Catalanin luvut

LuK-tutkielma
Tuuli Kuonanoja
2463917
Matemaattiset tieteet
Oulun yliopisto
Syksy 2019

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään Catalanin lukuja, Catalanin lukujonoja sekä näiden sovellutuksia erilaisiin kombinatorisiin ongelmiin. Ensimmäisessä kappaleessa tutustutaan lyhyesti Catalanin lukujen historiaan ja itse Catalaniin. Toisessa kappaleessa määritellään Catalanin luvut ja lukujonot, ja kolmannessa kappaleessa tutkitaan useita ongelmia, joihin Catalanin luvut tarjoavat ratkaisuja. Kaikki teoria pohjautuu teokseen [1].

Aiheen ymmärtämiseksi olisi hyvä tuntea kombinatoriikan perusteet, erityisesti binomikertoimet, joille tässä tutkielmassa käytetään merkintöjä $\binom{n}{k}$ sekä $C(n, k)$. Lisäksi tutkielmassa käsitellään lukujonoja ja lauseen 2.2 todistuksessa joukkoja, joten näiden käsitteiden tulisi olla tuttuja. Myös funktion bijektiivisyyttä tarvitaan muutaman lauseen todistuksessa.

Pääosa tutkielmasta on lähdetekstin suomennosta, mutta olen yrittänyt lisätä laskuihin välivaiheita ja selittää asioita tarkemmin silloin, kun siihen on ollut tarve. Joihinkin teoksen [1] esimerkeistä olen keksinyt hieman erilaiset vastineet, esimerkiksi sivulla 11 olen numeroinut eri lausekkeen sulut kuin alkuperäisessä materiaalissa. Lisäksi olen laskenut itse yksinkertaiset esimerkit 2.2 ja 3.11, kirjoittanut lemmojen 3.7 ja 3.8, seurauksen 3.9 sekä lauseen 3.12 todistukset ja piirtänyt kaikki tutkielmassa esiintyvät kuvat.

1 Historiaa lyhyesti

Catalanin luvut löysi noin vuonna 1730 mongolialainen astronomi ja matemaatikko Ming Antu (mongoliaksi Myangat). Ne tulivat ensimmäistä kertaa tunnetuksi 1750-luvun lopulla, kun Euler tutki, kuinka monella eri tavalla konveksi eli kupera monikulmio on mahdollista jakaa kolmioihin piirtämällä janoja monikulmion kulmasta kulmaan siten, ettei yksikään näistä janoista leikkaa toisiaan. Tätä ongelmaa tarkastellaan lauseen 3.14 yhteydessä.

Eulerin ongelma ratkesi lopulta vuonna 1758, kun J. A. von Segner käytti differenssiyhtälöä $T_{n+1} = T_0T_n + T_1T_{n-1} + \ldots + T_{n-1}T_1 + T_nT_0$ (katso lauseet 3.10 ja 3.14). Catalan törmäsi lukuihin vuonna 1838 ja pohti tutkimuksessaan kysymystä "Kuinka monella eri tavalla voidaan laskea n tekijän tulo?". Hän ratkaisi ongelman käyttäen yllä mainittua differenssiyhtälöä. Luvut nimesi Catalanin mukaan Eugen Netto vuonna 1901.

Eugene Catalan syntyi 30.3.1814 Bruggessa, joka kuuluu nykyään Belgiaan, mutta oli tuolloin osa Ranskan ensimmäistä keisarikuntaa. Tämän vuoksi hän piti itseään ranskalaisena. Hän aikoi seurata isänsä jalanjälkiä arkkitehdiksi, mutta päätyikin matemaatikoksi. Catalan työskenteli professorina Liègen yliopistossa 19 vuoden ajan ja kirjoitti elinaikanaan useita julkaisuja liittyen lukuteoriaan. Hän kuoli Liègessä 14.2.1894.

2 Catalanin luvut ja lukujonot

Catalanin luvut ovat kiinnostavia siksi, että ne esiintyvät monissa kombinatorisissa ongelmissa. R. P. Stanley on kerännyt yli 150 ongelmaa, jonka ratkaisuksi saadaan Catalanin luku. Aloitetaan Catalanin lukujen määritelmällä.

Määritelmä 2.1. Määritellään n. *Catalanin luku* C_n jokaiselle kokonaisluvulle $n \geq 0$ siten, että

$$C_n = \frac{1}{n+1}C(2n, n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{1}$$

Esimerkki 2.2. Lasketaan muutamia ensimmäisiä Catalanin lukuja käyttäen yhtälöä 1.

$$C_0 = \tbinom{0}{0} = 1 \qquad C_1 = \tfrac{1}{2}\tbinom{2}{1} = \tfrac{2}{2} = 1 \qquad C_2 = \tfrac{1}{3}\tbinom{4}{2} = \tfrac{6}{3} = 2$$

$$C_3 = \tfrac{1}{4}\tbinom{6}{3} = \tfrac{20}{4} = 5 \quad C_4 = \tfrac{1}{5}\tbinom{8}{4} = \tfrac{70}{5} = 14 \quad C_5 = \tfrac{1}{6}\tbinom{10}{5} = \tfrac{252}{6} = 42.$$

Esimerkin 2.2 nojalla vaikuttaisi, että luku $n + 1$ jakaa luvun $C(2n, n)$. Tämä seuraa lauseesta 2.3 sekä lauseen 2.4 lopussa olevasta kaavasta (2).

Lause 2.3. *Catalanin luku C_n on kokonaisluku jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 0$.*

Todistus. Todistetaan aluksi, että n. Catalanin luku voidaan laskea erotuksena $C_n = C(2n-1, n-1) - C(2n-1, n+1)$, kun $n > 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n+1} &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \\
&= \frac{(2n)!n(n+1)}{n!(n+1)!2n} - \frac{(2n)!(n-1)n}{n!(n+1)!2n} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!2} - \frac{(2n)!(n-1)}{n!(n+1)!2} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)}\left(\frac{n+1-n+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{1}{n+1}C(2n, n) = C_n.
\end{aligned}$$

Nyt koska luvut $C(2n-1, n-1)$ ja $C(2n-1, n+1)$ ovat binomikertoimina kokonaislukuja kaikilla kokonaisluvuilla $n > 0$ ja n. Catalanin luku voidaan esittää muodossa $C_n = C(2n-1, n-1) - C(2n-1, n+1)$, niin myös C_n on kokonaislukujen erotuksena kokonaisluku, kun $n > 0$.

Kun $n = 0$, niin 0. Catalanin luku on $C_0 = 1$. Pätee siis, että Catalanin luku C_n on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$. □

Tutkitaan seuraavaksi eräänlaisia luvuista 1 ja -1 koostuvia lukujonoja, joihin monet Catalanin lukuihin liittyvät ongelmat voidaan redusoida.

Lause 2.4. *Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ lukujono, joka koostuu n kappaleesta lukuja 1 ja n kappaleesta lukuja -1, ja jonka kaikki osasummat $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, jossa k on sellainen kokonaisluku, että $1 \leq k \leq 2n$, ovat ei-negatiivisia. Tällöin näiden lukujonojen lukumäärä on n. Catalanin luku C_n.*

Todistus. Olkoon A joukko, joka sisältää kaikki n kappaleesta lukuja 1 ja n kappaleesta lukuja -1 koostuvat lukujonot. Olkoon F joukon A osajoukko, jonka alkiot eivät toteuta lauseen ehtoa. Suoritetaan todistus vähentämällä joukon A alkioiden lukumäärästä osajoukon F alkioiden lukumäärä.

Joukon A sisältämien lukujonojen lukumäärä on sama kuin kaikkien mahdollisten valintojen määrä n miinusmerkin paikoille $2n$ kappaleesta lukuja 1 koostuvassa lukujonossa. Näin ollen joukon A alkoiden lukumäärä on $|A| = C(2n, n)$.

Lasketaan seuraavaksi joukon F alkioiden lukumäärä $|F|$. Olkoon $S = a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ lukujono joukossa F. Osajoukon F määritelmän mukaan ainakin yksi lukujonon S osasumma on negatiivinen. Olkoon r pienin positiivinen kokonaisluku, jolla osasumma $s_r = a_1 + a_2 + \ldots + a_r < 0$. Tällöin jonon r. alkion on oltava $a_r = -1$, ja jos $r > 1$, niin osasumma $s_{r-1} = 0$. Tällöin luvun $r - 1$ on oltava parillinen, eli $r - 1 = 2k$, jossa k on posiivinen kokonaisluku. Lukujonossa $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ on siis yhtä monta lukua 1 kuin lukua -1.

Muodostetaan nyt lukujonosta S uusi lukujono $S' = b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ vaihtamalla r ensimmäisen termin merkkiä lukujonossa S. Lasketaan sitten lukujen 1 ja -1 lukumäärät lukujonossa S'. Osajonossa $a_1, a_2, \ldots, a_r$ on k kappaletta lukuja 1 ja $k + 1$ kappaletta lukuja -1, jolloin osajonossa $a_{r+1}, \ldots, a_{2n}$ on $n - k$ kappaletta lukuja 1 ja $n - (k + 1)$ kappaletta lukuja -1. Tällöin osajonossa $b_1, b_2, \ldots, b_r$ on $k + 1$ kappaletta lukuja 1 ja k kappaletta lukuja -1, jolloin lukujonossa S' on $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ kappaletta lukuja 1 ja $n - (k + 1) + k = n - 1$ kappaletta lukuja -1.

Kääntäen oletetaan, että lukujono $S' = b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ koostuu $n + 1$ kappaleesta lukuja 1 ja $n - 1$ kappaleesta lukuja -1. Tällöin on olemassa pienin positiivinen kokonaisluku $t \leq 2n$, jolla $b_1 + b_2 + \ldots + b_t = 1$. Olkoon nyt S'' lukujono, joka on muodostettu lukujonosta S' vaihtamalla t ensimmäisen termin merkkiä. Tällöin lukujono S'' kuuluu joukkoon F. Edelleen huomataan, että jokaiselle joukkoon F kuuluvalle lukujonolle S pätee $S'' = S$, sillä selvästi tekemällä käänteinen operaatio lukujonolle S' päädytään takaisin alkuperäiseen lukujonoon S. Tällöin kuvaus $S \to S'$ on bijektio joukolta F joukolle G, jonka alkioita ovat kaikki $n+1$ kappaleesta lukuja 1 ja $n-1$ kappaleesta lukuja -1 muodostuvat lukujonot. Tällöin $|F| = |G| = C(2n, n+1) = C(2n, n-1)$.

Nyt nähdään, että $|A| - |F| = C(2n, n) - C(2n, n+1)$. Viimeinkin saadaan

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-(n+1))!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!n!(n+1)} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!(n-1)!n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\Big((n+1) - n\Big) = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}C(2n, n) = C_n, \qquad (2)
\end{aligned}$$

eli kun joukosta A otetaan pois joukon F alkiot, niin joukon $A \setminus F$ alkioiden lukumäärä on n. Catalanin luku C_n. $\square$

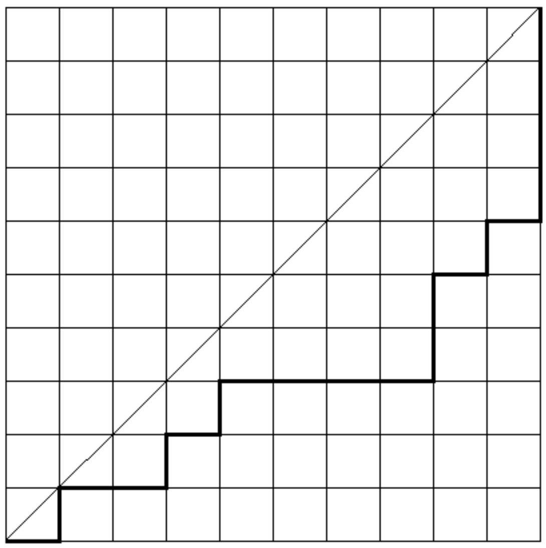
Lauseen 2.4 ehdot toteuttavaa lukujonoa $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, joka koostuu n kappaleesta lukuja 1 ja n kappaleesta lukuja -1, kutsutaan *Catalanin lukujonoksi*. Huomataan myös, että n. Catalanin luku voidaan esittää vaihtoehtoisessa muodossa $C_n = C(2n, n) - C(2n, n+1)$, josta lauseen 2.3 tavoin seuraa, että n. Catalanin luku C_n on kokonaisluku.

3 Ongelmia ja ratkaisuja

Tässä kappaleessa tutkitaan ongelmia, joiden ratkaisemisessa Catalanin luvut ja lukujonot osoittautuvat tärkeäksi työkaluksi.

3.1 Polut $n \times n$ ruudukossa

Esimerkki 3.1. Otetaan käsittelyyn $n \times n$ ruudukko, jossa n on positiivinen kokonaisluku. Kuinka montaa eri polkua pitkin päästään ruudukon vasemmasta alakulmasta ruudukon oikeaan yläkulmaan, kulkien ruudukon viivoja pitkin siten, ettei polku ylitä kuvassa 1 esitettyä vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan piirrettyä diagonaalia? Tässä polulla tarkoitetaan ruudukon viivoja pitkin ylös tai oikealle kulkevaa reittiä, joka alkaa ruudukon vasemmasta alakulmasta ja päättyy oikeaan yläkulmaan.



Kuva 1: polku 10×10 ruudukossa

Nyt voidaan kuvata jokaista polkua ruudukossa luvuista 1 ja -1 koostuvalla lukujonolla, jossa luku 1 vastaa vaakasuoraa ruudukon segmenttiä ja luku -1 vastaa pystysuoraa segmenttiä. Esimerkiksi kuvassa 1 esitettyä 10×10 ruudukon polkua kuvataan lukujonolla

$$1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1,$$

joka koostuu 10 kappaleesta lukuja 1 ja 10 kappaleesta lukuja -1. Yleisemmin $n \times n$ ruudukon jokainen polku voidaan esittää n kappaleesta lukuja 1 ja n kappaleesta lukuja -1 koostuvana lukujonona. Koska polku ei saa mennä diagonaalin yläpuolelle, niin lukujonon jokainen osasumma on ei-negatiivinen. Tämä johtuu siitä, että kun diagonaalia ei ylitetä, niin ei voida koskaan liikkua ylös enempää kuin ollaan jo liikuttu oikealle. Tällöin lukujono täyttää Catalanin lukujonon (Lause 2.4) ehdot. Tästä seuraa, että mahdollisten toisistaan eroavien polkujen lukumäärä on Catalanin luku C_n ja erityisesti kuvan 1 ruudukossa erilaisia polkuja on $C_{10} = 16796$ kappaletta.

Ruudukossa kulkevia polkuja voitaisiin tutkia myös erilaisissa tapauksissa, esimerkiksi diagonaalin yläpuolella tai kulkien diagonaalin alapuolella oikeasta yläkulmasta vasempaan alakulmaan. Näissä kahdessa tapauksessa olisi otettava huomioon tapauksen erilaisuus kuvaamalla ruudukon pystysuoria segmenttejä luvulla 1 ja vaakasuoria segmenttejä luvulla -1.

Ruudukkoon voidaan palauttaa myös toinen Catalanin lukujen sovellutus, jossa piirretään vuoria ylös- ja alaspäin suuntautuvia viivoja käyttäen, kun käännetään ruudukon diagonaali vaakasuuntaan kuvaamaan maata, jonka päällä vuori seisoo. Vastaavasti voidaan kääntää vuoret kuopiksi.

3.2 Lausekkeet

Nyt päästään ongelmaan, jota Catalan aikoinaan tutki. Olkoot A, B ja C neliömatriiseja. Näiden matriisien tulo tässä järjestyksessä voidaan matriisien laskusääntöjen nojalla laskea kahdella eri tavalla $((AB)C) = (A(BC))$. Vastaavasti voitaisiin tutkia reaalilukujen tuloa tietyssä järjestyksessä, jos matriisit eivät ole tuttuja. Matriisit tosin ovat tässä tilanteessa erityisen kuvaavia siksi, että ne eivät yleisessä tapauksessa noudata vaihdantalakia. Siis yhtälö $AB = BA$ ei ole voimassa kaikilla matriiseilla A ja B, kun taas reaaliluvuilla tämä pätee. Jos otetaan mukaan neljäs neliömatriisi D, tulon eri laskutapojen määrä kasvaa: $(((AB)C)D) = ((AB)(CD)) = ((A(BC))D) = (A((BC)D)) = (A(B(CD)))$. Herää kysymys, kuinka monella eri tavalla n neliömatriisin tulo voidaan laskea.

Yllä huomattiin, että matriisien tulo tietyssä järjestyksessä voidaan esittää lausekkeina. Matriisiongelman ratkaisemiseksi on hyvä määritellä nämä *lausekkeet* yksikäsitteisesti. Vaikka yllä käytettiin kirjaimia A, B, C ja D kuvaamaan matriiseja, niin n matriisin tulon laskutapojen lukumäärään ei vaikuta ovatko matriisit keskenään samoja vai eivät. Siis kun lasketaan erilaisten lausekkeiden lukumäärää, voidaan valita vaikkapa kirjain X kirjainten $A, B, C, \ldots$ sijaan. Tästä päästään seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 3.2. Määritellään joukko *lausekkeita*, jotka koostuvat kirjaimesta X, vasemmasta sulusta '(' ja oikeasta sulusta ')' seuraavasti:

1. Kirjain X on itsessään lauseke.

2. Jos Γ ja Δ ovat lausekkeita, niin $(\Gamma\Delta)$ on myös lauseke.

3. Mikään ei ole lauseke, jos sitä ei voida päätellä kohdista 1 ja 2.

Seuraavaksi käydään läpi yksinkertainen esimerkki siitä, miten määritelmää 3.2 käyttäen voidaan todistaa lausekkeisiin liittyviä asioita.

Esimerkki 3.3. Oletetaan, että lausekkeessa on n kirjainta. Tällöin kyseisessä lausekkeessa on $n-1$ vasenta sulkua ja $n-1$ oikeaa sulkua.

Todistus. Käytetään induktiotodistusta.

Yhdestä kirjaimesta koostuvan lausekkeen on oltava X itsessään. Tällöin lausekkeessa ei ole sulkuja, joten väite pätee, kun $n = 1$.

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun lausekkeessa on kirjaimia vähemmän kuin n kappaletta. Olkoon Σ lauseke, jossa on n kirjainta. Määritelmän 3.2 nojalla lausekkeen Σ on oltava muotoa $(\Gamma\Delta)$, jossa Γ ja Δ ovat lausekkeita. Jos lauseke Γ sisältää c kirjainta, niin lauseke Δ sisältää $n-c$ kirjainta. Koska on $c, n-c < n$, niin induktio-oletuksesta seuraa, että lauseke Γ sisältää $c-1$ paria sulkuja ja lauseke Δ sisältää $(n-c)-1$ paria sulkuja. Tällöin lauseke $(\Gamma\Delta)$ sisältää $(c-1)+((n-c)-1)+1 = n-1$ paria sulkuja. Siis väite pätee myös, kun lausekkeessa on n kirjainta. Näin ollen väite on voimassa kaikille lausekkeille. □

Seuraavaksi todistetaan muutama aputulos lauseen 3.6 todistusta varten.

Lemma 3.4. *Kaikissa lausekkeissa on vähintään yksi kirjain X viimeisen vasemman sulun '(' jälkeen.*

Todistus. Käytetään induktiotodistusta.

Lauseke, jossa on tasan nolla paria sulkuja, on kirjain X itsessään. Tällöin väite pätee, koska lausekkeessa ei ole vasenta sulkua.

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun lausekkeessa on vähemmän kuin n sulkuparia. Olkoon Σ lauseke, jossa on n paria sulkuja. Tällöin lauseke Σ on määritelmän 3.2 nojalla muotoa $(\Gamma\Delta)$, jossa Γ ja Δ ovat lausekkeita, joissa on vähemmän kuin n paria sulkuja. Nyt induktio-oletuksesta seuraa, että lausekkeessa Δ on vähintään yksi kirjain X viimeisen vasemman sulun jälkeen. Jos lausekkeessa Δ on vähintään yhdet sulut, niin sen viimeinen vasen sulku on myös lausekkeessa Σ viimeisenä. Jos lausekkeessa Δ ei ole sulkuja, niin sen sisältämä kirjain X on lausekkeen Γ viimeisen vasemman sulun jälkeen. Jos lausekkeessa Γ ei myöskään ole sulkuja, niin lausekkeen Δ viimeinen kirjain X on lausekkeen Σ vasemman sulun jälkeen. Näin ollen kaikissa kolmessa tapauksessa vähintään lausekkeen Δ viimeinen kirjain on lausekkeen Σ viimeisen vasemman sulun jälkeen. Siis väite pätee myös lausekkeille, joissa on n paria sulkuja, joten lemma on voimassa kaikille lausekkeille. □

Lemma 3.5. *Jokaiseen lausekkeeseen Γ voidaan liittää lukujono Γ^*, joka koostuu luvuista 1 ja -1 siten, että lausekkeen Γ vasemmat sulut korvataan luvulla 1 ja kirjaimet X, viimeistä kirjainta lukuun ottamatta, korvataan luvulla -1. Tällöin lukujono Γ^* on Catalanin lukujono.*

Todistus. Käytetään induktiotodistusta.

Kun lauseke on kirjain X, niin lausekkeeseen liitettävä lukujono on tyhjä, jolloin se lasketaan Catalanin lukujonoksi. Täten väite pätee, kun lausekkeessa on nolla paria sulkuja.

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun lausekkeessa on vähemmän kuin n sulkuparia. Olkoon Σ lauseke, joka sisältää n paria sulkuja. Täten määritelmän 3.2 nojalla lauseke Σ voidaan esittää muodossa $(\Gamma\Delta)$. Koska Γ ja Δ ovat lausekkeita, joissa on vähemmän kuin n paria sulkuja, niin niitä vastaavat Catalanin lukujonot Γ^* ja Δ^*. Nyt lemman 3.4 nojalla lausekkeessa Γ on kirjain X viimeisen vasemman sulun jälkeen. Täten lauseketta $(\Gamma\Delta)$ vastaa lukujono $\Sigma^* = 1, \Gamma^*, -1, \Delta^*$. Koska Γ^* ja Δ^* ovat Catalanin lukujonoja, eli ne toteuttavat lauseen 2.4 ehdon "$s_k \geq 0$" (osajonojen summa nolla tai suurempi), niin selvästi myös lukujono Σ^* toteuttaa saman ehdon. Näin ollen Σ^* on myös Catalanin lukujono, eli väite on voimassa lausekkeille, jotka sisältävät n sulkuparia. Siis lemma pätee kaikille lausekkeille. □

Lause 3.6. *Lausekkeita, jotka sisältävät n kappaletta kirjaimia X, on olemassa $(n-1)$. Catalanin luku C_{n-1} kappaletta, missä $n > 1$ on kokonaisluku.*

Todistus. Lemman 3.5 nojalla jokaista lauseketta Γ kohden on olemassa Catalanin lukujono Γ^*. On osoitettava, että kuvaus $\Gamma \to \Gamma^*$ on bijektio n kirjaimesta koostuvien lausekkeiden joukolta $2(n-1)$ pituisten Catalanin lukujonojen joukolle. Olkoon C Catalanin lukujono. Löydetäänkö nyt yksikäsitteinen lauseke Γ siten, että $\Gamma^* = C$?

Ymmärtämisen helpottamiseksi tutkitaan tilannetta, jossa Catalanin lukujono koostuu seitsemästä 1:stä ja seitsemästä -1:stä. Samalla tullaan todistaneeksi myös yleinen tapaus. Olkoon nyt

$$C = 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1.$$

Korvataan ensin jokainen termi 1 Catalanin lukujonossa vasemmalla sululla, jokainen termi -1 kirjaimella X, ja lisätään loppuun vielä yksi kirjain X. Tällöin Catalanin lukujonosta saadaan jono

$$C^{+} = (((XX((X(X(XXXX.$$

Koska C on Catalanin lukujono, niin jonossa C^{+} on yksi kirjain vasempia sulkuja enemmän. Koska jokainen lauseke alkaa vasemmalla sululla, niin jossakin vaiheessa löydetään kolme peräkkäistä symbolia, muodostuen vasemmasta sulusta ja kahdesta kirjaimesta. Etsitään nyt jonosta C^{+} ensimmäinen kohta, jossa tämä tapahtuu. Symbolit ovat nyt $(XX$. Merkitään tätä osajonoa, jonka loppuun on lisätty oikea sulku, $\Gamma_1 = (XX)$. Kun jonossa korvataan löydetyt kolme symbolia jonolla Γ_1, saadaan uusi jono

$$\Sigma_1 = ((\Gamma_1((X(X(XXXX.$$

Nyt voidaan lukea Γ_1 kirjaimeksi uudessa jonossa, joka edelleen alkaa vasemmalla sululla ja sisältää yhden kirjaimen vasempia sulkuja enemmän. Koska C on Catalanin lukujono, niin kolmen symbolin muodostama osajono voi olla jonon C^{+} alussa vain silloin, kun Catalanin lukujonossa C on vain kaksi alkiota. Muuten lauseen 2.4 ehto ei toteutuisi. Koska jonon C^{+} kolme symbolia korvattiin yhdellä kirjaimella, niin uutta jonoa Σ_1 vastaava lukujono, jossa jonon Σ_1 sulut korvataan luvulla 1 ja kirjaimet viimeistä lukuun ottamatta luvulla -1, on edelleen Catalanin lukujono.

Nyt voidaan laajentaa kirjaimen määritelmä käsittämään muoto Γ_i, jossa i on kokonaisluku. Siis voidaan toistaa etsintä kolmelle peräkkäiselle symbolille uudelleen ja uudelleen, jolloin löydetään

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= (XX) \Rightarrow \Sigma_2 = ((\Gamma_1((X(X\Gamma_2XX \\
\Gamma_3 &= (X\Gamma_2) \Rightarrow \Sigma_3 = ((\Gamma_1((X\Gamma_3XX \\
\Gamma_4 &= (X\Gamma_3) \Rightarrow \Sigma_4 = ((\Gamma_1(\Gamma_4XX \\
\Gamma_5 &= (\Gamma_4X) \Rightarrow \Sigma_5 = ((\Gamma_1\Gamma_5X \\
\Gamma_6 &= (\Gamma_1\Gamma_5) \Rightarrow \Sigma_6 = (\Gamma_6X \\
\Gamma_7 &= (\Gamma_6X) \Rightarrow \Sigma_7 = \Gamma_7
\end{aligned}$$

Koska Catalanin lukujonossa on seitsemän kappaletta lukuja 1, niin prosessi päättyy seitsemän askeleen jälkeen. Vastaavasti jos Catalanin lukujonossa olisi n kappaletta lukuja 1, niin prosessi päättyisi n askeleen jälkeen.

Tämä johtuu siitä, että jokaisessa prosessin vaiheessa jonosta poistuu yksi vasen sulku, joten n askeleen jälkeen kaikki sulut ovat poistuneet. Toisaalta myös kirjaimet poistuvat samaan tahtiin, jolloin lopulta jäljelle jää vain yksi kirjain, eikä kolmea peräkkäistä symbolia voida enää löytää. Nyt kun korvataan termejä taaksepäin, saadaan

$$\begin{aligned}\Sigma_7 &= \Gamma_7 = (\Gamma_6 X) = ((\Gamma_1\Gamma_5)X) = (((XX)(\Gamma_4 X))X)\\ &= (((XX)((X\Gamma_3)X))X) = (((XX)(\Gamma_4 X))X)\\ &= (((XX)((X\Gamma_3)X))X) = (((XX)((X(X\Gamma_2))X))X)\\ &= (((XX)((X(X(XX)))X))X)\end{aligned}$$

Huomataan, että tämä prosessi tuottaa Catalanin lukujonosta C yksikäsitteisesti määritellyn lausekkeen $C^+ = \Sigma_n$. Edelleen, jos aloitetaan lausekkeesta Γ, niin tullaan huomaamaan, että on $\Gamma^{*+} = \Gamma$. Nyt siis lauseketta Γ vastaa lemman 3.5 mukaan Catalanin lukujono Γ^*. Muodostetaan tätä Catalanin lukujonoa vastaava jono Γ^{*+} korvaamalla luvut 1 vasemmilla suluilla ja luvut -1 kirjaimilla X, kuten todistuksen alussa tehtiin. Kun prosessi toistetaan tälle jonolle, päädytään takaisin alkuperäiseen lausekkeeseen Γ. Täten nähdään, että pätee $\Gamma^{*+} = \Gamma$.

Näin ollen jokaista lauseketta, joka sisältää n kappaletta kirjaimia X, vastaa yksikäsitteisesti Catalanin lukujono, joka koostuu $(n-1)$ kappaleesta lukuja 1 ja $(n-1)$ kappaleesta lukuja -1 ja päinvastoin. Nyt koska näiden lukujonojen lukumäärä on C_{n-1} ja kuvaus $\Gamma \to \Gamma^*$ on bijektio, niin myös n kirjainta X sisältävien lausekkeiden lukumäärä on C_{n-1}. Siis lause on todistettu. On edelleen kätevää määritellä, että $C_0 = 1$, jotta lause on voimassa myös tapauksessa $n = 1$. □

Seuraavat kaksi lemmaa liittyvät seuraavanlaiseen lausekkeen sulkujen numerointitapaan. Lausekkeen sulut numeroidaan siten, että ensimmäinen (vasen) sulku saa luvun 1. Vastatkoon nyt sulkua s kokonaisluku n. Tällöin jos sulkua s seuraa vasen sulku, se numeroidaan luvulla $n+1$. Jos sulkua s seuraa oikea sulku, sitä vastaavaksi luvuksi tulee $n-1$. Esimerkiksi lausekkeen $(((XX)X)(XX))$ sulkujen numerointi on seuraava:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& (& (& XX &) & X &) & (& XX &) &) \\ 1 & 2 & 3 & & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 0. \end{array}$$

Lemma 3.7. *Kaikki luvut, jotka vastaavat lausekkeen sulkuja yllä olevan säännön mukaisesti, ovat positiivisia, paitsi viimeistä (oikeaa) sulkua vastaava luku, joka on nolla.*

Todistus. Käytetään induktiotodistusta.

Kun lauseke on kirjain X, niin sulkupareja on nolla. Tällöin väite pätee, koska lukuja ei ole.

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun lausekkeessa on vähemmän kuin n sulkuparia. Olkoon nyt Σ lauseke, jossa on n paria sulkuja. Määritelmän 3.2 nojalla tämä lauseke voidaan esittää muodossa $(\Gamma\Delta)$, jossa Γ ja Δ ovat lausekkeita, joissa on vähemmän kuin n sulkuparia. Tällöin lausekkeen $(\Gamma\Delta)$ sulut numeroituvat siten, että ensimmäinen sulku saa luvun 1. Seuraavaksi tulevat lausekkeiden Γ ja Δ sulut, joita vastaaviin lukuihin on lisätty luku 1. Nyt koska lausekkeen Δ viimeinen sulku on numeroitu luvulla 0, niin vastaava luku $0 + 1 = 1$ on lausekkeessa $(\Gamma\Delta)$ toiseksi viimeisenä, jolloin viimeinen sulku numeroidaan luvulla 0. Jos lauseke Δ on pelkästään kirjain X, niin lausekkeen $(\Gamma\Delta)$ viimeistä sulkua edeltää lausekkeen Γ viimeinen sulku, joka vastaavasti numeroituu uudessa lausekkeessa luvulla 1. Siis tässäkin tapauksessa viimeistä sulkua vastaa luku 0. Jos taas sekä Γ että Δ ovat suluttomia lausekkeita, niin lausekkeessa Σ on vain kaksi sulkua, jotka säännön mukaan numeroituvat luvuilla 1 ja 0. Koska lausekkeiden Γ ja Δ sulut on numeroitu positiivisilla luvuilla niiden viimeisiä sulkuja lukuun ottamatta, niin ensimmäisen ja viimeisen sulun välissä olevia sulkuja vastaavat luvut ovat lausekkeessa $(\Gamma\Delta)$ positiivisia. Täten väite pätee n sulkuparin lausekkeille, eli lemma on voimassa kaikille lausekkeille. □

Lemma 3.8. *Kaikissa yllä olevan säännön mukaan numeroiduissa lausekkeissa on enintään kaksi oikeaa sulkua, joita vastaa luku 1.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lemman 3.7 todistuksesta, sillä jos lauseke Σ on muotoa $(\Gamma\Delta)$, jolloin lausekkeiden Γ ja Δ sulkuja vastaavat luvut ovat positiivisia niiden viimeisiä sulkuja vastaavia lukuja (0) lukuun ottamatta, niin lausekkeen Σ sulkuja vastaavat luvut ovat näin ollen yhtä suurempia, jolloin vain lausekkeiden Γ ja Δ viimeisiä sulkuja voi vastata luku 1.

Siis jos lausekkeet Γ ja Δ sisältävät enemmän kuin yhden kirjaimen, niin lausekkeessa Σ on kaksi oikeaa sulkua, joita vastaa luku 1. Jos joko Γ tai Δ on yhden kirjaimen lauseke, niin lausekkeessa Σ on yksi oikea sulku, jota vastaa luku 1. Jos lausekkeet Γ ja Δ molemmat sisältävät vain yhden kirjaimen, niin lausekkeessa Σ on vain yksi oikea sulku, jota tällöin vastaa luku 0. Näin ollen kaikissa lausekkeissa on korkeintaan kaksi oikeaa sulkua, jotka on numeroitu luvulla 1. □

Lemmoilla 3.7 sekä 3.8 on seuraavanlainen seuraus.

Seuraus 3.9. *Olkoon Σ lauseke, jossa on enemmän kuin yksi kirjain. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 siten, että lauseke on muotoa $\Sigma = (\Sigma_1\Sigma_2)$.*

Todistus. Olkoon Σ lauseke, jossa on enemmän kuin yksi kirjain. Määritelmän 3.2 nojalla tämä voidaan kirjoittaa muodossa $(\Sigma_1\Sigma_2)$, jossa Σ_1 ja Σ_2 ovat lausekkeita. On siis todistettava, että lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat yksikäsitteisiä.

Nyt lemman 3.8 nojalla lausekkeessa Σ on enintään kaksi oikeaa sulkua, jotka numeroituvat luvulla 1, ja lemman todistuksesta huomataan, että tällöin on olemassa kolme vaihtoehtoa. Jos lausekkeessa Σ on nolla oikeaa sulkua, jota vastaa luku 1, niin lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat kumpikin yhden kirjaimen lausekkeita. Tällöin on oltava $\Sigma_1 = X$ ja $\Sigma_2 = X$, jolloin lausekkeet ovat yksikäsitteisiä.

Jos lausekkeessa Σ on yksi oikea sulku, jota vastaa luku 1, niin tämän sulun on oltava lausekkeen toiseksi viimeinen. Tällöin on kaksi tapausta. Jos lauseke Σ_1 on yhden kirjaimen lauseke, ja lausekkeessa Σ_2 on vähintään yhdet sulut, niin on oltava $\Sigma_1 = X$. Nyt lausekkeen Σ_2 viimeinen sulku on numeroitu luvulla 0, jolloin lausekkeessa Σ tätä sulkua vastaa luku 1. Näin ollen lausekkeen Σ_2 sulkujen paikat on määrätty lausekkeessa Σ, ja se voidaan esittää vain tavalla, jolla se on esitetty lausekkeessa Σ. Siis lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat yksikäsitteisiä. Toinen tapaus on se, että Σ_2 on yhden kirjaimen lauseke ja lausekkeessa Σ_1 on vähintään yhdet sulut. Tällöin vastaavasti lausekkeen Σ_1 viimeinen sulku on lausekkeessa Σ toiseksi viimeisenä, ja kuten edellisessä tapauksessa huomattiin, lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat yksikäsitteisiä.

Jos lausekkeessa Σ on kaksi oikeaa sulkua, joita vastaa luku 1, niin lausekkeissa Σ_1 ja Σ_2 on kummassakin vähintään yhdet sulut. Tällöin lausekkeiden Σ_1 ja Σ_2 viimeisiä sulkuja vastaa lausekkeessa luku 1. Nyt koska näiden sulkujen paikka on määrätty lausekkeessa Σ, niin lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat yksikäsitteisiä.

Siis lauseke Σ voidaan esittää muodossa $(\Sigma_1\Sigma_2)$ ja kaikissa tapauksissa lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 ovat yksikäsitteisiä. Näin ollen seuraus on voimassa kaikille lausekkeille, joissa on enemmän kuin yksi kirjain. $\square$

Lause 3.10. *Kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$ pätee, että Catalanin luku C_{n+1} voidaan esittää muodossa $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.*

Todistus. Lauseen 3.6 nojalla on olemassa C_{n+1} lauseketta, jotka sisältävät $n+2$ kirjainta. Oletetaan, että Σ on yksi näistä lausekkeista. Seurauksen 3.9 nojalla on olemassa yksikäsitteiset lausekkeet Σ_1 ja Σ_2 siten, että Σ on lauseke $(\Sigma_1\Sigma_2)$. Tällöin lauseke Σ_1 sisältää $k+1$ kirjainta X jollekin kokonaisluvulle k, jolle pätee $0 \leq k \leq n$. Edelleen lauseke Σ_2 sisältää $(n+2)-(k+1) = (n-k)+1$ kappaletta kirjaimia X. Näin ollen lauseen 3.6 nojalla, kun $0 \leq k \leq n$, lausekkeelle Σ_1 on C_k eri vaihtoehtoa ja lausekkeelle Σ_2 on C_{n-k} eri vaihtoehtoa, jolloin parille Σ_1, Σ_2 on $C_k C_{n-k}$ eri vaihtoehtoa. Kun otetaan huomioon kaikki tapaukset kokonaisluvulle $k = 0, 1, \ldots, n$, niin seuraa, että $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \ldots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$. $\square$

Esimerkki 3.11. Lasketaan nyt lauseen 3.10 yhtälöä käyttäen 4. Catalanin luku C_4.

$$\begin{aligned} C_4 &= \sum_{k=0}^{3} C_k C_{3-k} = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 \\ &= 2(C_0 C_3 + C_1 C_2) = 2(1 \cdot 5 + 1 \cdot 2) = 2 \cdot 7 = 14. \end{aligned}$$

Esimerkin 2.2 nojalla nähdään, että yhtälöllä saatiin oikea ratkaisu.

3.3 Monikulmiot

Sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler pohti ongelmaa "Kuinka monella eri tavalla konveksi monikulmio voidaan kolmioida?". Kolmioinnilla tarkoitetaan kuvion jakamista kolmioihin toisiaan leikkaamattomilla monikulmion kulmasta kulmaan kulkevilla janoilla. Konveksin monikulmion kaikki sisäkulmat ovat alle 180 astetta.

Seuraava lause kertoo, kuinka monta janaa tarvitaan monikulmion kolmiointiin.

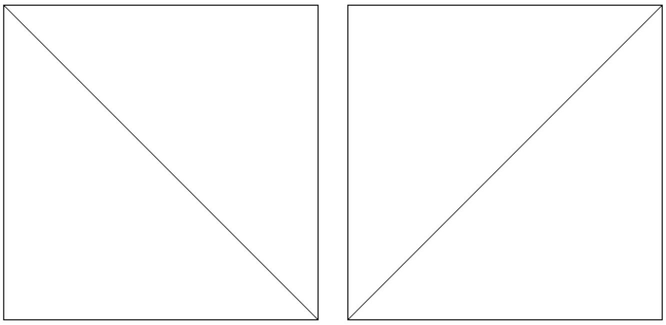
Lause 3.12. *Tarvitaan $n - 1$ janaa jakamaan $(n + 2)$-sivuinen monikulmio kolmioihin, kun $n \geq 1$ on kokonaisluku.*

Todistus. Käytetään induktiotodistusta.

Pienin monikulmio on kolmio, jota ei voida jakaa kulmasta kulmaan kulkevalla janalla kolmioiksi, sillä tällainen jana kulkee kolmion sivua pitkin. Siis kolmion jakamiseen tarvitaan nolla janaa, joten lause pätee, kun $n = 1$.

Oletetaan nyt, että lause pätee monikulmioille, joissa on vähemmän kuin $(n+2)$ sivua. Tutkitaan sitten $(n+2)$-kulmiota. Nyt voidaan ajatella $(n+2)$-kulmiota $(n + 1)$-sivuisena monikulmiona, johon on lisätty yksi sivu. Yhden sivun lisääminen kolmioituun $(n+1)$-kulmioon muuttaa yhden kolmioista nelikulmioksi. Koska $(n + 1)$-kulmion kolmiointiin tarvitaan induktio-oletuksen nojalla $n-2$ janaa ja nelikulmion kolmiointiin yksi jana, niin $(n+2)$-kulmaisen monikulmion kolmiointiin tarvitaan $n - 1$ janaa. Näin ollen väite pätee kaikille $(n + 2)$-kulmioille, ja edelleen lause on voimassa kaikille monikulmioille, joissa on vähintään kolme sivua. $\square$

Esimerkiksi kuvassa 2 nähdään kaksi tapaa kolmioida neliö. Huomaa, että nämä kaksi kolmiointitapaa luetaan erilaisiksi, vaikka toinen saadaan toisesta

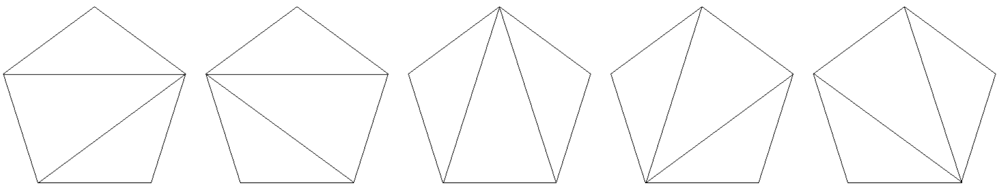


Kuva 2: neliön kolmiointi

kuvaa kääntämällä tai sen peilikuvana. Itse asiassa neliö voidaan kolmioida vain näillä kahdella tavalla.

Olkoon T_n nyt $(n+2)$-kulmion erilaisten kolmiointien lukumäärä jokaiselle kokonaisluvulle $n \geq 1$. Tällöin $T_1 = 1$, sillä kolmio voidaan jakaa kolmioihin vain yhdellä tavalla: sitä ei voida jakaa. Yllä jo huomattiinkin, että neliön eri kolmiontitapojen lukumäärä on $T_2 = 2$. Lisäksi on kätevää asettaa $T_0 = 1$.

Esimerkki 3.13. Tutkitaan, kuinka monella eri tavalla viisikulmio voidaan jakaa kolmioihin ja kuinka montaa janaa käyttämällä tämä onnistuu. Kuvasta 3 katsomalla nähdään, että viisikulmiolla on viisi erilaista kolmiointitapaa, joten voidaan merkitä $T_3 = 5$. Nähdään myös, että viisikulmion kolmiointiin tarvitaan kaksi janaa.

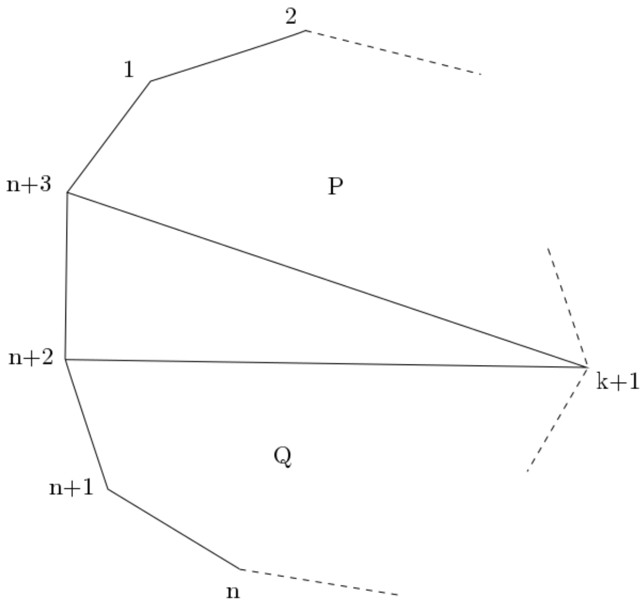


Kuva 3: viisikulmion kolmiointi

Nyt huomataan, että kun $1 \leq n \leq 3$, niin monikulmion erilaisten kolmiointien lukumäärä on sama kuin vastaava Catalanin luku, siis $T_n = C_n$. Seuraava lause näyttää, ettei tämä ole sattumaa.

Lause 3.14. *Kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$ pätee, että jos $(n+2)$-sivuinen konveksi monikulmio voidaan kolmioida T_n eri tavalla, niin $T_n = C_n$.*

Todistus. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. Tarkastellaan erilaisia kolmiointeja $(n+3)$-kulmaiselle monikulmiolle, jossa kulmat on numeroitu luvuilla $1, 2, \ldots, n+3$. Annetaan kulmat i ja j yhdistävälle janalle merkintätapa (i, j).



Kuva 4: monikulmion kolmiointi

Jokaisessa kolmioinnissa jana $(n+2, n+3)$ on vain yhden kolmion sivu (katso kuva 4). Luokitellaan jokainen kolmiointi tämän kolmion kolmannen kulman mukaan, olkoon se $k+1$, jossa $0 \leq k \leq n$ on kokonaisluku. Valmiissa kolmioinnissa on kolmioitu monikulmio P, jossa on $k+2$ kulmaa, joita on merkitty luvuilla $1, 2, \ldots, k+1, n+3$, sekä monikulmio Q, jossa on $n-k+2$ kulmaa, joita on merkitty luvuilla $k+1, \ldots, n, n+1, n+2$. Nämä monikulmioiden P ja Q kolmioinnit voidaan valita T_k ja T_{n-k} eri tavalla. Tällöin on olemassa $T_k T_{n-k}$ kolmiointia, jossa kulmat $n+2$, $n+3$ ja $k+1$ muodostavat yhden kolmioista. Näin ollen, kun käydään läpi kaikki tapaukset kolmion kolmannelle kulmalle $k+1$, siis kun $0 \leq k \leq n$, niin kaikkien erilaisten $(n+3)$-kulmion kolmiointien lukumäärä on $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k}$. Nyt huomataan, että luvut T_n toteuttavat saman yhtälön kuin Catalanin luvut lauseessa 3.10. Edelleen on määritelty, että $T_0 = 1 = C_0$. Voidaan siis päätellä, että kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$ pätee $T_n = C_n$. $\square$

Viitteet

[1] R. B. J. T. Allenby & A. Slomson: *How to Count: An Introduction to Combinatorics, Second Edition*, sarjassa K. H. Rosen (toim.): *Discrete Mathematics and Its Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2011.