Peliteoria ja Nashin tasapainot

LuK-tutkielma
Vili Pelttari
2497679
Matematiikan tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Syksy 2019

Sisältö

Johdanto

Tämä kandidaatintutkielma perustuu kokonaisuudessaan kirjaan Game Theory in Action [1].

Tutkielmassa aluksi tutustutaan peliteorian perusteisiin, kuten laajan ja normaalin muodon peleihin ja peliteorian sanastoon. Näille eri muodon peleille käydään läpi käänteinen induktio ja dominoitujen strategioiden iteroitu eliminointi sekä tutustutaan jatkuviin peleihin yksinkertaisimmassa tapauksessa. Teorian miljöön asettamisen jälkeen ajaudumme peliteorian tärkeimpään ideaan, eli Nashin tasapainoihin. Tutkielmassa on runsaasti esimerkkejä, koska peliteoriaa soveltavana matematiikan osa-alueena parhaiten määrittelevät sen käsittelemät ongelmat.

Peliteoria on verrannollisen uusi osa-alue, joka käsittelee matemaattisia malleja järjellisten päättäjien strategisesta kanssakäymisestä. Peliteoriassa tutkitaan tilanteita joissa jokaisen päättäjän hyöty riippuu sekä muiden että kyseisen päättäjän omista valinnoista. Optimoinnista peliteoria eroaa juuri tämän useamman päättäjän ominaisuuden takia, koska optimointiongelmassa lopputulos riippuu vain päättäjän omista valinnoista.

Tutkielmassa on sovellettu lauseen 1.13 todistusta lähteestä [1] yleisen todistuksen tuottamiseksi.

1 Yleistä peliteoriaa

Peliteoriassa tutkittavaa tilannetta kutsutaan peliksi ja vastaavasti siinä päättäviä toimijoita pelaajiksi.

1.1 Yleisiä käsitteitä ja merkintöjä

Määritelmä 1.1 (Peli)**.** Peli on valintoja sisältävä tilanne, joka erityisesti täyttää seuraavat ehdot.

(1) Siinä on useampi pelaaja, eli päättäjä.

(2) Jokaisella pelaajalla on useampi valinta.

(3) Jokaisen pelaajan hyödyt määrittyvät kun kaikki pelaajat ovat tehneet valintansa.

(4) Kaikki pelaajat pyrkivät maksimoimaan oman hyötynsä.

Määritelmä 1.2 (Strategia)**.** Pelaajan strategia on *suunnitelma valinnoista* kaikissa tilanteissa, joihin pelaajan on mahdollista joutua pelin aikana. Pelaajan i strategiat muodostavat strategiajoukon $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots\}$ ja se koostuu strategioista s_i^k.

Määritelmä 1.3 (Hyötyfunktio)**.** Jokaiseen n pelaajan valitsemaan strategiakombinaatioon $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, jossa $s_k \in S_k,\ k = 1, 2, \dots, n$, liittyy pelaajan i odotettu hyöty

$$\pi_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}.$$

Jokaista strategiakombinaatiota vastaa kaikkien pelaajien lopputulosta kuvaava *hyötymonikko* $\big(\pi_1(s_1, \dots, s_n),\ \dots,\ \pi_n(s_1, \dots, s_n)\big) \subset \mathbb{R}^n$.

Odotettua hyötyä kutsutaan joskus myös lopputulokseksi tai hyötytulemaksi.

1.2 Laajan muodon pelit

Määritelmä 1.4 (Laajan muodon ja täydellisen informaation peli)**.** Peliä kutsutaan *laajan muodon ja täydellisen informaation* peliksi mikäli se koostuu

- *Pelaajien* joukosta P.
- *Solmujoukosta* N.
- *Valintajoukosta* B.

- Pelaajan i hyötyfunktiosta $\pi_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$.
- Funktiosta solmujoukosta N pelaajien joukkoon P, joka nimeää solmut.

Koostuvan puun täytyy sisältää vain yhden juurisolmun, ja jos c on mikä tahansa muu solmu, on olemassa vain yksi polku juurisolmusta solmuun c.

Laajan muodon pelejä kutsutaan myös pelipuiksi.

Määritelmä 1.5 (Käänteinen induktio)**.** Kun oletetaan pelaajat täysin järkiperäisiksi, oletetaan että he eivät koskaan tee valintaa joka antaisi heille valinnoista huonomman lopputuloksen. Tällöin mikäli peli päätyy solmuun, jossa on valinnat m ja m' ja joista m antaa paremman lopputuloksen valitsevalle pelaajalle, pelaaja ei koskaan tee valintaa m'. Tämä johtaa siihen, että pelipuuta voidaan yksinkertaistaa karsimalla valintoja pois pelipuun lopusta.

(1) Valitaan solmu c siten että kaikki solmusta c lähtevät liikkeet johtavat päättäviin solmuihin. Näitä on olemassa koska pelipuu on äärellinen.

(2) Merkataan että solmulla c päättää pelaaja i. Valitaan solmusta lähtevien liikkeiden joukosta liike m, joka antaa pelaajalle i suurimman mahdollisen hyödyn, joka saadaan päätesolmussa e.

(3) Oletetaan, että solmussa c pelaaja i valitsee liikkeen m koska hän toimii järkevästi. Tämä valinta kirjataan osaksi pelaajan i strategiaa.

(4) Pelipuusta poistetaan kaikki liikkeet, jotka alkavat solmusta c. Nyt solmu c on päätesolmu ja sen hyötyarvoiksi annetaan solmun e valinnasta saatu hyöty.

(5) Jos pelipuussa on vain yksi solmu, lopetetaan iteraatio. Jos solmuja on enemmän, palataan askeleeseen 1.

Esimerkki 1.6. Peliteoriaa käytetään muun muassa eläimien käyttäytymisen analysoimiseen. Tutkitaan siis tilannetta, jossa pieni apina ja iso apina syövät puusta roikkuvia kookospähkinöitä. Apinoiden täytyy ensiksi kiivetä puuhun ravistelemaan kookospähkinä alas, jonka jälkeen kummatkin voivat syödä sen. Apina, joka ei kiipeä puuhun saa etumatkaa kookospähkinän syömiseen.

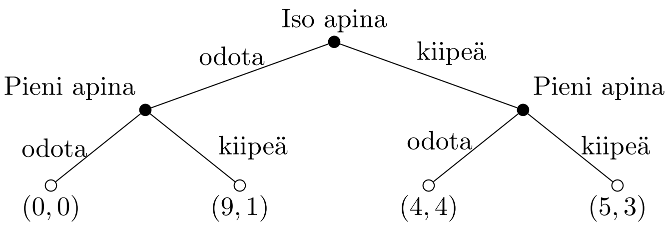
Iso apina kiivetessään käyttää 2 kilokaloria ja pieni apina käyttää samaan työhän häviävän pienen määrän energiaa pienen kokonsa takia.

Kookospähkinä antaa apinoille yhteensä 10 kilokaloria ja se jaetaan taulukon 1.1 mukaisesti.

Oletetaan, että iso apina päättää ensiksi mitä se tekee. Lopputulokset ovat energiamääriä tilanteen jälkeen.
Käänteinen induktio jättää jäljelle seuraavat strategiat:

	Iso apina syö	Pieni apina syö
Jos iso apina kiipeää	6 Kc	4 Kc
Jos molemmat apinat kiipeävät	7 Kc	3 Kc
Jos pieni apina kiipeää	9 Kc	1 Kc

Taulukko 1.1: Ison ja pienen apinan ravintoenergiat eri pelin lopuille.



Kuva 1.2: Ison apinan ja pienen apinan pelin pelipuu. Hyötypareissa iso apina on ensin.

1. Pieni apina: Jos iso apina odottaa, kiipeä. Jos iso apina kiipeää, odota.
2. Iso apina: Odota.

Aloittavana pelaajana iso apina aina valitsee odottavansa. Pieni apina siis pakotetaan kiipeämään puuhun. Tällöin pelistä iso apina hyötyy 9 Kc ja pieni apina vain 1 Kc.

1.3 Normaalin muodon pelit

Määritelmä 1.7 (Normaalin muodon peli)**.** Olkoon $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Joukon S alkio on n-monikko $(s_1, \ldots, s_n)$, jossa jokainen s_i on valittu joukosta S_i. Tällaista n-monikkoa kutsutaan *strategiaprofiiliksi* ja se esittää jokaisen pelaajan strategiavalintaa. Tällöin normaalin muodon peli koostuu

- äärellisestä pelaajien joukosta $P = \{1, \ldots, n\}$,
- jokaisen pelaajan i strategiajoukosta S_i ja
- jokaisen pelaajan i hyötyfunktiosta $\pi_i : S \to \mathbb{R}$.

Jos pelissä on kaksi pelaajaa, pelaajalla 1 on m strategiaa ja pelaajalla 2 on n strategiaa, normaalin muodon peli voidaan esittää $m \times n$-matriisina. Jokainen rivi vastaa pelaajan 1 strategiaa ja jokainen sarake pelaajan 2 strategiaa. Rivien ja sarakkeiden risteyskohdat vastaavat aina strategiaprofiilia, jonka hyötypari muodostaa matriisin alkion.

Määritelmä 1.8 (Dominoidut strategiat)**.** Olkoon s_i ja s_i' kaksi pelaajan i strategiaa normaalin muodon pelissä.

- s_i *dominoi aidosti* strategiaa s_i' mikäli pelaajan i hyöty käyttämällä strategiaa s_i on suurempi kuin käyttämällä strategiaa s_i' riippumatta muiden pelaajien strategiavalinnoista.
- s_i *dominoi heikosti* strategiaa s_i' mikäli pelaajan i hyöty käyttämällä strategiaa s_i on suurempi tai yhtä suuri kuin käyttämällä strategiaa s_i' riippumatta muiden pelaajien strategiavalinnoista *sekä* jollekin muiden pelaajien strategiavalinnalle strategia s_i antaa suuremman hyödyn kuin strategia s_i'.

Eli toisin sanoin,

- s_i *dominoi aidosti* strategiaa s_i' mikäli

  $$\pi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) > \pi_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n)$$
  kaikille $(s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} S_k = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$.

- s_i *dominoi heikosti* strategiaa s_i' mikäli

  – $\pi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \geq \pi_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n)$ kaikille $(s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} S_k$ ja

  – on olemassa $(s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} S_k$ siten, että
  $$\pi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) > \pi_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n).$$

Määritelmä 1.9 (Dominoitujen strategioiden iteroitu eliminointi)**.** Normaalin muodon peleissä pelaajan järkiperäisyysoletuksesta seuraa, ettei pelaaja koskaan käytä dominoitua strategiaa. Tällöin kaikki dominoidut strategiat voidaan poistaa normaalin muodon pelistä.

Mikäli pienennetyssä pelissä on vain yksi strategia s_i^* pelaajalle i, kutsutaan strategiaa s_i^* pelaajan i *dominantiksi strategiaksi.* Mikäli tässä pienemmässä pelissä on vain yksi strategia s_i^* kaikille pelaajille, strategiaprofiilia $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ kutsutaan *dominantiksi strategiatasapainoksi.*

Jyrkästi dominoitujen strategioiden iteroitu eliminointi tuottaa saman yksinkertaistetun pelin kaikilla poistojärjestyksillä. Heikosti dominoiduissa peleissä lopputulos ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen.

Lause 1.10. *Laajan muodon pelissä pelaajan strategia on eräs päätös valinnasta jokaisessa pelaajan solmussa. Laajan muodon peli voidaan siis muuntaa normaaliin muotoon listaamalla pelaajien kaikki mahdolliset strategiat ja yhdistämällä niihin lopputulokset pelipuun päätesolmuista.*

Todistus. Olkoon laajan muodon pelissä N pelaajaa. Pelaajalla p on n_p solmua: c_p^k, $1 \leq k \leq n_p$. Jokaisessa solmussa c_p^k pelaajalla p on joukko M_p^k valintoja. Tällöin strategia pelaajalle p on eräs valinta jokaisessa solmussaan. Pelaajan p strategiajoukko siis on

$$S_p = M_p^1 \times \ldots \times M_p^{n_p}$$

ja pelaajan yksittäinen strategia on n_p-monikko

$$(m_1, \ldots, m_{n_p}) \in S_p, \text{ jossa } m_k \in M_p^k.$$

Normaalin muodon peli assosioi vielä jokaiselle N-monikolle $(s_1, \ldots, s_N) \in S_1 \times \cdots \times S_N$ lopputulokset $\pi_p(s_1, \ldots, s_N)$ kaikille pelaajille $p = 1, \ldots, N$. Nämä saadaan pelipuun latvoista, koska jokaista pelin latvasolmua vastaa yksi täydellinen polku, eli strategiamonikko. Laajan muodon pelistä saa siis muotoiltua aina normaalin muodon pelin. □

Esimerkki 1.11. Muunnetaan ison apinan ja pienen apinan tilanne laajan muodon pelistä 1.2 normaalimuodon peliksi. Laajan muodon pelissä strategia on suunnitelma toimista jokaiselle pelaajan tilanteelle. Apinoiden tilanteessa isolla apinalla on kaksi strategiaa, odota (o) ja kiipeä (k). Pienellä apinalla on neljä strategiaa:

- *oo*: jos iso apina odottaa, odota. Jos iso apina kiipeää, odota
- *ok*: jos iso apina odottaa, odota. Jos iso apina kiipeää, kiipeä
- *ko*: jos iso apina odottaa, kiipeä. Jos iso apina kiipeää, odota
- *kk*: jos iso apina odottaa, kiipeä. Jos iso apina kiipeää, kiipeä

		Pieni apina			
		oo	***ok***	***ko***	***kk***
Iso apina	***o***	$(0,0)$	$(0,0)$	$(9,1)$	$(9,1)$
	k	$(4,4)$	$(5,3)$	$(4,4)$	$(5,3)$

Taulukko 1.3: Pienen apinan ja suuren apinan normaalimuotoinen peli.

Esimerkki 1.12. Etsitään dominoituja strategioita ison apinan ja pienen apinan normaalimuotoisesta pelistä taulukossa 1.3. Matriisissa kumpikaan ison apinan strategioista ei dominoi toisiaan: $4 > 0$ ja $5 > 0$, mutta $4 < 9$ ja $5 < 9$.

Tarkastellaan siis pienen apinan strategioita vertailemalla sarakkeiden lopputulosparien jälkimmäisiä arvoja keskenään. Matriisissa oo dominoi heikosti ok ($0 = 0$ ja $4 > 3$), ko dominoi heikosti oo ($1 > 0$ ja $4 = 4$), ko dominoi aidosti ok ($1 > 0$ ja $4 > 3$), kk dominoi heikosti ok ($1 > 0$ ja $3 = 3$), ja ko dominoi heikosti kk ($1 = 1$ ja $4 > 3$). Vertailtaessa strategioita kk ja oo, huomaamme ettei kumpikaan dominoi toistaan.

Kyseisessä pelissä heikosti eliminoitujen strategioiden iteroitu eliminointi tuottaa erilaiset redusoidut pelit, kun se tehdään eri järjestyksessä.

Yksi tapa eliminoida strategiat on tässä:

1. Pienen apinan strategialla ko voidaan eliminoida strategia oo ja strategialla kk strategia ok.
2. Eliminoidaan pienen apinan strategia kk, koska sitä dominoi strategia ko heikosti.
3. Eliminoidaan ison apinan strategia k, jota dominoi strategia o.
4. Jäljelle jää 1×1-peli, jossa on strategiat o ja ko.

Nämä strategiat jäivät jäljelle myös käänteisessä induktiossa. On kuitenkin myös toinen tapa tehdä dominoitujen strategioiden eliminointi:

1. Kuten aiemmin, aloitetaan eliminoimalla pienen apinan strategia oo, koska sitä dominoi heikosti strategia ko, ja eliminoimalla strategia ok, koska sitä dominoi heikosti strategia oo.
2. Eliminoidaan ison apinan strategia k, koska redusoidussa 2×2-pelissä sitä dominoi strategia o
3. Jäljelle jää 2×1-peli josta strategioita ei voida eliminoida heikon dominoinnin määritelmän nojalla. Lopulliset strategiaprofiilit ovat (o, ko), joka löydettiin aiemmin, ja (o, kk). Tämä iteroidun eliminoinnin järjestys näyttää, että o on dominoiva strategia isolle apinalle, muttei näytä strategian ko olevan dominoiva strategia pienelle apinalle.

Lause 1.13. *Jokainen järjestys tehdä käänteinen induktio laajan muodon pelille on ekvivalentti sitä vastaavalla järjestyksellä tehdyn heikosti dominoitujen strategioiden iteroidun eliminoinnin kanssa.*

Todistus. Näytetään ensiksi käänteisen induktion ja heikosti dominoitujen strategioiden eliminoinnin tuottavan sama tulos käänteisen induktion ensimmäisellä askeleella. Sen jälkeen siirrytään käänteisen induktion prosessin keskelle ja näytetään heikosti dominoitujen strategioiden iteroidun eliminoinnin tekevän samoin kuin käänteinen induktio. Tästä seuraa menetelmien olevan ekvivalentteja.

Olkoon peli määritelty kuten lauseen 1.10 todistuksessa. Numeroidaan pelaajien solmut laajassa muodossa kasvaen pelin alusta loppuun. Olkoon käänteisessä induktiossa ensimmäisenä käsittelyssä pelaajan i solmu $c_i^{n_i}$. Kaikki valinnat joukossa $M_i^{n_i}$ johtavat päätesolmuun. Olkoon näistä $m_{n_i}^* \in M_i^{n_i}$ yksikäsitteisesti parhaimman hyödyn pelaajalle i antava valinta.

Käänteinen induktio kirjaa, että solmussa $c_i^{n_i}$ pelaaja i tekee valinnan $m_{n_i}^*$, poistaa pelipuusta kaikki solmusta lähtevät valinnat ja asettaa uudelle päätesolmulle $c_i^{n_i}$ valinnan $m_{n_i}^*$ lopputulokset.

Heikosti dominoitujen strategioiden iteroidun eliminoinnin vastaava askel on hylätä kaikki pelaajan i strategiat

$$(m_1, \ldots, m_{n_i-1}, m_{n_i}), \text{ jossa } m_{n_i} \in M_i^{n_i} \setminus \{m_{n_i}^*\}.$$

Näin voidaan tehdä, koska strategia $(m_1, \ldots, m_{n_i-1}, m_{n_i}^*)$ dominoi heikosti kaikkia tällaisia strategioita: Se antaa aidosti suuremman tuloksen mikäli peli päättyy solmuun $c_i^{n_i}$ ja saman muulloin, muiden pelaajien strategiavalinnoista riippumatta.

Oletetaan nyt, että käänteinen induktio on saavuttanut solmut $c_p^{l_p+1}, \ldots, c_p^{n_p}$ pelaajille $p = 1, \ldots, N$, jossa $1 \leq l_p \leq n_p$. Olkoon seuraavaksi käsiteltävänä pelaajan i solmu $c_i^{l_i}$. Tällöin jokainen valinta $m_{l_i} \in M_i^{l_i}$ johtaa päätesolmuun. Tuottakoon näistä valinta $m_{l_i}^*$ yksikäsitteisesti parhaan lopputuloksen pelaajalle i. Käänteinen induktio kirjaa pelaajan i tekevän solmussa $c_i^{l_i}$ valinnan $m_{l_i}^*$, poistaa pelipuusta kaikki solmun $c_i^{l_i}$ valinnat ja antaa uudelle päätesolmulle $c_i^{l_i}$ valinnan $m_{l_i}^*$ lopputulokset.

Vastaavassa askeleessa heikosti dominoitujen strategioiden iteroidussa eliminoinnissa pelaajan $p = 1, \ldots, N$ jäljellä olevat strategiat ovat muotoa

$$(m_1, \ldots, m_{l_p}, m_{l_p+1}^*, \ldots, m_{n_p}^*), \text{ jossa } m_k \in M_p^k.$$

Karsitaan nyt pelipuusta pelaajan i strategiat

$$(m_1, \ldots, m_{l_i-1}, m_{l_i}, m_{l_i+1}^*, \ldots, m_{n_i}^*) \text{ kaikille } m_{l_i} \in M_i^{l_i} \setminus \{m_{l_i}^*\}$$

koska jokaista tällaista strategiaa dominoi heikosti strategia

$$(m_1, \ldots, m_{l_i-1}, m_{l_i}^*, m_{l_i+1}^*, \ldots, m_{n_i}^*).$$

Tämä johtuu siitä, että se antaa aidosti suuremman tuloksen mikäli peli päätyy solmuun $c_i^{l_i}$ ja saman muulloin, muiden pelaajien *jäljellä olevista* strategioista riippumatta.

Käänteinen induktio sekä heikosti dominoitujen strategioiden iteroitu eliminointi tuottavat siis yksikäsitteisen strategian $s_p^* = (m_1^*, \ldots, m_{n_p}^*)$ pelaajalle $p = 1, \ldots, N$. $\square$

1.4 Jatkuvat pelit

Määritelmä 1.14 (Jatkuva peli)**.** Eräissä peleissä jokainen pelaaja voi tehdä erään valintansa reaalilukuväliltä. Määritellään yksinkertaisimmassa tapauksessa siis peli, jossa on kaksi pelaajaa, joilla kummallakin on yksi vuoro. Pelaaja 1 valitsee ensiksi arvon s reaalilukuväliltä I. Seuraavaksi on pelaajan 2 vuoro. Pelaaja 2 valitsee arvon t vaihtoehtoväliltänsä J. Tässä pelaaja 2 myös havaitsee pelaajan 1 valinnan ennen päätöstänsä. Peli päättyy ja lopputulokset $\pi_1(s,t)$ ja $\pi_2(s,t)$ lasketaan.

Tällainen peli täyttää laajan muodon ja täydellisen informaation pelin määritelmän 1.4. Kaikkien täydellisten polkujen joukko on $I \times J$ ja koska peli määriteltiin valintojen eikä solmujen avulla, hyötyfunktiot määrätään antamalla arvot täydellisille poluille eikä päätesolmuille, jolloin $\pi_p : I \times J \to \mathbb{R}$ pelaajalle p.

Määritelmä 1.15 (Paras vastaus)**.** Normaalin muodon pelissä pelaajien lukumäärällä n, strategiajoukoilla $S_1, \ldots, S_n$ ja hyötyfunktioilla $\pi_1, \ldots, \pi_n$, valitaan s_1^* siten että

$$\pi_1(s_1^*, s_2, \ldots, s_n) \geq \pi_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) \text{ kaikille } s_1 \in S_1.$$

Tällöin s_1^* on eräs pelaajan 1 *paras vastaus* muiden pelaajien strategiavalintoihin $s_2, \ldots, s_n$.

Olkoon $B_1(s_2, \ldots, s_n)$ joukko pelaajan 1 parhaista vastauksista kaikille muiden pelaajien valitsemille strategioille $s_2, \ldots, s_n$. Toisin sanoen,

$$s_1^* \in B_1(s_2, \ldots, s_n) \text{ jos ja vain jos } \pi_1(s_1^*, s_2, \ldots, s_n) \geq \pi_1(s_1, s_2, \ldots, s_n) \quad \text{kaikille } s_1 \in S_1.$$

Kuvausta, joka yhdistää kaikkiin $(s_2, \ldots, s_n) \in S_2 \times \cdots \times S_n$ niitä vastaavan joukon $B_1(s_1, \ldots, s_n) \subset S_1$, kutsutaan pelaajan 1 *parhaiden vastausten joukoksi.* Mikäli jokainen $B_1(s_2, \ldots, s_n)$ koostuu yhdestä strategiasta, määritellään pelaajan 1 *parhaan vastauksen funktioksi* $b_1(s_2, \ldots, s_n)$.

Muille pelaajille nämä muodostetaan vastaavasti.

Määritelmä 1.16 (Jatkuva versio käänteisestä induktiosta)**.** Jatkuvan pelin tapauksessa voidaan soveltaa käänteisen induktion ideaa sen ratkaisemiseksi. Tehdään tämä kahden pelaajan tapauksessa ja aloitetaan pelaajan 2 vuorosta. Hän valitsee järkiperäisyysoletuksen mukaan, joten hän havaitsee pelaajan 1 päätöksen $s \in I$ ja tekee valinnan $t \in J$ siten, että $\pi_2(s,t) \geq \pi_2(s,t')$ kaikille $t' \in J$. Oletetaan, että tällainen t on yksikäsitteinen kaikille $s \in I$. Silloin t on pelaajan 2 paras vastaus pelaajan 1 valintaan s. Funktio $t = b(s)$ antaa pelaajalle 2 parhaan strategian jokaiselle mahdolliselle pelaajan 1 valinnalle.

Pelaajan 1 toisaalta täytyy tehdä valinta s ottaen huomioon pelaajan 2 strategia. Koska tässä tilanteessa pelaaja 2 käyttää parhaan vastauksen strategiaansa, pelaajan 1 tulee valita $s \in I$ siten, että $\pi_1(s, b(s)) \geq \pi_1(s', b(s'))$ kaikille $s' \in I$.

Esimerkki 1.17 (Stackelbergin duopolimalli)**.** Tilannetta jossa vain kaksi yritystä tuottaa tiettyä tuotetta kutsutaan duopoliksi. Stackelbergin duopolin mallissa kumpikin yritys tavoittelee maksimaalisia tuloja itselleen valitsemalla sopivan tuotantonopeuden. Oletetaan, että yritys 1 valitsee ensiksi, jonka jälkeen yritys 2 havaitsee tämän valinnan ja sopeutuu siihen. Kumpi yritys tulee menestymään paremmin?

Valitaan tässä seuraavat oletukset:

1. Tuotantonopeudet ovat yrityksille 1 ja 2 vastaavasti $s, t \in \mathbb{R}$.
2. Hinta tippuu lineaarisesti yhteistuotannon mukaan. Siis olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ siten, että tuotteen hinta on
$$p = \alpha - \beta(s+t).$$
3. Kummallakin yrityksellä tuotteen tuottamisen kulut on $c > 0$. Siis $c_1(s) = cs$ ja $c_2(t) = ct$.
4. $\alpha > c$, jolloin pienillä yhteistuotantomäärillä tuotteen valmistaminen on kannattavaa.

Yritys 1 valitsee tuotantonopeutensa $s \in \mathbb{R}$ ensiksi. Tämän jälkeen yritys 2 näkee valinnan s ja päättää omasta tuotantonopeudestaan $t \in \mathbb{R}$.

Hyötytulemat ovat

$$\pi_1(s,t) = ps - c_1(s) = (\alpha - \beta(s+t))s - cs = (\alpha - \beta t - c)s - \beta s^2,$$
$$\pi_2(s,t) = pt - c_2(t) = (\alpha - \beta(s+t))t - ct = (\alpha - \beta s - c)t - \beta t^2.$$

Löydämme yrityksen 2 parhaan vastauksen $t = b(s)$ yrityksen 1 strategiaan etsimällä, missä funktio $\pi_2(s,t)$ saa maksimiarvonsa vakiolla s. Koska funktio π_2 on alaspäin aukeava paraabeli, saamme tämän maksimin etsimällä derivaatan nollakohdan muuttujan t suhteen:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial t} = \alpha - \beta s - c - 2\beta t = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisu on yrityksen 2 parhaan vastauksen funktio

$$b(s) = t = \frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2}s.$$

Nyt yritys 1 voi tehdä valintansa olettaen, että yritys 2 käyttää parhaan vastauksen strategiaansa. Siis maksimoidaan funktio

$$\begin{aligned}\pi_1(s, b(s)) = \pi_1\left(s, \frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2}s\right) &= \left(\alpha - \beta\left(\frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2}s\right) - c\right)s - \beta s^2 \\ &= \frac{\alpha - c}{2}s - \frac{\beta}{2}s^2.\end{aligned}$$

Tämä funktio voidaan maksimisoida muuttujan s suhteen symmetrisyyden nojalla samoin kuin aiempi funktio:

$$\frac{d}{ds}\pi_1(s, b(s)) = \frac{\alpha - c}{2} - \beta s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\alpha - c}{2\beta}.$$

Siis $\pi_1(s, b(s))$ saa maksimiarvonsa kohdassa $s^* = (a - c)/2\beta$. Kun yritys 1 tekee tämän valinnan, yritys 2 valitsee

$$t^* = b(s^*) = \frac{\alpha - c}{4\beta}.$$

Tuotantonopeudet s^* ja t^* ovat positiivisia, koska oletimme aluksi $\alpha > c$. Tuotteen hinta nyt on

$$p^* = \alpha - \beta(s^* + t^*) = \alpha - \beta\left(\frac{\alpha - c}{2\beta} + \frac{\alpha}{4\beta}\right) = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}c = c + \frac{1}{4}(\alpha - c).$$

Hinta on siis myös positiivinen, oletuksen $\alpha > c$ takia.

Yritysten tulot ovat

$$\pi_1(s^*, t^*) = \frac{(\alpha - c)^2}{8\beta}, \quad \pi_2(s^*, t^*) = \frac{(\alpha - c)^2}{16\beta}.$$

Siis tässä tapauksessa yrityksen 1 tuotto on tuplasti yrityksen 2 tuotto.

2 Nashin tasapainot

2.1 Määritelmä

Määritelmä 2.1 (Nashin tasapaino)**.** Olkoon n pelaajan normaalin muodon peli, jossa on strategiajoukot $S_1, \ldots, S_n$ ja hyötyfunktiot $\pi_1, \ldots, \pi_n$. *Nashin tasapaino* on strategiaprofiili $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ mikäli mikä tahansa yksittäinen pelaaja vaihtaa strategiaansa, pelaajan oma lopputulema ei kasva.

Toisin sanoin, $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ on Nashin tasapaino mikäli

- Jokaiselle $s_1 \in S_1$, $\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*)$.
- Jokaiselle $s_2 \in S_2$, $\pi_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_2(s_1^*, s_2, s_3^*, \ldots, s_n^*)$.

  $\vdots$
- Jokaiselle $s_n \in S_n$, $\pi_n(s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*, s_n^*) \geq \pi_n(s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*, s_n)$.

Aito Nashin tasapaino on strategiaprofiili $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, josta minkä tahansa yksittäisen strategiansa vaihtavan pelaajan hyöty huononee.

Toisin sanoin, $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ on aito Nashin tasapaino mikäli

- Jokaiselle $s_1 \in S_1 \setminus \{s_1^*\}$, $\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) > \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*)$.
- Jokaiselle $s_1 \in S_1 \setminus \{s_1^*\}$, $\pi_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*, \ldots, s_n^*) > \pi_2(s_1^*, s_2, s_3^*, \ldots, s_n^*)$.

  $\vdots$
- Jokaiselle $s_1 \in S_1 \setminus \{s_1^*\}$, $\pi_n(s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*, s_n^*) > \pi_n(s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*, s_n)$.

Esimerkki 2.2. Kun iso apina ja pieni apina samanaikaisesti valitsevat strategiansa, saadaan 2×2-matriisi.

		Pieni apina	
		odota	**kiipeä**
Iso apina	**odota**	$(0, 0)$	$(9, 1)$
	kiipeä	$(4, 4)$	$(5, 3)$

Dominoituja strategioita ei ole, mutta pelissä on kaksi aitoa Nashin tasapainoa:

- Strategiaprofiili (odota, kiipeä) on aito Nashin tasapaino: Mikäli iso apina vaihtaa strategiansa kiipeämiseen, sen lopputulos laskee yhdeksästä viiteen. Jos pieni apina vaihtaa strategiansa odottamiseen, sen lopputulos laskee yhdestä nollaan.

- Strategiaprofiili (kiipeä, odota) on myös aito Nashin tasapaino. Mikäli iso apina vaihtaa strategiansa odottamiseen, sen lopputulos laskee neljästä nollaan. Jos pieni apina vaihtaa kiipeämiseen, sen lopputulos laskee neljästä kolmeen.

2.2 Nashin tasapainojen löytäminen dominoitujen strategioiden iteroidulla eliminoinnilla

Lause 2.3. *Tehdään heikosti dominoitujen strategioiden iteroitua eliminaatiota normaalin muodon pelille G. Olkoon H näin saatu pienennetty peli. Tällöin*

(1) *Jokainen pelin H Nashin tasapaino on myös pelin G Nashin tasapaino.*

(2) *Erityisesti, jos pelissä H on jäljellä vain yksi strategia s_i^* jokaisella pelaajalla, strategiaprofiili $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ on pelin G Nashin tasapaino.*

Lauseen 2.3 viimeinen kohta tarkoittaa, että jokainen dominantti strategiatasapaino on Nashin tasapaino.

Aidosti dominoitujen strategioiden iteroidun eliminaation tilanteessa voimme sanoa enemmän:

Lause 2.4. *Tehdään aidosti dominoitujen strategioiden iteroitua eliminaatiota normaalin muodon pelille G. Tällöin*

(1) *Jokainen eliminaatiojärjestys antaa saman pelin H.*

(2) *Yksikään eliminoitu strategia ei kuulu yhteenkään pelin G Nashin tasapainoon.*

(3) *Jokainen pelin H Nashin tasapaino on myös pelin G Nashin tasapaino.*

(4) *Jos pelissä H on vain yksi strategia s_i^* jokaisella pelaajalla, $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ on aito Nashin tasapaino. Lisäksi, pelissä ei ole muita Nashin tasapainoja.*

Lause 2.4 oikeuttaa aidosti dominoitujen strategioiden iteroidun eliminaation käyttämisen analysoitavan pelin yksinkertaistamiseen. Sen mukaan Nashin tasapainoja ei jää löytämättä redusoinnin seurauksena.

Todistetaan ensiksi lauseen 2.4 kohdat (2), (3) ja (4), ja näytetään sitten kuinka kohdan (3) todistus voidaan muuntaa lauseen 2.3 kohdan (1) todistukseksi.

Todistus. Katsotaan aidosti dominoitujen strategioiden iteroitua eliminaatiota normaalin muodon pelille G.

Kohdan (2) todistamiseksi näytämme, että k:nnes eliminoitu strategia ei kuulu yhteenkään Nashin tasapainoon.

$k = 1$: Olkoon s_i pelaajan i strategia, joka eliminoidaan ensimmäisenä. Se eliminoitiin koska pelaajalla i on strategia t_i joka aidosti dominoi strategiaa s_i. Jos pelaajan strategia s_i korvataan strategialla t_i, ja muiden pelaajien strategiat pidetään paikallaan, pelaajan i lopputulema paranee. Siis tämä strategiaprofiili ei ole Nashin tasapaino.

Oletetaan, että väite on tosi kaikille $k = 1, \ldots, l$. Olkoon s_i pelaajan i strategia, joka pelistä eliminoidaan seuraavaksi. Se eliminoitiin koska pelaajalla i on strategia t_i, joka dominoi aidosti strategiaa s_i, olettaen että kukaan muu pelaaja ei käytä aiemmin eliminoitua strategiaa. Oletetaan, että strategia s_i kuuluu strategiaprofiiliin. Jos jokin aiemmin eliminoidusta strategioista kuuluu strategiaprofiiliin, oletuksen nojalla se ei ole Nashin tasapaino. Muulloin, kun pelaaja i vaihtaa strategiansa s_i strategiaan t_i, jättäen muiden pelaajien valitsemat strategiat ennalleen, pelaajan i lopputulos on suurempi. Siten tämä strategiaprofiili strategialla s_i ei ole Nashin tasapaino.

Tämä todisti lauseen 2.4 väitteen (2).

Todistaaksemme väitteen (3) lauseesta 2.4, olkoon $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ Nashin tasapaino pelissä H, ja olkoon S_1 pelaajan 1 strategiajoukko pelille G. Nyt täytyy siis näyttää, että jokaiselle $s_1 \neq s_1^*$ joukossa S_1,

$$\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.1}$$

Mikäli s_1 on sellainen pelaajan 1 strategia, joka jää jäljelle peliin H, lauseen 2.4 väite pitää paikkansa. Tämä johtuu siitä, että silloin $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ on pelin H Nashin tasapaino. Jäljellä siis on todistaa, että jos s_1 on pelaajan 1 mikä tahansa eliminoitu strategia, niin

$$\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) > \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.2}$$

Todistetaan siis käänteisellä induktiolla seuraava väite: jos s_1 on pelaajan 1 k:nnes eliminoitava strategia, niin yhtälö 2.2 on voimassa.

Olkoon s_1 pelaajan 1 viimeinen eliminoitava strategia. Se eliminoidaan koska yksi jäljellä olevista strategioista, t_1, muiden pelaajien strategioilla $s_2, \ldots, s_n$ täytti ehdon $\pi_1(t_1, s_2, \ldots, s_n) > \pi_1(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Erityisesti, koska $s_2^*, \ldots, s_n^*$ olivat jäljellä olevien strategioiden joukossa, saamme

$$\pi_1(t_1, s_2^*, \ldots, s_n^*) > \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.3}$$

Koska $\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_1(t_1, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ on Nashin tasapaino pelissä H ja t_1 on pelaajan 1 valittavissa oleva strategia pelissä H,

$$\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_1(t_1, s_2^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.4}$$

Kun yhdistetään epäyhtälöt (2.3) ja (2.4), saadaan yhtälö (2.2).

Lauseen 2.4 väittämän (4) todistamiseksi täytyy näyttää, että mikäli pelissä H on jäljellä enää yksi strategia s_i^* jokaiselle pelaajalle, niin kaikille $s_1 \neq s_1^*$ joukossa S_1

$$\pi_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) > \pi_1(s_1, s_2^*, \ldots, s_n^*). \tag{2.5}$$

Tässä tapauksessa, jokainen $s_1 \neq s_1^*$ joukossa S_1 eliminoidaan aidosti dominoitujen strategioiden iteroidussa eliminaatiossa, joten väittämän (3) todistus todistaa tämän väitteen.

Lauseen 2.3 väittämä (1) todistetaan samalla tavalla kuin lauseen 2.4 väittämä (3), epäyhtälöistä vain yksikään ei ole aito.

□

2.3 Nashin tasapainojen löytäminen parhaalla vastauksella

Parasta vastausta voidaan käyttää Nashin tasapainojen löytämiseen. Nashin tasapainossa jokaisen pelaajan strategia on paras vastaus muiden pelaajien strategioihin. Toisin sanoin, strategiaprofiili $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ on Nashin tasapaino jos ja vain jos

- $s_1^* \in B_1(s_2^*, \ldots, s_n^*)$.
- $s_2^* \in B_2(s_1^*, s_3^*, \ldots, s_n^*)$.

  $\vdots$

- $s_n^* \in B_n(s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*)$.

Tätä Nashin tasapainojen ominaisuutta voidaan käyttää niiden löytämiseen ratkaisemalla pelaajien parhaiden vastausten joukkojen leikkauskohdat.

Esimerkki 2.5. Etsitään ison ja pienen apinan normaalimuotoisesta pelistä 1.3 molemman pelaajan parhaiden vastausten joukot:

		Pieni apina			
		oo	***ok***	***ko***	***kk***
Iso apina	***o***	$(0,0)$	$(0,0)$	$(\boxed{9},\boxed{1})$	$(\boxed{9},\boxed{1})$
	k	$(\boxed{4},\boxed{4})$	$(\boxed{5},3)$	$(4,\boxed{4})$	$(5,3)$

Taulukko 2.1: Ison ja pienen apinan parhaat vastaukset.

Suorakulmioiden selitykset:

- Ison apinan parhaiden vastausten joukko on funktio:
  - Jos pieni apina valitsee *oo*, tee k.
  - Jos pieni apina valitsee *ok*, tee k.
  - Jos pieni apina valitsee *ko*, tee o.
  - Jos pieni apina valitsee *kk*, tee o.

  Tämä vastaavuus indikoidaan lopputulosmatriisissa piirtämällä suorakulmio ison apinan vastaavien valintojen lopputuloksien ympärille. Toisin sanoin, isolle apinalle merkitään suorakulmioiden sisään parhaat lopputulokset jokaiselta sarakkeelta.

- Pienen apinan parhaiden vastausten joukko ei ole funktio:
  - Jos iso apina valitsee o, tee *ko* tai *kk*.
  - Jos iso apina valitsee k, tee *oo* tai *ok*.

  Tämä vastaavuus indikoidaan lopputulosmatriisissa piirtämällä suorakulmio pienen apinan vastaavien valintojen lopputuloksien ympärille. Toisin sanoin, pienelle apinalle parhaat lopputulokset merkitään suorakulmioiden sisään jokaiselta riviltä. Tässä tapauksessa suurimpia lopputuloksia on kummallakin rivillä kaksi, joten kummatkin niistä merkitään suorakulmiolla.

Kolmessa parissa molemmat lopputulokset on merkitty suorakulmioihin. Nämä ovat kahden pelaajan parhaiden vastauksen joukkojen leikkauskohdat, eli ne vastaavat pelin Nashin tasapainoja.

Esimerkki 2.6 (Cournot'n duopolimalli)**.** Cournot'n malli duopolista on muuten sama kuin Stackelbergin malli esimerkissä 1.17, mutta kumpikin pelaaja valitsee tuotantonopeutensa samanaikaisesti. Tämä on siis normaalin muodon peli kahdella pelaajalla, strategiajoukoilla $0 \leq s < \infty$ ja $0 \leq t < \infty$, ja lopputulosfunktioilla

$$\pi_1(s,t) = ps - c_1(s) = \begin{cases} (\alpha - \beta(s+t))s - cs & \text{jos } s+t < \frac{\alpha}{\beta}, \\ -cs & \text{jos } s+t \geq \frac{\alpha}{\beta}, \end{cases}.$$

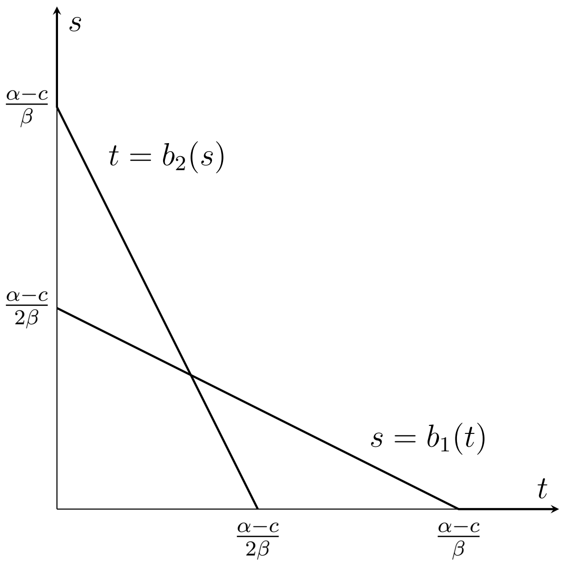
$$\pi_2(s,t) = pt - c_2(t) = \begin{cases} (\alpha - \beta(s+t))t - ct & \text{jos } s+t < \frac{\alpha}{\beta}, \\ -ct & \text{jos } s+t \geq \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases}.$$

Pelaajan 2 parhaan vastauksen funktion laskemiseksi täytyy ensiksi maksimoida π_2 muuttujan t suhteen. Tapauksessa $0 \leq t < \infty$ esimerkin 1.17 tulosta soveltaen tämä on

$$t = b_2(s) = \begin{cases} \frac{\alpha-c}{2\beta} - \frac{1}{2}s & \text{jos } s < \frac{\alpha-c}{\beta}, \\ 0 & \text{jos } s \geq \frac{\alpha-c}{\beta}. \end{cases}$$

Tilanteen symmetrisyyden nojalla pelaajan 1 parhaan vastauksen funktio on

$$s = b_1(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-c}{2\beta} - \frac{1}{2}t & \text{jos } t < \frac{\alpha-c}{\beta}, \\ 0 & \text{jos } t \geq \frac{\alpha-c}{\beta}. \end{cases}$$



Kuva 2.2: Parhaan vastauksen funktiot Cournot'n duopolimallissa.

Kuvassa 2.2 tilanne on analoginen lopputulosmatriisien kanssa, eli pelaajan 1 strategiat ovat pystyakselilla ja pelaajan 2 strategiat vaaka-akselilla. Pelin ainoa Nashin tasapaino löytyy siis parhaan vastauksen funktioiden leikkauspisteestä, kuten normaalin muodon peleissä.

Etsitään parhaan vastauksen funktioiden leikkauspiste yhtälöistä

$$t = \frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2}s, \quad s = \frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2}t,$$

jolloin saadaan, että $s = t = (\alpha - c)/3\beta$.

Lähdeluettelo

[1] Schecter, S. & Gintis, H.: *Game Theory in Action: An Introduction to Classical and Evolutionary Models*. Princeton University Press, Princeton, 2016.