Toisen asteen käyrät ja tasot

Pro Gradu

Saara Sadinmaa
Matemaattisten tieteiden koulutusohjelma
Oulun yliopisto

Kevät 2020

Sisältö

1 Johdanto

Pro gradu -tutkielmani käsittelee toisen asteen käyriä ja tasoja. Tutkielmassa lähteenä on käytetty pääasiassa teosta [1].

Tutkielman esitiedoissa määritellään tarvittavat kaksiulotteinen ja kolmiuloitteinen koordinaatisto. Lisäksi määritellään karakteristiseen yhtälöön liittyvät käsitteet.

Tutkielma jakaantuu käyrien ja pintojen käsittelyyn. Ensimmäiseksi määritellään toisen asteen käyrä, joka kuvaa toisen asteen yhtälön kaksiulotteisessa avaruudessa. Käyrän yhtälöstä määritetään ominaisarvot ja niiden avulla yhtälö sievennetään kanoniseen muotoon. Käyrät luokitellaan hyperbeleiksi, ellipseiksi ja paraabeleiksi.

Toisen asteen käyrien jälkeen käsitellään tasoja. Toisen asteen tasot kuvataan pintoina kolmiulotteisessa avaruudessa. Myös pintojen yhtälöistä määritetään ominaisarvot ja pintojen yhtälöitä sievennetään kanoniseen muotoon. Toisen asteen pinnat luokitellaan ellipsoideiksi, hyperboloideiksi ja paraboloideiksi.

2 Esitiedot

2.1 Koordinaatisto

2.1.1 Kaksiulotteinen koordinaatisto

Määritelmä 2.1. Vaakasuuntainen x-akseli ja pystysuuntainen y-akseli muodostavat tason $\mathbb{R}^2$ standardin karteesisen eli suorakulmaisen koordinaatiston K. Pisteen $v \in \mathbb{R}^2$ koordinaatteja koordinaatistossa K merkitään x:llä ja y:llä eli $v = (x, y)$.

Lause 2.2. *Olkoon K' koordinaatisto, joka saadaan siirtämällä K pisteeseen (a, b). Tällöin pisteen $v = (x, y)$ koordinaatit koordinaatistossa K' ovat (x', y'), missä*

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b. \end{aligned}$$

Todistus. Koska x'-akseli koordinaatistossa K' on x-akselin suuntainen, y'-akseli on y-akselin suuntainen ja koordinaatiston K' origo on pisteessä (a, b), niin pistettä $v = (x, y)$ vastaava vektori koordinaatistossa K' on

$$(x', y') = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b).$$

□

Lause 2.3. *Olkoon K' koordinaatisto, joka saadaan kiertämällä standardikoordinaatistoa K kulman α verran vastapäivään. Tällöin pisteen $v = (x, y)$ koordinaatit koordinaatistossa K' ovat*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha = l_1 x + m_1 y \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha = l_2 x + m_2 y. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $v = (1, 0)$. Nyt pisteen v projektio suoralle x' on $\cos\alpha$ ja projektio suoralle y' on $-\sin\alpha$. Näin ollen

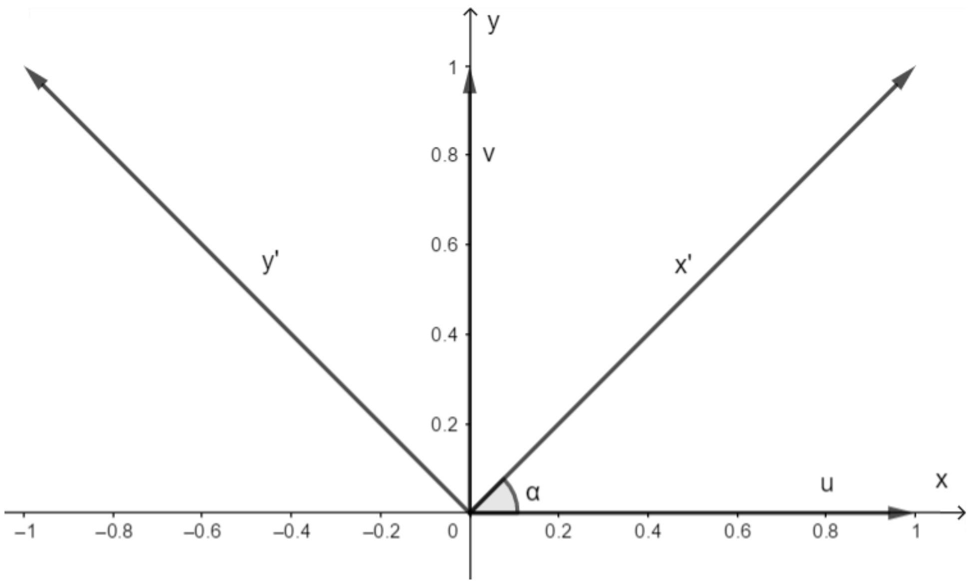
$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha \\ y' &= -\sin\alpha = -1 \cdot \sin\alpha + 0 \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

eli väite pätee.

Vastaavasti, jos $u = (0, 1)$, niin pisteen u projektio suoralle x' on $\sin\alpha$ ja projektio suoralle y' on $\cos\alpha$, joten

$$\begin{aligned} x' &= \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \sin\alpha \\ y' &= \cos\alpha = -0 \cdot \sin\alpha + 1 \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Siis väite pätee. Koska se pätee kantavektoreille v ja u, se pätee lineaarisuuden nojalla kaikille vektoreille $w = (x, y)$. □



Kuvassa on koordinaatisto K', joka on saatu kiertämällä standardikoordinaatistoa K kulman α verran vastapäivään.

Huomautus 2.4. Koordinaatisto K saadaan kiertämällä koordinaatiston K' akseleita kulman $-\alpha$ verran. Tällöin pätee $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ja $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Muodostetaan koordinaatisto K vaihtamalla koordinaatteja sijoittamalla α:n paikalle $-\alpha$:

$$x = x'\cos(-\alpha) + y'\sin(-\alpha) = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = -x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Sijoittamalla kertoimet l_1, l_2, m_1 ja m_2 saadaan

$$x = l_1x' + l_2y'$$
$$y = m_1x' + m_2y'.$$

2.1.2 Kolmiuloitteinen koordinaatisto

Määritelmä 2.5. Olkoon Ox, Oy, Oz suorakulmaisen koordinaatiston C akselit, jonka origo on pisteessä O ja $O'x, O'y, O'z'$ toisen suorakulmaisen koordinaatiston C' akselit, jonka origo on pisteessä O'. Oletetaan, että akseli $O'x'$ on yhdensuuntainen akselin Ox kanssa kuten myös $O'y'$ ja Oy sekä $O'z'$ ja Oz. Jos origon O' koordinaatit koordinaatistossa C ovat (a, b, c), saadaan

$$x' = x - a, y' = y - b, z' = z - c.$$

Koordinaatiston C akselien ja koordinaatiston C' akseleiden väliset kulmat ovat

Akselit	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

Merkitään koordinaatistojen yksikkövektoreita $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i'}, \mathbf{j'}, \mathbf{k'}$. Olkoon

$$\begin{aligned}
\mathbf{i'} &= l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k} \\
\mathbf{j'} &= l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k} \\
\mathbf{k'} &= l_3\mathbf{i} + m_3\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Kun pisteen M koordinaatit koordinaatistossa C ovat (x, y, z) ja koordinaatistossa C' ovat (x', y', z') saadaan

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i'} + y'\mathbf{j'} + z'\mathbf{k'}$$

ja edelleen

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'(l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}) + y'(l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k}) + z'(l_3\mathbf{i} + m_3\mathbf{j} + n_3\mathbf{k})$$

tai

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (l_1x' + l_2y' + l_3z')\mathbf{i} + (m_1x' + m_2y' + m_3z')\mathbf{j} + (n_1x' + n_2y' + n_3z')\mathbf{k}.$$

Koska vektoreiden koordinaatit ovat yksikäsitteiset, edellä olevista yhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned}
x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\
y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\
z &= n_1x' + n_2y' + n_3z'.
\end{aligned}$$

Koordinaatit voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\
y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\
z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3.
\end{aligned}$$

Koordinaatiston C' koordinaatit saadaan koordinaatiston C koordinaateista

$$\begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z \\ y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \\ z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z. \end{aligned}$$

Kertoimet $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2$ ja n_3 täyttävät useita ehtoja. Koska **i'**, **j'** ja **k'** ovat yksikkövektoreita, seuraa

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Koska **i'**, **j'** ja **k'** ovat parittain ortogonaalisia, skalaaritulojen **i'j'**, **i'k'** ja **j'k'** täytyy hävitä. Siten

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Kun **i'**, **j'**, **k'** on saman kätinen kuin $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, pätee

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Kun **i'**, **j'**, **k'** on eri kätinen kuin $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, pätee

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = -1.$$

Kun origo O' on pisteessä (a, b, c) saadaan

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' + a \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' + b \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' + c. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} x' &= l_1 x + l_2 y + l_3 z - a \\ y' &= m_1 x + m_2 y + m_3 z - b \\ z' &= n_1 x + n_2 y + n_3 z - c. \end{aligned}$$

2.2 Ominaisarvoyhtälö

Määritelmä 2.6. Reaalisen $n \times n$ -matriisin A karakteristinen polynomi on

$$c_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin $c_A(\lambda)$ nollakohdat eli yhtälön $c_A(\lambda) = 0$ ratkaisut.

2.3 Definiittisyys

Määritelmä 2.7. Neliömatriisi A on symmetrinen, jos $A^T = A$, missä A^T on matriisin A transpoosi.

Esimerkki 2.8. Matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

on symmetrinen, koska

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

eli $A^T = A$.

Määritelmä 2.9. Neliömatriisi on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos se on symmetrinen ja sen kaikki ominaisarvot ovat aidosti positiivisia.

Huomautus 2.10. Neliömatriisi on negatiivisesti definiitti, jos ja vain jos se on symmetrinen ja sen kaikki ominaisarvot ovat aidosti negatiivisia.

Huomautus 2.11. Neliömatriisi on positiivisesti semidefiniitti, jos ja vain jos se on symmetrinen ja sen kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia.

3 Toisen asteen käyrät

3.1 Käyrän yhtälö

Määritelmä 3.1. Toisen asteen käyrän yleinen yhtälö on

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Vasen puoli yhtälöstä sisältää neliömuodon $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, lineaarisen muodon $2Dx + 2Ey$ ja vakion F.

Huomautus 3.2. Jos ensimmäistä astetta olevat termit puuttuvat, yhtälön vasen puoli ei muutu, jos termit x ja y korvataan termeillä $-x$ ja $-y$. Tällöin piste (x, y) vastaa pistettä $(-x, -y)$. Siten käyrä on symmetrinen origon suhteen. Sanotaan, että käyrä on origokeskeinen.

3.2 Käyrän yhtälön kanoninen muoto

Määritelmä 3.3. Neliömuoto on kuvaus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

missä $A, B, C \in \mathbb{R}$. Sen sanotaan olevan kanonista muotoa, jos $B = 0$.

Lause 3.4. *Olkoon Φ neliömuoto*

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Tällöin on olemassa sellainen koordinaatisto K', missä Φ on kanonista muotoa eli

$$\Phi(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Koordinaatisto K' saadaan kiertämällä standardikoordinaatistoa K kulman α verran jollekin $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Todistus. Oletetaan, että tällainen koordinaatisto K' on olemassa. Tällöin yhtälö $\Phi(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ pätee, missä $x = l_1 x' + l_2 y'$ ja $y = m_1 x' + m_2 y'$. Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$(Ax + By)x + (Bx + Cy)y = \lambda_1 x' x' + \lambda_2 y' y'.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' \\ y &= m_1 x' + m_2 y', \end{aligned}$$

joten

$$
\begin{aligned}
Ax + By &= A(l_1x' + l_2y') + B(m_1x' + m_2y') \\
&= x'(Al_1 + Bm_1) + y'(Al_2 + Bm_2)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
Bx + Cy &= B(l_1x' + l_2y') + C(m_1x' + m_2y') \\
&= x'(Bl_1 + Cm_1) + y'(Bl_2 + Cm_2).
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan

$$
\begin{aligned}
x' &= l_1x + m_1y \\
y' &= l_2x + m_2y
\end{aligned}
$$

yhtälön oikealle puolelle

$$
\begin{aligned}
x'x' &= (l_1x + m_1y)x' \\
y'y' &= (l_2x + m_2y)y'.
\end{aligned}
$$

Tällöin saadaan yhtälö muotoon

$$
\begin{aligned}
&(Al_1 + Bm_1)xx' + (Bl_1 + Cm_1)yx' + (Al_2 + Bm_2)xy' + (Bl_2 + Cm_2)yy' \\
&= \lambda_1 l_1 xx' + \lambda_1 m_1 yx' + \lambda_2 l_2 xy' + \lambda_2 m_2 yy'
\end{aligned}
$$

Siten kertoimille pätee

$$
\begin{aligned}
Al_1 + Bm_1 &= \lambda_1 l_1 \\
Bl_1 + Cm_1 &= \lambda_1 m_1
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
Al_2 + Bm_2 &= \lambda_2 l_2 \\
Bl_2 + Cm_2 &= \lambda_2 m_2.
\end{aligned}
$$

Sievennetään kertoimet muotoon

$$
\begin{aligned}
Al + Bm &= \lambda l \\
Bl + Cm &= \lambda m.
\end{aligned}
$$

Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$
\begin{cases}
(A - \lambda)l + Bm = 0 \\
Bl + (C - \lambda)m = 0
\end{cases}
.
$$

Yhtälöryhmällä on nollasta eroava ratkaisu $(l, m) \neq (0, 0)$, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

eli

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöstä λ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC-B^2)}}{2}.$$

Koska

$$(A+C)^2 - 4(AC-B^2) = (A-C)^2 + 4B^2 \geq 0,$$

yhtälöllä on ainoastaan reaalisia juuria. Juuret λ_1 ja λ_2 ovat yhtälön ominaisarvot. Jos diskriminantti on

$$(A-C)^2 + 4B^2 = 0,$$

yhtälöllä on yksi ratkaisu eli $\lambda_1 = \lambda_2$. Yhtälöllä on puolestaan kaksi toisistaan poikkeavaa ratkaisua, jos diskriminantti

$$(A-C)^2 + 4B^2 > 0.$$

Tutkitaan ensin tapausta, jossa $(A-C)^2 + 4B^2 > 0$. Tällöin $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Jos sijoitetaan $\lambda = \lambda_1$ yhtälöryhmään, saadaan ei-triviaali ratkaisu ja muut ratkaisut ovat sen monikertoja. Samoin käy, jos $\lambda = \lambda_2$.

Olkoon $l = p$ ja $m = q$ yhtälöryhmän ei-triviaali ratkaisu, kun $\lambda = \lambda_1$. Tällöin muut ratkaisut ovat pisteiden $(0, 0)$ ja (p, q) kautta kulkevalla suoralla.

Olkoon $l = r$ ja $m = s$ on yhtälöryhmän ei-triviaali ratkaisu, kun $\lambda = \lambda_2$. Tällöin muut ratkaisut ovat pisteiden $(0, 0)$ ja (r, s) kautta kulkevalla suoralla. Kummassakin tapauksessa ratkaisua kutsutaan normalisoiduksi, jos neliöiden summa on yksi.

Jotta nämä ratkaisut määrittäisivät koordinaatiston K', on vektoreiden (p, q) ja (r, s) oltava kohtisuorassa. Täytyy osoittaa, että $pr + qs = 0$. Nyt

$$\begin{cases} (Ap+Bq)r + (Bp+Cq)s &= \lambda_1(pr+qs) \\ (Ar+Bs)p + (Br+Cs)q &= \lambda_2(pr+qs). \end{cases}$$

Yhtälöiden vasemmat puolet ovat yhtä suuret. Siten vähentämällä yhtälöt toisistaan, saadaan $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(pr + qs)$. Koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tulon nollasäännön mukaan $pr + qs = 0$.Siten ratkaisut määräävät suorakulmaisen koordinaatiston K'. Kiertokulma α saadaan selville normalisoidusta ratkaisusta.

Tällöin $A = C$ ja $B = 0$, yhtälö on jo kanonisessa muodossa ja $\lambda_1 = \lambda_2 = A = C$. Sijoitetaan $\lambda = \lambda_1$ yhtälöryhmään, jolloin kaikki kertoimet häviävät ja siten jokainen vektori (l, m) toteuttaa yhtälöryhmän. Siten mikä tahansa suorakulmainen koordinaatisto K' toteuttaa väitteen.

□

Esimerkki 3.5. Sievennetään yhtälö

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20$$

kanoniseen muotoon. Nyt $A = 17$, $B = 6$ ja $C = 8$. Sijoitetaan kertoimet ominaisarvoyhtälöön

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$

jolloin

$$\lambda^2 - (17 + 8)\lambda + (17 \cdot 8 - 6^2) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

Ratkaistaan ominaisarvot toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\lambda = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2}.$$

Ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = \frac{25 + 15}{2} = 20$$

ja

$$\lambda_2 = \frac{25 - 15}{2} = 5.$$

Näin ollen

$$20x'^2 + 5y'^2 = 20$$

tai

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{1}{4}y'^2 = 1.$$

Yhtälö kuvautuu ellipsiksi, jonka puoliakselit ovat 2 ja 1. Selvitetään seuraavaksi ellipsin paikka määrittämällä koordinaatisto, jossa ellipsi on kanonisessa muodossa. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}(A-\lambda)l + Bm &= 0\\ Bl + (C-\lambda)m &= 0.\end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöryhmään kertoimet

$$\begin{aligned}(17-\lambda)l + 6m &= 0\\ 6l + (8-\lambda)m &= 0\end{aligned}$$

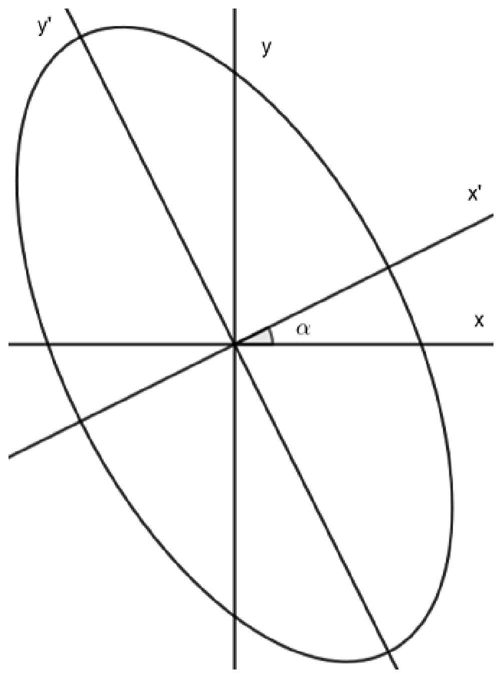
ja ominaisarvo $\lambda_1 = 20$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}-3l + 6m &= 0\\ 6l - 12m &= 0.\end{aligned}$$

Yhtälöryhmän yksi ratkaisu on $l = 2, m = 1$. Normittamalla ratkaisu saadaan $l_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ratkaistaan toinen yhtälöryhmä sijoittamalla ominaisarvo $\lambda_2 = 5$.

$$\begin{aligned}12l + 6m &= 0\\ 6l + 3m &= 0.\end{aligned}$$

Nyt $l_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $m_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Näin ollen uudet koordinaattiakselit on saatu kiertämällä xy-koordinaatistoa kulman $\cos\alpha = l_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ eli $\tan\alpha = \frac{m_1}{l_1} = \frac{1}{2}$ verran.



Vastaavat koordinaattimuutokset ovat

$$x' = \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, y' = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}.$$

Kiertämällä suorakulmaista koordinaatistoa saatiin uusi suorakulmainen koordinaatisto ja kahdesta muuttujasta muodostuva toisen asteen yhtälö sievennettiin kanoniseen muotoon. Vaihtamalla keskenään uudet koordinaattiakselit saadaan toinen kanoninen muoto, jossa muuttujien roolit vaihtuvat, mutta ominaisarvot pysyvät ennallaan.

Tarkastellaan seuraavaksi, onko olemassa suorakulmainen koordinaatisto, jonka origo ja yksikkö ovat muuttumattomat ja joiden suhteen alkuperäinen toisen asteen yhtälö saa vielä uuden kanonisen muodon.

Lause 3.6. *Neliömuodon kanonisen muodon kertoimet λ_1 ja λ_2 ovat yksikäsitteiset.*

Todistus. Olkoon

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Olkoot λ_1 ja λ_2 lauseen (3.4) mukaiset ominaisarvot ja K' vastaava koordinaatisto. Tällöin

$$\Phi(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Oletetaan, että $\lambda_1 \leq \lambda_2$, jolloin

$$\lambda_1(x'^2 + y'^2) \leq \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \leq \lambda_2(x'^2 + y'^2).$$

Koska $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$, niin yksikköympyrällä

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

pätee

$$\lambda_1 \leq \Phi(x', y') \leq \lambda_2.$$

Lisäksi, kun $x' = 1$ ja $y' = 0$, niin $\Phi(x', y') = \lambda_1$ ja kun $x' = 0$ ja $y' = 1$, niin $\Phi(x', y') = \lambda_2$. Näin ollen $\Phi(S^1) = (\lambda_1, \lambda_2)$. Jos olisi olemassa kanoninen muoto, jonka kertoimet ovat $\mu_1 \leq \mu_2$, niin $\Phi(S^1) = (\mu_1, \mu_2)$, mikä on ristiriita, jos $(\mu_1, \mu_2) \neq (\lambda_1, \lambda_2)$. □

Lause 3.7. *Olkoot λ_1 ja λ_2 neliömuodon Φ ominaisarvot. Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin kanonisen muodon koordinaatisto on akselien vaihtoa vaille yksikäsitteinen. Jos $\lambda_1 = \lambda_2$, niin Φ on kanonisessa muodossa jokaisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa.*

Todistus. Olkoon

$$\Phi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Olkoot λ_1 ja λ_2 lauseen (3.4) mukaiset ominaisarvot ja K' vastaava koordinaatisto. Tällöin

$$\Phi(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Oletetaan $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Jos $x' \neq 0$, niin

$$\Phi(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 < \lambda_2(x'^2 + y'^2) = \lambda_2.$$

Toisin sanoen, kun $x' \neq 0$, niin

$$\Phi(x',y') < \lambda_2.$$

Ainoat yksikköympyrän pisteet, missä $\Phi(x',y')$ saa suurimman arvonsa λ_2, ovat pisteet $x' = 0, y' = \pm 1$, jotka määrittävät suorakulmaisen koordinaatiston. Jos $\lambda_1 = \lambda_2$, muoto on kanoninen kaikissa suorakulmaisissa koordinaatistoissa. Jos $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ja

$$\Phi(x',y') = \lambda(x'^2 + y'^2)$$

on jossain suorakulmaisessa koordinaatistossa, silloin mielivaltaisen kierron jälkeen, $(x',y') = (x'',y'')$ ja $x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$. Siten $\Phi(x',y')$ säilyttää kanonisen muodon. □

Suorakulmaisen koordinaatiston muuttaminen toiseksi suorakulmaiseksi koordinaatistoksi, jolla on sama origo ja yksikkö, saadaan korvaamalla

$$x = l_1 x' + l_2 y', y = m_1 x' + m_2 y'.$$

Nyt $l_1^2 + l_2^2 = 1 = m_1^2 + m_2^2, l_1 m_1 + l_2 m_2 = 0$. Determinantin

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}$$

arvo on $+1$, jos akselien suunta säilyy ja -1, jos akselien suunta muuttuu. Olkoon

$$\Phi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

mielivaltainen toisen asteen muoto ja

$$x = l_1 x' + l_2 y', y = m_1 x' + m_2 y'$$

on suorakulmaisen koordinaatiston ortogonaalinen muutos. Nyt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

Kaksi muotoa voidaan sieventää samaan kanoniseen muotoon. Yhtälöillä on samat ominaisarvot λ_1 ja λ_2. Ominaisarvoyhtälöt ovat

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0$$

ja

$$\lambda^2 - (A' + C')\lambda + (A'C' - B'^2) = 0.$$

Koska yhtälöiden ratkaisut eli ominaisarvot λ_1, λ_2 ovat samat, yhtälöiden täytyy olla identtiset. Siten

$$\begin{aligned} A' + C' &= A + C \\ A'C' - B'^2 &= AC - B^2. \end{aligned}$$

Nähdään, että kertoimet $A+C$ ja $AC-B^2$ säilyvät ennallaan, kun koordinaatistoa muutetaan. Näitä lukuja kutsutaan invarianteiksi suhteessa tällaisiin koordinaattimuunnoksiin.

Määritelmä 3.8. Invariantia $AC - B^2$ kutsutaan toisen asteen yhtälön diskriminantiksi. Diskriminanttia merkitään symboolilla δ. Diskriminantti on

$$\delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Huomautus 3.9. Koska λ_1 ja λ_2 ovat yhtälön

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0$$

juuret, pätee

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2.$$

Todistus. Yhtälön

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0$$

juuret ovat

$$\lambda_1 = \frac{(A + C) - \sqrt{(A + C)^2 - 4 \cdot (AC - B^2)}}{2}$$

ja

$$\lambda_2 = \frac{(A+C) + \sqrt{(A+C)^2 - 4\cdot(AC-B^2)}}{2}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2 &= \frac{(A+C) - \sqrt{(A+C)^2 - 4\cdot(AC-B^2)}}{2} \cdot \frac{(A+C) + \sqrt{(A+C)^2 - 4\cdot(AC-B^2)}}{2} \\
&= (\frac{A+C}{2})^2 - (\frac{\sqrt{(A+C)^2 - 4\cdot(AC-B^2)}}{2})^2 \\
&= \frac{(A+C)^2}{4} - \frac{(A+C)^2 - 4\cdot(AC-B^2)}{4} \\
&= AC - B^2.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\delta = AC - B^2 = \lambda_1\lambda_2.$$

□

3.3 Käyrien luokittelu

Määritelmä 3.10. Neliömuotoa kutsutaan elliptiseksi, jos sen ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat molemmat nollasta eroavia ja saman merkkisiä. Kun ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erimerkkisiä, neliömuoto on hyberbolinen. Kun toinen ominaisarvoista on nolla, neliömuoto on parabolinen.

Huomautus 3.11. Määritelmän (3.9) nojalla $\delta = \lambda_1\lambda_2$, niin elliptisessä tapauksessa $\delta > 0$, hyperbolisessa tapauksessa $\delta < 0$ ja parabolisessa tapauksessa $\delta = 0$.

Huomautus 3.12. Oletetaan, että $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ja $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Tällöin $\Phi < 0$ on kaikille origosta poikkeaville pisteille (x, y). Muotoa kutsutaan negatiivisesti definiitiksi. Yksikköympyrällä negatiivisesti definiitit arvot ovat negatiivisia ominaisarvoja.

Huomautus 3.13. Jokainen elliptinen muoto

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

ja

$$\delta = AC - B^2 > 0$$

on joko positiivisesti tai negatiivisesti definiitti. Jotta varmistutaan kumpi muoto on kyseessä, riittää laskea sen arvo jossain pisteessä.
Pisteessä $(x = 1, y = 0)$ arvo on A. Näin ollen elliptinen muoto on positiivisesti definiitti, jos $A > 0$ ja negatiivisesti definiitti, jos $A < 0$.

Esimerkki 3.14. Ratkaistaan käyrän $\Phi = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ ominaisarvot. Nyt $A = 5$,$B = -2$ ja $C = 5$. Sijoitetaan kertoimet ominaisarvoyhtälöön

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$

jolloin

$$\lambda^2 - (5 + 5)\lambda + (5 \cdot 5 - (-2)^2) = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 7$. Tällöin $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 21 > 0$. Käyrä on elliptistä muotoa. Se on positiivisesti definiitti, koska $A = 5 > 0$. Yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ pätee $3 \leq 5x^2 - 4xy + 5y^2 \leq 7$.

Esimerkki 3.15. Ratkaistaan käyrän $\Phi = x^2 - 2xy + y^2$ ominaisarvot. Nyt $A = 1$, $B = -1$ ja $C = 1$. Sijoitetaan kertoimet ominaisarvoyhtälöön

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$

jolloin

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Ominaisarvot ovat $\lambda = 0$ ja $\lambda = 1$. Näin ollen $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Käyrä on siis parabolista muotoa, koska toinen sen ominaisarvoista on nolla. Se on positiivinen, kun $x \neq y$ ja nolla, kun $x = y$. Yksikköympyrällä pätee

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \leq 2.$$

Lause 3.16. *Hyberboliselle muodon ominaisarvot ovat $\lambda_1 < 0$ ja $\lambda_2 > 0$. Koska yksikköympyrällä arvot ovat λ_1 ja λ_2 välillä, hyperbolinen muoto saa positiivisia ja negatiivisia arvoja.*

Esimerkki 3.17. Yhtälö $5x^2 - 4xy + 5y^2 = -1$ ei määrittele oikeaa käyrää, koska sen vasen puoli on positiivisesti definiitti.

Huomautus 3.18. Nyt

$$x = l_1x' + l_2y', y = m_1x' + m_2y'$$

määrittää kierron, joka vie suorakulmaisen koordinaatiston kanoniseen koordinaatistoon. Siten

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2$$

ja

$$\begin{aligned}2Dx + 2Ey &= 2D(l_1x' + l_2y') + 2E(m_1x' + m_2y') \\ &= 2(Dl_1 + Em_1)x' + 2(Dl_2 + Em_2)y' \\ &= 2\mu_1x' + 2\mu_2y'.\end{aligned}$$

Siten uudessa koordinaatistossa käyrä kuvataan yhtälöllä

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2\mu_1x' + 2\mu_2y' + F = 0.$$

Yhtälön edelleen sieventäminen riippuu yhtälön luonteesta.

Olkoon $\delta = AC - B^2 \neq 0$. Koska $\delta = \lambda_1\lambda_2$, pätee $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ ja yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\lambda_1(x'^2 + 2\frac{\mu_1}{\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{\mu_2}{\lambda_2}y') = -F.$$

Siten

$$\lambda_1(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2})^2 = -F + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}.$$

Koordinaatistoa siirtämällä yhtälöiden

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}$$

ja

$$y'' = y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

mukaisesti, saadaan koordinaatisto, jossa käyrä kuvataan yhtälöllä

$$\lambda_1x''^2 + \lambda_2y''^2 = H.$$

Vakiolla H merkitään yhtälön oikeaa puolta $-F + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$.

Olkoon λ_1 ja λ_2 saman merkkisiä. Jos $H \neq 0$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{x''^2}{H/\lambda_1} + \frac{y''^2}{H/\lambda_2} = 1.$$

Jos $H > 0$ ja $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, käyrä on ellipsi, jonka puoliakselit ovat $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$ ja $b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}$. Jos $H = 0$ ja $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, yhtälö pätee ainoastaan silloin, kun $x'' = 0, y'' = 0$. Tällöin kyseessä on degeneroituneen ellipsin yhtälö. Jos $H < 0$ ja $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua. Tässä tapauksessa kyse on imaginaarisesta ellipsistä.

Ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erimerkkisiä. Selkeyden vuoksi, olkoon $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 < 0$. Jos $H > 0$, yhtälö kuvaa hyberbeliä, joka leikkaa x-akselin ja jolla on olemassa puoliakselit $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$ ja $b = \sqrt{\frac{-H}{\lambda_2}}$. Jos $H < 0$, niin hyberbeli leikkaa y-akselin.

Jos $H = 0$, niin yhtälö määrittelee kaksi suoraa, jotka kulkevat origon kautta. Yhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa lineaaristen tekijöiden tulona

$$(\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y'')(\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y'') = 0$$

ja käyrä koostuu suorista $\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$ ja $\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$. Tällöin kyseessä on degeneroitunut hyberbeli.

Kun $\delta = 0$, toinen ominasarvoista λ_1 ja λ_2 on nolla. Olkoon $\lambda_1 \neq 0$ ja $\lambda_2 = 0$. Tällöin yhtälö on muotoa

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + F = 0$$

eli

$$\lambda_1(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2 y' + (F - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}) = 0.$$

Sijoittamalla $K = F - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}$ saadaan

$$\lambda_1(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2 y' + K = 0.$$

Jos $\mu_2 \neq 0$, niin

$$\lambda_1(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2(y' + \frac{K}{2\mu_2}) = 0.$$

Siirtäminen

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, y'' = y' + \frac{K}{2\mu_2}$$

tuottaa koordinaatiston, jonka suhteen yhtälö on parabelin kanooninen muoto:

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' = 0.$$

Jos $\mu_2 = 0$, siirron $x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, y' = y''$ avulla voidaan kirjoittaa yhtälö kanooniseen muotoon

$$\lambda_1 x''^2 + K = 0.$$

Nyt olkoon $\lambda_1 > 0$. Jos $K < 0$, niin saadaan yhdensuuntaiset suorat

$$\sqrt{\lambda_1} x'' + \sqrt{-K} = 0, \sqrt{\lambda_1} x'' - \sqrt{-K} = 0.$$

Jos $K = 0$, suorat ovat yhtenevät. Jos $K > 0$, yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja ja suorat ovaat imaginaariset yhdensuuntaiset suorat. Kaikissa tapauksissa kyseessä on degeneroitunut parabeli. Täten, jos $\delta = 0$, niin

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

on parabelin yhtälö.

Yhteenvetona todetaan, että yhtälö

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

kuvautuu ellipsinä, kun $\delta > 0$, hyberbelinä, kun $\delta < 0$ ja parabelinä, kun $\delta = 0$ sisältäen tapaukset degeneroituneesta ja imaginaarisesta ellipsistä, degeneroituneesta hyberbelistä ja parabelistä.

Määritelmä 3.19. Toisen asteen käyrän keskipiste on sellainen piste S, mihin siirretyssä koordinaatistossa käyrän yhtälö on

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H.$$

Olkoon

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

toisen asteen käyrän yhtälö. Siirto

$$\tilde{x} = x - x_0, \tilde{y} = y - y_0$$

muuttaa koordinaatiston origon pisteeseen (x_0, y_0). Jos sijoitetaan x ja y paikalle $\tilde{x} + x_0$ ja $\tilde{y} + y_0$ saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ &= A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + \tilde{F}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= Ax_0 + By_0 + D\\ \tilde{E} &= Bx_0 + Cy_0 + E\\ \tilde{F} &= Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.\end{aligned}$$

Yhtälön oikea puoli kuvaa käyrän uudessa koordinaatistossa. Keskipisteen määritelmä tarkoittaa, että (x_0, y_0) on käyrän keskipiste, jos ja vain jos $\tilde{D}$ ja $\tilde{E}$ häviävät. Toisin sanoen, jos ja vain jos (x_0, y_0) toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0\\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0.\end{cases}$$

Yhtälöryhmän determinantti on

$$\delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}.$$

Jos $\delta \neq 0$, käyrällä on yksikäsitteinen keskipiste. Toisen asteen käyrä, jolla on yksikäsitteinen keskipiste, on keskipisteellinen käyrä. Käyrän keskipisteen koordinaatit ovat

$$x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2} = \frac{\begin{vmatrix} B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}, y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2} = \frac{\begin{vmatrix} D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= (Ax_0 + By_0 + D)x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_0 + (Dx_0 + Ey_0 + F)\\ &= Dx_0 + Ey_0 + F,\end{aligned}$$

joten

$$\tilde{F} = \frac{D\begin{vmatrix} B & D\\ C & E\end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A\\ E & B\end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}.$$

Osoittaja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\triangle = \begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix} = D\begin{vmatrix} B & D\\ C & E\end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A\\ E & B\end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix},$$

joka on yhtälön $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ vasemman puolen determinantti. Nyt

$$\tilde{F} = \frac{\triangle}{\delta}.$$

Täten, jos yhtälö $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$ määrittää keskeisen käyrän ($\delta \neq 0$), niin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \frac{\triangle}{\delta} = 0.$$

Sopivan kierron jälkeen saadaan yhtälö kanooniseen muotoon

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\triangle}{\delta} = 0.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kertoimen H arvo voidaan laskea suoraan yhtälöstä $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$ ilman koordinaatiston muuttamista eli $H = -\frac{\triangle}{\delta}$.

Kun $H = 0$, yhtälö

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

kuvautuu degeneroituneeksi käyräksi. Siten keskeinen toisen asteen käyrä on degeneroitunut, jos ja vain jos $\triangle = 0$.

Esimerkki 3.20. Olkoon käyrän yhtälö

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$

Päätellään, minkälaiseksi käyräksi yhtälö kuvautuu. Nyt

$$\delta = AC - B^2 = 4 \cdot 1 - (-2)^2 = 0$$

ja

$$\triangle = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$

eli

$$\triangle = -1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -225.$$

Siten yhtälö määrää ei-degeneroituneen parabelin. Ominaisarvo yhtälöt toisen asteen termit ovat $\lambda^2 - 5\lambda = 0$. Siten $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$ eli

$$\begin{cases} 5x^2 + 6\sqrt{5}y = 0 \\ 5x^2 - 6\sqrt{5}y = 0. \end{cases}$$

Tutkitaan parabelin luonnetta, joten täytyy etsiä koordinaatisto, jossa sen yhtälö on kanonisessa muodossa.

Kun pääsuoraa vastaava ominaisarvo on $\lambda_1 = 5$, saadaan

$$\begin{cases} -l - 2m = 0 \\ -2l - 4m = 0. \end{cases}$$

Yksi ratkaisu on $l = -2, m = 1$. Vektori $(-2, 1)$ muodostaa tylpän kulman x-akselin kanssa. Jos halutaan kiertää terävän kulman kautta, vaihdetaan pääsuorien roolit ja sijoitetaan $\lambda_2 = 5, \lambda_1 = 0$. Täten ratkaisu $(-2, 1)$ määrittää pääsuoran liittyvän $\lambda_2 = 5$. Normalisoimalla ratkaisu saadaan

$$l_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, m_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Siten pääsuora määritetään vektorilla $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Akselien asettaminen pääsuorien kanssa, täytyy kääntää koordinaatistoa kulman $\tan\alpha = \frac{m_1}{l_1} = 2$ verran. Vastaava koordinaatistomuutos on

$$x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}.$$

Uudessa koordinaatistossa yhtälö on muodossa

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0.$$

Huomataan, että toisen asteen termien kertoimet $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$ on saatu suoraan alkuperäisestä yhtälöstä ja vakiotermiin 7 ei ole vaikuttanut koordinaatistomuutos, joten riitti tutkia vaikutusta lineaarisiin termeihin.

Kirjoitetaan yhtälö uudelleen muodossa

$$5(y' - \frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 6\sqrt{5}(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}) = 0,$$

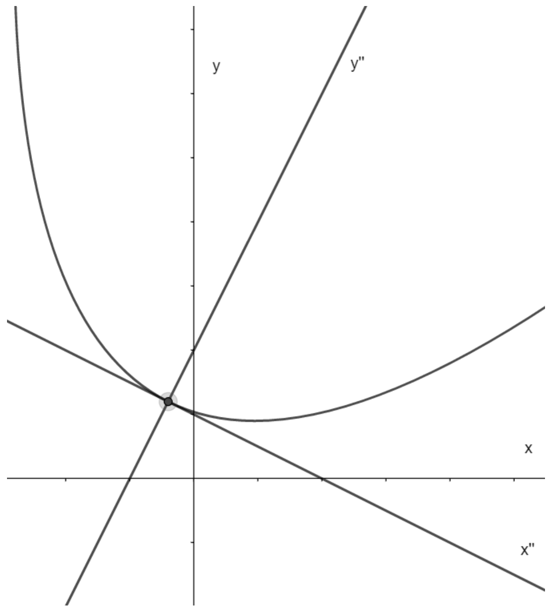
jolloin nähdään käännös

$$x' = x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}, y' = y'' + \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Saadaan kanoniseksi muodoksi

$$5y''^2 - 6\sqrt{5}x'' = 0.$$

Koordinaatiston origo sijaitsee parabelin huipussa. Sen koordinaatit $x'y'$-koordinaatistossa ovat $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ ja xy-koordinaatistossa $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{5})$.



Esimerkki 3.21. Olkoon käyrän yhtälö

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Nyt

$$\delta = AC - B^2 = 5 \cdot 5 - (4)^2 = 9$$

ja

$$\triangle = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix}$$

eli

$$\triangle = -9 \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -81.$$

Näin ollen, käyrä on ellipsi. Toisen asteen termien ominaisarvoyhtälö on

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

joten ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1.$$

Siten yhtälön kanoninen muoto on

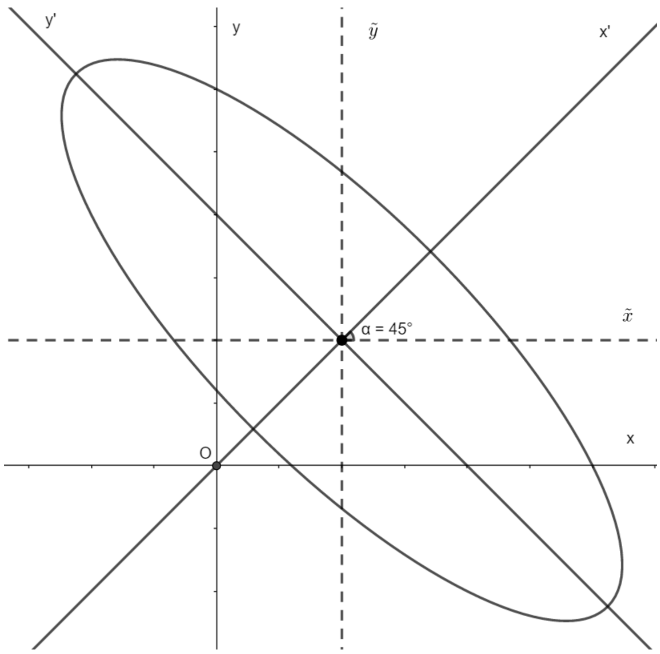
$$9x^2 + y^2 - 9 = 0$$

tai

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Täten käyrä on oikea ellipsi, jonka puoliakselit ovat 3 ja 1. Keskipisteen yhtälöt ovat

$$5x_0 + 4y_0 - 9 = 0,$$
$$4x_0 + 5y_0 - 9 = 0.$$



Täten keskipiste on pisteessä $(x_0 = 1, y_0 = 1)$. Akseleiden käännös keskipisteessä vaikuttaa korvaamalla $x = \tilde{x} + 1, y = \tilde{y} + 1$. Käyrän yhtälö saadaan muotoon

$$5\tilde{x}^2 + 8\tilde{x}\tilde{y} + 5\tilde{y}^2 - 9 = 0.$$

Siten ominaisarvoa $\lambda_1 = 9$ vastaava pääsuora on löydetty. Nyt sijoitetaan yhtälöön

$$\begin{aligned}(A-\lambda)l + Bm &= 0\\ Bl + (C-\lambda)m &= 0\end{aligned}$$

kertoimet $A = 5, B = 4, C = 5, \lambda = \lambda_1 = 9$. Täten saadaan

$$\begin{aligned}-4l + 4m &= 0,\\ 4l - 4m &= 0.\end{aligned}$$

Jälkimmäisen yhtälön yksi ratkaisu on $l = 1, m = 1$. Nyt $\tilde{x}$-akselin ja vektorin $(l, m) = (1, 1)$ määrittämän pääsuoran välinen α-kulma toteuttaa suhteen $\tan = \frac{m}{l} = 1$. Täten $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Jotta saadaan koordinaatisto, johon nähden käyrän yhtälö on kanoninen, koordinaatistoa on käännettävä 45 astetta. Koordinaatistomuunnos on

$$\tilde{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \tilde{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Käyrän yhtälön kanoninen muoto on

$$9x'^2 + y'^2 - 9 = 0.$$

4 Toisen asteen pinnat

4.1 Pinnan yhtälö

Määritelmä 4.1. Toisen asteen pinnan yleinen yhtälö on

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Vasen puoli yhtälöstä sisältää neliömuodon $Ax^2 + By^2 + Cz^2 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, lineaarisen muodon $2Gx + 2Hy + 2Kz$ ja vakiotermin L.

4.2 Pinnan yhtälön kanoninen muoto

Lause 4.2. *Kirjoitetaan toisen asteen pinnan yleinen yhtälö muotoon*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = H.$$

Yhtälön vasen puoli ei muutu, jos (x, y, z) korvataan $(-x, -y, -z)$. Näin ollen, jos piste (x, y, z) on pinnan piste, myös piste $(-x, -y, -z)$ on pinnan piste. Tässä tapauksessa origon sanotaan olevan pinnan keskipiste.

Lause 4.3. *Yhtälön vasen puoli*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

on homogeeninen toisen asteen polynomi, koska kaikki sen termit ovat toista astetta. Polynomia kutsutaan neliömuodoksi, jolla on kolme muuttujaa x, y ja z.

Sievennetään pinnan yhtälön yleinen muoto kanoniseksi muodoksi. Määritetään kertoimet $l_1, l_2, \ldots, n_3$ yhtälöistä

$$\begin{aligned} x' &= l_1x + m_1y + n_1z \\ y' &= l_2x + m_2y + n_2z \\ z' &= l_3x + m_3y + n_3z, \end{aligned}$$

siten, että ne toteuttavat yhtälön

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \end{aligned}$$

missä muuttujat x, y, z on numeroitu $1, 2, 3$ ja indeksit i, j vakiossa a_{ij} osoittavat, että kerroin on i:s muuttuja ja j:s muuttuja. Yhtälön oikeaa puolta kutsutaan kanoniseksi muodoksi.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen neliömuoto voidaan esittää kanonisessa muodossa. Oletetaan, että kertoimet $l_1, l_2, \ldots, n_3$ on jo löydetty. Esitetään yhtälö muodossa

$$\begin{aligned}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)z \\ = \lambda_1 x'x' + \lambda_2 y'y' + \lambda_3 z'z'.\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z =&(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)x' \\ &+ (a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2)y' \\ &+ (a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3)z',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z =&(a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)x' \\ &+ (a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2)y' \\ &+ (a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3)z',\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z =&(a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)x' \\ &+ (a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2)y' \\ &+ (a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3)z'.\end{aligned}$$

Käyttämällä yhtälöitä

$$\begin{aligned}x' &= l_1x + m_1y + n_1z \\ y' &= l_2x + m_2y + n_2z \\ z' &= l_3x + m_3y + n_3z,\end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned}x'x' &= l_1xx' + m_1yx' + n_1zx' \\ y'y' &= l_2xy' + m_2yy' + n_2zy' \\ z'z' &= l_3xz' + m_3yz' + n_3zz'\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 &= \lambda_1 l_1 \\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 &= \lambda_1 m_1 \\ a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 &= \lambda_1 n_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 &= \lambda_2 l_2\\ a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 &= \lambda_2 m_2\\ a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 &= \lambda_2 n_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 &= \lambda_3 l_3\\ a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 &= \lambda_3 m_3\\ a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3 &= \lambda_3 n_3.\end{aligned}$$

Näin ollen täytyy löytää kolme ratkaisua l_1, m_1, n_1, λ_1; l_2, m_2, n_2, λ_2 ja l_3, m_3, n_3, λ_3 yhtälöryhmästä

$$\begin{cases}a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n = \lambda l\\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n = \lambda m\\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n = \lambda n.\end{cases}$$

Kirjoitetaan yhtälöryhmä muotoon

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)l + a_{12}m + a_{13}n &= 0\\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)m + a_{23}n &= 0\\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)n &= 0.\end{cases}$$

Tällä yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu l, m, n jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Yhtälö on kolmatta astetta λ:n suhteen, joten täytyy löytää reaaliset juuret λ_1, λ_2 ja λ_3 ja ratkaista yhtälöryhmä juurilla $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ ja $\lambda = \lambda_3$.

Olkoon $\lambda = \lambda_1$ matriisin juuri. Jos sijoitamme $\lambda = \lambda_1$ yhtälöryhmään, saadaan epätriviaalit ratkaisu (l_1, m_1, n_1). Jos $\lambda = \lambda_2$ on yhtälön toinen juuri, saadaan toinen ratkaisu (l_2, m_2, n_2).

Lemma 4.4. *Jos λ_1 ja λ_2 ovat selvästi yhtälöryhmän juuret, siten vastaava ratkaisu on molemminpuolisesti ortogonaalinen eli*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Todistus. Huomataan, että (l_1, m_1, n_1) toteuttaa

$$\begin{aligned}a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 &= \lambda_1 l_1\\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 &= \lambda_1 m_1\\ a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 &= \lambda_1 n_1,\end{aligned}$$

ja (l_2, m_2, n_2) toteuttaa

$$\begin{aligned} a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 &= \lambda_2 l_2 \\ a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 &= \lambda_2 m_2 \\ a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 &= \lambda_2 n_2. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} a_{11}l_1l_2 + a_{12}m_1l_2 + a_{13}n_1l_2 &= \lambda_1 l_1 l_2 \\ a_{21}l_1m_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{23}n_1m_2 &= \lambda_1 m_1 m_2 \\ a_{31}l_1n_2 + a_{32}m_1n_2 + a_{33}n_1n_2 &= \lambda_1 n_1 n_2 \end{aligned}$$

saadaan

$$p = \lambda_1(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2).$$

Samoin, kun

$$\begin{aligned} a_{11}l_2l_1 + a_{12}m_2l_1 + a_{13}n_2l_1 &= \lambda_2 l_2 l_1 \\ a_{21}l_2m_1 + a_{22}m_2m_1 + a_{23}n_2m_1 &= \lambda_2 m_2 m_1 \\ a_{31}l_2n_1 + a_{32}m_2n_1 + a_{33}n_2n_1 &= \lambda_2 n_2 n_1 \end{aligned}$$

saadaan

$$q = \lambda_2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2).$$

Koska $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}$ ja $a_{23} = a_{32}$, selvästi pätee $p = q$ ja siten

$$\lambda_1(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = \lambda_2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2).$$

Täten

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0.$$

Koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$, seuraa $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$. □

Lause 4.5. *Yhtälön*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

juuret ovat reaalisia.

Todistus. Oletetaan, että yhtälöllä on kompleksinen juuri $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, missä $\beta \neq 0$. Koska yhtälön kertoimet ovat reaalisia, täytyy $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ myös olla yhtälön juuri. Selvästi epätriviaaliratkaisu $\lambda = \lambda_1 = \alpha + \beta o$ ei voi sisältää kolmea reaalilukua. Täten

$$l_1 = l + il', m_1 = m + im', n_1 = n + in'.$$

Koska $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ on λ_1 konjugaatti,

$$l_2 = l_1 = l + il', m_2 = m_1 = m + im', n_2 = n_1 = n + in'$$

on λ_2 liittyvä ratkaisukolmikko. Koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, saadaan

$$l^2 + l'^2 + m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 = 0.$$

Tällöin

$$l = 0, l' = 0, m = 0, m' = 0, n = 0, n' = 0$$

eli $l_1 = 0, m_1 = 0, n_1 = 0$, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että l_1, m_1, n_1 on epätriviaali ratkaisu. □

Määritelmä 4.6. Yhtälöä

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kutsutaan toisen asteen pinnan yhtälön

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

karakteristiseksi yhtälöksi. Yhtälön juuria λ_1, λ_2 ja λ_3 kutsutaan ominaisarvoiksi. Ominaisarvot ovat toisen asteen pinnan yhtälössä neliön kertoimia.

Esimerkki 4.7. Sievennetään toisen asteen pinnan yhtälö

$$7x^2 + 6y + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$$

kanoniseen muotoon. Nyt karakteristinen yhtälö on

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

tai $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$ ja $\lambda_3 = 9$. Siten pinnan kanoninen yhtälö on

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{2} = 1.$$

Pinta on ellipsoidi, jonka puoliakselit ovat $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3}$ ja $c = \sqrt{2}$. Täytyy löytää koordinaatisto, jossa pinta on kanonisessa muodossa. Nyt

$$\begin{aligned}(7-\lambda)l - 2m &= 0\\ -2l + (6-\lambda)m - 2n &= 0\\ -2m + (5-\lambda)n &= 0.\end{aligned}$$

Sijoittamalla $\lambda = \lambda_1 = 3$ saadaan

$$\begin{aligned}4l - 2m &= 0\\ -2l + 3m - 2n &= 0\\ -2m + 2n &= 0.\end{aligned}$$

Yksi epätriviaali ratkaisu on $(l = 1, m = 2, n = 2)$. Normalisoimalla tämä ratkaisu saadaan päälinjan yksikkövektori

$$\mathbf{i}' = (l_1, m_1, n_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Seuraavaksi sijoittamalla $\lambda = \lambda_2 = 6$ saadaan

$$\begin{aligned}l - 2m &= 0\\ -2l - 2n &= 0\\ -2m + n &= 0.\end{aligned}$$

Yksi epätriviaali ratkaisu on $(l = 2, m = 1, n = -2)$. Normalisoimalla tämä ratkaisu saadaan päälinjan yksikkövektori

$$\mathbf{j}' = (l_2, m_2, n_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}).$$

Viimeiseksi sijoittamalla $\lambda = \lambda_3 = 9$ saadaan

$$\begin{aligned}-2l - 2m &= 0\\ -2l - 3m - 2n &= 0\\ -2m - 4n &= 0.\end{aligned}$$

Yksi epätriviaali ratkaisu on ($l = -2, m = 2, n = -1$). Normalisoimalla tämä ratkaisu saadaan päälinjan yksikkövektori

$$\mathbf{k}' = (l_3, m_3, n_3) = (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}).$$

Nämä kolme yksikkö vektoria tuottavat suorakulmaisen koordinaatiston, jossa pinnan yhtälö on kanonisessa muodossa. Koordinaatistomuunnos on

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ z &= \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z'. \end{aligned}$$

Huomataan, että vektoreiden **i'**, **j'**, **k'** koordinaattien determinantti saa arvon $+1$, kun sijoitetaan kertoimet yhtälöön

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} = 1$$

eli **i'**, **j'**, **k'** ja $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ovat saman suuntaisia eli koordinaatistomuunnos säilyttää alkuperäisen koordinaatiston suunnan.

Esimerkki 4.8. Sievennetään toisen asteen pinnan yhtälö

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$$

kanoniseen muotoon. Nyt karakteristinen yhtälö on

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tai $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3$ ja $\lambda_3 = 6$. Siten pinnan kanoninen yhtälö on $-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 + 6 = 0$ tai

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Pinta on hyperboloidi, jonka puoliakselit ovat $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ ja $c = 1$. Täytyy löytää koordinaatisto, jossa pinta on kanonisessa muodossa. Nyt

$$\begin{aligned} (1-\lambda)l + 2m - 4n &= 0 \\ -2l + (-2-\lambda)m - 2n &= 0 \\ -4l - 2m + (1-\lambda)n &= 0. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ saadaan

$$\begin{aligned} 4l + 2m - 4n &= 0 \\ 2l + m - 2n &= 0 \\ -4l - 2m + 4n &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmä sievenee yhdeksi yhtälöksi

$$2l + m - 2n = 0$$

ja yksi ratkaisusta on $(l = 1, m = 2, n = 2)$. Vektori $(1, 2, 2)$ määrittää pääsuoran. Sijoittamalla $\lambda = \lambda_3 = 6$ saadaan

$$\begin{aligned} -5l + 2m - 4n &= 0 \\ 2l - 8m - 2n &= 0 \\ -4l - 2m - 5n &= 0 \end{aligned}$$

saadaan yhdeksi ratkaisuksi $(l = 2, m = 1, n = -2)$. Nämä vektorit tuottavat vektorin $(6, -6, 3)$, joka määrittää pääsuoran, joka liittyy ominaisarvoon $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$, mutta eri suunnasta ja on ortogonaalinen vektorin $(1, 2, 2)$ kanssa. Korvataan vektori $(6, -6, 3)$ vektorilla $(2, -2, 1)$. Normalisoimalla vektorit saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (l_1, m_1, n_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \\ \mathbf{j}' &= (l_2, m_2, n_2) = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}) \\ \mathbf{k}' &= (l_3, m_3, n_3) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}). \end{aligned}$$

Nämä kolme vektoria tuottavat suorakulmaisen koordinaatiston, jossa pinnan yhtälö on kanonisessa muodossa. Koordinaatistomuunnos on

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ y &= \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \\ z &= \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z'. \end{aligned}$$

Määritelmä 4.9. Pinnan yhtälön neliömuoto on

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Ortogonaalisen koordinaattimuunnoksen tuloksena

$$\begin{aligned}
x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\
y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\
z &= n_1x' + n_2y' + n_3z',
\end{aligned}$$

neliömuoto Φ saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\
&\quad = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z'.
\end{aligned}$$

Neliömuodon $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ karakteristinen yhtälö on

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tai

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \kappa\lambda - \delta = 0,$$

missä

$$\begin{aligned}
\sigma &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
\kappa &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Neliömuodon $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x'z'+2a'_{23}y'z'$ karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^3 - \sigma'\lambda^2 + \kappa'\lambda - \delta' = 0,$$

missä

$$\begin{aligned}
\sigma &= a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} \\
\kappa &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} \\
\delta &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Molemmilla muodoilla on samat ominaisarvot λ_1, λ_2 ja λ_3, jotka saadaan karakterististen yhtälöiden juurina. Näin ollen

$$\sigma = \sigma', \kappa = \kappa', \delta = \delta'.$$

Siten ominaisarvojen λ_1, λ_2 ja λ_3 lisäksi kertoimet σ, κ ja δ eivät muutu ortogonaalisessa koordinaatistomuunnoksessa. Näitä kertoimia kutsutaan invarianteiksi.

Lause 4.10. *Neliömuodon diskriminantti on*

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Todistus. Olkoon matriisin

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ominaisarvot λ_1, λ_2 ja λ_3. Tällöin on olemassa sellainen kannanvaihtomatriisi O, että

$$O^T A O = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Näin ollen sopivalla kannanvaihdolla, matriisi A voidaan muuttaa diagonaalimatriisiksi, jonka diagonaalilla ovat ominaisarvot λ_1, λ_2 ja λ_3. Nyt edellä olevan kaavan nojalla

$$A = O \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3 \end{vmatrix} O^T,$$

joten

$$\begin{aligned} \det A &= \det(O \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3 \end{vmatrix} O^T) \\ &= \det O \det \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_3 \end{vmatrix} \det O^T \\ &= \det(OO^T)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Täten

$$\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

□

4.3 Pintojen luokittelu

Määritelmä 4.11. Kun ominaisarvot λ_1, λ_2 ja λ_3 ovat kaikki nollasta eroavia ja saman merkkisiä, kutsutaan neliömuotoa elliptiseksi. Kun ominaisarvot ovat nollasta eroavia ja eri merkkisiä, kutsutaan neliömuotoa hyperboliseksi. Kun vähintään yksi ominaisarvo on nolla, kyseessä on parabolinen neliömuoto.

Paraboliselle muodolle $\delta = 0$, koska $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ ja vähintään yksi ominaisarvoista on nolla.

Elliptiselle muodolle pätee $\Phi > 0$, kun ominaisarvot ovat positiivisia. Tällöin Φ on positiivisesti definiitti. Jos ominaisarvot ovat negatiivisia, $\Phi < 0$ ja se on negatiivisesti definiitti. Näin ollen elliptinen muoto on aina positiivisesti tai negatiivisesti definiitti.

Jos hyperbolisen muodon ominaisarvoille pätee $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, niin $\lambda_1 < 0$ ja $\lambda_3 > 0$. Siten pisteen $M(x, y, z)$ arvo vaihtelee yksikköympyrällä välillä $\lambda_1 < 0$ ja $\lambda_3 > 0$. Täten hyberbolinen muoto saa positiivisia ja negatiivisia arvoja.

Esimerkki 4.12. Olkoon pinnan yhtälö

$$\Phi = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

Päätellään, mikä pinnan tyyppi on kyseessä. Muodostetaan ensin karakteristinen yhtälö

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \kappa\lambda - \delta = 0,$$

missä

$$\begin{aligned}
\sigma &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
\kappa &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\sigma &= 7 + 6 + 5 = 18 \\
\kappa &= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 99 \\
\delta &= \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162
\end{aligned}$$

ja karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Ominaisarvot ovat karakteristen yhtälön juuret $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$ ja $\lambda_3 = 9$. Koska kaikki ominaisarvot ovat nollasta eroavia ja positiivisia, kyseessä on positiivisesti definiitti elliptinen muoto.

Pinnan piste $M(x, y, z)$ vaihtelee yksikköympyrän $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yli välillä

$$3 \leq 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz \leq 9.$$

Esimerkki 4.13. Olkoon pinnan yhtälö

$$\Phi = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz.$$

Päätellään, mitä tyyppiä pinta on. Muodostetaan ensin karakteristinen yhtälö. Nyt

$$\begin{aligned}
\sigma &= 1 - 2 + 1 = 0 \\
\kappa &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -27 \\
\delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 54
\end{aligned}$$

ja karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0.$$

Ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. Yksi ominaisarvoista on negatiivinen ja kaksi ominaisarvoista ovat positiivisia. Näin ollen kyseessä on hyberbolinen muoto.

Keskitytään seuraavaksi pinnan yhtälöön

$$\begin{aligned}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.\end{aligned}$$

Pinnan yhtälön vasen puoli sisältää kolmenlaisia termejä: toisen asteen termejä, lineaarisia ensimmäisen asteen termejä ja vakiotermin. Tavoite on sieventää yhtälö kanoniseen muotoon ja määrittää siten pinnan luonne. Tässä sieventäminen kanoniseen muotoon tarkoittaa suorakulmaisen koordinaatiston määrittämistä, jonka suhteen pinnan yhtälö on kanoninen, lineaariset termit ovat vähimmillään ja vakiotermit hävinneet.

Alkuperäisen koordinaatiston kierto on määritetty yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned}x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z'.\end{aligned}$$

Jos x, y, z paikalle sijoitetaan sopiva lauseke, niin yhtälön termit muuttuvat toisistaan riippumatta. Jos koordinaatiston kierto valitaan niin, että jokainen uusi akseli yhtenee pinnan pääsuoran kanssa, niin toisen asteen termit saadaan kanoniseen muotoon

$$\begin{aligned}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ = \lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + \lambda_3z'^2\end{aligned}$$

ja lineaariset termit

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 2\mu_1x' + 2\mu_2y' + 2\mu_3z'.$$

Vakiotermi a_{44} säilyy muuttumattomana. Näin ollen pinnan yhtälö on

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + \lambda_3z'^2 + 2\mu_1x' + 2\mu_2y' + 2\mu_3z' + a_{44}.$$

Olkoon neliömuodon diskriminantti δ nollasta eroava. Koska diskriminantille pätee $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, seuraa $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\lambda_1(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2})^2 + \lambda_3(z' + \frac{\mu_3}{\lambda_3})^2 \\ = -a_{44} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}.\end{aligned}$$

Käännöksen seurauksena

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}$$
$$y'' = y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$
$$z'' = z' + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}$$

saadaan

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2^2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = H,$$

missä

$$H = -a_{44} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}.$$

Jos $H \neq 0$, saadaan

$$\frac{x''^2}{H/\lambda_1} + \frac{y''^2}{H/\lambda_2} + \frac{z''^2}{H/\lambda_3} = 1.$$

Kun neliömuoto on elliptinen, niin ominaisarvoilla λ_1, λ_2 ja λ_3 ovat samanmerkkisiä. Jos $H > 0$, niin pinta kuvautuu ellipsoidina, jonka puoliakselit ovat

$$a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}, c = \sqrt{\frac{H}{\lambda_3}}.$$

Jos $H = 0$, niin yhtälö toteuttaa yhden oikean pisteen $x'' = y'' = z'' = 0$. Tällöin pinta kuvautuu imaginaarisena kartiona. Imaginaarista kartiota voi pitää degeneroituneena ellipsoidina. Jos $H < 0$, niin yhtälö ei toteuta oikeita pisteitä. Tällöin kyseessä on imaginaarinen ellipsoidi.

Kun neliömuoto on hyperbolinen, niin ominaisarvoista yksi on eri merkkinen kuin kaksi muuta. Esimerkiksi $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ja $\lambda_3 < 0$. Jos $H > 0$, niin

$$\frac{x''^2}{H/\lambda_1} + \frac{y''^2}{H/\lambda_2} + \frac{z''^2}{|H/\lambda_3|} = 1.$$

Tällöin yhtälö kuvautuu yksivaippaisena hyperboloidina. Jos $H < 0$, niin

$$\frac{x''^2}{|H/\lambda_1|} + \frac{y''^2}{|H/\lambda_2|} + \frac{z''^2}{|H/\lambda_3|} = 1.$$

Tällöin yhtälö kuvautuu kaksivaippaisena hyperboloidina. Jos $H = 0$, niin

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - |\lambda_3| z''^2 = 0$$

ja yhtälö kuvautuu kartiona.

Kun diskriminantti $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, neliömuoto on parabolinen. Oletetaan, että $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Ensimmäisessä tapauksessa $\lambda_2 \neq 0$. Tällöin pinnan yhtälö on

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0$$

tai

$$\lambda_1 (x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2})^2 + 2\mu_3 z' + H = 0,$$

missä $H = a_{44} - (\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}) - (\frac{\mu_2^2}{\lambda_2})$. Jos $\mu_3 \neq 0$, niin muunnos

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, y'' = y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}, z'' = z' + \frac{H}{2\mu_3}$$

saa yhtälön kanonisen muodon

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2\mu_3 z'' = 0.$$

Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$2z'' = \frac{x''^2}{-\mu_3/\lambda_1} + \frac{y''^2}{-\mu_3/\lambda_3}.$$

Siten, jos $\mu_3 \neq 0$, pinnan yhtälö kuvautuu paraboloidina. Jos $\mu_3 = 0$, niin

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + H = 0$$

ja yhtälö kuvautuu elliptisenä tai hyperbolisena sylinterinä. Toisessa tapauksessa $\lambda_2 = 0$. Tällöin

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0$$

tai

$$\lambda_1 (x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0,$$

missä $H = a_{44} - (\frac{\mu_1^2}{\lambda_1})$. Jos $\mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$, niin koordinaattiakseleita Ox', Oy', Oz' kierretään akselin Ox' ympäri kulman $\tan\alpha = -\frac{\mu_2}{\mu_3}$ verran eli

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \\ y'' &= \frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z' \\ z'' &= \frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z', \end{aligned}$$

missä $\mu = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}$. Nyt

$$\lambda_1 (x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0$$

saadaan muotoon

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu y'' + H = 0.$$

Toinen muunnos $x''' = x'', y''' = y'' + \frac{H}{2\mu}$ tuottaa kanonisen muodon

$$\lambda_1 x'''^2 + 2\mu y''' = 0.$$

Näin ollen, $\mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ kuvautuu parabolisena sylinterinä. Kun $\mu_2 = \mu_3 = 0$, niin

$$\lambda_1 (x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1})^2 + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0,$$

saadaan muotoon

$$\lambda_1 x''^2 + H = 0,$$

joka kuvautuu kahdeksi rinnakkaiseksi pinnaksi. Kun $\lambda_1 > 0$ ja $H \leq 0$, pinnat ovat reaalisia. Kun $\lambda_1 >$ ja $H > 0$, pinnat ovat imaginaarisia.

Yhteenvetona todetaan, että jos pinnan yhtälön neliömuoto on elliptinen, yhtälö kuvautuu ellipsoidina. Ellipsoidi voi olla reaalinen, imaginaarinen tai degeneroitunut. Jos neliömuoto on hyberbolinen, pinnan yhtälö kuvautuu hyperboloidina. Hyperboloidi voi olla yksivaippainen, kaksivaippainen tai degeneroitunut. Jos neliömuoto on parabolinen, pinnan yhtälö kuvautuu paraboloidina. Paraboloidi voi olla elliptinen, hyperbolinen tai degeneroitunut.

Lähdeluettelo

[1] Yefimov, N.: *Quadratic Forms and Matrices.* Academic Press INC, New York, 1964.

[2] Leinonen, M.: Matriisiteorian luentomoniste. Oulun yliopisto, 2019.