

Avaruuden täyttävät käyrät

Pro gradu -tutkielma
Jussi Piippo
2464770
Matemaattisten tieteiden yksikkö
Oulun yliopisto
Kevät 2020

Sisältö

1 Johdanto	2
Johdanto	2
2 Esitietoja	2
3 Avaruuden täyttävä käyrä	6
3.1 Määritelmä	6
4 Hilbertin käyrä	6
4.1 Hilbertin käyrän määritelmä	7
4.2 Hilbertin käyrän kompleksiesitys	9
4.3 Hilbertin käyrän matriisiesitys	20
5 Peanon käyrä	22
5.1 Peanon käyrän määritelmä	22
5.2 Peanon käyrän geometrinen konstruktio	28
5.3 Peanon käyrän ja geometrisen Peanon käyrän yhtenevyys . . .	29
Lähdeluettelo	38

1 Johdanto

Avaruuden täyttävät käyrät ovat hyvin mielenkiintoinen ja monipuolinen aihe topologian alueella, sillä perinteisten kuvauksien joukosta \mathbb{R}^n joukolle \mathbb{R} si- jaan tarkastellaan kuvauksia yksikköjanelalta $[0, 1]$ yksikköneliölle $[0, 1] \times [0, 1]$. Perinteisemmin avaruuden täyttävänä käyränä pidetään sellaista käyrää, joka kulkee edellä mainitun yksikköneliön jokaisen pisteen kautta.

Keskityn työssäni kaksiulotteisiin Hilbertin ja Peanon avaruuden täyttäviin käyriin. Lisäksi näiden kohdalla keskityn molempien geometriseen konstruointiin sekä aritmeettiseen esitykseen.

Työni on tehty suurimmaksi osaksi teoksen [1] pohjalta, mutta jotkin todistukset olen konstruoinut itse. Tekstin ymmärtämiseksi lukijalla tulisi olla hyvät perustiedot joukko-opista, jatkuvuudesta sekä funktioiden perusominaisuuksista ja -käsitteistä. Tekstin kannalta muut oleelliset seikat käsitellään kappaleessa 2.

2 Esitietoja

Tässä kappaleessa esitellään työn kannalta tärkeitä esitietoja sekä merkintöjä.

Merkintä 2.1. Työn aikana merkitään joukkoja $[0, 1]$, $[0, 1] \times [0, 1]$ sekä $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ seuraavasti:

$$[0, 1] = \mathcal{I}$$

$$[0, 1] \times [0, 1] = \mathcal{Q}$$

$$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \mathcal{W}$$

Määritelmä 2.1. Olkoon vektori $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin vektorin \bar{z} normi avaruudessa \mathbb{R}^n määritellään

$$\|\bar{z}\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2}.$$

Määritelmä 2.2. Olkoon X topologinen avaruus ja piste $p \in X$. Piste p ympäristö joukossa X on joukko $V \subset X$, jos on olemassa avoin joukko U , jolle pätee

$$p \in U \subseteq V.$$

Määritelmä 2.3. Olkoot X topologinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukon A sanotaan olevan tiheä joukossa X , mikäli jokaisen pisteen $x \in X$ jokaiselle ympäristölle $V \subset X$ pätee

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Määritelmä 2.4. Olkoot funktio $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sekä $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Tällöin funktion f kuva joukosta A avaruudella \mathbb{R}^n on joukko

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in A\}.$$

Määritelmä 2.5. Olkoot $X \subseteq \mathbb{R}$ ja $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ joukkoja sekä $f : X \rightarrow Y$ funktio. Funktio f on *jatkuva*, mikäli jokaisella $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa sellainen $\delta \in \mathbb{R}_+$, että $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ aina, kun $|x - y| < \delta$ sekä $x, y \in X$.

Määritelmä 2.6. Olkoon $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funktio. Jos funktio f on jatkuva, sanotaan joukkoa $f(\mathcal{I})$ *käyräksi*.

Merkintä 2.2. Olkoot piste $t \in \mathcal{I}$ ja käyrä $\mathcal{C} = f(\mathcal{I})$. Merkitään tällöin käyrän \mathcal{C} parametriesitystä vektoreina

$$\text{joukossa } \mathbb{R}^3 : f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

sekä

$$\text{joukossa } \mathbb{R}^2 : f(t) = (x(t), y(t)).$$

Joskus voidaan käyttää myös *pystyvektoriesityksiä*

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ sekä } f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 2.7. Olkoot $U \subset \mathbb{R}$ ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ funktio. Funktion f sanotaan olevan *differentioituva* pisteessä $x_0 \in U$, mikäli on olemassa derivaatta

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Määritelmä 2.8. Olkoon $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $i = \sqrt{-1}$ on imaginääriyksikkö. Tällöin joukkoa

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sanotaan *kompleksilukujen* joukoksi. Kompleksiluvun $z = a + bi$ *reaaliosa* on $\operatorname{Re}(z) = a$ ja *imaginääriosia* on $\operatorname{Im}(z) = b$. Kompleksiluvun $z = a + bi$ *kompleksikonjugaatti* on kompleksiluku

$$\bar{z} = a - bi.$$

Määritelmä 2.9. Olkoon $n \in \mathbb{R}$. Määritellään *signum-funktio* $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n > 0 \\ 0, & \text{jos } n = 0 \\ -1, & \text{jos } n < 0 \end{cases}$$

Määritelmä 2.10. Olkoot piste $t \in [0, 1[$ ja $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Piste t *b*-kantaesitys on esitys

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{b^n},$$

missä $0 \leq q_n \leq b-1$ ja $q_n \in \mathbb{N}$.

Merkintä 2.3. Olkoon $t \in [0, 1[$. Merkitään määritelmän 2.10 mukaista pisteen t ääretöntä *b*-kantaesitystä

$$t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots]_b.$$

Mikäli on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $q_k = 0$ kaikilla $k > n$, voidaan pistettä t merkitä äärellisellä *b*-kantaesityksellä

$$t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n]_b.$$

Erityistapauksena merkitään pisteen 1 *b*-kantaesitystä

$$[1, 00000\dots]_b \text{ tai } [1]_b.$$

Merkitään myös pisteen t ääretöntä, jaksollista *b*-kantaesitystä

$t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q q q \dots]_b$ seuraavasti:

$$t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n \bar{q}]_b.$$

Lemma 2.1. Olkoon $[0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q]_b$ jonkin pisteen $t \in [0, 1]$ *b*-kantaesitys, missä $b \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$[0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q]_b = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n (q-1) \overline{(b-1)}]_b.$$

Todistus. Määritelmän 2.10 nojalla on oltava voimassa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{b^i}\right) + \frac{q}{b^{n+1}} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{b^i}\right) + \frac{q-1}{b^{n+1}} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b^i}\right) \\ \frac{q}{b^{n+1}} &= \frac{q-1}{b^{n+1}} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b^i}\right) \\ \sum_{i=n+2}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b^i}\right) &= \frac{q}{b^{n+1}} - \frac{q-1}{b^{n+1}} = \frac{1}{b^{n+1}}. \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on suppeneva geometrinen sarja, joten nyt saadaan

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=n+2}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b^i} \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b^i} \right) - \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{b-1}{b^i} \right) \\
 &= \frac{b-1}{1-1/b} - (b-1) \frac{1-(1/b)^{n+2}}{1-1/b} \\
 &= \frac{b-1}{1-1/b} \frac{1}{b^{n+2}} \\
 &= \frac{b(b-1)}{b-1} \frac{1}{b^{n+2}} \\
 &= \frac{b}{b^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{b^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

□

Aksiooma 2.1. Olkoon $I_n = \prod_{i=1}^k [a_i^n, b_i^n] \subset \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$, joukko sisäkkäisiä välejä. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}^k$, että

$$r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Teoreema 2.1. Kaikille reaaliluvuille x pätee

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x,$$

missä i on imaginääriyksikkö.

Todistus. Katso lähde [3].

□

Määritelmä 2.11. Olkoot $A \subset \mathbb{R}$ ja $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Funktiojono $\{f_k(x)\}$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kaikilla $x \in A$ pätee

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

aina, kun $k > k_\varepsilon$.

3 Avaruuden täyttävä käyrä

Avaruuden täyttävän käyrän tutkimisen historian voidaan ajatella alkaneen vuonna 1878, kun George Cantor osoitti, että väli $[0, 1]$ voidaan kuvata bijektiivisesti joukolle $[0, 1]^2$. Vuotta myöhemmin Eugen Netto osoitti, että Cantorin teorian mukainen kuvaus on vääjäämättä epäjatkuva. Tästä heräsi yleinen pohdinta Cantorin teorian mukaisen surjektiivisen, jatkuvan kuvauksen olemassaolosta. Tämän seurauksena muun muassa Giuseppe Peano tarkasteli ongelmaa ja vuonna 1890 konstruoi ensimmäisen mallin vastaavanlaisesta käyrästä.

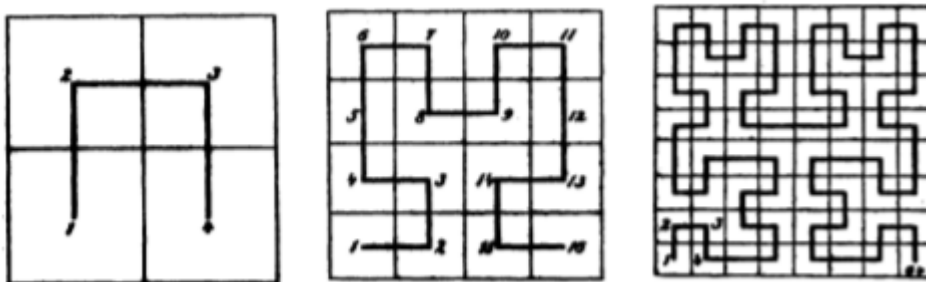
Surjektiivisia, jatkuvia kuvauksia väliltä $[0, 1]$ joukolle $[0, 1]^n$, missä $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, alettiin kutsumaan *avaruuden täyttäväksi käyriksi*.

3.1 Määritelmä

Määritelmä 3.1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sekä funktio $f : \mathcal{I} \rightarrow [0, 1]^n$ jatkuva ja surjektiivinen. Tällöin $f(\mathcal{I})$ on avaruuden täyttävä käyrä.

4 Hilbertin käyrä

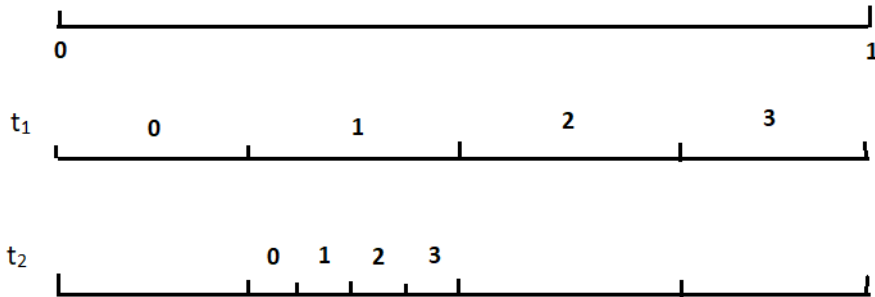
David Hilbertin kehittelemän ja hänen nimeään kantavan käyrän päätavoitteena oli avoin geometrinen näkemys. Hilbert ajatteli, että joukko \mathcal{I} voitaisi jakaa yhtä suuriin, suljettuihin väleihin ja jokainen suljettu väli voitaisi kuvata neliöiksi jaetulle joukolle \mathcal{Q} . Tämän perusteella molemmat joukot tulisi Hilbertin mukaan jakaa 2^{2^n} , $n \in \mathbb{N}$ osaan toimiakseen. Tällaisten jakojen määrän lähestyessä ääretöntä lopputulos on *Hilbertin käyrä*.



Kuva 1: Hilbertin käyrän ensimmäinen, toinen ja kolmas iteraatio.

4.1 Hilbertin käyrän määritelmä

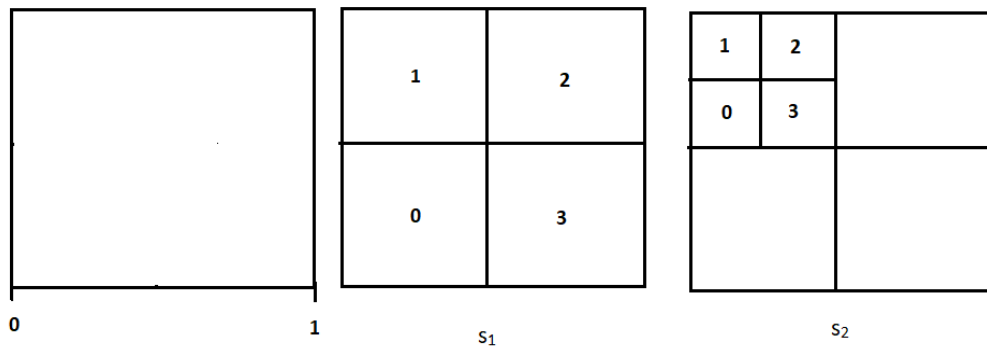
Määritelmä 4.1.



Kuva 2: Lähtöjoukko \mathcal{I} sekä sen ensimmäinen ja toinen jako.

Jaetaan joukko \mathcal{I} kuvan 2 mukaisesti neljään suljettuun väliin t_1^* . Olkoon piste $t \in \mathcal{I}$ jaon t_1^* alueella t_1 . Tällöin väli t_1 voidaan jakaa edelleen neljään suljettuun väliin t_2^* ja piste t sijaitsee näistä välin t_2 alueella. Jatkettaessa näin äärettömän monesti saadaan aksioman 2.1 nojalla tilanne $t = \bigcap_{n=1}^{\infty} t_n$. Tällaisille pisteille t saadaan joukon \mathcal{I} jaosta 4-kantaesitys

$$t = [0, t_1 t_2 t_3 \dots]_4.$$



Kuva 3: Maalijoukko \mathcal{Q} sekä sen ensimmäinen ja toinen jako.

Vastaavasti joukko \mathcal{Q} voidaan jakaa neljään suljettuun neliöön s_1^* kuvan 3 mukaisesti. Olkoon nyt piste $s \in \mathcal{Q}$ jaon s_1^* osaneliön s_1 alueella. Tällöin osaneliö s_1 voidaan jakaa edelleen neljään suljettuun osaneliöön s_2^* ja piste s sijaitsee näistä osaneliön s_2 alueella. Jatkettaessa näin äärettömän monesti saadaan aksioman 2.1 nojalla tilanne $s = \bigcap_{n=1}^{\infty} s_n$.

Yllä olevan avulla voidaan määritellä kuvaus $f_h : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q}$, $f_h(t) = s$. Tällaisten pisteiden kuvien joukkoa $f_h(\mathcal{I})$ sanotaan *Hilbertin käyräksi*.

Huomautus 4.1. Olkoon jakojen määrä $n > 0$. Piste $t \in \mathcal{I}$ voi sijaita jaon kahden osavälin reunalla. Tällöin seuraa väistämättä tilanne

$$t = t_1 = [0, t_1 t_2 \dots t_n 000 \dots]_4$$

tai

$$t = t_2 = [0, t_1 t_2 \dots (t_n - 1) 333 \dots]_4.$$

Lemman 2.10 nojalla saadaan kuitenkin $t = t_1 = t_2$. Käytetään näistä esityksistä ensimmäistä muotoa. Vastaavasti jos jollakin joukon \mathcal{Q} pisteellä s on esitys $s = [0, s_1 s_2 s_3 \dots (s_n - 1) 000 \dots]_4$, on samalla pisteellä myös esitysmuoto $s = [0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n 333 \dots]_4$. Käytetään myös tässä tilanteessa ensimmäistä esitysmuotoa.

Osoitetaan nyt Hilbertin käyrästä toinen avaruuden täyttävän käyrän ominaisuuksista.

Teoreema 4.1. Määritelmän 4.1 mukainen Hilbertin käyrä on surjektiivinen.

Todistus. Määritelmän 4.1 mukaisesti väli \mathcal{I} voidaan jakaa 2^{2n} osaväliin ja joukko \mathcal{Q} voidaan jakaa 2^{2n} osaneliöksi.

Olkoon piste $s \in \mathcal{Q}$ mielivaltainen. Tällöin piste s voi sijaita jonkin joukon \mathcal{Q} jaossa syntyneen neliön sisällä, nurkassa tai reunalla. Mikäli piste s sijaitsee neliön sisällä, joukon \mathcal{Q} jakoa tihennettäessä äärettömyyteen supistuu tämä neliö aksiooman 2.1 nojalla pisteeksi, jonka alkukuva on jokin piste $t \in \mathcal{I}$.

Mikäli piste s sijaitsee neliön nurkassa, vastaavasti on olemassa sellainen neliö, joka aksiooman 2.1 nojalla suppenee täksi pisteeksi. Näin ollen on olemassa yksikäsitteinen joukon \mathcal{I} piste t , joka kuvautuu kyseiseksi pisteeksi s .

Mikäli piste s sijaitsee jonkin neliön reunalla, voi se kuulua useampaan kuin yhteen neliöön. Osa näistä neliöistä ei välttämättä ole kahden peräkkäisen joukon \mathcal{I} välin kuvia. Tällöin kyseisen pisteen s voi ajatella kuuluvan useampaan ei-peräkkäisen joukon \mathcal{I} välin kuvaan. Tämä tarkoittaa, että pisteellä s on useampia alkukuvia joukolla \mathcal{I} . Täten siis Hilbertin käyrä on surjektiivinen. \square

Teoreema 4.2. Hilbertin käyrä $f_h(\mathcal{I})$ ei ole missään differentioituva.

Todistus. Olkoot iteraatioiden määrä $k \geq 3$ sekä piste $t \in \mathcal{I}$. Valitaan piste $t_k \in \mathcal{I}$ siten, että $|t - t_k| \leq \frac{10}{2^{2k}}$ ja käyrän koordinaatit $x(t)$ ja $x(t_k)$ eroavat toisistaan vähintään neliön sivun verran. Toisin sanoen $|x(t) - x(t_k)| \geq \frac{1}{2^k}$.

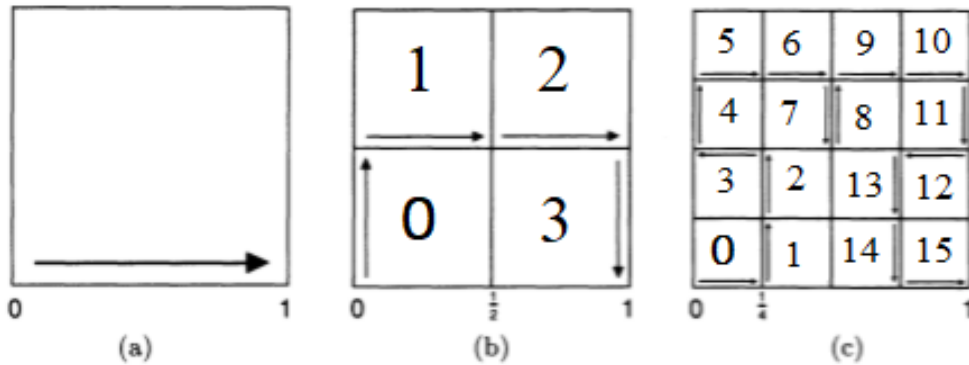
Tämä on aina mahdollista, sillä piste t_k sijaitsee enintään 10 osavälin etäisyydellä pisteestä t , jolloin teoreeman 4.1 nojalla on olemassa ainakin yksi sellainen väli, jonka piste t_k ei kuvaudu pisteen $x(t)$ sisältämälle osaneliölle tai sen viereisille osaneliöille.

$$|x(t) - x(t_k)|/|t - t_k| \geq \frac{1}{2^k} / \frac{10}{2^{2k}} = \frac{2^k}{10}.$$

Molemmista tapauksista nähdään, että kun iterointien määrä k lähestyy ääretöntä, myös yllä oleva lauseke lähestyy ääretöntä. Tällöin siis derivaattaa ei ole ja määritelmän 2.7 nojalla Hilbertin käyrä ei ole missään differentioituva. \square

4.2 Hilbertin käyrän kompleksiesitys

Tähän mennessä Hilbertin käyrästä on esitetty sen konstruktion perusteet ja geometrinen pohja. Kuitenkin vielä tällä hetkellä on mahdotonta sanoa mitään tarkkaa tai neliöistä poikkeavaa mielivaltaisen pisteen $t \in \mathcal{I}$ kuvasta.



Kuva 4: Lähtöjoukko \mathcal{Q} sekä Hilbertin käyrän ensimmäinen ja toinen iteraatio.

Merkintä 4.1. Kuvan 4 mukaisesti jaetussa joukossa \mathcal{Q} sanotaan osaneliöiden n ja $n + 1$ olevan peräkkäiset neliöt.

Kuvasta 4 nähdään, kuinka Hilbertin käyrä konstruoidaan vaihe vaiheelta. Tämä auttaa määrittämään halutun kompleksiesityksen. Kuvasta 4 nähdään melko selvästi, kuinka osion b neliö 0 saadaan osiosta a pienentämällä sitä suhteessa $2 : 1$, kääntämällä sitä 90° sekä peilaamalla se imaginääriakselin suhteen.

Olkoon nyt $z \in \mathbb{C}$. Tällöin yllä olevat muunnokset esitettyssä järjestyksessä saadaan suorittamalla seuraavat operaatiot:

1. Skaalaus suhteessa 2 : 1. $z' = \frac{1}{2}z$
2. 90° kääntäminen. $z'' = z'i$
3. Peilaaminen imaginääriakselin suhteen. $z''' = -\bar{z}''$.

Yhdistämällä nämä kolme muunnosta saadaan ensimmäinen yhdistetty muunnos:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_0 z &= -\bar{z}'' \\
 &= -\overline{z'i} \\
 &= -\bar{z}' \bar{i} \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{z}(-i) \\
 &= \frac{1}{2}\bar{z}i.
 \end{aligned}$$

Vastaavasti kuvan 4 osion b neliö 1 saadaan osion a neliöstä skaalaamalla se suhteessa 2 : 1 ja siirtämällä $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen imaginääriakselin suuntaan.

1. Skaalaus suhteessa 2 : 1. $z' = \frac{1}{2}z$
2. Siirto $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen imaginääriakselin suuntaan. $z'' = z' + \frac{1}{2}i$

Jälleen yhdistämällä nämä muunnokset saadaan toinen yhdistetty muunnos:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_1 z &= z' + \frac{1}{2}i \\
 &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i.
 \end{aligned}$$

Osion b neliö 2 saadaan osion a neliöstä skaalaamalla se suhteessa 2 : 1 ja siirtämällä sitä $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen imaginääriakselin sekä positiivisen reaaliakselin suuntaan.

1. Skaalaus suhteessa 2 : 1. $z' = \frac{1}{2}z$
2. Siirto $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen imaginääriakselin suuntaan. $z'' = z' + \frac{1}{2}i$
3. Siirto $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen reaaliakselin suuntaan. $z''' = z'' + \frac{1}{2}$

Jälleen yhdistämällä nämä muunnokset saadaan kolmas yhdistetty muunnos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_2 z &= z'' + \frac{1}{2} \\ &= z' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Lopuksi osion b neliö 3 saadaan osion a neliöstä skaalaamalla se suhteessa 2 : 1, kääntämällä sitä -90° , peilaamalla se imaginääriakselin suhteen sekä siirtämällä sitä yhden yksikön verran positiivisen reaaliakselin suuntaan ja $\frac{1}{2}$ yksikköä positiivisen imaginääriakselin suuntaan.

1. Skaalaus suhteessa 2 : 1. $z' = \frac{1}{2}z$
2. -90° kääntäminen. $z'' = -z'i$
3. Imaginääriakselin suhteen peilaaminen. $z''' = -\bar{z}''$
4. Siirtäminen positiivisen reaaliakselin suuntaan yhden yksikön verran.
 $z'''' = z''' + 1$
5. Siirtäminen positiivisen imaginääriakselin suuntaan $\frac{1}{2}$ yksikön verran.
 $z''''' = z'''' + \frac{1}{2}i$

Yhdistämällä nämä muunnokset saadaan neljäs yhdistetty muunnos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_3 z &= z'''' + \frac{1}{2}i \\ &= z''' + 1 + \frac{1}{2}i \\ &= -\bar{z}'' + 1 + \frac{1}{2}i \\ &= -\overline{-z'i} + 1 + \frac{1}{2}i \\ &= \bar{z}'i + 1 + \frac{1}{2}i \\ &= -\frac{1}{2}\bar{z}i + 1 + \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Kuten aiemmin on todettu, muunnosten \mathfrak{H}_0 , \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 sekä \mathfrak{H}_3 käyttäminen kuvan 4 osaan a tuottaa osan b, mutta vastaavasti näiden muunnosten käyttäminen osaan b tuottaa osan c.

Merkitään tästä eteenpäin pistettä $t \in \mathcal{I}$ 4-kantaesityksellä $t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4$. Nyt piste t sijaitsee joukon \mathcal{I} ensimmäisessä jaossa osavälissä q_1 . Tällöin myös joukko \mathcal{Q} jaetaan ensimmäisessä jaossa neljään pienempään neliöön $\mathfrak{H}_{q_1} \mathcal{Q}$ ja pisteen t kuva $f(t)$ sijaitsee osaneliössä q_1 . Edelleen toisessa jaossa piste t sijaitsee osavälissä $q_2 \subset q_1$ ja sen kuva $f(t)$ sijaitsee jaon $\mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathcal{Q}$ osaneliössä $q_2 \subset q_1$. Jatkettaessa tätä äärettömästi päästään tulokseen

$$f_h(t) \in \lim_{n \rightarrow \infty} (Re(\mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathcal{Q}), Im(\mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathcal{Q})).$$

Merkitsemällä

$$(Re(z), Im(z)) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} z$$

sekä huomioimalla määritelmä 4.1 voidaan asettaa

$$f_h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathcal{Q}$$

ja edelleen

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathcal{Q}. \quad (4.1)$$

Koska 4-kantaiselle luvulle t pätee $t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n]_4 = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n 000 \dots]_4$, saadaan yhtälöstä (4.1)

$$\begin{aligned} f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n]_4) &= f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n 000 \dots]_4) \\ &= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_0 \dots \mathcal{Q}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Osoitetaan, että

$$\mathfrak{H}_0^n z = \begin{cases} \frac{i\bar{z}}{2^n}, & n \text{ on pariton} \\ \frac{z}{2^n}, & n \text{ on parillinen} \end{cases}.$$

Nyt

$$\mathfrak{H}_0^2 z = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{z} i \right) i \right) = \left(-\frac{1}{2^2} z i^2 \right) = \frac{z}{2^2}.$$

Oletetaan, että

$$\mathfrak{H}_0^{2m} z = \frac{z}{2^{2m}}.$$

Tällöin saadaan tulokset

$$\mathfrak{H}_0^{2m+1}z = \mathfrak{H}_0(\mathfrak{H}_0^{2m}z) = \mathfrak{H}_0\left(\frac{z}{2^{2m}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2m}z}\right)i = \frac{\bar{z}i}{2^{2m+1}} \quad (4.3)$$

sekä

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_0^{2m+2}z &= \mathfrak{H}_0(\mathfrak{H}_0^{2m+1}z) = \mathfrak{H}_0\left(\frac{\bar{z}i}{2^{2m+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{z}i}{2^{2m+1}}\right)i = -\frac{z}{2^{2m+2}}i^2 \\ &= \frac{z}{2^{2m+2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Yhtälöiden (4.3) ja (4.4) nojalla saadaan

$$\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\dots z = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{H}_0^n z = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{i\bar{z}}{2^n}, & n \text{ on pariton} \\ \frac{z}{2^n}, & n \text{ on parillinen} \end{cases}.$$

Molemmat tapaukset johtavat tilanteeseen $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0\dots z = 0$, joten

$$f_h([0, q_1q_2q_3\dots q_n]_4) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\dots\mathfrak{H}_{q_n}0.$$

Asetetaan nyt

$$\mathfrak{H}_jz := \frac{1}{2}H_jz + \frac{1}{2}h_j, \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (4.5)$$

missä $H_0z = \bar{z}i$, $H_1z = z$, $H_2z = z$, $H_3z = -\bar{z}i$, $h_0 = 0$, $h_1 = i$, $h_2 = 1 + i$ ja $h_3 = 2 + i$. Käyttämällä muunnoksia H_j ja h_j yhtälöön (4.5) huomioimalla $H_{q_1}H_{q_2}\dots H_{q_n}0 = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{q_1}\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\dots\mathfrak{H}_{q_n}0 &= \frac{1}{2}H_{q_1}(\mathfrak{H}_{q_2}\mathfrak{H}_{q_3}\dots\mathfrak{H}_{q_n}0) + \frac{1}{2}h_{q_1} \\ &= \frac{1}{2}H_{q_1}\left[\frac{1}{2}H_{q_2}(\mathfrak{H}_{q_3}\dots\mathfrak{H}_{q_n}0) + \frac{1}{2}h_{q_2}\right] + \frac{1}{2}h_{q_1} \\ &= \dots \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\right)H_{q_1}H_{q_2}H_{q_3}\dots H_{q_n}0 + \left(\frac{1}{2^n}\right)H_{q_1}H_{q_2}H_{q_3}\dots H_{q_{n-1}}h_{q_n} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)H_{q_1}H_{q_2}H_{q_3}\dots H_{q_{n-2}}h_{q_{n-1}} + \dots + \frac{1}{2}h_{q_1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j}H_{q_1}H_{q_2}H_{q_3}\dots H_{q_{j-1}}h_{q_j}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Yhtälöistä (4.2) ja (4.6) saadaan

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n]_4) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \dots H_{q_{j-1}} h_{q_j}$$

ja huomioimalla teoreemassa 4.3 osoitettu Hilbertin käyrän jatkuvuus saadaan

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} H_{q_1} H_{q_2} H_{q_3} \dots H_{q_{j-1}} h_{q_j}. \quad (4.7)$$

Nyt $H_1 z = H_2 z = z$ sekä $H_0^2 z = H_0 H_0 z = (\overline{zi})i = z$ ja $H_3^2 z = H_3 H_3 z = -(\overline{-zi})i = -(-\overline{z}) = z$, joten kaikki tekijät H_1, H_2, H_0^2 ja H_3^2 voidaan jättää huomiotta. Jos myös huomioidaan, että $H_0 H_3 z = H_3 H_0 z = -z$, saadaan yhtälöstä (4.7) yksinkertaistettu lauseke:

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} H_0^{e_{0,j}} H_3^{e_{3,j}} h_{q_j}, \quad (4.8)$$

missä

$e_{k,j} = q_j$:tä edeltävien numeroiden k määrä (mod 2) mukaan lukien q_j .

Lemman 2.1 nojalla äärellinen 4 -kantaesitys $t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q]_4$ voidaan esittää äärettömänä 4 -kantaesityksenä $t = [0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n (q-1)\overline{3}]_4$.

Tarkistetaan vielä, että lemmän 2.1 mukaisilla arvoilla saadaan yhtälö (4.8) yhtäpitäväksi. Nyt

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q]_4) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_{0,j}} H_3^{e_{3,j}} h_{q_j} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} h_q \right]$$

sekä

$$\begin{aligned} f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n (q-1)\overline{3}]_4) &= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_{0,j}} H_3^{e_{3,j}} h_{q_j} \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} h_{q-1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n+2}} \right) H_0^{e_{0,n+1}} H_3^{e_{3,n+1}} H_{q-1} \\ &\quad \left. \left(h_3 + \frac{1}{2} H_3 h_3 + \frac{1}{4} h_3 + \frac{1}{8} H_3 h_3 \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Aiemmin merkittiin $H_3z = -\bar{z}i$ sekä $h_3 = 2 + i$, joten nyt saadaan

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}H_3 + \dots)h_3 &= h_3 + \frac{1}{2}H_3h_3 + \frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{8}H_3h_3 + \dots \\
&= 2 + i + \frac{1}{2}(-\overline{(2+i)})i + \frac{1}{4}(2+i) + \frac{1}{8}(-\overline{(2+i)})i + \dots \\
&= 2 + i + \frac{1}{2}(i-2)i + \frac{1}{4}(2+i) + \frac{1}{8}(i-2)i + \dots \\
&= 2 + i - (\frac{1}{2} + i) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i) - (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i) + \dots \\
&= 2 + i - \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}i + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{4^n} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \cdot \frac{1}{4^n} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \cdot \frac{1}{4^n} \right) \\
&= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(4.9)

Lisäksi aiemmin merkittiin $H_0z = \bar{z}i$, $H_1z = z$, $H_2z = z$, $H_3z = -\bar{z}i$, $h_0 = 0$, $h_1 = i$, $h_2 = 1 + i$ ja $h_3 = 2 + i$, joten saadaan

$$\begin{aligned}
h_0 + \frac{1}{2}H_02 &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \bar{2}i \\
&= i \\
&= h_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 + \frac{1}{2}H_12 &= i + \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= 1 + i \\
&= h_2
\end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned}
h_2 + \frac{1}{2}H_22 &= 1 + i + \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= 2 + i \\
&= h_3.
\end{aligned}$$

Lausekkeista huomataan, että

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n-1}2. \quad (4.10)$$

Lisäksi on voimassa

$$\begin{aligned} c \cdot H_0 H_3 z &= c \cdot H_0(-\bar{z}i) \\ &= c \cdot (\overline{-zi})i \\ &= \bar{c} \cdot (\overline{-zi})i \\ &= [\overline{\bar{c}(-zi)}]i \\ &= (\overline{-\bar{c}zi})i \\ &= H_0(-\bar{c}zi) \\ &= H_0 H_3 cz \end{aligned}$$

kaikilla reaaliluvuilla c , joten yhtälöiden (4.9) ja (4.10) nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n (q-1) \overline{3}]_4) &= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_0, j} H_3^{e_3, j} h_{q_j} \right. \\
&+ \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} h_{q-1} \\
&+ \left(\frac{1}{2^{n+2}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} H_{q-1} \\
&\left. \left(h_3 + \frac{1}{2} H_3 h_3 + \frac{1}{4} h_3 + \frac{1}{8} H_3 h_3 \dots \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_0, j} H_3^{e_3, j} h_{q_j} \right. \\
&+ \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} h_{q-1} \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} \frac{1}{2} H_{q-1} 2 \right] \\
&= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_0, j} H_3^{e_3, j} h_{q_j} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} \left(h_{q-1} + \frac{1}{2} H_{q-1} 2 \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} H_0^{e_0, j} H_3^{e_3, j} h_{q_j} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) H_0^{e_0, n+1} H_3^{e_3, n+1} h_q \right] \\
&= f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n q]_4)
\end{aligned}$$

Nyt yhtälö (4.10) saadaan Eulerin lauseen 2.1 avulla muotoon

$$\begin{aligned}
h_n &= \operatorname{sgn}(n)[(n-1) + i] \\
&= \operatorname{sgn}(n)[\sqrt{(n-1)^2} + i] \\
&= \operatorname{sgn}(n)[\sqrt{1 + (n-1)^2} - 1 + i] \\
&= \operatorname{sgn}(n)\left[\frac{\sqrt{1 + (n-1)^2} - (1 + (n-1)^2)/(1 + (n-1)^2)}{1 + (n-1)^2}\right. \\
&\quad \left.+ i \cdot \frac{\sqrt{1 + (n-1)^2}}{\sqrt{1 + (n-1)^2}}\right] \\
&= \operatorname{sgn}(n)\sqrt{1 + (n-1)^2} \left[\sqrt{1 - 1/(1 + (n-1)^2)} \right. \\
&\quad \left. + i/\sqrt{1 + (n-1)^2} \right] \\
&= \operatorname{sgn}(n)\sqrt{1 + (n-1)^2} \left[\sqrt{1 - (1/\sqrt{1 + (n-1)^2})^2} \right. \\
&\quad \left. + i/\sqrt{1 + (n-1)^2} \right] \tag{4.11} \\
&= \operatorname{sgn}(n)\sqrt{1 + (n-1)^2} \left[\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(1/\sqrt{1 + (n-1)^2})))^2} \right. \\
&\quad \left. + i \cdot 1/\sqrt{1 + (n-1)^2} \right] \\
&= \operatorname{sgn}(n)\sqrt{1 + (n-1)^2} [\cos(\arcsin(1/\sqrt{1 + (n-1)^2})) \\
&\quad + i \cdot \sin(\arcsin(1/\sqrt{1 + (n-1)^2}))] \\
&= \operatorname{sgn}(n)\sqrt{1 + (n-1)^2} e^{i \arcsin(1/\sqrt{1+(n-1)^2})}.
\end{aligned}$$

Aiemmin merkittiin

$$e_{k,j} = q_j\text{:tä edeltävien numeroiden } k \text{ määrä (mod 2)}$$

ja lisäksi

$$i\bar{z} = e^{\frac{i\pi}{2}} \bar{z}$$

sekä

$$-i\bar{z} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \bar{z}.$$

Näiden ja yhtälön (4.11) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
H_3^{e_{3,j}} h_{q_j} &= H_3^{e_{3,j}} (\operatorname{sgn}(q_j) [(q_j - 1) + i]) \\
&= \operatorname{sgn}(q_j) H_3^{e_{3,j}} ((q_j - 1) + i) \\
&= \begin{cases} \operatorname{sgn}(q_j) [(q_j - 1) + i], & \text{jos } e_{3,j} = 0 \\ \operatorname{sgn}(q_j) (-(q_j - 1) - i) i, & \text{jos } e_{3,j} = 1 \end{cases} \\
&= \operatorname{sgn}(q_j) e^{-i\pi e_{3,j}/2} [(q_j - 1) + (-1)^{e_{3,j}} i].
\end{aligned}$$

Edelleen asettamalla

$$d_j = e_{0,j} + e_{3,j} \pmod{2}. \quad (4.12)$$

saadaan yllä olevasta yhtälöiden (4.11) ja (4.12) avulla

$$\begin{aligned}
H_0^{e_{0,j}} (H_3^{e_{3,j}} h_{q_j}) &= \operatorname{sgn}(q_j) H_0^{e_{0,j}} (H_3^{e_{3,j}} ((q_j - 1) + i)) \\
&= \begin{cases} \operatorname{sgn}(q_j) H_0^{e_{0,j}} [(q_j - 1) + i], & \text{jos } e_{3,j} = 0 \\ \operatorname{sgn}(q_j) H_0^{e_{0,j}} (-(q_j - 1) - i) i, & \text{jos } e_{3,j} = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \operatorname{sgn}(q_j) [(q_j - 1) + i], & \text{jos } e_{3,j} = 0, e_{0,j} = 0 \\ \operatorname{sgn}(q_j) (-(q_j - 1) - i) i, & \text{jos } e_{3,j} = 1, e_{0,j} = 0 \\ \operatorname{sgn}(q_j) [(q_j - 1) - i] i, & \text{jos } e_{3,j} = 0, e_{0,j} = 1 \\ \operatorname{sgn}(q_j) (-(q_j - 1) + i), & \text{jos } e_{3,j} = 1, e_{0,j} = 1 \end{cases} \\
&= \operatorname{sgn}(q_j) (-1)^{e_{3,j}} e^{-i\pi d_j/2} [(q_j - 1) + (-1)^{d_j} i] \\
&= (-1)^{e_{3,j}} \operatorname{sgn}(q_j) \sqrt{(q_j - 1)^2 + 1} \\
&= [e^{i\pi d_j/2 + i(-1)^{d_j} \arcsin(1/\sqrt{(q_j-1)^2+1})}].
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Sijoittamalla yhtälöön (4.8) saadaan Hilbertin käyrän kompleksiesitys:

$$\begin{aligned}
x_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) + iy_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{e_{3,j}}}{2^j} \operatorname{sgn}(q_j) \sqrt{(q_j - 1)^2 + 1} \\
&= [e^{i\pi d_j/2 + i(-1)^{d_j} \arcsin(1/\sqrt{(q_j-1)^2+1})}].
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Hilbertin käyrän konstruoimisen jälkeen voidaan osoittaa sen jatkuvuus.

Teoreema 4.3. Hilbertin käyrä on jatkuva.

Todistus. Määritelmän 4.1 mukaan k :nnella iteraatiolla joukko \mathcal{I} on jaettu 2^{2k} osaväliin, joiden jokaisen pituus on $\frac{1}{2^{2k}}$.

Olkoot pisteet $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ sellaisia, että $|t_2 - t_1| < \frac{1}{2^{2k}}$ sekä $\epsilon, \delta > 0$. Nyt väli $[t_1, t_2]$ leikkaa enintään kahta peräkkäistä joukon \mathcal{I} väliä ja välin $[t_1, t_2]$ kuva sijaitsee enintään kahden peräkkäisen joukon \mathcal{Q} neliön alueella. Tällaisen neliön sivun pituus on $\frac{1}{2^k}$, joten kahdesta perättäisestä neliöstä muodostuu suorakulmio, jonka kanta on $2 \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k}$ ja korkeus on $\frac{1}{2^k}$. Tällaisen suorakulmion lävistäjä on määritelmän 2.1 nojalla

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 + \left(\frac{2}{2^k}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2^{2k}}} = \frac{\sqrt{5}}{2^k}.$$

Näin ollen saadaan

$$\|f_h(t_1) - f_h(t_2)\| \leq \frac{\sqrt{5}}{2^k}.$$

Koska Hilbertin käyrä on raja-arvo

$$f_h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{q_1} \mathfrak{H}_{q_2} \mathfrak{H}_{q_3} \dots \mathfrak{H}_{q_n} \mathcal{Q},$$

voidaan valita $\delta = \frac{1}{2^{2k}}$, jolloin jokaiselle luvulle ϵ löydetään aina sellainen iteraatioiden määrä k , että

$$\|f_h(t_1) - f_h(t_2)\| \leq \frac{\sqrt{5}}{2^k} < \epsilon$$

aina, kun

$$|t_2 - t_1| < \frac{1}{2^{2k}} = \delta.$$

□

Määritelmän 3.1 sekä teoreemien 4.1 ja 4.3 nojalla voidaan tehdä seuraava johtopäätös:

Teoreema 4.4. Hilbertin käyrä on avaruuden täyttävä käyrä.

4.3 Hilbertin käyrän matriisiesitys

Aiemmin merkittiin $H_0 z = \bar{z}i$, $H_1 z = z$, $H_2 z = z$, $H_3 z = -\bar{z}i$, $h_0 = 0$, $h_1 = i$, $h_2 = 1 + i$ sekä $h_3 = 2 + i$. Merkitään kompleksilukua $z = x + yi$. Näin saadaan matriisi- ja pystyvektoriesitys

$$H_0 z = (\overline{x + yi})i = (x - yi)i = y + xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti saadaan myös muut esitykset

$$H_1 z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_2 z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_3 z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sekä

$$h_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ja } h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Näiden avulla muunnokset \mathfrak{H}_0 , \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 ja \mathfrak{H}_3 voidaan hajottaa reaali- ja imaginääriosiin seuraavasti:

$$\mathfrak{H}_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} h_0,$$

$$\mathfrak{H}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} h_1$$

$$\mathfrak{H}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{2} h_2,$$

sekä

$$\mathfrak{H}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} H_3 + \frac{1}{2} h_3.$$

Myös tässä tapauksessa pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{H}_0^n \mathcal{Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} H_0^n \mathcal{Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja lisäksi

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \right) H_0^{e_{0,j}} H_3^{e_{3,j}} h_{q_j}. \quad (4.15)$$

Lausekkeessa (4.13) laskettiin kaikki mahdolliset lausekkeen $H_0^{e_{0,j}} H_3^{e_{3,j}} h_{q_j}$ arvot. Näiden avulla saadaan yhtälö (4.15) muotoon

$$f_h([0, q_1 q_2 q_3 \dots]_4) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \right) (-1)^{e_{0,j}} \operatorname{sgn}(q_j) \binom{(1-d_j)q_j - 1}{1-d_j q_j}, \quad (4.16)$$

missä

$$d_j = e_{0j} + e_{3j} \pmod{2}.$$

Lauseke (4.16) voidaan johtaa myös lausekkeiden (4.11) ja (4.13) avulla lausekkeesta (4.14).

5 Peanon käyrä

5.1 Peanon käyrän määritelmä

Määritellään operaattori $k : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ siten, että

$$kt_j = 2 - t_j. \quad (5.1)$$

Nyt $k0 = 2 - 0 = 2$, $k1 = 2 - 1 = 1$ ja $k2 = 2 - 2 = 0$, joten $kt_j \in \{0, 1, 2\}$ aina, kun $t_j \in \{0, 1, 2\}$.

Operaattorin k avulla voidaan määritellä seuraava kuvaus:

Määritelmä 5.1. Olkoon pisteen $\tau \in \mathcal{I}$ 3-kantaesitys $\tau = [0, t_1 t_2 t_3 t_4 \dots]_3$. Kuvausta $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q}$

$$f_p([0, t_1 t_2 t_3 t_4 \dots]_3) = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^{t_2+t_4+\dots+t_{2n-2}}t_{2n-1})\dots]_3 \\ [0, (k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)\dots(k^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n})\dots]_3 \end{pmatrix},$$

missä k^v tarkoittaa operaation k suoritusta v kertaa, sanotaan *Peanon käyräksi*.

Huomautus 5.1. Koska $k^2 t_j = k(kt_j) = k(2 - t_j) = 2 - (2 - t_j) = t_j$, on k itsensä käänteisoperaatio.

Lemman 2.1 nojalla äärellinen 3 -kantaesitys $[0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n t]_3$ voidaan esittää äärettömänä 3 -kantaesityksenä $[0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n (t-1)\bar{2}]_3$, kun $t \in \{1, 2\}$. Tarkistetaan nyt, että kuvauksen f_p arvo on riippumaton luvun esityksestä. Olkoon $t \in \{1, 2\}$. Asetetaan ensin $n = 2m$ ja merkitään $s = t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_{2m}$. Nyt

$$\begin{aligned} x_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} t]_3) &= x_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} t 000 \dots]_3) \\ &= [0, t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^s t)(k^s 0)(k^s 0)(k^s 0)\dots]_3 \\ &= [0, t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^s t)(\overline{k^s 0})]_3 \\ &= \begin{cases} [0, t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots t]_3, & \text{jos } s \text{ on parillinen} \\ [0, t_1(k^{t_2}t_3)\dots(k^{t_2+t_4+\dots+t_{2m-2}}t_{2m-1})(3-t)]_3, & \\ \text{jos } s \text{ on pariton.} \end{cases} \end{aligned}$$

ja lemmasta 2.1 saadaan

$$\begin{aligned}
x_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} (t-1) \bar{2}]_3) &= [0, t_1 (k^{t_2} t_3) \dots (k^s (t-1)) (k^{s+2} 2) (k^{s+4} 2) \dots]_3 \\
&= \begin{cases} [0, t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots (t-1) \bar{2}]_3 \\ = [0, t_1 (k^{t_2} t_3) \dots t]_3, \text{ jos } s \text{ on parillinen} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [0, t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots (2 - (t-1))]_3 \\ = [0, t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots (3-t)]_3, \\ \text{jos } s \text{ on pariton.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Asetetaan nyt $n = 2m + 1$ ja $s = t_1 + t_3 + \dots + t_{2m+1}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
y_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m+1} t]_3) &= y_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m+1} t 000 \dots]_3) \\
&= [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^s t) (k^s 0) (k^s 0) (k^s 0) \dots]_3 \\
&= [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^s t) (\overline{k^s 0})]_3 \\
&= \begin{cases} [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^{s-t_{2m-1}} t_{2m-1}) t]_3, \\ \text{jos } s \text{ on parillinen} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [0, (k^{t_1} t_2) \dots (k^{t_1+t_3+\dots+t_{2m-1}} t_{2m}) (3-t)]_3, \\ \text{jos } s \text{ on pariton} \end{cases}
\end{aligned}$$

ja lemmasta 2.1 saadaan

$$\begin{aligned}
y_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m+1} (t-1) \bar{2}]_3) &= [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^s (t-1)) (k^{s+2} 2) (k^{s+4} 2)]_3 \dots \\
&= \begin{cases} [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^{s-t_{2m-1}} t_{2m-1}) (t-1) \bar{2}]_3, \\ = [0, (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^{s-t_{2m-1}} t_{2m-1}) t]_3 \\ \text{jos } s \text{ on parillinen} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [0, (k^{t_1} t_2) \dots (k^{t_1+t_3+\dots+t_{2m-1}} t_{2m}) (2 - (t-1))]_3 \\ = [0, (k^{t_1} t_2) \dots (k^{t_1+t_3+\dots+t_{2m-1}} t_{2m}) (3-t)]_3 \\ \text{jos } s \text{ on pariton.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Teoreema 5.1. Määritelmän 5.1 mukainen Peanon käyrä on surjektiivinen.

Todistus. Olkoon $([0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots]_3; [0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots]_3) \in \mathcal{Q}$. Osoitetaan, että on olemassa sellainen piste $t \in \mathcal{I}$, että

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} [0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots]_3 \\ [0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots]_3 \end{pmatrix}.$$

Määritelmän 5.1 ja huomautuksen 5.1 nojalla

$$t_1 = \alpha_1 \text{ ja } t_2 = k^{t_1} \beta_1.$$

Edelleen

$$t_3 = k^{t_2} \alpha_2 \text{ ja } t_4 = k^{t_1+t_3} \beta_2.$$

Jatkettaessa samalla tavalla saadaan

$$t_{2n-1} = k^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2n-2}} \alpha_n$$

ja

$$t_{2n} = k^{t_1+t_3+t_5+\dots+t_{2n-1}} \beta_n.$$

Huomautuksen 5.1 nojalla $t_k \in \{0, 1, 2\}$ kaikilla $k > 0$. Asetetaan siis

$$t = [0, t_1 t_2 t_3 t_4 \dots t_{2n-1} t_{2n} \dots]_3.$$

Määritelmän 2.10 nojalla $t \in [0, 1]$, joten on löydetty sellainen piste t , jolle

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} [0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots]_3 \\ [0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots]_3 \end{pmatrix}.$$

□

Teoreema 5.2. Määritelmän 5.1 mukainen Peanon käyrä on jatkuva.

Todistus. Olkoon $t_0 = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots]_3$ sellainen piste, jolle ei ole olemassa sellaista t_k , että $t_m = 2$ kaikilla $m \geq k$. Olkoon $\delta_n = \frac{1}{3^{2n}} - [0, 000 \dots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3$. Luvun t_0 määrittelyn ja lemmän 2.1 nojalla

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{3^{2n}} - [0, 000 \dots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3 \\ &= [0, \underbrace{000 \dots 0}_{2n-1} 1000 \dots]_3 - [0, 000 \dots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3 \\ &> [0, \underbrace{000 \dots 0}_{2n-1} 1000 \dots]_3 - [0, \underbrace{00 \dots 0}_{2n} 222 \dots]_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nyt

$$t_0 + \delta_n = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \overline{2}]_3.$$

Jokaiselle $t \in [t_0, t_0 + \delta_n[$ pätee

$$t = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \alpha_{2n+1} \alpha_{2n+2} \dots]_3,$$

missä $\alpha_k \in \{0, 1, 2\}$.

Asetetaan $\gamma = t_2 + t_4 + t_6 \dots + t_{2n}$. Nyt jokaiselle $t \in [t_0, t_0 + \delta_n[$ pätee

$$\begin{aligned}
|x_p(t) - x_p(t_0)| &= |[0, t_1(k^{t_2}t_3) \dots (k^\gamma \alpha_{2n+1}) \dots]_3 - [0, t_1(k^{t_2}t_3) \dots (k^\gamma t_{2n+1}) \dots]_3| \\
&\leq |k^\gamma \alpha_{2n+1} - k^\gamma t_{2n+1}|/3^{n+1} + |k^{\gamma+\alpha_{2n+2}} \alpha_{2n+3} - k^{\gamma+t_{2n+2}} t_{2n+3}|/3^{n+2} + \dots \\
&\leq \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \dots \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/3} \\
&= \frac{1}{3^n} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Täten kuvaus x_p on jatkuva oikealta joukossa $[0, 1[$.

Olkoot nyt $t_0 = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots]_3$ sekä $\delta_n = [0, 000 \dots 0 t_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3$.
Nyt

$$t_0 - \delta_n = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n}]_3.$$

Jokaiselle $t \in]t - \delta_n, t]$ pätee

$$[t = 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \beta_{2n+1} \beta_{2n+2} \dots]_3,$$

missä $\beta_k \in \{0, 1, 2\}$.

Asetetaan $\gamma = t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_{2n}$. Nyt

$$\begin{aligned}
|x_p(t) - x_p(t_0)| &= |[0, t_1(k^{t_2}t_3) \dots (k^\gamma \alpha_{2n+1}) \dots]_3 - [0, t_1(k^{t_2}t_3) \dots (k^\gamma t_{2n+1}) \dots]_3| \\
&\leq |k^\gamma \beta_{2n+1} - k^\gamma t_{2n+1}|/3^{n+1} + |k^{\gamma+\beta_{2n+1}} \beta_{2n+3} - k^{\gamma+t_{2n+1}} t_{2n+3}|/3^{n+2} + \dots \\
&\leq \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \dots \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/3} \\
&= \frac{1}{3^n} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Täten kuvaus x_p on jatkuva vasemmalta joukossa $]0, 1]$. Kuvaus x_p on myös jatkuva oikealta joukossa $[0, 1[$, joten se on jatkuva joukossa \mathcal{I} .

Tämän lisäksi

$$\begin{aligned}
3 \cdot x_p(t/3) &= 3 \cdot x_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots]_3 / 3) \\
&= 3 \cdot x_p\left(\left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots\right) / 3\right) \\
&= 3 \cdot x_p\left(\frac{t_1}{3^2} + \frac{t_2}{3^3} + \frac{t_3}{3^4} + \dots\right) \\
&= 3 \cdot x_p([0, 0 t_1 t_2 t_3 \dots]_3) \\
&= 3 \cdot [0, 0(k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \dots]_3 \\
&= 3 \cdot \left(\frac{k^{t_1} t_2}{3^2} + \frac{k^{t_1+t_3} t_4}{3^3} + \dots\right) \\
&= \frac{k^{t_1} t_2}{3^1} + \frac{k^{t_1+t_3} t_4}{3^2} + \dots \\
&= [0, (k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \dots]_3 \\
&= y_p(t),
\end{aligned}$$

joten tämän nojalla myös kuvaus y_p on jatkuva joukossa \mathcal{I} . Koska kuvaukset x_p ja y_p ovat jatkuvia joukossa $[0, 1]$, on määritelmän 5.1 mukainen Peanon käyrä f_p jatkuva joukossa \mathcal{I} . □

Yllä esitetyt kaksi tulosta voidaan kiteyttää yhdeksi tulokseksi:

Teoreema 5.3. Määritelmän 5.1 mukainen Peanon käyrä on avaruuden täyttävä käyrä.

Giuseppe Peanon itsensä sanoin määritelmän 5.1 mukaiset funktiot x_p ja y_p ovat jatkuvia, mutta niillä ei ole derivaattaa.

Teoreema 5.4. Määritelmän 5.1 mukainen Peanon käyrä ei ole missään differentioituva.

Todistus. Olkoot $t = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots]_3$ sekä $t_n = [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \tau_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3$, missä $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod{2}$. Nyt

$$\begin{aligned}
|t - t_n| &= |[0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots]_3 - [0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \tau_{2n+1} t_{2n+2} \dots]_3| \\
&= \left| \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{t_{2n+1}}{3^{2n+1}} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{\tau_{2n+1}}{3^{2n+1}} + \dots \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{t_{2n+1}}{3^{2n+1}} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots + \frac{t_{2n}}{3^{2n}} + \frac{t_{2n+1} + 1}{3^{2n+1}} + \dots \right) \right| \\
&= |-1/3^{2n+1}| \\
&= 1/3^{2n+1}
\end{aligned}$$

sekä määritelmän 5.1 nojalla

$$|x_p(t) - x_p(t_n)| = |k^{t_2 + \dots + t_{2n}} t_{2n+1} - k^{t_2 + \dots + t_{2n}} \tau_{2n+1}| / 3^{n+1} = 1/3^{n+1}.$$

Tällöin

$$|x_p(t) - x_p(t_n)| / |t - t_n| = 3^n \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Tämän lisäksi

$$3x_p(t/3) = y_p(t),$$

joten myös y_p ei ole missään differentioituva. □

5.2 Peanon käyrän geometrinen konstruktio

2	3	8
1	4	7
0	5	6
0	$\frac{1}{3}$	1

Kuva 5: Joukon \mathcal{Q} osaneliöihin jako Peanon käyrän konstruktiossa.

Peanon käyrän geometrinen generoiminen etenee vastaavasti kuin Hilbertin käyrän geometrinen generoiminen. Olkoon piste

$$t_0 = [0, 00t_3t_4\dots]_3 = \frac{t_3}{3^3} + \frac{t_4}{3^4} + \dots \in \left[0, \frac{1}{9}\right].$$

Määritelmän 5.1 nojalla

$$\begin{aligned} f_p([0, 00t_3t_4\dots]_3) &= \begin{pmatrix} [0, 0t_3(k^{t_4}t_5)\dots]_3 \\ [0, 0(k^{t_3}t_4)(k^{t_3+t_5}t_6)\dots]_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t_3}{3^2} + \frac{k^{t_4}t_5}{3^3} + \dots \\ \frac{k^{t_3}t_4}{3^2} + \frac{k^{t_3+t_5}t_6}{3^3} + \dots \end{pmatrix} \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

Siten välin $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ piste t_0 kuvautuu kuvan 5 mukaiselle osaneliölle 0. Olkoon nyt piste

$$t_1 = [0, 01t_3t_4\dots]_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \frac{t_4}{3^4} + \dots \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right].$$

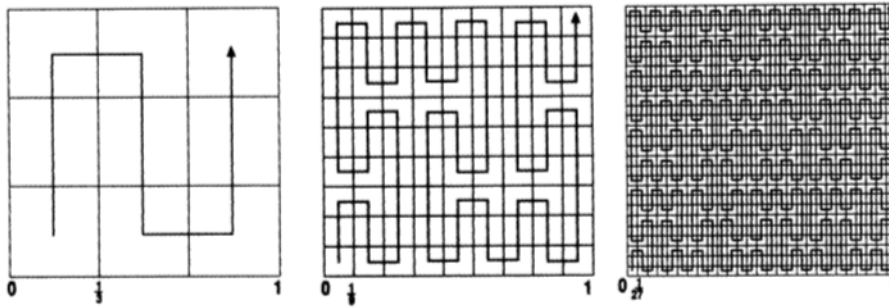
Määritelmän 5.1 nojalla

$$\begin{aligned} f_p([0, 01t_3t_4\dots]_3) &= \begin{pmatrix} [0, 0(kt_3)(k^{1+t_4}t_5)\dots]_3 \\ [0, 1(k^{t_3}t_4)(k^{t_3+t_5}t_6)\dots]_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{kt_3}{3^2} + \frac{k^{1+t_4}t_5}{3^3} + \dots \\ \frac{1}{3} + \frac{k^{t_3}t_4}{3^2} + \frac{k^{t_3+t_5}t_6}{3^3} + \dots \end{pmatrix} \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$

Siten välin $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ piste t_0 kuvautuu kuvan 5 mukaiselle osaneliölle 1. Jatka-
malla vastaavasti huomataan, että väli $[\frac{j}{9}, \frac{j+1}{9}]$ kuvautuu osaneliöksi j joukolle
 \mathcal{Q} . Suorittamalla yllä olevat laskut kaikille väleille $[\frac{j}{9}, \frac{j+1}{9}]$ saadaan geomet-
risen Peanon käyrän ensimmäinen iteraatio.

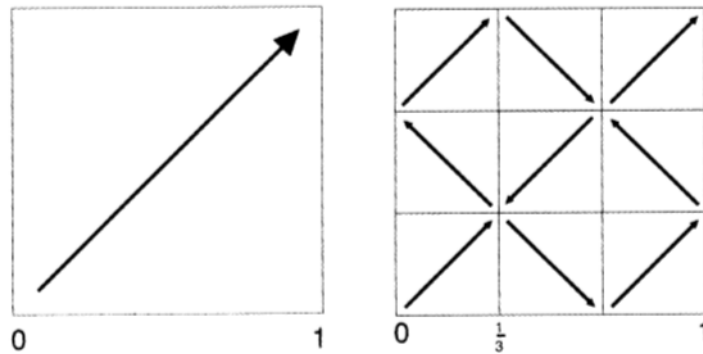
Kuten Hilbertin käyrän jako suoritettiin kuvan 4 mukaan, voidaan jouk-
ko \mathcal{I} jakaa 3^{2n} , $n = 1, 2, \dots$ osaväliin ja nämä osavälit voidaan kuvata 3^{2n}
osaneliöksi joukolle \mathcal{Q} .

Merkintä 5.1. Merkitään geometrista Peanon käyrää merkinnällä g_p .



Kuva 6: Peanon käyrän geometrisen konstruktion kolme ensimmäistä iteraa-
tiota.

5.3 Peanon käyrän ja geometrisen Peanon käyrän yhte- nevyys



Kuva 7: Lähtöjoukko \mathcal{Q} sekä geometrisen Peanon käyrän konstruktion en-
simmäinen askel.

Geometrisen Peanon käyrän g_p ja Peanon käyrän f_p yhtenevyyden osoittaminen alkaa samalla tavalla kuin Hilbertin käyrän kompleksiesityksen määrittäminen. Kuvasta 7 nähdään, että kuvan 5 mukaiset osaneliöt 0, 2, 6 ja 8 saadaan joukosta \mathcal{Q} skaalaamalla se suhteessa 3 : 1 ja siirtämällä lopputulosta sopivasti reaali- ja imaginääriakseleilla.

$$\mathfrak{B}_0 z = \frac{1}{3} z,$$

$$\mathfrak{B}_2 z = \frac{1}{3} z + \frac{2}{3} i,$$

$$\mathfrak{B}_6 z = \frac{1}{3} z + \frac{2}{3}$$

sekä

$$\mathfrak{B}_8 z = \frac{1}{3} z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$$

Osaneliö 1 saadaan skaalaamalla \mathcal{Q} suhteessa 3 : 1, peilaamalla imaginääriakselin suhteen ja siirtämällä sitä $\frac{1}{3}$ yksikköä sekä reaali- että imaginääriakselien suuntaan:

$$\mathfrak{B}_1 z = -\frac{1}{3} \bar{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} i.$$

Muunnosta ei kuitenkaan saa skaalaamalla \mathcal{Q} , kiertämällä sitä 90° ja siirtämällä $\frac{1}{3}$ yksikköä reaali- ja imaginääriakselin suuntaan, sillä tällöin muunnokseksi saataisiin

$$\mathfrak{B}_{1*} z = \frac{1}{3} z i + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} i.$$

Vastaava on huomioitava myös muissa muunnoksissa.

Osaneliö 3 saadaan skaalaamalla \mathcal{Q} suhteessa 3 : 1, peilaamalla reaaliakselin suhteen ja siirtämällä sitä $\frac{1}{3}$ yksikköä reaaliakselin suuntaan sekä 1 yksikkö imaginääriakselin suuntaan:

$$\mathfrak{B}_3 z = \frac{1}{3} \bar{z} + \frac{1}{3} + i.$$

Osaneliö 4 saadaan skaalaamalla \mathcal{Q} suhteessa 3 : 1, kääntämällä sitä 180° ja siirtämällä $\frac{2}{3}$ yksikköä sekä reaali- että imaginääriakselin suuntaan:

$$\mathfrak{B}_4 z = -\frac{1}{3} z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$$

Osaneliö 5 saadaan kuten osaneliö 3, mutta siirros on $\frac{1}{3}$ yksikköä sekä reaali- että imaginääriakselin suuntaan.

$$\mathfrak{B}_5 z = \frac{1}{3} \bar{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} i$$

Osaneliö 7 saadaan kuten osaneliö 1, mutta siirros on 1 yksikkö reaaliakselin suuntaan sekä $\frac{1}{3}$ yksikköä imaginääriakselin suuntaan.

$$\mathfrak{B}_7 z = -\frac{1}{3}\bar{z} + 1 + \frac{1}{3}i.$$

Yllä olevien muunnosten jakaminen reaali- ja imaginääriosiin tapahtuu analisisesti kappaleessa 4.3 Hilbertin käyrän muunnosten jakamiseen verrattuna. Asetetaan

$$P_0 z = P_2 z = P_6 z = P_8 z = z,$$

$$P_1 z = -\bar{z}i, P_3 z = \bar{z}, P_4 z = -z, P_5 z = \bar{z} \text{ ja } P_7 = -\bar{z}$$

sekä

$$p_0 = 0, p_1 = 1 + i, p_2 = 2i, p_3 = 1 + 3i,$$

$$p_4 = 2 + 2i, p_5 = 1 + i, p_6 = 2, p_7 = 3 + i \text{ ja } p_8 = 2 + 2i.$$

Näin saadaan kaikille muunnoksille esitysmuoto

$$\mathfrak{B}_k z = \frac{1}{3}P_k z + \frac{1}{3}p_k.$$

Kuten kappaleessa 4.3, merkitään $z = x + yi$. Näin muunnoksille saadaan matriisi- ja pystyvektoriesitykset. Esimerkiksi

$$P_7 z = P_7(x + yi) = -(\overline{x + yi}) = -(x - yi) = -x + yi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ja

$$p_7 = 3 + i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Johtamalla myös muille matriisi- ja pystyvektoriesitykset saadaan muunnoksille \mathfrak{B}_k seuraavat esitysmuodot:

$$\mathfrak{B}_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_0 z + \frac{1}{3}p_0,$$

$$\mathfrak{B}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_1 z + \frac{1}{3}p_1,$$

$$\mathfrak{B}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_2 z + \frac{1}{3}p_2,$$

$$\mathfrak{B}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_3 z + \frac{1}{3}p_3,$$

$$\mathfrak{B}_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_4z + \frac{1}{3}p_4,$$

$$\mathfrak{B}_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_5z + \frac{1}{3}p_5,$$

$$\mathfrak{B}_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_6z + \frac{1}{3}p_6,$$

$$\mathfrak{B}_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_7z + \frac{1}{3}p_7$$

sekä

$$\mathfrak{B}_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} := \frac{1}{3}P_8z + \frac{1}{3}p_8.$$

Näiden muunnosten avulla voidaan osoittaa seuraava teoreema:

Teoreema 5.5. Määritelmän 5.1 mukaiselle Peanon käyrälle f_p ja geometriselle Peanon käyrälle g_p pätee:

$$f_p(t) = g_p(t)$$

kaikilla $t \in \mathcal{I}$.

Todistus. Osoitetaan, että $f_p(t) = g_p(t)$ kaikille $t \in \mathcal{D} = \{[0, t_1t_2t_3\dots t_{2n}]_3 | t_j = 0, 1, 2; n = 1, 2, 3, \dots\}$, missä \mathcal{D} on tiheä joukossa \mathcal{I} . Joukon \mathcal{D} tiheys joukossa \mathcal{I} seuraa siitä, että jokaista joukon \mathcal{I} pistettä $t_0 = [t_1t_2t_3\dots t_{2k}t_{2k+1}t_{2k+2}\dots]_3$ kohden voidaan valita avoin joukko $V =][0, t_1t_2t_3\dots t_{2k}]_3; [0, t_1t_2t_3\dots(t_{2k} + 1)]_3[\subset \mathcal{D}$ siten, että $V \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, sillä $[0, t_1t_2t_3\dots t_{2k}]_3 \in \mathcal{D}$ sekä $[0, t_1t_2t_3\dots t_{2k}]_3 \in V$. Tiheys seuraa määritelmästä 2.3.

Nyt

$$\begin{aligned}
[0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n-1} t_{2n} \dots]_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{3^k} \\
&= \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} \right) \left(\frac{t_3}{3^3} + \frac{t_4}{3^4} \right) + \dots \\
&= \left(\frac{3t_1}{3^2} + \frac{t_2}{3^2} \right) \left(\frac{3t_3}{3^4} + \frac{t_4}{3^4} \right) + \dots \\
&= \frac{3t_1 + t_2}{3^2} + \frac{3t_3 + t_4}{3^4} + \dots \\
&= \frac{3t_1 + t_2}{9} + \frac{3t_3 + t_4}{9^2} + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3t_k + t_{k+1}}{9^k} \\
&= [0, (3t_1 + t_2)(3t_3 + t_4) \dots (3t_{2n-1} + t_{2n}) \dots]_9.
\end{aligned}$$

Tämän nojalla saadaan, kuten Hilbertin käyrän tapauksessa,

$$g_p(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_{3t_1+t_2} \mathfrak{B}_{3t_3+t_4} \dots \mathfrak{B}_{3t_{2n-1}+t_{2n}} \mathcal{Q}$$

ja erityisesti

$$g_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n-1} t_{2n}]_3) = \mathfrak{B}_{3t_1+t_2} \mathfrak{B}_{3t_3+t_4} \dots \mathfrak{B}_{3t_{2n-1}+t_{2n}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Osoitetaan nyt induktiolla, että yhtäsuuruus

$$f_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n-1} t_{2n}]_3) = g_p([0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n-1} t_{2n}]_3) \quad (5.3)$$

pätee kaikille n . Osoitetaan ensin, että yhtäsuuruus on voimassa, kun $n = 1$ eli $3t_1 + t_2 = 0, 1, 2, \dots, 8$.

$$f_p([0, 00]_3) = \begin{pmatrix} [0, 0(k^0 0)(k^0 0) \dots]_3 \\ [0, (k^0 0)(k^0 0) \dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 00]_3) = \mathfrak{B}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 01]_3) = \begin{pmatrix} [0, 0(k^1 0)(k^1 0) \dots]_3 \\ [0, (k^0 1)(k^0 0) \dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 0222 \dots]_3 \\ [0, 1000 \dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p(0, 01) = \mathfrak{B}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 02]_3) = \begin{pmatrix} [0, 0(k^2 0)(k^2 0)\dots]_3 \\ [0, (k^0 2)(k^0 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 0000\dots]_3 \\ [0, 2000\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 02]_3) = \mathfrak{B}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 10]_3) = \begin{pmatrix} [0, 1(k^0 0)(k^0 0)\dots]_3 \\ [0, (k^1 0)(k^1 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 1000\dots]_3 \\ [0, 2222\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 10]_3) = \mathfrak{B}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 11]_3) = \begin{pmatrix} [0, 1(k^1 0)(k^1 0)\dots]_3 \\ [0, (k^1 1)(k^1 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 1222\dots]_3 \\ [0, 1222\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 11]_3) = \mathfrak{B}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 12]_3) = \begin{pmatrix} [0, 1(k^2 0)(k^2 0)\dots]_3 \\ [0, (k^1 2)(k^1 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 1000\dots]_3 \\ [0, 0222\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 12]_3) = \mathfrak{B}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 20]_3) = \begin{pmatrix} [0, 2(k^0 0)(k^0 0)\dots]_3 \\ [0, (k^2 0)(k^2 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2000\dots]_3 \\ [0, 0000\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 20]_3) = \mathfrak{B}_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_p([0, 21]_3) = \begin{pmatrix} [0, 2(k^1 0)(k^1 0)\dots]_3 \\ [0, (k^2 1)(k^2 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2222\dots]_3 \\ [0, 1000\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 21]_3) = \mathfrak{B}_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

sekä

$$f_p([0, 22]_3) = \begin{pmatrix} [0, 2(k^2 0)(k^2 0)\dots]_3 \\ [0, (k^2 2)(k^2 0)\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2000\dots]_3 \\ [0, 2000\dots]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ja

$$g_p([0, 22]_3) = \mathfrak{B}_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Tehdään nyt induktio-oletus

$$f_p([0, t_3 t_4 t_5 \dots t_{2n}]_3) = g_p([0, t_3 t_4 t_5 \dots t_{2n}]_3).$$

Osoitetaan sitten, että yhtälö (5.3) pitää paikkansa. Merkitään

$$f_p([0, t_3 t_4 t_5 \dots t_{2n}]_3) = \begin{pmatrix} [0, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots]_3 \\ [0, \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots]_3 \end{pmatrix},$$

missä $\alpha_2 = t_3$, $\alpha_3 = k^{t_4} t_5$, $\alpha_4 = k^{t_4+t_6} t_7 \dots$ ja $\beta_2 = k^{t_3} t_4$, $\beta_3 = k^{t_3+t_5} t_6$, $\beta_4 = k^{t_3+t_5+t_7} t_8 \dots$. Asetetaan ensin $t = [0, 00t_3 t_4 \dots t_{2n}]_3$. Tällöin

$$\begin{aligned} g_p([0, 00t_3 t_4 \dots t_{2n}]_3) &= \mathfrak{B}_0 \begin{pmatrix} [0, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots]_3 \\ [0, \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots]_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [0, 0\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots]_3 \\ [0, 0\beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots]_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [0, 0\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots]_3 \\ [0, 0\beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots]_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} f_p([0, 00t_3 t_4 \dots t_{2n}]_3) &= \begin{pmatrix} [0, 0(k^0 t_3)(k^{0+t_4} t_5)\dots]_3 \\ [0, (k^0 0)(k^{0+t_3} t_4)(k^{0+t_3+t_5} t_6)\dots]_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [0, 0\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots]_3 \\ [0, 0\beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots]_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tapauksesta $t = [0, 01t_3 t_4 \dots t_{2n}]_3$ saadaan

$$\begin{aligned}
g_p([0, 01t_3t_4\dots t_{2n}]_3) &= \mathfrak{B}_1 \left(\begin{array}{c} [0, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots]_3 \\ [0, \beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} -[0, 0\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots]_3 \\ [0, 0\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} -[0, 0\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots]_3 \\ [0, 0\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} [0, 1]_3 \\ [0, 1]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} [0, 0\bar{2}]_3 - [0, 0\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots]_3 \\ [0, 1\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} [0, 0(2 - \alpha_2)(2 - \alpha_3)(2 - \alpha_4)\dots]_3 \\ [0, 1\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} [0, 0(k\alpha_2)(k\alpha_3)(k\alpha_4)\dots]_3 \\ [0, 1\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned}
f_p([0, 01t_3t_4\dots t_{2n}]_3) &= \left(\begin{array}{c} [0, 0(k^1t_3)(k^{1+t_4}t_5)\dots]_3 \\ [0, (k^01)(k^{0+t_3}t_4)(k^{0+t_3+t_5}t_6)\dots]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} [0, 0(kt_3)(k[k^t_4]t_5)\dots]_3 \\ [0, (1)(k^{0+t_3}t_4)(k^{0+t_3+t_5}t_6)\dots]_3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} [0, 0(k\alpha_2)(k\alpha_3)(k\alpha_4)\dots]_3 \\ [0, 1\beta_2\beta_3\beta_4\dots]_3 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan myös muut tapaukset, missä $3t_1 + t_2 = 2, 3, \dots, 8$.

Aiemmin todettiin, että joukko \mathcal{I} voidaan jakaa 3^{2n} osaväliin ja joukko \mathcal{Q} voidaan jakaa 3^{2n} osaneliöön, missä n on suoritettujen jakojen määrä. Olkoon $v = [0, v_1v_2v_3\dots]_3 \in \mathcal{I}$. Nyt

$$s = g_p(v) = g_p([0, v_1v_2v_3\dots]_3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_{3v_1+v_2} \mathfrak{B}_{3v_3+v_4} \dots \mathfrak{B}_{3t_{2n-1}+t_{2n}} \mathcal{Q}$$

sijaitsee k :nnen jaon osaneliön $\mathfrak{B}_{3v_1+v_2} \mathfrak{B}_{3s_3+s_4} \dots \mathfrak{B}_{3s_{k-1}+s_k} \mathcal{Q}$ alueella, jos k on parillinen ja osaneliön $\mathfrak{B}_{3v_1+v_2} \mathfrak{B}_{3v_3+v_4} \dots \mathfrak{B}_{3v_k+v_{k+1}} \mathcal{Q}$ alueella, jos k on pariton. Tällaisen k :nnen jaon osaneliön kanta ja korkeus molemmat ovat $\frac{1}{3^{2n}}$. Olkoon $s_0 \in \mathfrak{B}_{3v_1+v_2} \mathfrak{B}_{3v_3+v_4} \dots \mathfrak{B}_{3v_{k-1}+v_k} \mathcal{Q}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|s_0 - s\| &\leq \sqrt{\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3^{2n}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3^n}.
\end{aligned}$$

Koska $\frac{\sqrt{2}}{3^n} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, löydetään jokaiselle $\varepsilon > 0$ sellainen n , että $\frac{\sqrt{2}}{3^n} < \varepsilon$. Tapaus $s_0 \in \mathfrak{B}_{3v_1+v_2} \mathfrak{B}_{3v_3+v_4} \dots \mathfrak{B}_{3v_k+v_{k+1}} \mathcal{Q}$ on analoginen yllä olevaan verrattuna.

Nyt määritelmän 2.11 nojalla geometrisen Peanon käyrän iteraatioiden muodostama jono suppenee tasaisesti kohti geometrista Peanon käyrää g_p . Siten g_p on jatkuva joukossa \mathcal{I} . Aiemmin osoitettiin, että myös f_p on jatkuva joukossa \mathcal{I} . Lisäksi juuri näytettiin, että

$$h(t) = f_p(t) - g_p(t) = 0$$

kaikilla $t \in \mathcal{D}$. Lisäksi on olemassa jono $\{t_k\} \rightarrow t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{D}$, missä $t_k \in \mathcal{D}$. Täten funktion h jatkuvuuden nojalla

$$h(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

joten $f_p(t) = g_p(t)$ kaikilla $t \in \mathcal{I}$.

□

Lähdeluettelo

- [1] Sagan, H. *Space-Filling Curves*. Springer Science+Business Media, Berlin, 1994.
- [2] Matala-aho, T. *Ketjumurtoluvut, continued fractions*. Luentomoniste, kevät 2017.
- [3] Larson, C. *An Appreciation of Euler's Formula*. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal: Vol. 18, Iss. 1, Article 17. Pohjois-Dakota, 2017.