/F}{k}\binom{-a/F+k}{k}.$$

Koska

$$\begin{aligned}
\binom{-a/F}{k}\binom{-a/F+k}{k} &= \frac{(-a/F)(-a/F-1)\cdots(-a/F-k+1)}{k!} \\
&\quad \cdot \frac{(-a/F+k)(-a/F+k-1)\cdots(-a/F+1)}{k!} \\
&= \frac{(a/F)(a/F+1)\cdots(a/F+k-1)}{k!} \\
&\quad \cdot \frac{(a/F-k)(a/F-k+1)\cdots(a/F-1)}{k!} \\
&\frac{(a/F)_k}{k!} \cdot \frac{(a/F-k)_k}{k!},
\end{aligned}$$

niin nähdään, että luvun $q_n(a/F)$ nimittäjä jakaa luvun $\mu_n(F)^2$. Kappaleen 6.3 nojalla $Y_0(z)$ on differentiaaliyhtälön

$$L_3(y) = z^2(z-1)^2 y''' + 3z(2z-1)(z-1)y''$$

$$+\left(7z^2-\left(\frac{4a^2}{F^2}-\frac{4a}{F}+8\right)z+1\right)y'+\left(z-\frac{2a^2}{F^2}+\frac{2a}{F}-1\right)y=0$$

ratkaisu. Nyt yhtälön kertoimet eivät kuitenkaan ole kokonaisia. Merkitään

$$\lambda=\prod_{q|F}q^{\frac{1}{q-1}},$$

ja tehdään muunnos $z\mapsto F^2\lambda^2 z$, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö muotoon

$$\begin{aligned}&F^4\lambda^4z^2(F^2\lambda^2z-1)^2y'''(F^2\lambda^2z)\\&\quad+3F^2\lambda^2z(2F^2\lambda^2z-1)(F^2\lambda^2z-1)y''(F^2\lambda^2z)\\&\qquad+\left(7F^4\lambda^4z^2-\left(4a^2-4aF+8F^2\right)\lambda^2z+1\right)y'(F^2\lambda^2z)\\&\qquad\quad+\frac{1}{F^2\lambda^2}\left(F^4\lambda^4z-2a^2\lambda^2+2aF\lambda^2-F^2\lambda^2\right)y(F^2\lambda^2z)=0.\end{aligned}$$

Sijoittamalla nyt muunnokset

$$\begin{aligned}y(z)&\mapsto y(F^2\lambda^2z),\\y'(z)&\mapsto F^2\lambda^2y'(F^2\lambda^2z),\\y''(z)&\mapsto F^4\lambda^4y''(F^2\lambda^2z),\\y'''(z)&\mapsto F^6\lambda^6y'''(F^2\lambda^2z),\end{aligned}$$

nähdään, että

$$\begin{aligned}&z^2(F^2\lambda^2z-1)^2y'''(z)+3z(2F^2\lambda^2z-1)(F^2\lambda^2z-1)y''(z)\\&\qquad+\left(7F^4\lambda^4z^2-\left(4a^2-4aF+8F^2\right)\lambda^2z+1\right)y'(z)\\&\qquad\quad+\left(F^4\lambda^4z-2a^2\lambda^2+2aF\lambda^2-F^2\lambda^2\right)y(z)=0.\end{aligned}$$

Kun valitaan $R=\mathbb{Z}[\lambda]$, niin Lauseen 2.11 nojalla sarjan $Y_1(F^2\lambda^2z)$ n:nnen kertoimen nimittäjä jakaa luvun $\mathrm{pyj}(1,2,\ldots,n)^3$.

Kolmas väite seuraa siitä, että funktion $T(x)$ ketjumurtolukuun liittyvät generoivat sarjat $Y_0(z)$ ja $Y_1(z)$ suppenevat, kun $|z|<1$.

Lemman 1.4 nojalla

$$\left|\begin{bmatrix}k\\a/F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\1-a/F\end{bmatrix}\right|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{k!}{(a/F)(a/F+1)\cdots(a/F+k)} \cdot \frac{k!}{(1-a/F)\cdots(1+k-a/F)} \right|_p \\
&= \left| \frac{F}{a+kF} \cdot \frac{k!}{(a/F)_k} \cdot \frac{F}{(1+k)F-a} \cdot \frac{k!}{(1-a/F)_k} \right|_p \\
&\leq p^{-2\left(k\left(r+\frac{1}{p-1}\right)-\frac{\log k}{\log p}-1\right)} \\
&= k^2 p^{2-2k\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Lisäksi,

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \binom{k}{n} \right|_p &\leq \left| \frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n+1)} \right|_p \\
&= \left| \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \frac{1}{k+l+1} \right|_p \leq k+n+1.
\end{aligned}
$$

Näin ollen

$$
|p_n(a/F) - q_n(a/F)T_p(a/F)|_p \leq (2n+1)n^2 p^{2-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.
$$

$\square$

Lause 7.6. *Olkoon p annettu alkuluku ja F sellainen luonnollinen luku, että $|F|_p = p^{-r}$. Olkoon*

$$
\log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} + \frac{3}{2} < 2r \log p + \frac{2 \log p}{p-1},
$$

missä summaus on yli kaikkien alkulukujen q, jotka jakavat luvun F. Tällöin $T_p(a/F)$ on irrationaalinen.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että

$$
p_n(x) - q_n(x)T_p(x) \neq 0
$$

äärettömän monella arvolla $n \in \mathbb{N}$. Todistetaan, että yhtälöt

$$
p_n(x) - q_n(x)T_p(x) = 0
$$

ja

$$
p_{n+1}(x) - q_{n+1}(x)T_p(x) = 0
$$

eivät voi olla voimassa samanaikaisesti. Tällöin

$$p_{n+1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n+1}(x) = 0.$$

Osoitetaan induktiolla, että

$$p_{n+1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n+1}(x) = \frac{2}{(n+1)^3},$$

jolloin saadaan ristiriita. Triviaalisti

$$p_1(x)q_0(x) - p_0(x)q_1(x) = 2 \cdot 1 - 0 \cdot (2x^2 - 2x + 1) = 2.$$

Oletetaan, että väite on tosi kaikilla $0 \leq n \leq k-1$. Induktiohypoteesin nojalla

$$\begin{aligned}
&p_{k+1}(x)q_k(x) - p_k(x)q_{k+1}(x) \\
&\quad = \frac{1}{(k+1)^3}((2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1)p_k(x) - k^3 p_{k-1}(x))q_k(x) \\
&\qquad - \frac{1}{(k+1)^3}((2n+1)(2x^2 - 2x + n^2 + n + 1)q_k(x) - k^3 q_{k-1}(x))p_k(x) \\
&\quad = \frac{k^3}{(k+1)^3}(p_k(x)q_{k-1}(x) - p_{k-1}(x)q_k(x)) = \frac{2}{(k+1)^3}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 7.5 nojalla lukujen $p_n(a/F)$ ja $q_n(a/F)$ yhteinen nimittäjä jakaa luvun $Q_n = \text{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3 \mu_n(F)^2$. Edelleen saman lauseen mukaan

$$\begin{aligned}
&|Q_n p_n(a/F) - Q_n q_n(a/F) T_p(a/F)|_p \\
&\quad = |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F) T_p(a/F)|_p \\
&\quad \leq |Q_n|_p \cdot (2n+1) n^2 p^{2-2n\left(r + \frac{1}{p-1}\right)} \\
&\quad \leq |Q_n|_p \cdot p^{2\epsilon n} p^{2-2n\left(r + \frac{1}{p-1}\right)} \\
&\quad \leq |Q_n|_p \cdot p^{-2n\left(r + \frac{1}{p-1} - \epsilon\right)},
\end{aligned}$$

kun n on riittävän suuri. Lisäksi,

$$|Q_n|_p = |\text{pyj}(1, 2, \ldots, n)^3 \mu_n(F)^2|_p$$

$$
\begin{aligned}
&\le p^{-3\left\lfloor \frac{\log n}{\log p}\right\rfloor} \cdot p^{-2\left(n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)-\frac{\log n}{\log p}-1\right)} \\
&\le p^{-2\frac{\log n}{\log p}} \cdot p^{-2\left(n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)-\frac{\log n}{\log p}-1\right)} \\
&= p^{\epsilon n-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Valitsemalla $\alpha = T_p(a/F), c_n = Q_n p_n(a/F)$ ja $d_n = Q_n q_n(a/F)$ nähdään, että

$$
\begin{aligned}
|c_n - \alpha d_n|_p &= |Q_n|_p \cdot |p_n(a/F) - q_n(a/F)T_p(a/F)|_p \\
&\le p^{\epsilon n-2n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)} \cdot p^{-2n\left(r+\frac{1}{p-1}-\epsilon\right)} \\
&= p^{-4n\left(r+\frac{1}{p-1}\right)+3\epsilon n} \\
&= \exp\left(3\epsilon n \log p - 4nr\log p - \frac{4n\log p}{p-1}\right).
\end{aligned}
$$

Edelleen

$$
\begin{aligned}
|c_n|, |d_n| &\le e^{\epsilon n} \cdot \mathrm{pyj}(1,2,\dots,n)^3 \mu_n(F)^2 \\
&\le e^{\epsilon n} \cdot e^{3(1+\epsilon)n} \cdot F^{2n} \prod_{q|F} q^{2\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor} \\
&\le \exp\left(3n + 4\epsilon n + 2n\log F + 2n\sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1}\right).
\end{aligned}
$$

Täten saadaan

$$
\begin{aligned}
&\max\{|c_n|, |d_n|\} \cdot |c_n - \alpha d_n|_p \\
&\qquad \le \exp\left(3n + 4\epsilon n + 2n\log F + 2n\sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1}\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \exp\left(3\epsilon n\log p - 4nr\log p - \frac{4n\log p}{p-1}\right),
\end{aligned}
$$

josta nähdään, että raja-arvo, kun $n \to \infty$, on nolla, kun

$$
3 + 2\log F + 2\sum_{q|F}\frac{\log q}{q-1} < 4r\log p + \frac{4\log p}{p-1}.
$$

$\square$

Luku 8

Irrationaalisuustuloksia

Nyt olemme valmiit näyttämään tiettyjen p-adisten L-arvojen irrationaalisuuden.

Lause 8.1. *Olkoon χ_8 primitiivinen ja parillinen karakteeri modulo 8. Tällöin $\zeta_2(2), \zeta_3(2)$ ja $L_2(2, \chi_8)$ ovat irrationaalisia.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että $\zeta_2(2)$ on irrationaalinen. Koska

$$\zeta_2(2) = -\frac{1}{8}\Theta_2(1/2),$$

riittää osoittaa, että $\Theta_2(1/2)$ on irrationaalinen. Valitaan $p = 2, a = 1$ ja $F = 2$, jolloin $|2|_2 = 2^{-1}$ eli $r = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} &< 2r \log p + \frac{2\log p}{p-1} \\
1 + \log 2 + \sum_{q|2} \frac{\log q}{q-1} &< 2 \log p + 2 \log 2 \\
1 + 2\log 2 &< 4 \log 2 \\
1 &< 2 \log 2 \approx 1.38629,
\end{aligned}$$

joten Lauseen 7.2 nojalla $\Theta_2(1/2)$ on irrationaalinen ja siten $\zeta_2(2)$ on myös irrationaalinen.

Nyt

$$\zeta_3(2) - \frac{2}{27}\Theta_3(1/3),$$

joten valitaan $p = 3, a = 1$ ja $F = 3$ Tällöin $|3|_3 = 3^{-1}$ eli $r = 1$. Suoraviivaiset laskut osoittavat, että

$$\begin{aligned}
1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} &< 2r \log p + \frac{2\log p}{p-1} \\
1 + \log 3 + \sum_{q|3} \frac{\log q}{q-1} &< 2\log 3 + \frac{2\log 3}{2} \\
1 + \frac{\log 3}{2} &< 2\log 3 \\
1 &< \frac{3\log 3}{2} \approx 1.64792.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\zeta_3(2)$ on irrationaalinen.

Koska $L_2(2, \chi_8) = -(1/16)\Theta_2(1/4)$, valitaan $p = 2, a = 1$ ja $F = 4$, jolloin $r = 2$. Jälleen nähdään, että

$$\begin{aligned}
1 + \log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} &< 2r \log p + \frac{2\log p}{p-1} \\
1 + \log 4 + \sum_{q|4} \frac{\log q}{q-1} &< 2 \cdot 2\log 2 + 2\log 2 \\
1 + 2\log 2 + \log 2 &< 6\log 2 \\
1 &< 3\log 2 \approx 2.07944.
\end{aligned}$$

Täten $L_2(2, \chi_8)$ on irrationaalinen. □

Lause 8.2. *Luvut $\zeta_2(3)$ ja $\zeta_3(3)$ ovat irrationaalisia.*

Todistus. Koska $\zeta_2(3) = (1/4^3)T_2(1/4)$, valitaan $p = 2, a = 1$ ja $F = 4$, jolloin $|4|_2 = 2^{-2}$ eli $r = 2$. Nyt suoraviivainen lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}
\log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} + \frac{3}{2} &< 2r \log p + \frac{2\log p}{p-1} \\
\log 4 + \sum_{q|4} \frac{\log q}{q-1} + \frac{3}{2} &< 2 \cdot 2\log 2 + \log 2 \\
3\log 2 + \frac{3}{2} &< 6\log 2 \\
\frac{3}{2} &< 3\log 2 \approx 2.07944.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\zeta_2(3)$ on irrationaalinen.

Vastaavasti, koska $\zeta_3(3) = (1/3^3)T_3(1/3)$, niin valitaan $p = 3, a = 1$ ja $F = 3$. Tällöin $r = 1$ ja

$$\begin{aligned}
\log F + \sum_{q|F} \frac{\log q}{q-1} + \frac{3}{2} &< 2r\log p + \frac{2\log p}{p-1} \\
\log 3 + \sum_{q|3} \frac{\log q}{q-1} + \frac{3}{2} &< 2\log 3 + \log 3 \\
\frac{\log 3}{2} + \frac{3}{2} &< 2\log 3 \\
\frac{3}{2} &< \frac{3\log 3}{2} \approx 1.64792,
\end{aligned}$$

joten $\zeta_3(3)$ on irrationaalinen. □

Liite A

Bernoullin luvut

Määritelmä A.1. *Bernoullin luvut* B_n määritellään generoivalla sarjalla

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Lause A.2. $B_1 = -1/2$ *ja* $B_{2n+1} = 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Todistus. Kirjoittamalla kaksi ensimmäistä termeiä auki nähdään, että $B_1 = -1/2$. Edelleen tämän nojalla

$$\sum_{n=0, n\neq 1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} . e^{-t/2}},$$

joka on parillinen funktio. Täten haluttu tulos seuraa. □

Lause A.3. *Kaikilla* $n \neq 1$ *on voimassa*

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} = B_n.$$

Todistus. Määritelmän mukaan Bernoullin luvut B_n toteuttavat yhtälön

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Kertomalla yllä oleva yhtälö molemmin puolin termillä e^t saadaan

$$t + \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} \right) \frac{t^n}{n!},$$

josta kertoimia vertailemalla seuraa haluttu tulos. □

Määritelmä A.4. Määritellään *yleistetyt Bernoullin luvut* $B_n(a,F)$ generoivalla sarjalla

$$\frac{te^{at}}{e^{Ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a,F)}{n!} t^n.$$

Lause A.5. *Kaikille positiivisille kokonaisluvuille n on voimassa*

$$B_n(a,F) = \frac{a^n}{F} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \left(\frac{F}{a}\right)^k.$$

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{te^{at}}{e^{Ft}-1} &= \frac{e^{at}}{F} \cdot \frac{Ft}{e^{Ft}-1} \\
&= \frac{e^{at}}{F} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} (Ft)^l \\
&= \frac{1}{F} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} (Ft)^l \right) \\
&= \frac{1}{F} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{a^{n-l}}{(n-l)!} \cdot \frac{B_l F^l}{l!} \right) t^n \\
&= \frac{a^n}{F} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l \left(\frac{F}{a}\right)^l \right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Näin ollen vertailemalla kertoimia saadaan haluttu tulos. □

Liite B

Hypergeometrinen sarja

Määritelmä B.1. Sarjaa

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \cdots ,$$

missä $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, sanotaan *hypergeometriseksi sarjaksi.*

Lemma B.2. *Hypergeometrinen sarja $F(a,b,c;z)$ toteuttaa Eulerin hypergeometrisen differentiaaliyhtälön*

$$z(1-z)y'' + (c - (a+b+1)z)y' - (ab)y = 0.$$

Liite C

Identiteetit funktioille $R(x)$ ja $T(x)$

Todistetaan Lauseen 3.7 tulokset funktioille $R(x)$ ja $T(x)$.

Lause C.1. *Kunnassa K on voimassa identiteetit*

$$R(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix},$$

$$T(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}.$$

Todistus. Todistaaksemme väitteen funktion $R(x)$ identiteetille merkitään

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}.$$

Yksinkertaisella laskulla saadaan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} &= \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)} - \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ &= \frac{x \cdot n! - (x+n+1) \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)} \\ &= -\frac{(n+1)n!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)} \\ &= -\frac{n+1}{x} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Huomaamalla, että

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{x}&\Delta_n \left((1+n+x) \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{x} \left((2+n+x) \begin{bmatrix} n+1 \\ x+1 \end{bmatrix} - (1+n+x) \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{x} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} \left(\frac{(2+n+x)(n+1)}{n+2+x} - (1+n+x) \right) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

saadaan

$$
S(x+1) - S(x) = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{x^2}.
$$

Täten $S(x+1) + R(x+1) - S(x) - R(x) = 0$ ja siten $R(x) = -S(x)$.

Todistaaksemme identiteetin funktiolle $T(x)$ asetetaan jälleen

$$
S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}.
$$

Suoraviivaisella laskulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} n \\ -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)} \cdot \frac{n!}{(-x)\cdots(n-x)} \\
&\qquad - \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{n!}{(1-x)\cdots(1+n-x)} \\
&= \frac{-(n+1-x)(n!)^2 - (x+1+n)(n!)^2}{x\cdots(x+1+n)(1-x)\cdots(1+n-x)} \\
&= -\frac{2(n+1)(n!)^2}{x\cdots(x+1+n)(1-x)\cdots(1+n-x)}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{2(n+1)}{x}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Edelleen huomataan, että

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{x^2}\Delta_n\left((x^2-(n+1)^2)\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{x^2}\left((x^2-(n+2)^2)\begin{bmatrix} n+1 \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+1 \\ 1-x \end{bmatrix}\right. \\ &\qquad \left. -(x^2-(n+1)^2)\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{x^2}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}\left(\frac{(x^2-(n+2)^2)(n+1)^2}{(n+2+x)(n+2-x)} - (x^2-(n+1)^2)\right) \\ &\quad = \begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$S(x+1) - S(x) = -\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ x+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ 1-x \end{bmatrix} = \frac{2}{x^3},$$

joten $S(x+1) + T(x+1) - S(x) - T(x) = 0$ eli $T(x) = -S(x)$. $\square$

Liite D

Lauseke arvolle $\left(-\frac{1}{1+x}\right)^{k+1}$

Lemma D.1. *Formaalisti on voimassa*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}=\left(-\frac{1}{1+x}\right)^{k+1}.$$

Todistus. Todistetaan lemma induktiolla. Selvästi väite on tosi, kun $k=0$, sillä

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{0}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}=\frac{-1/x}{1-(-1/x)}=-\frac{1}{1+x}.$$

Oletetaan, että väite on tosi kaikilla $0\leq k\leq m$ ja merkitään

$$S_k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
S_{m+1}&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{m+1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{n-1}{m+1}+\binom{n-1}{m}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{m+1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{m}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}\\
&=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-1}{m+1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n}+-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-1}{m}\left(-\frac{1}{x}\right)^{n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{x}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l}{m+1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{l+1} + -\frac{1}{x}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l}{m}\left(-\frac{1}{x}\right)^{l+1} \\
&= -\frac{1}{x}S_{m+1} - \frac{1}{x}S_m,
\end{aligned}
$$

joten induktiohypoteesin nojalla

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)S_{m+1} = -\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{1+x}\right)^{m+1}$$

eli

$$S_{m+1} = \left(-\frac{1}{1+x}\right)^{m+2}.$$

$\square$

Kirjallisuutta

[1] F. Beukers, *Irrationality of some p-adic L-values. Acta Mathematica Sinica, English Series*, Apr. 2008, Vol. 24, No. 4, pp. 663-686.

[2] V. Patel, *Irrationality of some p-adic integers.* https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/patel/dissertation.pdf. MMath Dissertation, University of Warwick, 2012.

[3] M. Prevost: *A new proof of the irrationality of (2) and (3) using Pade approximants*, J. Comput. Appl. Math. 67, 2 (1996), 219-235.

[4] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Astérisque 61 (1979), 11-13.

[5] M. R. Murty and M. Reece (2000): *A simple derivation of* $\zeta(1-k) = -B_k/k$. Funct. Approx. Comment. Math, 28, 141-154.