Normaaliluvut

LuK-tutkielma
Roope Anttila
2503770
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2020

Sisältö

Johdanto **2**

1 Normaaliluvut **2**

1.1 Määritelmiä 2

2 Borelin normaalilukulause **6**

2.1 Mittateoriaa 6

2.2 Todennäköisyysteoriaa 9

2.3 Suurten lukujen laki 12

2.4 Normaalilukulauseen todistus 21

Lähdeluettelo **27**

Johdanto

Normaaliluvut ovat alun perin ranskalaisen matemaatikon Émile Borelin vuonna 1909 tekemässään julkaisussa [2] määrittelemiä reaalilukuja, jotka yksinkertaistettuna ovat sellaisia, joiden desimaaliesityksessä jokainen yhtä pitkä numerosarja esiintyy yhtä tiheästi. Normaaliluvut ovat historiallisesti merkittäviä, sillä Borelin tekemää niihin liittyvää tutkimusta pidetään yhtenä ensimmäisistä modernin todennäköisyysteorian merkittävistä tuloksista.

Tässä tutkielmassa tutustutaan normaalilukuihin hieman tarkemmin. Ensimmäisessä kappaleessa määritellään normaaliluvut sekä annetaan niistä muutamia yksinkertaisia esimerkkejä. Tutkielman toinen kappale keskittyy todennäköisyysteoriaan, ja siinä todistetaan yksi todennäköisyysteorian perustuloksista, suurten lukujen laki, eräässä sen erikoistapauksessa, sekä kyseistä tulosta hyödyntäen Borelin normaalilukulause, jonka mukaan melkein kaikki luvut väliltä $[0,1]$ ovat täydellisesti normaaleja.

Tutkielman kappale 1.1 ja lauseen 2.1 todistus pohjautuu pääasiassa teokseen [5], ja suurten lukujen lain todistuksen runko on artikkelin [4] mukainen, mutta suurinta osaa todistuksista on koetettu virtaviivaistaa ja yksinkertaistaa. Kaikki annetut esimerkit ovat omiani ellei toisin mainita, kuin myös lemman 2.23 sekä lauseen 1.8 todistukset.

1 Normaaliluvut

1.1 Määritelmiä

Määritelmä 1.1. Olkoon $b \geq 2$ kokonaisluku ja $x \in [0,1]$ reaaliluku. Luvun x *b-kantaesitys* on sarja

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j},$$

missä $x_j \in \{0, \ldots, b-1\}$. Joukkoa $B = \{0, \ldots, b-1\}$ kutsutaan *b-aakkostoksi*, jolloin merkkijonoa $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m$, missä $\sigma_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ kutsutaan *sanaksi* jonka pituus on m.

Esimerkki 1.2. Muodostetaan luvun $0.\overline{02} = 0.020202\ldots$ 10-kantaesitys. Tässä kaikille
$k \in \mathbb{N}$, $x_1 = 0, x_2 = 2, \ldots, x_{2k-1} = 0, x_{2k} = 2, \ldots$, siis

$$0.\overline{02} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + (-1)^k) \cdot 10^{-k}$$

Määritelmä 1.3. Olkoon $m, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, ja olkoon w sana, jonka pituus on m b-aakkostossa. Lisäksi olkoon $n > m$ ja $x \in [0,1]$. Tällöin $N_n^b(x, w)$ on sanan w esiintymiskertojen lukumäärä jonon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peräkkäisten alkioiden muodostamana. Tässä $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ovat luvun x b-kantaesityksen kertoimet.

Esimerkki 1.4. Tutkitaan lukua $N_n^{10}(0.5, \{5\})$. Muodostetaan luvun 0.5 10-kantaesitys.

$$0.5 = 0.5\bar{0} = 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + \ldots$$

jolloin $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = ... = 0$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ merkkijono 5 löytyy lukujen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ joukosta täsmälleen kerran, joten $N_n^{10}(0.5, \{5\}) = 1$

Huomautus 1.5. Jos sanassa w on enemmän kuin yksi merkki, niin myös desimaaliesityksestä löytyvät niin sanotusti päällekkäin menevät lukusarjat lasketaan lukuun $N_n^b(x, w)$. Esimerkiksi siis $N_4^{10}(0.1111, \{11\}) = 3$ ja $N_7^{10}(0.1010101, \{101\}) = 3$.

Edellä olevia määritelmiä hyödyntäen voidaan nyt määritellä normaaliluvut.

Määritelmä 1.6. Olkoon $x \in [0,1]$ reaaliluku ja $2 \leq b \in \mathbb{N}$. Luku x on

i) *yksinkertaisesti normaali kannassa b*, jos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n^b(x, j)}{n} = \frac{1}{b}, \tag{1}$$

kaikille luvuille $j \in \{0, \ldots, b-1\}$.

ii) *normaali kannassa b*, jos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n^b(x, w)}{n} = \frac{1}{b^m}, \tag{2}$$

kaikille m pituisille sanoille w aakkostossa $\{0, \ldots, b-1\}$.

iii) *täydellisesti (yksinkertaisesti) normaali*, jos x on (yksinkertaisesti) normaali kannassa b kaikille kokonaisluvuille $b \geq 2$.

iv) *(yksinkertaisesti) epänormaali*, jos se ei ole (yksinkertaisesti) normaali.

Näennäisestä yksinkertaisuudestaan huolimatta normaaliluvuista on yllättävän vaikeaa löytää konkreettisia esimerkkejä. Esimerkkejä voidaan konstruoida kiinnitetyissä kannoissa, mutta yhtään esimerkkiä täydellisesti normaalista luvusta ei ole. Myöskään käytännössä yhdenkään luonnollisesti esiintyvän ja muuten hyvin paljon tutkitun irrationaaliluvun, kuten π, e tai $\sqrt{2}$ normaaliutta ei olla pystytty todistamaan. Normaalilukuihin liittyy kuitenkin mielenkiintoisia tuloksia, joista ehkä hämmästyttävin on Borellin normaalilukulause, jonka mukaan melkein kaikki reaaliluvut ovat täydellisesti normaaleja. Borellin normaalilukulauseeseen palataan kappaleessa 2. Annetaan nyt muutama yksinkertainen esimerkki normaaliluvuista.

Esimerkki 1.7. Näytetään, että luku $0.\overline{01}$ on yksinkertaisesti normaali binärijärjestelmässä. Muodostetaan luvun $0.\overline{01}$ binääriesitys:

$$0.\overline{01} = 0.01010101...,$$

eli $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_{2k-1} = 0, x_{2k} = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lasketaan nyt $N_n^2(0.\overline{01}, \{0\})$ ja $N_n^2(0.\overline{01}, \{1\})$.

Tapaus 1: $n = 2k - 1$, jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} N_n^2(0.\overline{01}, \{0\}) &= k = \frac{n+1}{2} \\ N_n^2(0.\overline{01}, \{1\}) &= k - 1 = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Tapaus 2: $n = 2k$, jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} N_n^2(0.\overline{01}, \{0\}) &= k = \frac{n}{2} \\ N_n^2(0.\overline{01}, \{1\}) &= k = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea raja-arvot

$$\begin{aligned} \frac{N_n^2(0.\overline{01}, \{0\})}{n} &= \begin{cases} \frac{n+1}{2n}, & n = 2k-1 \\ \frac{n}{2n}, & n = 2k \end{cases} \to \frac{1}{2} \\ \frac{N_n^2(0.\overline{01}, \{1\})}{n} &= \begin{cases} \frac{n-1}{2n}, & n = 2k-1 \\ \frac{n}{2n}, & n = 2k \end{cases} \to \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

eli määritelmän 1.6 nojalla luku $0.\overline{01}$ on yksinkertaisesti normaali binäärijärjestelmässä.

Edellinen esimerkki voidaan yleistää helposti myös muihin kantajärjestelmiin.

Lause 1.8. *Olkoon* $b \geq 2$. *Luku* $0.\overline{01234\ldots b-1}$ *on yksinkertaisesti normaali kannassa* b.

Todistus. Olkoon $x = 0.\overline{01234\ldots b-1}$. Muodostetaan luvun x b-kantaesitys

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j},$$

missä $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, …, $x_b = b-1$, …, $x_k = k-1 \pmod b$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n \geq b$ ja olkoon $j \in \{0, \ldots, b-1\}$. Nyt lasketaan $N_n^b(x, \{j\}) = \#\{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 \leq l \leq n\}$. Luvun x määritelmästä huomataan, että $\#\{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 + bk \leq l < b(k+1)\} = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} N_n^b(x, \{j\}) &\leq \# \bigcup_{k=1}^{\lceil \frac{n}{b} \rceil} \{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 + b(k-1) \leq l < bk\} \\ &= \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{b} \rceil} \#\{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 + b(k-1) \leq l < bk\} = \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil = \frac{n}{b} + \varepsilon_0, \end{aligned}$$

jollekin $0 < \varepsilon_0 < 1$. Toisaalta

$$\begin{aligned} N_n^b(x, \{j\}) &\geq \# \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 + b(k-1) \leq l < bk\} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \#\{x_l \,|\, x_l = j,\, 1 + b(k-1) \leq l < bk\} = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor = \frac{n}{b} - \varepsilon_1, \end{aligned}$$

jollekin $0 < \varepsilon_1 < 1$. Tällöin

$$\frac{N_n^b(x, \{j\})}{n} \leq \frac{1}{b} + \frac{\varepsilon_0}{n} \to \frac{1}{b},$$

kun $n \to \infty$ ja lisäksi

$$\frac{N_n^b(x, \{j\})}{n} \geq \frac{1}{b} - \frac{\varepsilon_1}{n} \to \frac{1}{b},$$

kun $n \to \infty$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^b(x,\{j\})}{n} = \frac{1}{b},$$

joten x on yksinkertaisesti normaali. $\square$

Esimerkki 1.9. Yksinkertaisin esimerkki normaaliluvuista 10-kantajärjestelmässä on niin kutsuttu Champernownen luku $C_{10} = 0.12345678910111213\ldots$ joka muodostetaan liittämällä peräkkäin luonnolliset luvut niiden luonnollisessa järjestyksessä. Jopa tämän yksinkertaisen esimerkin todistaminen normaaliksi on haastavaa, joten todistusta ei tässä tutkielmassa esitetä. Todistus löytyy esimerkiksi Champernownen alkuperäisestä julkaisusta [3].

2 Borelin normaalilukulause

Epäilemättä eräs tärkeimmistä normaalilukuihin liittyvistä tuloksista on Émile Borelin vuonna 1909 esittämä normaalilukulause [2], joka väittää seuraavaa

Lause 2.1 (Borelin normaalilukulause)**.** *Melkein kaikki luvut väliltä* $[0,1]$ *ovat täydellisesti normaaleja.*

Seuraavissa kappaleissa määritellään käsitteitä ja todistetaan aputuloksia, joita tarvitaan lauseen ymmärtämisessä ja todistuksessa. Kappaleessa 2.1 määritellään käsite *melkein kaikki* sekä esitellään muutama alkeellinen mittateoriaa sivuava tulos. Kappaleessa 2.2 kerrataan muutamia todennäköisyysteorian peruskäsiteitä joita syvennetään kappaleessa 2.3, jossa tämän jälkeen todistetaan niin kutsuttu suurten lukujen laki eräässä sen erikoistapauksessa. Suurten lukujen lakia sovelletaan tämän jälkeen kappaleessa 2.4, jossa todistetaan sen avulla lause 2.1.

2.1 Mittateoriaa

Borelin normaalilukulauseen täydellinen ymmärtäminen vaatii hieman mittateoriaa, mutta tässä tutkielmassa vaativat mittateorian käsiteet ohitetaan ja käytetään alkeellisempia mittateoriaa sivuavia määritelmiä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ avoin väli reaalilukusuoralla. Tällöin välin I *pituus* on $l(I) = b - a$. Samoin välien $[a,b]$, $[a,b[$ ja $]a,b]$ pituus on $b - a$

Määritelmä 2.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Joukko A on *nollamittainen*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa joukko avoimia välejä $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, joille

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään $A \in \mathcal{N}$, missä $\mathcal{N}$ on nollamittaisten joukkojen perhe.

Määritelmä 2.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin joukon A *ulkomitta* on

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ on avoin väli avaruudessa } \mathbb{R} \right\}$$

Huomautus 2.5. Määritelmien 2.3 ja 2.4 suora seuraus on, että joukko $A \subset \mathbb{R}$ on nollamittainen jos ja vain jos $\lambda(A) = 0$.

Määritelmä 2.4 on hyvin intuitiivinen tapa kuvata joukon "mittaa", kuten seuraavasta lemmastakin huomataan.

Lemma 2.6. *Reaalilukuvälin $I \subset \mathbb{R}$ ulkomitta on sen pituus $l(I)$. Toisin sanottuna, jos*

$$I =]a,b[\,,\ I = [a,b]\,,\ I =]a,b]\,,\ \textit{tai } I = [a,b[\,,$$

niin $\lambda(I) = b - a$.

Todistus. Todistetaan lemma suljetulle välille $[a,b]$. Olkoon $\varepsilon > 0$, tällöin $[a,b] \subset]a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}[$. Tällöin $l(]a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}[) = b - a + \varepsilon$, ja koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, niin

$$\lambda([a,b]) < b - a + \varepsilon \iff \lambda([a,b]) \leq b - a.$$

Lisäksi täytyy osoittaa, että $\lambda([a,b]) \geq b - a$. Tämän puolen todistus perustuu Heinen-Borellin lauseeseen ja ohitetaan tässä (katso esimerkiksi [6]). $\square$

Eräs ulkomittaan liittyvä perustulos on numeroituva subadditiivisuus, josta saadaan seurauksena tulos, jonka mukaan nollamittaisten joukkoje numeroituva yhdiste on nollamittainen.

Lause 2.7. *Olkoon $A_n \subset \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Todistus. Olkoon $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ jono avoimia välejä, joille $A_n \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ $n \in \mathbb{N}$. Koska $\lambda(A_n) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \,\middle|\, A_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ on avoin väli avaruudessa } \mathbb{R} \right\}$, niin infimumin määritelmän nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ voidaan valita sellainen $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$, että

$$\sum_{m=1}^{\infty} l(I_{n,m}) < \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Toisaalta koska $A_n \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ $n \in \mathbb{N}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$. Tällöin infimumin määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} l(I_{n,m})\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, eli

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

□

Seuraus 2.8. *Olkoon $A_n \subset \mathbb{R}$ jono avaruuden $\mathbb{R}$ nollamittaisia osajoukoja. Tällöin*

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0.$$

Todistus. Ulkomitan määritelmän nojalla $\lambda(A) \geq 0$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}$. Lauseen 2.7 nojalla

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0,$$

mikä todistaa väitteen. □

Määritellään vielä Borelin normaalilukulausetta varten käsite "melkein kaikki".

Määritelmä 2.9. Olkoon $A \subset S \subset \mathbb{R}$. Sanotaan, että *melkein kaikki* reaaliluvut joukosta S kuuluvat joukkoon A, jos

$$\lambda(A^c) = 0,$$

missä $A^c = S \backslash A$.

2.2 Todennäköisyysteoriaa

Jotta päästään käsiksi lauseen 2.1 todistukseen, täytyy ensin määritellä muutamia todennäköisyysteorian peruskäsitteitä. Tässä luvussa määritellään todennäköisyysavaruus sekä satunnaismuuttujat. Todennäköisyysavaruuden määrittelyssä tarvitaan teknisistä syistä σ-algebran käsitettä, mutta ohitetaan tämän joukkoperheen tarkempi määrittely. Käytännössä σ-algebra on tavallisten joukko-operaatioiden, eli komplementin, leikkauksen ja numeroituvan unionin suhteen suljettu.

Määritelmä 2.10. Olkoon Ω epätyhjä joukko ja $\mathcal{F}$ σ-algebra joukossa Ω. Tällöin kuvausta $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ kutsutaan *todennäköisyysmitaksi*, jos

i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, kaikilla $A \in \mathcal{F}$

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

iii) Jos joukot $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ ovat erillisiä, niin $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan *todennäköisyysavaruudeksi*, joukkoa Ω *perusjoukoksi* ja joukkoja $A \in \mathcal{F}$ *tapahtumiksi.*

Todennäköisyysavaruudessa on myös mahdollista olla epätyhjiä osajoukkoja $N_0 \in \mathcal{F}$ joille $\mathbb{P}(N_0) = 0$. Tällaisia joukkoja sanotaan *nollamittaisiksi joukoiksi* todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Myös tyhjä joukko on luonnollista määritellä nollamittaiseksi, sillä määritelmästä 2.10 on yksinkertaista näyttää, että $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Esimerkki 2.11. Osoitetaan (hieman epätarkasti), että kolmikko $([0, 1], \mathcal{F}, \lambda)$ on todennäköisyysavaruus, kun $\mathcal{F}$ on välin $[0, 1]$ avoimien osajoukkojen generoima joukkoperhe.

i) Koska $l(I) \geq 0$ kaikille avoimille väleille määritelmän 2.2 nojalla, niin $\lambda(A) \geq 0$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}$

ii) Lemmasta 2.6 seuraa, että $\lambda([0,1]) = 1$.

iii) Riittää näyttää, että $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ ja $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$. Ensimmäinen suunta seuraa lauseesta 2.7 ja toisen suunnan todistus sivuutetaan (katso esim. [1]).

Huomautus 2.12. Tämän määritelmän avulla voidaan samaistaa todennäköisyysavaruuden nollamittaisuus määritelmän 2.3 mukaisen nollamittaisuuden kanssa, sillä todennäköisyysavaruudessa $([0,1], \mathcal{F}, \lambda)$ nollamittaiset joukot N_0 ovat sellaisia, joille $\lambda(N_0) = 0$, eli ne ovat nollamittaisia myös määritelmän 2.3 mielessä. Huomaa myös, että joukon N_0 ei tarvitse olla tyhjä joukko, vaan esimerkiksi erillisten pisteiden muodostama numeroituva unioni on nollamittainen.

Tässä tutkielmassa keskitytään pääasiassa äärellisiin tai numeroituviin todennennäköisyysavaruuksiin, eli tilanteisiin, joissa perusjoukko Ω on äärellinen tai numeroituva. Tällaisille todennäköisyysavaruuksille todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ voidaan karakterisoida seuraavalla tavalla: Kaikille $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} p_a,$$

missä $0 \leq p_\omega \leq 1$ on tapahtuman $\omega \in \Omega$ pistetodennäköisyys ja

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1,$$

Esitellään seuraavaksi vielä muutamia todennäköisyysmitan ominaisuuksia ja todistetaan niistä tärkeimmät:

Lause 2.13. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, ja olkoon $A \subset B \subset \Omega$, sekä $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono avaruuden Ω osajoukkoja. Tällöin todennäköisyysmitalle $\mathbb{P}$ pätevät seuraavat tulokset*

i) $\mathbb{P}(A) \leq 1$

ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

iii) $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

iv) $\mathbb{P}(\Omega \backslash A) = 1 - \mathbb{P}(A)$

v) Jos $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *ja* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$*, niin*

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

vi) Jos $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *ja* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$*, niin*

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

vii) (Boolen epäyhtälö) $\mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Ensimmäiset neljä väittämää seuraavat kohtalaisen yksinkertaisesti todennäköisyysmitan määritelmästä, joten niiden todistus sivuutetaan. Todistetaan kuitenkin kohdat v-vii.

Todistus. v) Merkitään $A_0 = \emptyset$. Koska $A_{n-1} \subset A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin joukot $A_k \backslash A_{k-1}$, $k \geq 1$ ovat erillisiä. Tällöin $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \backslash A_{k-1}$ on erillinen yhdiste ja todennäköisyysmitan määritelmän 2.10 kohdan iii) nojalla

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \backslash A_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1})$$

Toisaalta $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \backslash A_{n-1}$ on myös erillinen yhdiste ja

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \backslash A_{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \backslash A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

□

Kohta vi) seuraa kohdasta v) tutkimalla joukkoa $\Omega \backslash A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega \backslash A_n$. Koska $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, niin $\Omega \backslash A_1 \subset \Omega \backslash A_2 \subset \ldots$ jolloin voidaan soveltaa kohtaa v) ja saadaan

$$\mathbb{P}(\Omega \backslash A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Omega \backslash A_n).$$

Kohdan iv) nojalla tästä seuraa

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\Omega \backslash A) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Omega \backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}(\Omega \backslash A_n). = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Kohdassa vii) voidaan käyttää hyväksi erillisten joukkojen todennäköisyysksien additiivisuutta. Muodostetaan joukot $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Nyt $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Lisäksi yhdiste $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ on erillinen ja $B_n \subset A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

Määritelmä 2.14. Kuvausta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kutsutaan *satunnaismuuttujaksi.* Jos Ω on äärellinen tai numeroituva, määritellään satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega X(\omega) = \sum_{y \in Y} y \mathbb{P}(X = y),$$

missä $Y = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ on satunnaismuuttujan arvojoukko ja $0 \leq p_\omega \leq 1$ on tapahtuman $\omega \in \Omega$ pistetodennäköisyys. Tapahtuman $A \subset \Omega$ *indikaattorifunktiolle* $\mathbf{1}[A]$,

$$\mathbf{1}[A](\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A \\ 0, & \text{kun } \omega \notin A \end{cases}$$

pätee määritelmän mukaan $\mathbb{E}(\mathbf{1}[A]) = \mathbb{P}(\mathbf{1}[A] = 1) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(x \in A)$.

2.3 Suurten lukujen laki

Lauseen 2.1 todistuksen tärkein työkalu on Borelin suurten lukujen laki, joka sanoo seuraavaa:

Lause 2.15. *Olkoon $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono riippumattomia ja identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat yhtäsuuret. Toisin sanoen*

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots = \mu.$$

Tällöin

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} = \mu \right) = 1$$

Lauseen todistamiseksi täytyy tehdä vielä muutamia satunnaismuuttujiin ja niiden suppenemiseen liittyviä määritelmiä. Ensiksi määritellään satunnaismuuttujan melkein varma suppeneminen, jonka jälkeen määritellään tapahtumajonojen limes supremum ja limes infimum.

Määritelmä 2.16. Olkoon $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono satunnaismuuttujia. Jonon $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sanotaan suppenevan *melkein varmasti* kohti satunnaismuuttujaa X, jos on olemassa nollamittainen joukko N_0, jolle

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) < \infty$$

kaikilla $\omega \in \Omega \backslash N_0$.

Intuitio termin "melkein varmasti"käyttämiselle tässä tilanteessa saadaan, kun yhdistetään suppeneminen suppenemisen todennäköisyyteen. Jos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ on kuten edellä, niin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 &\iff \mathbb{P}\big(\{\omega \in A \subset \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1 \\ &\iff \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),\ \forall \omega \in A = \Omega \backslash N_0\end{aligned}$$

missä $\mathbb{P}(N_0) = 0$.

Määritelmä 2.17. Olkoon $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono avaruuden Ω osajoukkoja. Määritellään

i) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$

ii) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$

Määritelmästä voidaan huomata, että alkio kuuluu joukkoon $\limsup_{n\to\infty} A_n$ jos ja vain jos se kuuluu äärettömän moneen joukoista A_n

Todistus. Oletetaan, että $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tällöin

$$\omega \in \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \text{ kaikilla } m \in \mathbb{N}.$$

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan ω kuuluu vain äärellisen moneen joukoista A_n. Tällöin on olemassa $m_\omega \in \mathbb{N}$, siten että $\omega \notin A_n$, kaikilla $n \geq m_\omega$. Tästä seuraa, että $\omega \notin \bigcup_{n=m_\omega}^{\infty} A_n$, mikä on ristiriita.

Toisaalta, jos ω kuuluu äärettömän moneen joukoista A_n, niin se kuuluu joukkoon $\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$, jolloin se kuuluu joukkoon $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ $\square$

Todennäköisyystapahtumien tilanteessa voidaan siis käyttää intuitiivista ilmaisutapaa ja sanoa, että tapahtuma $\limsup_{n\to\infty} A_n$ toteutuu, jos ja vain jos tapahtumat A_n toteutuvat äärettömän usein. Nyt määritelmien 2.16 ja 2.17 avulla voidaan todistaa kaksi lausetta, joita käytetään hyväksi lauseen 2.15 todistamisessa.

Lause 2.18. *$X_n \to 0$ melkein varmasti, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}\big(|X_n| \geq \varepsilon,\ \textit{äärettömän usein}\big) = 0 \tag{3}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $X_n \to 0$ melkein varmasti, eli $X_n(\omega) \to 0$ kaikilla $\omega \in \Omega \backslash N_0$, missä N_0 on nollamittainen. Merkitään nyt

$$A_m(\varepsilon) = \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|X_n| \geq \varepsilon\}.$$

Muistetaan samaistus äärettömän usean tapahtuman toteutumisen ja limes supremumin kanssa, jolloin saadaan

$$\{|X_n| \geq \varepsilon,\ \text{äärettömän usein}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|X_n| \geq \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_m(\varepsilon).$$

Olkoon $\omega_0 \in \Omega \backslash N_0$, jolloin raja-arvon määritelmän nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $m_{\omega_0,\varepsilon} \in \mathbb{N}$, siten että

$$|X_n(\omega_0)| < \varepsilon,\ \text{aina kun } n \geq m_{\omega_0,\varepsilon}$$

Tällöin $\omega_0 \notin A_{m_{\omega_0,\varepsilon}}$, josta seuraa, että $\omega \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)$. Toisin sanottuna $\Omega \backslash N_0 \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon) = \emptyset$, eli $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon) \subset N_0$. Nyt lauseen 2.13 nojalla

$$0 \leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)\Big) \leq \mathbb{P}(N_0) = 0,$$

mikä todistaa ensimmäisen suunnan.

Oletetaan nyt, että (3) pätee, joka vastaa todistuksen alkuosan notaatiolla sitä, että kaikilla $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)\Big) = 0 \tag{4}$$

Väitteen todistamiseksi tulee näyttää, että $X_n \to 0$ melkein varmasti, eli joukossa jonka todennäköisyys on 1. Merkitään

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{|X_n| < \varepsilon\}, \tag{5}$$

josta De Morganin lakien avulla saadaan

$$\begin{aligned}\Omega \backslash A(\varepsilon) &= \Omega \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{|X_n| < \varepsilon\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|X_n| \geq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon),\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\omega_0 \in A(\varepsilon)$. Nyt on olemassa $m_{\omega_0,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|X_n(\omega_0)| < \varepsilon, \text{ aina kun } n \geq m_{\omega_0,\varepsilon}.$$

Halutaan, että yllä oleva pätee kaikilla $\varepsilon > 0$. Muodostetaan tätä varten joukko

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{6}$$

Nyt tapahtuman A todennäköisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty} A\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg) = 1 - \mathbb{P}\Bigg(\Omega \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg) \\ &= 1 - \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega \backslash A\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg) = 1 - \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg) \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg)}_{\underset{(4)}{=}0} = 1\end{aligned}$$

Lisäksi, jos $\omega_0 \in A$, niin kaikilla $\varepsilon = \frac{1}{n}$ on olemassa $m_{\omega_0} \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|X_n(\omega_0)| < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq m_{\omega_0}.$$

Tästä seuraa, että väite pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, sillä kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Nyt siis $X_n \to 0$, joukossa A, ja $\mathbb{P}(A) = 1$, josta seuraa, että $A = \Omega \backslash N_0$, jollekkin nollamittaiselle joukolle N_0, eli $X_n \to 0$ melkein varmasti.

$\square$

Lause 2.19 (Borel-Cantellin lemma). *Olkoon* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jono tapahtumia todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Tällöin, jos tapahtumien todennäköisyyksien summa on äärellinen, eli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

niin todennäköisyys että äärettömän moni tapahtumista toteutuu on 0, eli

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0,$$

tai vastaavasti

$$\mathbb{P}\big(A_n \text{ sattuu äärettömän usein}\big) = 0.$$

Toisin sanottuna Borel-Cantellin lemma siis väittää, että mikäli tapahtumajonon todennäköisyyksien muodostama sarja suppenee, niin vain äärellisen moni tapahtumista toteutuu. Todistetaan nyt Borel-Cantellin lemma käyttäen aiemmin todistettuja tuloksia.

Todistus. Nyt $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} A_n$. Selvästi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \supset \ldots \limsup_{n\to\infty} A_n$$

Nyt käyttämällä lauseen 2.13 kohtia vi) ja vii) saadaan

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Oletuksen mukaan sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ suppenee. Tästä seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)-\sum_{n=1}^{m-1}\mathbb{P}(A_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)-\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=0,$$

mikä todistaa väitteen. □

Kerrataan vielä varianssin ja korreloimattomuuden määritelmät ja kaksi todennäköisyysteorian perustulosta, Markovin ja Tsebysevin epäyhtälöt.

Määritelmä 2.20. Satunnaismuuttujan X varianssi on luku

$$Var(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$$

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *korreloimattomia* jos

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Satunnaismuuttujien korreloimattomuus on myös yhteydessä satunnaismuuttujien riippumattomuuteen, erityisesti riippumattomuudesta seuraa korreloimattomuus, mutta korreloimattomuudesta ei välttämättä seuraa riippumattomuutta.

Lemma 2.21 (Markovin epäyhtälö)**.** *Satunnaismuuttujalle $X \geq 0$ pätee*

$$\mathbb{P}(X\geq\lambda)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda},$$

kaikille $\lambda > 0$.

Todistus. Jos $X \geq 0$, niin odotusarvon määritelmästä seuraa

$$\mathbb{E}(X)\geq\sum_{\omega\in\Omega,\,X(\omega)\geq\lambda}p_\omega X(\omega)\geq\sum_{X(\omega)\geq\lambda}p_\omega\lambda\geq\lambda\sum_{X(\omega)\geq\lambda}p_\omega=\lambda\mathbb{P}(X\geq\lambda),$$

mistä väite seuraa. □

Lemma 2.22 (Tsebysevin epäyhtälö)**.** *Olkoon X satunnaismuuttuja odotusarvonaan $\mathbb{E}(X)$. Tällöin*

$$\mathbb{P}\Big(|X-\mathbb{E}(X)|>\kappa\sqrt{Var(X)}\Big)\leq\frac{1}{\kappa^2},$$

kaikille $\kappa > 0$.

Todistus. Sovelletaan Markovin epäyhtälöä, kun $\lambda = \kappa^2 \mathrm{Var}(X)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| > \kappa\sqrt{Var(X)}\Big) &= \mathbb{P}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2 > \kappa^2 Var(X)\Big)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\kappa^2 Var(X)} = \frac{1}{\kappa^2}.\end{aligned}$$

□

Huomautetaan vielä, että valitsemalla $\kappa = \frac{\kappa}{\sqrt{Var(X)}}$ saadaan epäyhtälö muotoon

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| > \kappa) \leq \frac{Var(X)}{\kappa^2},$$

Nyt aikaisempia tuloksia käyttäen saadaan todistettua suurten lukujen laki, eli lause 2.15 erikoistapauksessa, jossa satunnaismuuttujat X_n ovat numeroituvia, keskenään korreloimattomia ja niillä on äärellinen toinen momentti (eli $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$).

Todistus. Olkoon $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono numeroituvan todennäköisyysavaruuden identtisesti jakautuneita korreloimattomia satunnaismuuttujia, joilla on äärellinen toinen momentti, ja joiden odotusarvoille pätee $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots = \mu$.

Halutaan siis näyttää, että $\mathbb{P}\Bigg(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} X_n}{n} = \mu\Bigg) = 1$, johon määritelmän 2.16 seurauksen nojalla näyttää, että

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} X_n}{n} \to \mu, \;\; kun\ m \to \infty \tag{7}$$

melkein varmasti. Nyt voidaan olettaa, että $\mu = 0$, sillä muut tapaukset voidaan palauttaa tähän tutkimalla satunnaismuuttujaa
$\widetilde{X}(\omega) = X(\omega) - \mu$. Heti huomataan, että satunnaismuuttujien keskinäisestä korreloimattomuudesta seuraa

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0, \tag{8}$$

kaikilla $i \neq j$. Muodostetaan satunnaismuuttuja

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} X_n.$$

Halutaan päästä käyttämään Tsebysevin epäyhtälöä 2.22, jota varten voidaan nyt laskea satunnaismuuttujan S_m varianssi. Odotusarvon lineaarisuudesta ja oletuksesta seuraa, että $\mathbb{E}(S_m) = 0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Koska kaikkien satunnaismuuttujien X_n toinen momentti on rajoitettu, voidaan valita $M \in \mathbb{R}$ siten, että $\mathbb{E}(X_n^2) \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin satunnaismuuttujan S_m varianssiksi saadaan

$$\begin{aligned} Var(S_m) &= \mathbb{E}(S_m^2) - \underbrace{\mathbb{E}(S_m)^2}_{=0} = \mathbb{E}\bigg(\Big(\sum_{n=1}^{m} X_n\Big)^2\bigg) \\ &= \mathbb{E}\bigg(\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} X_n X_k\bigg) = \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(X_n X_k) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}(X_n^2) \leq \sum_{n=1}^{m} M \leq mM. \end{aligned} \tag{9}$$

Nyt Tsebysevin epäyhtälön 2.22 nojalla

$$\mathbb{P}\Big(|S_m - \mathbb{E}(S_m)| \geq \kappa\Big) = \mathbb{P}\Big(|S_m| \geq \kappa\Big) \leq \frac{Var(S_m)}{\kappa^2},$$

kaikilla $\kappa > 0$. Erityisesti kaikilla $\varepsilon > 0$ voidaan valita $\kappa = m\varepsilon$, jolloin

$$\mathbb{P}\Big(|S_m| \geq m\varepsilon\Big) \leq \frac{Var(S_m)}{m^2\varepsilon^2} \leq \frac{mM}{m^2\varepsilon^2} = \frac{M}{m\varepsilon^2}. \tag{10}$$

Tähän halutaan päästä käyttämään Borel-Cantellin lemmaa, mutta ongelmaksi muodostuu se, että arvion (10) oikeasta puolesta muodostettu sarja ei suppene. Tarkastelu voidaan kuitenkin rajoittaa osajonoon S_{m^2}, jolloin

$$\mathbb{P}\Big(|S_{m^2}| \geq m^2\varepsilon\Big) \leq \frac{M}{m^2\varepsilon^2}.$$

Tällöin

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(|S_{m^2}| \geq m^2\varepsilon\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M}{m^2\varepsilon^2} < \infty,$$

jolloin Borel-Cantellin lemman 2.19 nojalla

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(|S_{m^2}| \geq m^2\varepsilon \text{ äärettömän usein}\Big) = 0 \\ \iff &\mathbb{P}\Big(\frac{|S_{m^2}|}{m^2} \geq \varepsilon \text{ äärettömän usein}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Nyt lauseen 2.18 nojalla

$$\frac{|S_{m^2}|}{m^2} \to 0 \tag{11}$$

melkein varmasti, eli lause on todistettu osajonolle S_{m^2}. Nyt täytyy vain näyttää, että alkuperäisen jonon jäsenet ovat riittävän lähellä osajonon jäseniä, että myös jono S_m suppenee nollaan melkein varmasti. Määritellään tätä varten kaikilla $m \geq 1$

$$D_m = \max_{m^2 \leq k < (m+1)^2} |S_k - S_{m^2}|$$

Jälleen odotusarvon lineaarisuudesta ja oletuksesta seuraa, että $\mathbb{E}(D_m) = 0$, kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Merkitään $|S_{k'} - S_{m^2}| = \max_{m^2 \leq k < (m+1)^2} |S_k - S_{m^2}|$, missä $m^2 \leq k' < (m+1)^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_m^2) &= \mathbb{E}(|S_{k'} - S_{m^2}|^2) = \mathbb{E}(S_{k'}^2 - 2S_{k'}S_{m^2} + S_{m^2}) \\ &= \mathbb{E}(S_{k'}^2) - 2\mathbb{E}(S_{k'}S_{m^2}) + \mathbb{E}(S_{m^2}^2) \\ &\leq \mathbb{E}(S_{k'}^2) + \mathbb{E}(S_{m^2}^2) \leq k'M + m^2M \leq 4m^2M \end{aligned}$$

Jälleen voidaan käyttää Tsebysevin epäyhtälöä josta saadaan

$$\mathbb{P}\Big(|D_m| \geq m^2\varepsilon\Big) \leq \frac{4M}{m^2\varepsilon^2},$$

josta kuten aiemmin Borel-Cantellin lemman ja lauseen 2.18 nojalla seuraa, että

$$\frac{|D_m|}{m^2} \to 0 \tag{12}$$

melkein varmasti. Nyt yhtälöiden (11) ja (12) avulla kaikille $m^2 \leq k < (m+1)^2$ pätee

$$\frac{|S_k|}{k} \leq \frac{|S_{m^2}| + D_m}{m^2} \to 0$$

melkein varmasti, josta väite seuraa. □

Todistetaan vielä yksinkertainen lemma jota tarvitaan lauseen 2.1 todistamisessa.

Lemma 2.23. *Olkoon* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rajoitettu jono positiivisia reaalilukuja ja* $a > 0$. *Tällöin jos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = a < \infty,$$

niin kaikille $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{n} = \frac{a}{m}.$$

Todistus. Olkoon $m, M \in \mathbb{N}$ ja $x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{\frac{n}{m}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \to a,$$

kun $n \to \infty$. Toisaalta

$$\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{\frac{n}{m}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1} x_k - x_{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1}}{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1} \to a,$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{\frac{n}{m}} = a \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} x_k}{n} = \frac{a}{m},$$

□

Nyt voidaan viimein siirtyä tutkielman päätuloksen, Borelin normaalilukulauseen, todistukseen.

2.4 Normaalilukulauseen todistus

Kertauksen vuoksi Borelin normaalilukulause (lause 2.1) väittää, että melkein kaikki luvut välillä $[0, 1]$ ovat täydellisesti normaaleja. Käsite melkein kaikki tulee ymmärtää määritelmän 2.9 mielessä, toisin sanoen siis tulee osoittaa, että välillä $[0, 1]$ olevien täydellisesti normaalien lukujen joukon komplementti on nollamittainen. Todistuksen idea on yksinkertaistettuna seuraava:

- Valitaan satunnainen luku $X \in [0,1]$ tasaisesta jakaumasta.
- Muodostetaan luvun b-kantaesitys.
- Muodostetaan tämän avulla riippumattomat satunnaismuuttujat, joiden avulla voidaan laskea $N_n^b(X,w)$.
- Sovelletaan suurten lukujen lakia, jolloin saadaan $\frac{N_n^b(X,w)}{n} \to \frac{1}{b^m}$ melkein varmasti.

Lopulta tämän seurauksena saadaan, että välillä $[0,1]$ olevien täydellisesti normaalien lukujen joukon komplementti on nollamittainen. Muotoillaan nyt todistus täsmällisesti.

Todistus. Olkoon $m, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ ja olkoon $w = w_1 w_2 \ldots w_m$ sana, jonka pituus on m aakkostossa $B = \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Valitaan luku $X \in [0,1]$ satunnaisesti tasaisesta jakaumasta. Tämä voidaan tehdä muodostamalla luvun X b-kantaesitys seuraavalla tavalla. Muodostetaan jono $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka saavat arvoja aakkostosta B siten, että $\mathbb{P}(X_k = j) = \frac{1}{b}$, kaikilla $j \in B$, $k \in \mathbb{N}$ ja määritellään

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k b^{-k}.$$

Muodostetaan näin määriteltyjien satunnaismuuttujien avulla satunnaismuuttujat $\overline{X}_k = X_k X_{k+1} \ldots X_{k+m-1}$, jotka kuvaavat luvun X b-kantaesityksessä esiintyvää luvun m pituista merkkijonoa alkaen indeksistä k. Muodostetaan vielä tapahtuman $\{\overline{X}_k = w\}$ indikaattorifunktio.

$$\mathbf{1}[\overline{X}_k = w] = \begin{cases} 1, & \text{jos } \overline{X}_k = w \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Koska tapahtumat $\{X_{k+j-1} = w_j\}$, $j = 1, \ldots, m$ ovat keskenään riippumattomia satunnaismuuttujien X_k määritelmän nojalla, saadaan tästä tapahtuman $\{\overline{X}_k = w\}$ todennäköisyydeksi

$$\mathbb{P}(\overline{X}_k = w) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} \{X_{k+j-1} = w_j\} \right) = \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X_{k+j-1} = w_j) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{b} = \frac{1}{b^m}$$

Sanan w esiintymiskertojen lukumäärä luvun X ensimmäisen n merkin joukossa saadaan nyt laskettua yksinkertaisesti indikaattorifunktioiden avulla

$$N_n^b(X,w) = \mathbf{1}[\overline{X}_1 = w] + \mathbf{1}[\overline{X}_2 = w] + \ldots + \mathbf{1}[\overline{X}_{n-m+1} = w]. \tag{13}$$

Tässä kohdassa on kuitenkin hyvä huomata, että satunnaismuuttujat $\overline{X}_k$ eivät ole keskenään riippumattomia (eivätkä edes korreloimattomia), joten suurten lukujen lakia ei päästä käyttämään hyväksi. Tarkastelu voidaan kuitenkin rajoittaa satunnaismuuttujajonon osajonoihin $\{\overline{X}_{j+mk}\}_{k=0}^{\infty}$, missä $j \in \{1,\ldots,m\}$ ja m on sanan w pituus, jolloin satunnaismuuttujat $\overline{X}_{j+mk}$ voidaan osoittaa keskenään riippumattomiksi. Jaetaan siis yhtälön (13) summa m osaan seuraavalla tavalla.

$$\begin{aligned}
N_n^b(X,w) &= \mathbf{1}[\overline{X}_1 = w] + \mathbf{1}[\overline{X}_2 = w] + \ldots + \mathbf{1}[\overline{X}_{n-m+1} = w] \\
&= \mathbf{1}[\overline{X}_1 = w] + \mathbf{1}[\overline{X}_{1+m} = w] + \ldots + \mathbf{1}[\overline{X}_{1+m(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor -1)} = w] \\
&+ \mathbf{1}[\overline{X}_2 = w] + \mathbf{1}[\overline{X}_{2+m} = w] + \ldots + \mathbf{1}[\overline{X}_{2+m(\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor -1)} = w] \\
&+ \\
&\vdots \\
&+ \mathbf{1}[\overline{X}_m = w] + \mathbf{1}[\overline{X}_{2m} = w] + \ldots + \mathbf{1}[\overline{X}_{m(\lfloor \frac{n-m+1}{m} \rfloor -1)} = w] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-j+1}{m} \rfloor} \mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)} = w]
\end{aligned} \tag{14}$$

Tavoitteena on nyt päästä käyttämään suurten lukujen lakia hyväksi. Ensiksi voidaan huomata, että

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^b(X,w)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)} = w]}{n} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)} = w]}{n},
\end{aligned} \tag{15}$$

sillä

$$\left|\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}-\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-j+1}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}\right|$$
$$\leq\left|\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]-\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}\right|$$
$$\leq\left|\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]-\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+1}{m}\rfloor-1}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}\right|$$
$$\leq\left|\frac{\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(\lfloor\frac{n}{m}\rfloor-1)}=w]}{n}\right|\leq\left|\frac{\sum_{j=1}^{m}1}{n}\right|\leq\left|\frac{m}{n}\right|\to 0.$$

Suurten lukujen lakia 2.15 voidaan nyt käyttää satunnaismuuttujiin $\{\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]\}_{k=1}^{\infty}$, kunhan ensin tarkistetaan, että oletukset pätevät, eli että satunnaismuuttujat ovat korreloimattomia ja niillä on äärellinen toinen momentti. Lasketaan tätä varten ensin satunnaismuuttujien odotusarvo. Kaikilla $k\in\mathbb{N}$ satunnaismuuttujan $\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]$ odotusarvoksi saadaan odotusarvon lineaarisuutta hyväksi käyttäen

$$\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]\Big)=\mathbb{P}(\overline{X}_{j+m(k-1)}=w)=\frac{1}{b^m}$$

Nyt voidaan tarkistaa korreloimattomuus. Tapahtumien $\{\overline{X}_{j+m(k-1)}=w\}$ ollessa riippumattomia saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(h-1)}=w]\Big)\\
&=\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\{\overline{X}_{j+m(k-1)}=w\}\cap\{\overline{X}_{j+m(h-1)}=w\}]\Big)\\
&=\mathbb{P}\Big(\{\overline{X}_{j+m(k-1)}=w\}\cap\{\overline{X}_{j+m(h-1)}=w\Big)\}\\
&=\frac{1}{b^{2m}}=\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]\Big)\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(h-1)}=w]\Big),
\end{aligned}$$

kun $h\neq k$. Jonon $\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]$ toinen momentti on selvästi äärellinen, sillä

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]^2\Big)=&\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]\Big)\\
&=\mathbb{P}\Big(\overline{X}_{j+m(k-1)}=w\Big)=\frac{1}{b^m}.
\end{aligned}$$

Nyt lauseen 2.15 oletukset pätevät, jolloin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\frac{1}{b^m}\Big)=1,$$

kaikilla $j=1,\dots,m-1$ ja lemman 2.23 nojalla

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\frac{1}{mb^m}\Big)=1,$$

Nyt jos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\frac{1}{mb^m}$$

kaikilla $j\in B$, niin

$$\sum_{j=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{mb^m}=\frac{1}{b^m},$$

jolloin yhtälön (15) nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{N_n^b(X,w)}{n}=\frac{1}{b^m}\Big)=\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\frac{1}{b^m}\Big)\\
&\geq\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}=\frac{1}{mb^m},\ \text{kaikilla } j\Big)\\
&=1-\underbrace{\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\mathbf{1}[\overline{X}_{j+m(k-1)}=w]}{n}\neq\frac{1}{mb^m},\ \text{jollakin } j\Big)}_{=0}\\
&=1.
\end{aligned}$$

Tämä siis tarkoittaa sitä, että satunnaisesti valittu luku $X\in[0,1]$ on melkein varmasti normaali kannassa b, kiinnitetyllä $b\geq 2$. Määritellään nyt

$$\mathcal{N}_b \coloneqq \{x\in[0,1]\,|\,x \text{ on normaali kannassa } b\}$$

Tällöin edellä olevasta tuloksesta seuraa, että $\mathbb{P}(x\in\mathcal{N}_b)=1$, josta esimerkin 2.11 mukaisesti voidaan huomata, että

$$\lambda(\mathcal{N}_b^c) = \mathbb{P}(x \in \mathcal{N}_b^c) = 1 - \mathbb{P}(x \in \mathcal{N}_b) = 0,$$

eli määritelmän 2.9 mukaisesti melkein kaikki luvut ovat normaaleja kannassa b. Toisaalta täydellisesti normaalien lukujen joukko saadaan yllä olevan avulla

$$\mathcal{N}_\infty := \{x \in [0,1] \,|\, x \text{ on normaali kannassa } b, \text{ kaikilla } b \geq 2\} = \bigcap_{b=2}^{\infty} \mathcal{N}_b,$$

jolloin De Morganin lakien nojalla

$$\mathcal{N}_\infty^c = \Big(\bigcap_{b=2}^{\infty} \mathcal{N}_b\Big)^c = \bigcup_{b=2}^{\infty} \mathcal{N}_b^c$$

Nyt seurauksen 2.8 nojalla $\mathbb{P}(x \in \mathcal{N}_\infty^c) = \lambda(\bigcup_{b=2}^{\infty} \mathcal{N}_b^c) = 0$, eli melkein kaikki luvut välillä $[0,1]$ ovat täydellisesti normaaleja. $\square$

Lähdeluettelo

[1] Bogachev, V.I. (2000) *Measure Theory Volume 1*, Springer, s. 19-20

[2] Borel, É (1909) *Les probabilités dénomrables et leurs applications artihmétiques*, Supplemento di rend. circ. Mat. Palermo 27, s. 247-271

[3] Champernowne, D.G (1933) *The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten*, J London Math Soc, Volume s1-8, Issue 4, s. 254–260

[4] Chung, K.L. (1974) *A Course In Probability Theory, Second Edition*, Academic Press Inc.

[5] Khoshnevisan, D. (2006) *Normal numbers are normal*, Clay Mathematics Institute Annual Report, s. 15, 27-31

[6] Oxtoby, J.C. (1980) *Measure and Category*, Springer-Verlag New York Inc. s.3