Äärettömyyden opettamiseen ja oppimiseen liittyviä vaikeuksia

Gradu-tutkielma
Aino Karttunen
2498429
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2020

Sisältö

Johdanto

Tutkielmassa on käsitelty eri tutkimuksissa esiintulleita ongelmia liittyen äärettömyyden käsitteen ymmärtämiseen sekä käsitteen opettamiseen liittyviä vaikeuksia ja keinoja. Tutkielman aluksi äärettömyyden käsitteeseen ja historiaan tutustutaan yleisesti ja tutkielman lopussa on esitelty paradokseja, joita ilmenee äärettömyyden käsitteen yhteydessä.

1 Äärettömyys

Äärettömyys on käsite, jota on käsitelty matematiikan historiassa jo antiikin Kreikan ajoista lähtien. Äärettömyyden käsite on muuttunut aikojen saatossa moneen kertaan, eikä mikään määritelmä ole ollut jokaiselle mieleinen. Aluksi äärettömyyden käsite liitettiin vahvasti filosofiaan, ennen kuin se vähitellen sai enemmän matemaattisia piirteitä ja se hyväksyttiin osaksi matematiikkaa. Artikkelissa [18] väitetään, että tällä hetkellä äärettömyys ymmäretään erilaisten sarjojen ominaisuutena. Äärettömyydestä on tutkittu muun muassa siihen liittyviä intuitioita, äärettömyyden ja rajan käsitteiden ymmärtämisen välisiä suhteita, äärettömyyden käsittelyä luokassa ja opiskelijoiden ymmärtämistä tilanteista, jotka liittyvät läheisesti äärettömyyden konseptiin. Äärettömyys on myös käsitteellinen perusta monille matemaattisille aiheille, kuten lukujonoille, äärettömille desimaaleille ja asymptooteille, kerrotaan artikkelissa [11]. Nykyään äärettömyydellä on formaali rakenne, joka on hyväksytty useimpien matemaatikoiden keskuudessa, ja joka on ollut tärkeiden tulosten perustana 1900-luvulla, artikkelissa [27] kerrotaan. Artikkelin [19] mukaan äärettömyyden perusmetaforan voisi muotoilla esimerkiksi seuraavasti: prosesseilla, jotka jatkuvat toistaiseksi, uskotaan olevan lopullinen lopputulos, joka on varsinainen äärettömyys.

Äärettömyydellä on monia muotoja ja sillä on ristiriitainen luonne [17], mikä aiheuttaa ongelmia äärettömyyden ymmärtämiseen eri-ikäisillä ihmisillä. Jotta äärettömyyttä voisi käsitellä oikein, siihen on perehdyttävä, sitä on käytettävä ja siitä on keskusteltava monesta näkökulmasta. Artikkelin [14] mukaan äärettömän monien muotojen ja ristiriitaisen luonteen lisäksi äärettömyydellä on monia merkityksiä myös matematiikan ulkopuolella. Artikkelissa kerrotaan, äärettömyys on esimerkiksi osa kulttuuria: uskomuksia ajasta ja universumista. Artikkelin [27] mukaan äärettömyys on älyllinen rakenne, joka vaatii korkeaa ajatuksellista abstraktiotasoa.

Äärettömiin joukkoihin liitetään käsite kardinaaliluku, jota käytetään äärettömien joukkojen tarkastelussa. Äärettömillä joukoilla sanotaan olevan sama kardinaaliluku silloin, kun ne voidaan yhdistää yksi yhteen vastaavuudella, eli ne ovat bijektiivisiä keskenään [23]. Tämä aiheuttaa lisää ongelmia äärettömyyden ymmärtämisessä, sillä kahdella joukolla, joista toinen on toisen osajoukko, voi nyt olla sama kardinaaliluku, mikä on ristiriidassa äärellisten kokemusten kanssa. Artikkelissa [24] käsitellään joukkoja X ja Y, joista joukolla X on oma kardinaaliluku. Jos joukkojen X ja Y välillä on olemassa bijektio, niin joukkojen X ja Y kardinaaliluvut ovat samat. Ilman bijektiota kardinaaliluvut ovat erit. Äärelliselle joukoille kardinaaliluku on joukon alkioden lukumäärä.

1.1 Varsinainen- ja potentiaalinen äärettömyys

Artikkelissa [14] kuvataan varsinaista (actual) ja potentiaalista äärettömyyttä. Artikkelin mukaan potentiaalinen äärettömyys pohjautuu jatkuviin prosesseihin, joilla ei ole loppua. Tällainen prosessi on esimerkiksi luonnollisten lukujen laskeminen. Prosessi voi olla myös esimerkiksi samanlaisten monikulmioiden piirtäminen toistensa ympärille tai π:n desimaalien luettelemista ([20]). Artikkelin [20] mukaan tällaiset päättymättömät prosessit ovat yleensä ensimmäisiä esimerkkejä äärettömyydestä. Esimerkkinä potentiaalisesta äärettömyydestä voidaan pitää myös joukkojen muodostamista luonnollisista luvuista siten, että ensimmäisessä joukossa on luku 1, toisessa joukossa luvut 1 ja 2, kolmannessa joukossa luvut 1, 2 ja 3 ja niin edelleen [8]. Artikkelin [4] mukaan prosessit, joita käsitellään potentiaalisen äärettömyyden yhteydessä, ovat kuitenkin äärellisiä tietyllä hetkellä. Artikkelin [20] mukaan potentiaalinen äärettömyys ymmärretään ennen varsinaisen äärettömyyden ymmärtämistä. Lisäksi artikkelissa todetaan, että tutkimuksen mukaan pojat kehittyvät äärettömyyden ymmärtämisessä tyttöjä paremmin.

Varsinainen äärettömyys määrittelee äärettömälle prosessille äärellisen kokonaisuuden. Se kuvaa siis äärettömyyttä objektina, sanotaan artikkelissa [14]. Artikkelin [20] mukaan varsinainen äärettömyys "muodostuu", kun äärettömyys käsitteellistetään asiaksi. Artikkelin [8] mukaan hyvä esimerkki varsinaisesta äärettömyydestä on se, että ajatellaan luonnollisten lukujen joukkoa ilman kykyä luetella joukon kaikkia elementtejä. Tällöin luodaan objekti $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, joka kuvaa luonnollisten lukujen joukkoa äärettömän objektina. Kysymykseen siitä, onko varsinaista äärettömyyttä olemassa, on moni etsinyt vastausta [26]. Kysymystä ovat käsitelleet sekä filosofit, että matemaatikot, alkaen Aristotelestä, joka muotoili kysymyksen, aina Cantoriin asti. Artikkelissa [4] esimerkiksi varsinaisesta äärettömyydestä luetellaan muun muassa maailman äärettömyys, janalla olevien pisteiden äärettömän suuri lukumäärä ja olemassa olevien luonnollisten lukujen lukumäärä. Artikkelin mukaan ihmisen ajatuskyvylle on vaikeaa ja jopa mahdotonta ymmärtää miten janalla voi olla ääretön määrä pisteitä tai kuinka monta luonnollista lukua on olemassa, kun niitä on ääretön määrä. Artikkelin [19] mukaan on olemassa yksi esimerkki, jossa äärettömyyttä voidaan helpommin käsitellä ennemmin varsinaisena äärettömyytenä, kuin potentiaalisena äärettömyytenä: näin käy silloin, kun ajatellaan koko universumia. Sitä ei voi ajatella äärettömänä prosessina vaan universumin koon ajatellaan olevan ääretön, ilman prosessin luonnetta, eli varsinaisena äärettömyytenä.

Myös artikkelissa [1] kerrotaan tästä äärettömyyden jaosta varsinaiseen ja potentiaaliseen äärettömyyteen. Artikkelin mukaan äärettömyydelle on ollut nämä kaksi peruskonseptia jo matematiikan aikaisesta historiasta lähtien. Vuonna 2001 Fichbein määritteli varsinaisen äärettömyyden siten, että meidän on vaikea, jopa mahdoton, käsittää mitä sillä tarkoitetaan ja millainen on ääretön joukko. Artikkelin [15] mukaan Frichbein käsitteli potentiaalista äärettömyyttä prosessina, joka on jokaisella hetkellä äärellinen, mutta jatkuu loputtomasti. Potentiaalista äärettömyyttä käsitellessä käsitellään ääretömyyden dynaamista muotoa. Tästä esimerkkinä voidaan pitää esimerkiksi luonnollisten lukujen laskemista: me emme voi käsittää koko luonnollisten lukujen joukkoa kokonaisuudessa, mutta voimme kuitenkin käsittää sen, että jokaisen luonnollisen luvun jälkeen tulee uusi, suurempi, luonnollinen luku. Tallin mukaan (2001) luonnollisen äärettömyyden käsitteet kehitetään niistä kokemuksista, joita meillä on äärellisestä maailmasta.

Äärettömyyd voidaan eri kontsksteissa luokitella kolmeen luokkaan [1]. Potentiaalisen ja varsinaisen äärettömyyden lisäksi Tirosh mainitsi epästandardin äärettömyyden, joka hyväksyy kaikki aritmeettiset operaatiot, mukaan lukien jakaminen. Tämän määrittely johtaa siihen, että meidän on mahdollista käsitellä infinidesimaaleja.

1.2 Äärettömän monet muodot

Artikkelin [17] mukaan matemaatikoilla on kolme käsitystä äärettömyydestä. Nämä ovat järjestyslukujen raja-arvo, äärettömät perusluvut ja ei-standardit numerot. Ei-standardit numerot ovat lukuja, joilla on ääretön määrä desimaaleja. Artikkelissa [14] äärettömyys luokitellaan kolmeen eri luokkaan. "Äärettömän suureen"liittyy laajentumisen tunne ja rajaton kasvu, "äärettömän monet"rajoittuvat rajoitettuihin ryhmiin tai rajoitetuissa sarjoissa olevien elementtien tiheyteen ja "äärettömän lähellä"on äärettömän suuren vastakohta ja se viittaa jonkin esineen ta rajan lähestymiseen mahdollisimman lähelle.

Muun muassa artikkelissa [3] mainitaan infinidesimaalit, eli äärettömän pienet luvut, ja niitä koskeva tunnettu kiista, joka keskittyy erotusosamäärän ympärille. Kiistassa käsitellään sitä, kuinka infinidesimaalia pidetään nollasta eroavana lukuna, jotta sillä voidaan jakaa, mutta toisaalta niin pienenä, että se voidaan jättää huomiotta, koska sillä ei ole lisäarvoa myöhemmin laskemisessa.

1.3 Erilaisia konteksteja

Artikkelissaan [17] John Monaghan kuvaa äärettömyyttä prossessina ja objektina. Hänen mukaansa äärettömyys nähdään prosessina, jolloin sillä tarkoitetaan päättymätöntä tekemistä tai toimintaa sekä objektina, jolloin äärettömyys voi olla esimerkiksi iso luku tai joukon koko. Virallisesti näistä käytetään termejä äärettömyys (infinity, objekti) ja ääretön (infinite, prosessi), mutta nämä sekoittuvat helposti puheessa.

Artikkelin [17] mukaan äärettömyys voidaan ajatella numeeriseen tai geometriseen kontekstiin liittyväksi. Numeerisella kontekstilla tarkoitetaan tilannetta, joka viittaa yleisiin aritmeettisiin eli laskennallisiin periaatteisiin ja geometrinen konteksti viittaa alueellisiin tarkasteluihin. Monaghanin mukaan geometrisessa muodossa esitettävät ongelmat ovat usein helpompia kuin numeerisessa muodossa esitetyt. Esimerkiksi kysyttäessä sarjan 1, 0 , 0.1, 0, 0.01... raja-arvoa tai näytettäessä kuvaa kyseisestä sarjasta ja kysyttäessä onko sarjan raja-arvo 0, on usein helpompaa vastata kuvaajan avulla esitettyyn kysymykseen. Helppous (tai vaikeus) geometrisen kontekstin ymmärtämisessä voi johtua siitä, että muodot viittaavat tutumpaan, äärelliseen maailmaan, kun taas numerot viittaavat abstraktimpaan matematiikkaan.

Monaghan jakaa äärettömyyden myös laskemisen ja mittaamisen kontekstiin. Mittausparadigman lähtökohtana on se, että kaksi kertaa pidemmässä suorassa voidaan nähdä olevan kaksi kertaa enemmän pisteitä. Monaghanin mukaan laskemisen konteksti johtuu yleensä erillisistä tilanteista, kun taas mittaamisen konteksti johtuu jatkuvista tilanteista. Mittaamisen kontekstin ongelmana on, että se saattaa johtaa äärettömyyksien järjestämiseen.

Staattinen ja dynaaminen konteksti jakaa äärettömyyden "pysähtyneeksi"arvoksi tai arvoksi, joka lähestyy jotain. Monaghanin [17] mukaan voidaan esimerkiksi kysyä kuinka paljon on $\frac{1}{1-0{,}999...}$. Staattisen kontekstin mukaan vastaus on äärettömän suuri, kun taas dynaamisen kontesktin mukaan vastaus lähestyy äärettömän suurta, sillä $1 - 0,99\ldots$ on äärettömän pieni (tai lähestyy nollaa).

Artikkelissa [3] kuvataan sitä, miten äärettömiä prosesseja ajatellaan koulumatematiikassa. Kyseisen artikkelin mukaan lähtöjoukko ja maalijoukko ovat yleensä äärettömiä, ja usein äärettömyys on määritelty nimenomaan jatkuvaksi prosessiksi, jota ei voi lopettaa. Kouluikäiset lapset ajattelevat äärettömyyttä prosessina riippumatta siitä, onko sen konteksi numeerinen, geometrinen vai materiaalinen. Lisäksi useimmat koulumaailmassa käydyt keskustelut äärettömistä prosesseista sisältävät iteraation.

Artikkelissa [25] äärettömyyttä lähdetään pohtimaan vertailemalla luonnollista ja muodollista lähestymistapaa. Luonnollinen lähestymistapa antaa muodolliselle määritelmälle jonkin henkilökohtaisen merkityksen esimerkiksi rakentamalla esimerkkejä, kun taas muodollinen lähestymistapa keskittyy määritelmiin käyttämällä muodollisia päätelmiä siten, että pyritään välttämään vetoomusta intuitioon. Muodollinen ajattelu lähtee liikkeelle, kun valitut ominaisuudet eristetään, niitä käytetään käsitteiden määritelminä ja niistä voidaan päätellä muut ominaisuudet matemaattisen todistuksen avulla. Artikkelin mukaan luonnollinen oppiminen kasvaa yksilön käsityksistä, toiminnasta ja heijastamisesta. Esimerkiksi luonnollisten lukujen oppiminen luonnollisella tavalla lähtee siitä, että pitää aloittaa jostakin, ja tämä jokin on luku 1. Tämän jälkeen jokaiselle luvulle täytyy olla seuraava luku, ja jokaisen luvun täytyy olla erisuuri. Kaikki jotka saadaan tätä ajatusta ja toimintaa jatkettaessa ovat numeroita. Formalistit taas kamppailevat luopuakseen harhaanjohtavista konseptikuvista ja keskittyäkseen määritelmien ja loogisten päätelmien tarkkaan tulkintaa. Formaali tapa muodostaa luonnollisten lukujen joukko on aloittaa joukosta N, joka ei ole luonnollisten lukujen joukko, ja funktiosta $s(N) \to N$, joka antaa aina seuraavan luvun. Tällöin loput luvut voidaan muotoilla aloittamalla elementistä **1** (joka ei ole luku 1 vaan erityinen alkio).

1.4 APOS-teoria

Apos-teoria on useissa (äärettömyyteen liittyvissä) tutkimuksissa käytetty aineiston analyysi-menetelmä. Apos-teoria noudattaa periaatetta, että matemaattisen käsitteen luonteen ja sen kehityksen välillä on läheinen yhteys yksilön mielessä, kerrotaan artikkelissa [2]. Artikkelin mukaan yksilö käsittelee matemaattisia tilanteita käyttäen useita mentaalisia mekanismeja rakentaakseen kognitiivisia tilanteita, joita voi soveltaa tilanteeseen. Apos-teoriaan kuuluvat päämekanismit ovat tiedon sisäistäminen (interiorization) ja kapselointi (encapsulation) sekä niihin liittyvät neljä rakennetta, toiminta (action), prosessi (processes), kohteet (objects) ja skeemat (schemas), joiden mukaan teoria on myös nimetty.

Apos-teoriassa yksilön matemaattinen tieto on hänen taipumuksensa reagoida matemaattisiin ongelmatilanteisiin pohtimalla niitä sosiaalisessa kontekstissa, rakentamalla ja rekonstruoimalla toimia, prosesseja ja kohteita sekä järjestelemällä ne skeemoihin käytettäväksi tilanteiden käsittelyssä [16].

Teorian mukaan käsitys matemaattisesta käsitteestä alkaa muodostua, kun sovelletaan objektien muuttamista muiden objektien saavuttamiseksi. Tätä vaihetta kutsutaan toiminnaksi, sillä se vaatii ohjeet toteutuakseen. Toiminnan tuntemus katsotaan artikkelin [2] mukaan olevan henkilöllä, joka pystyy esimerkiksi tekemään funktiolle muutakin kuin korvaamaan muuttujan ja manipuloimaan sitä. Toiminnan tasolla oleva henkilö vaatii vielä eksplisiittisen, eli selvästi ilmaistun, lausekkeen ajatellakseen funktiota. Artikkelissa [16] toiminta on yksilön tekemä matemaattisen objektin muuntaminen ulkoisesti ohjattuna. Se voi olla esimerkiksi objektien manipuloimista tai muisteltuun tosiasiaan vaikuttamista.

Artikkelin [2] mukaan prosessi on rakenne, joka suorittaa saman operaation kuin toiminta, mutta yksilö pystyy toteuttamaan sen kokonaan mielessä. Prosessi on siis objektin sisäinen muutos, jolloin jokainen toiminta voidaan kuvata ilman sen varsinaista suorittamista [16]. Jos yksilö tulee tietoiseksi prosessista kokonaisuutena, hän ymmärtää, että muutos voi vaikuttaa kokonaisuuteen. Tällöin sanotaan, että yksilö on kapseloinut (encapsulated) prosessin kognitiiviseen kohteeseen. Tästä esimerkkinä artikkelissa mainitaan funktiot ja funktiojoukot. Jos yksilö on kapseloinut funktion käsitteen, hänen on mahdollista muun muassa muodostaa funktiojoukkoja, määritellä joukolle aritmeettisen operaation ja varustaa joukko topologialla.

Skeema muodostuu, kun yksilö onnistuu organisoimaan ja yhdistämään toimintoja, prosesseja ja objekteja yhtenäiseksi kehykseksi. Artikkelin [16] mukaan skeemat koordinoidaan muodostamaan matemaattisia rakenteita, joita voidaan myöhemmin käyttää ongelmatilanteissa.

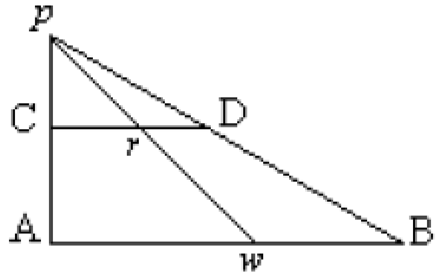
Artikkelin [2] mukaan varsinainen äärettömyys on mentaalinen objekti, joka saadaan kapseloimalla ääretön prosessi eli potentiaalinen ääretön. Tämän kapseloinnin avulla äärettömästä tulee kognitiivisesti saavutettava, jolloin se voidaan nähdä kokonaisuutena, toisin kuin prosessi, jota ei ole kapseloitu. Potentiaalisen äärettömyyden kapselointi muuttaa käsitettä varsinaiseksi äärettömyydeksi. Tällöin siihen voidaan alkaa kohdistamaan toimintoja. Kapselointi tarkoittaa kykyä ajatella matemaattista kokonaisuutta, johon voidaan soveltaa korkeamman tason toimintoja.

1.5 bijektio vs. part-whole

Kun varsinaisen äärettömyyden olemassaolo hyväksytään ja eri äärettömyyksiä yritetään verrata, täytyy vertailun periaatteeksi valita joko bijektiivisyyden periaate tai niin kutsuttu part-whole -periaate, kerrotaan artikkelissa [26].

Part-whole -periaatteeseen kuuluu ajatus siitä, että kokonainen on mahtavampi tai suurempi kuin sen osa. Tämän periaatteen mukaan esimerkiksi luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on enemmän alkioita kuin parillisten lukujen joukossa $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ [26]. Bolzano väitti, että kaikkia äärettömiä ryhmiä ei voida pitää tasa-arvoisina niiden moninaisuuden perusteella; jos joukko sisältyy toiseen joukkoon vain osana sitä, ensimmäinen on pienempi kuin jälkimmäinen.

Bijektiivisyyden periaatteen mukaan kaksi joukkoa ovat yhtä suuret, jos ja vain jos ne ovat keskenään bijektiivisiä [26]. Tällöin jokaiselle ensimmäisen joukon alkiolle löydetään "pari"toisesta joukosta, eikä millekään kahdelle alkiolle tämä "pari"ole sama. Artikkelin [26] mukaan vertailut kahden äärettömän joukon välillä eivät ole mielekkäitä. Toisin sanoen ei voida väittää, että toinen ääretön olisi toista pienempi tai suurempi, tai että kaksi ääetöntä olisivat yhtä suuret.



Kuva 1: Kahden eripituisen janan yksi-yhteen vastaavuuden havainnollistaminen artikkelissa [15].

Kuvassa 1 havainnollistetaan sitä, miten kahden eripituisen janan välillä on yksi-yhteen vastaavuus eli ne ovat bijektiiviset keskenään. Kuvassa on janat CD ja AB, joiden pituudet eroavat toisistaan. Janojen ympärille piirretään kolmio siten, että janojen samassa suunnassa olevat päätepisteet yhdistetään ja viivoja jatketaan pisteeseen p, jossa ne leikkaavat toisensa. Pisteestä p voidaan nyt piirtää jana pisteeseen w, joka sijaitsee janalla AB. Tällöin piirretäessä jana pw mille tahansa janan AB pisteelle w, jana leikkaa janan CD pisteessä r. Jos pisteen w paikkaa muutetaan, myös piste r muuttuu. Näin jokaista pistettä w kohti on yksi piste r, joten pisteet ovat bijektiivisiä.

2 Äärettömyyden historiaa

2.1 Antiikin kreikasta 1600-luvulle

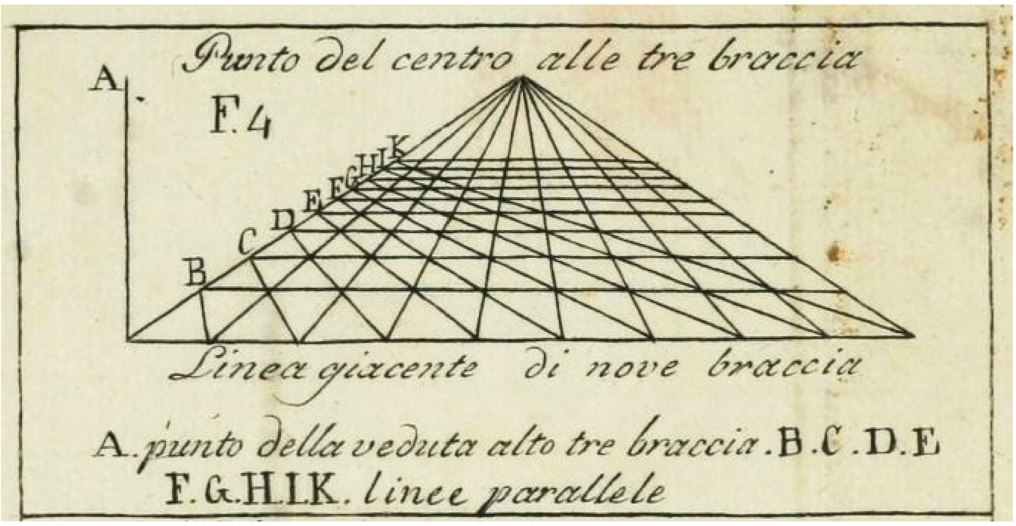
Ensimmäisiä ajatuksia äärettömyydestä saatiin odottaa vuoden 600 eaa. tienoille, eli siihen asti, kunnes matematiikka muuttui käytännöllisestä enemmän tieteelliseksi [6]. Artikkelin mukaan äärettömyyttä eivät kehittäneen kreikkalaiset, poikkeuksena Zeno ja Arkhimedes. Artikkelin [11] mukaan äärettömyys ei ollut kreikkalaisille olemassa todellisuudessa, vaan se oli vain potentiaalinen rakenne. Oli kuintekin olemassa rajallisten prosessien käsite, mutta rajaa ei käsitelty konkreettisesti sitovana kokonaisuutena. Keskiajalla äärettömyyttä arvostettiin muun muassa kristinuskossa jumalallisena ominaisuutena [11].

Artikkelissa [14] kirjoitetaan siitä, miten potentiaalisen ja varsinaisen äärettömyyden käsitteet ovat etsineet paikkaansa matematiikan historian aikana. Heidän mukaansa Aristoteleen (382-322 eaa.) mukaan todellisen äärettömyyden loputtomuus on olemassa jossakin vaiheessa ja potentiaalisen äärettömyyden äärettömyydet jakautuvat ajan myötä. Aristoteleen tekemä kahtiajako on todennäköisesti syy siihen, miksi käsitys sai niin voimakkaan tunnustuksen. Tämä käsitys pysyi käytännössä muuttumattomana 1800-luvun puoleen väliin asti. Artikkelin [28] mukaan Aristoteles oli ensimmäinen, joka yritti yhdistää äärettömyyden todelliseen maailmaan. Aristoteleen mukaan äärettömyys on kaikkea, mitä voidaan kuvata sellaisilla loputtomilla prosesseilla, joissa jokainen askel eroaa edellisestä. Tästä syystä esimerkiksi ympyrän kehä ei ole ääretön, sillä siinä jokainen askel ei eroa kaikista sitä edeltävistä askeleista [2]. Aristoteleen mukaan äärettömyys on potentiaali, jolla on rajaton mahdollisuus lisätä tai jakaa väliä. Lisäksi Aristoteleen mukaan todellinen ääretön on käsittämätön [14], sillä prosessi vaatisi koko ajan. Tästä syystä ääretön olisi mahdotonta ajatella kokonaisuutena, sillä esimerkiksi laskemisen jokaista vaihetta ei voida suorittaa fyysisesti tai henkisesti.

Myös artikkelissa [27] mainitaan Aristoteleen idea, joka hallitsi ajattelua noin 2000 vuotta. Artikkelissa Aristoteles oli varsinaisen äärettömyyden ideaa vastaan, mutta käsitteli potentiaalista äärettömyyttä: "Emme voi koskaan käsittää luonnollisia lukuja kokonaisuutena, mutta ne ovat potentiaalisesti äärettömiä, koska annettaessa mikä tahansa äärellinen kokoelma, on olemassa suurempi"

Artikkelissa [14] manitaan, että Galilein mukaan todellinen äärettömys olisi kiellettävä, jos haluaisimme säilyttää loogisen päättelyn johdonmukaisuuden. Artikkelin [2] mukaan varsinaisen äärettömyyden varhainen puolustaja oli 1340-1410 elänyt rabbi Hasdai Crescas. Hänen ajatteluaan varsinaisen äärettömyyden olemassaolosta motivoi uskonnollinen näkemys siitä, että Jumala tietää kaiken ja kaikki äärettömän määrän numeroita.

Samaan aikaan, kun varsinainen äärettömyys valtasi alaa aritmetiikassa, se kasvoi myös geometriassa [14]. Geometriassa, ja taiteessa, kuvattiin suoria linjoja, jotka näyttävät jatkuvan äärettömyyteen asti.



Kuva 2: Suorat linjat kohtaavat niin kutsutussa "häviävässä pisteessä". (*https://en.wikipedia.org/wiki/De_pictura*)

Tällaisia kuvia piirettiin jo 1400-1500 luvuilla ja kuvissa suorat linjat kohtaavat niin kutsutussa "häviävässä pisteessä"silloin, kun ne esitetään perspektiivikuvana 2.

Artikkelissaan [13] Knobloch kertoo, että vuonna 1464 Saksalainen Johannes Regiomontanus määritteli matematiikan tieteenä, joka käsittelee määriä ja siksi äärellisiä objekteja. Artikkelin [6] mukaan äärettömyyden symbolia ∞ käytettiin ensimmäisen kerran 1500-luvulla John Wallisin toimesta. Koska symboleita ei ollut aikaisemmin käytössä, matemaatikot ilmaisivat tätä ennen asiat tavallisella kielellä, mikä vaikeutti muun muassa eri asioiden välisien yhteyksien muodostamista [12]. 1600-luvulla osa matemaatikoista, esimerkiksi Leibniz [12], kuvitteli tasaisen käyrän monikulmiona, jolla on ääretön määrä pieniä suoria sivuja [10].

1600-luvulla Galilei oli suuressa roolissa matematiikan kehittymisessä. Artikkelin [13] mukaan Galilei on sanonut, että äärettömyys ja jaottomuus (indivisibles) ovat käsittämättömiä ihmisen äärelliselle älylle. Äärettömyys ylittää mielikuvituksemme kapasiteetin kokonsa vuoksi ja jaottomuus siksi, koska se on niin pieni. Aristoteelisessa paradoksissa, joka esitellään tarkemmin myöhemmin, Galilein perusajatuksena oli ymmärtää ympyrät monikulmioina, joilla on äärettömän monta sivua. Tämä ajatus lähti siitä, että tällöin ihmisellä on mahdollisuus ensin ajatella monikulmiota, jossa on äärellinen määrä sivuja, ja jotka ovat ainoa tapaus, jonka ihmisäly voi ymmärtää.

Artikkelissa [4] kerrotaan Galilein antaneen esimerkin, että jokaiselle luonnolliselle luvulle on olemassa neliö ja päinvastoin jokaista neliöä vastaa jokin luonnollinen luku. Tämä tarkoittaa sitä, että luonnollisten lukujen joukko ja niiden neliöiden joukko ovat yhteneviä. Toisaalta neliöiden joukko on luonnollisten lukujen osajoukko. Tästä seuraa se, että kokonaisuus ja sen osa ovat yhteneviä, mikä ei ole johdonmukaista loogisuutemme perusteella.

1600-luvun loppupuolella vaikutti toinen matemaatikko, Leibniz, jonka kirjoitukset tekevät selväksi sen, että hänen mielipiteensä äärettömästä poikkesi Galilein mielipiteestä [13]. Leibniz yritti tunnistaa äärettömyyden nollan avulla. Hänen mukaansa se, että oletamme äärettömän luvun olevan olemassa, johtaa paradoksiin. Siksi Leibniz pyrkii tunnistamaan äärettömän luvun olemassaolon ilman mitään, eli nollalla. Leibniz osoitti, kuinka laskeminen äärettömyydellä ja jakamattomuuden metodit voidaan todistaa äärimmäisen tiukasti ja varmasti lopullisin keinoin. Artikkelin mukaan Leibnizillä oli käsitteet äärettömän pienistä ja äärettömän suurista määristä, jotka hänen määritelmän mukaan olivat määriä, jotka ovat positiivisia, mutta pienempiä/suurempia, kuin mikä tahansa annettu määrä.

1600- ja 1700- luvuilla matemaatikot sallivat summan termien järjestämisen eri tavoilla, kun taas nykyinen määritelmä ajattelee, että termit summataan järjestyksessä, kerrotaan artikkelissa [16]. Esimerkiksi Grandin sarja $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$ voi olla joko 0 $[(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots]$ tai 1 $[1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots]$. riippuen siitä, miten termit järjestellään sulkeiden avulla.

Artikkelissa [27] kerrotaan, miten 1600- ja 1700-luvuilla, kun laskentamenetelmiä systematisoitiin ja yleistettiin, tuli esille äärettömyyden käsitys äärettömien prosessien muodossa. Tämä johti siihen, että potentiaalinen äärettömyys tuli ilmeiseksi, kun taas varsinaisen äärettömyyden käsite rajoittui vielä filosofiaan. 1600- ja 1700-luvuilla laskennan kehitykselle erityinen ominaisuus oli algoritmien etsiminen, joiden avulla voitaisiin käsitellä äärettömiä prosesseja.

2.2 1700- ja 1800-luku

Vuonna 1716 Chrisitan Wolff ehdotti matematiikan määritelmälle uutta sanamuotoa [13]: Sen mukaan matematiikka on tiede, joka mittaa kaikkea, mitä voi mitata. Matematiikka tutkisi siis kaikkia asioita, joita voidaan suurentaa tai pienentää.

1600- ja 1700-luvuilla huomattii, että asiat eivät seisseet vankalla pohjalla, millä tarkoitetaan sitä, että esimerkiksi infinidesimaalit eivät noudattaneet Arkhimedeen aksiomeja [12]. Esimerkiksi erään aksioman mukaan, jos on kaksi positiivista reaalilukua a ja b, niin on olemassa positiivinen (luonnollinen) luku n siten, että $na > b$. Kuitenkin, jos a on infinidesimaalinen (silti positiivinen reaaliluku) ja b=1, niin $na < 1$ kaikilla n, jolloin aksioma ei päde.

Artikkelin [2] mukaan Aristoteleen kehittämä kahtiajako dominoi käsitystä äärettömyydestä vuosisatoja. 1700- ja 1800-luvuilla useat matemaatikot ovat käsitelleet äärettömyyttä tavalla tai toisella. Kant on maininnut meidän olevan kuolevaisia äärettömässä maailmassa ja Poincare'n mukaan ääretön kokoelma on uusien elementtien lisäämistä määräämättömän ajan.

Artikkelin [14] mukaan Bolzano (1781-1848) hylkäsi Aristoteleen väitteen siitä, että kokoelma ei esiinny täydellisenä kokonaisuutena, ellei joku muodosta kuvaa jokaisesta sen osasta tai heijasta sitä tuottavan prosessin jokaista vaihetta [2]. Bolzano väitti, että käsityksemme joukosta voidaan muodostaa muilla tavoilla, yksinkertaisesti kuvaamalla joukon elementit luomatta kuvaa jokaisesta elementistä. Bolzano siis hyväksyi äärettömyyden kokonaisuutena. Artikkelin[27] mukaan Bolzano on määritellyt joukon äärettömäksi, jos sen jokaisella alkiolla on seuraaja. Bolzanon kuvaileman menetelmän mukaan ääretön joukko saadaan siis valitsemalla jokin joukon aloitusalkio (esimerkiksi luku 1) ja muodostamalla sen avulla seuraava alkio, ja jälleen uuden alkion pohjalta seuraava. Tällaisesta prosessista esimerkkinä voidaan pitää muun muassa luonnollisten lukujen joukkoa, kun edelliseen lukuun lisätään aina luku 1.

Cantor loi perustan todellisen äärettömyyden hyväksymiselle antamalla äärettömyydelle matemaattisen määritelmän [14]. Cantor myös todisti, että äärettömyys ei ole vain äärettömän suurta tai päättymätöntä, vaan se on myös äärettömän pientä. Artikkelin [6] mukaan äärettömyys pohjautui aluksi vain todella pieneen ja todella suureen, ja äärettömyyttä pidettiin potentiaalisena. Cantor muutti tätä ajatusta hyväksymällä varsinaisen äärettömyyden matemaattisena kokonaisuutena ja äärettömät sarjat kokonaisuuksina. Kun Cantorin teoria hyväksyttiin, kysymykseen varsinaisen äärettömyyden olemassaolosta ei ole tarvinut enää etsiä vastausta [26]. Artikkelin [4] mukaan Cantor ratkaisi varsinaisen äärettömyyden ongelman käyttämällä joukkoja vertaillessa bijektiota tavallisen alkioiden laskemisen sijaan. Tällä tavalla tarkasteltuna esimerkiksi luonnollisten lukujen ja parillisten lukujen välille löytyy bijektio, jolloin niillä on sama kardinaliteetti ja joukot ovat yhtä suuret (äärettömät). Artikkelissa [19] mainitaan, miten Cantor osoitti, että on olemassa erisuuria äärettömyyksiä ja määritteli kardinaliteetin. Cantorin mukaan pienin rajallinen kardinaliteetti on $\mathbb{N}_0$, joka on luonnollisten lukujen kardinaliteetti.

Artikkelin [26] mukaan Bolzano käytti äärettömyyksiä vertaillessaan part-whole -periaatetta, joka on lähempänä konkreettisia kokemuksia. Artikkelissa sanotaan, että Cantor ylisti Bolzanoa varsinaisen äärettömyyden kiihkeänä tutkijana, mutta hän piti kuitenkin Bolzanon käsitteitä riittämättöminä ja virheellisinä.

1700-luvulla laskennalta puuttui vielä vakaa käsitteellinen perusta [11] ja

1700-luvun lopussa matemaatikot tulivat tietoisiksi niistä epäjohdonmukaisuuksista, joita ne teoriat, jotka käsittelivät infinidesimaalisia kokoja, näyttivät olevan täynnä. Kun näitä epäjohdonmukaisuuksia korjattiin, syntyi käsitys rajasta 1800-luvulla. 1800-luvun puolivälissä rajan käsitteestä tuli laskennan perusajatus ja raja muuttui yhä enemmän artimeettiseksi käsitteeksi geometrisen tulkinnan sijaan. Tämä johti siihen ideaan, että äärettömyys olisi todellista eikä potentiaalista.

1800-luvulla lukusuoraa alettiin kuvitella kokonaisuutena, johon numerot voitaisiin merkitä. Vuonna 1817 Bolzano huomasi tarpeen ottaa käyttöön reaalilukujen muodollisen määritelmän, joka johti Weierstrassin muodolliseen rajan määritelmään. [10]

Artikkelin [20] mukaan eksakti määritelmä äärettömyydestä on vain hieman yli 100 vuotta vanha. Modernin matematiikan mukaan eksakti määritelmä syntyi, kun Dedekind ja Cantor ratkaisivat ongelman potentiaalisesta äärettömyydestä 1800-luvun lopussa. Artikkelissa [25] kerrotaan, että 1895 Cantor kehitti teorian kardinaaleista ja tämä teoria on edelleen voimassa.

2.3 1900-luvulta nykypäivään

1960-luvulla Abraham Robinson palautti infinidesimaalin käsitteen todellisina ja tiukasti määriteltyinä matemaattisina objekteina niin kutustussa "epästandardisessa analyysissä", kun Weierstrass oli karkottanut käsitteen käytöstä noin sata vuotta aikaisemmin [12]. Epästandardi analyysi perustuu järjestettyyn, mutta ei täydelliseen joukkoon $\mathbb{R}^*$ eli hyperreaalilukuihin, toisin kuin standardianalyysi, joka perustuu täysin järjestettyyn joukkoon $\mathbb{R}$ (reaaliluvut). Hyperreaaliluvut ovat laajennettu joukko reaaliluvuista, jossa voidaan tarkasti määritellä infinidesimaalit. Jos $-a < e < a \ \forall a \in \mathbb{R}$, niin ainoa todellinen äärettömän pieni luku on 0. Lisäksi ei-nollan infinidesimaalisen luvun käänteisluu on ääretön (hyperreaalinen) luku. Artikkelin [12] mukaan Robinsonin epästandardi analyysi on aikaisempien, yli kahden vuosituhannen ajan käytettyjen infinidesimaalisten menetelmien, sopiva huipentuma, ellei jopa niiden oikeaksi todistaminen.

3 Äärettömyyden opettaminen ja ymmärtämiseen liittyviä ongelmia

3.1 Äärettömyyden opettaminen

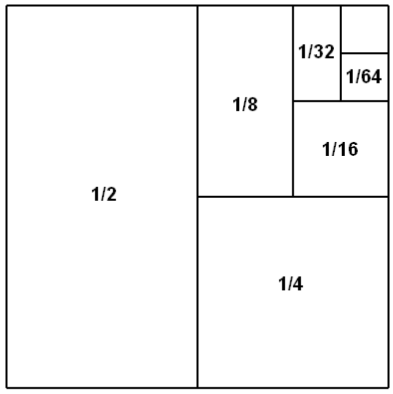
Artikkelissaan [5] Font, Bolite ja Acevedo kuvaavat millaisia erilaisia vertauksia opettajat käyttävät selittäessään funktioiden graafisia esitystapoja lukiossa. Artikkelin mukaan vertaukset ovat välttämättömiä, sillä ne luovat suhteen jo tiedossa olevan tiedon ja uuden tiedon välille. Tutkimuksessa selvisi, että oppettajat käyttivät useita erilaisia vertaustapoja. Ensimmäinen vertaustapa nimettiin fossilisoituneeksi vertaukseksi. Tällä tarkoitetaan vertausta, jota eri instituutiot pitävät kirjaimellisena ilmaisuna, eikä olla tietoisia sen vertauksellisesta alkuperästä. Tällaisten vertausten käyttämisessä hyödynnetään usein symboleita, esimerkkiksi Font ja kumppanit antavat nuolen, jota käytetään rajan merkkinä. Muita esimerkkejä olivat muun muassa ilmaukset "x kulkee kohti"ja "raja-arvo oikealta puolelta", vaikka todellisuudessa x ei liiku mihinkään ja eikä raja-arvolla ole todellisuudessa niin kutsuttua oikeaa tai vasenta puolta.

Toinen Font'n ja kumppaneiden esittämä vertaustyyppi [5] oli ontologiset eli olemassaolevat vertaukset. Artikkelin mukaan ne ovat kontekstillisia vertauksia, joiden perustana ovat fyysiset objektit ja niitä käytetään funktioiden graafisia esitystapoja selitettäessä. Ontologisiin vertauksiin voidaan sisällyttää esimerkiksi lause "kuuluuko tämä arvo määrittelyjoukkoon"tai se, että "pisteet ovat osa kuvaajaa". Tämä edellinen on myös kontekstillinen vertaus. Kolmas vertaustyyppi on objektillinen vertaus, jota käytetään esimerkiksi pyydättäessä "etsimään"funktion nollakohta, määrittelyjoukko tai leikkauspisteet. Objektillinen vertaus mahdollistaa sen, että voimme puhua ja pohtia abstrakteja kokonaisuuksia.

Suuntautumisvertaus on Font'n ja kumppaneiden esittämä neljäs vertaustyyppi. [5]. Tällaiset vertaukset eivät yhdistele käsitteitä toisiinsa, vaan järjestelevät niitä toistensa suhteen. Tämä viittaa siihen, että monissa tapauksissa on kyse paikallisesta suuntauksesta eli siitä, onko jokin esimerkiksi ylhäällä tai alhaalla, edessä tai takana tai sisällä tai ulkona ("vastaus on arvojen a ja b välillä", "-1 on täällä alhaalla"ja niin edelleen). Tähän viittaa myös se, että yleensä merkitään $x - akseli$ vaakasuoraan ja $y - akseli$ pystysuoraan, vaikka kirjat eivät tee tätä identifiointia käytännössä ikinä. Dynaaminen vertaus viittaa siihen, että usein oppilasta pyydetään ajattelemaan kuvaajaa polkuna tai tienä, jota pitkin kuljetaan. Vastaavasti piirrettäessä kuvaajaa, joka on määritelty välillä $]-\infty, \infty[$, piirretään todellisuudessa vain osa tästä, sillä on mahdotonta piirtää äärettömyyteen asti.

Artikkelissa [18] äärettömyyden käsitettä lähestytään paperia leikkaamalla. Tarkoituksena on ohjata oppilaita huomaamaan miten äärettömän prosessin lopputulos ei välttämättä ole ääretön. Artikkelissa tarkastellaan aihetta ottamalla metrin mittainen paperi ja asettamalla se pöydälle, tämän jälkeen toisesta yhtä pitkästä paperista leikataan ensin puolet ja laitetaan edellisen päälle, sitten leikataan jälleen puolet ja laitetaan ensimmäisen paperin päälle, toisen viereen. Näin puolittamista jatketaan, kunnes voidaan huomata, että tätä prosessia voisi periaatteessa jatkaa äärettömiin asti. Kun paperit asetetaan päällekäin, voidaan kuitenkin huomata, että vaikka prosessi jatkuu äärettömyyksiin, leikattujen papereiden yhteenlaskettu pituus ei koskaan ylitä kokonaisen paperin pituutta. Tätä on havainnollistettu kuvassa 3 leikkaamalla palat neliönmuotoisesta paperista.

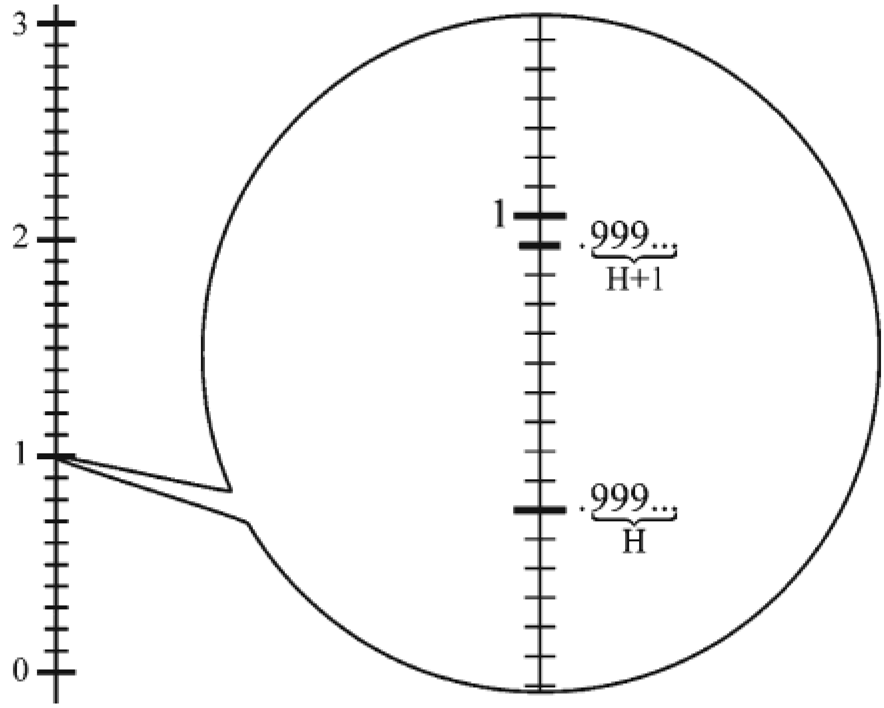
Lapset alkavat ymmärtää käsitystä äärettömyydestä noin kahdeksan vuotiaina, kerrotaan artikkelissa [19]. Ymmärtäminen alkaa siitä, kun lapsi alkaa huomaamaan, että laskemisen prosessia voidaan jatkaa yhä pidemmälle ja pidemmälle. Vaikka lapset oppivat laskemaan nuorina, he ymmärtävät vasta myöhemmin sen, että laskemisella ei ole loppua. Artikkelissa [22] sanotaan, että näyttää siltä, että intuitio äärettömyydestä, esimerkiksi siitä, mitkä joukot ovat äärettömiä ja miksi, kehittyy 10-vuotiaana. Artikkelissa pohditaan sitä, että jos tämä intuitio tunnistettaisiin ajoissa ja sitä käytettäisiin koulussa, olisi mahdollista, että se johtaisi syvempään numeeristen sarjojen ja numeeristen operaatioiden ymmärtämiseen.



Kuva 3: Aritmeettinen summa. https : //en.wikipedia.org/wiki/1/2_%2B_1/4_%2B_1/8_%2B_1/16_%2B_%E2%8)

Artikkelissa [9] infinidesimaalien ymmärtämisen parantamiseksi käytetään "suurennuslasia"tai "mikroskooppia". Artikkelin mukaan tällaista metodia voidaan käyttää esimerkiksi yhtäläisyyden $0,999\ldots = 1$ tarkasteluun. Tällöin lukuun 0,999... ajatellaan lisättävän aina yksi desimaali ja tarkentamalla lähemmäs lukua 1. Artikkelin mukaan tällaista keinoa käytetään usein pedagogisiin tarkoituksiin. Kuvassa 4 on esitettynä artikkelissa kuvattu suurennuslasi ja se, miten suurennuslasin avulla voidaan lisätä lukuun $0,999\ldots$ aina yksi desimaali ja tarkentaa lähemmäs lukua 1.

Toisena esimerkkinä artikkelissa [9] mainitaan HaYisraelin esimerkki (1310) hyvin pienestä korkista, joka on niin pieni, että voi kuvitella, ettei sitä pienempää ole olemassa. Kuitenkin esimerkin mukaan korkin keskellä on kiinteä keskipiste. Tästä voidaan huomata se, että HaYisraeli mainitsee korkin keskipisteen erillään korkista, joten korkki ei ole rappeutunut pelkäksi pisteeksi. Silti korkin kuvitellaan olevan niin pieni, ettei ole pienempää. Tämä viittaa siihen, että HaYisraeli viittaa infinidesimaaliseen korkkiin.



Kuva 4: "Suurennuslasi"infinidesimaalien tarkastelussa artikkelista [9].

3.2 Vaikeuksia aiheuttavia seikkoja

3.2.1 Useampi äärettömyys, kielestä aiheutuvat ongelmat, määritelmän ja keskustelun puutteellisuus

Yksi haaste äärettömyyden ymmärtämisessä nousee siitä, että ei ole olemassa vain yhtä, uniikkia äärettömyyttä [7]. Lisäksi siitä, että tällaista uniikkia äärettömyyttä ei ole, puhutaan yleensä vain vähän. Artikkelin mukaan ongelmat äärettömyyden ymmärtämisessä ovat lähtöisin murto-osista ja nollalla jakamisesta, joita ei käsitellä kouluissa riittävän tarkasti. Lisäksi artikkelissa mainitaan, että nollalla jakamiselle, äärettömyydelle ja asymptooteille on vaikea luoda tarinoita, jotka helpottaisivat oppimista. Tämä taas johtuu käyttämästämme kielestä sekä kielellisistä eroista puhutun kielen ja matemaattisen kielen välillä. Nämä erot, jotka ovat yleensä hienovaraisia, mutta kuitenkin ilmeisiä, lisäävät ymmärtämisvaikeuksia. Artikkelin [7] tuloksissa kerrotaan, että Ontarion opetussuunnitelmassa esimerkiksi mainitaan, että jakajana ei saa olla luku 0, mutta tätä ei kuitenkaan perustella mitenkään. Lisäksi se, että äärettömyyttä ei mainita opetussuunnitelmassa, esiintyy esimerkiksi suoraa käsiteltäessä. Opetussuunnitelmassa ei esimerkiksi mainita mitä tapahtuu, jos suoran kulmakerroin lähestyy ääretöntä tai nollaa. Lopulta artikkelissa tullaan johtopäätökseen, että yliopistossa opiskelijat taistelevat äärettömyyden kanssa siitä syystä, että äärettömyyden käsitettä ei ole otettu kunnolla käyttöön aikaisemmin. Artikkelin mukaan yleisin väärinkäsitys voisi johtua siitä, että ääretön on harvoin määritelty selkeästi eikä siitä keskustella tarkasti, hyvin määritellyssä kontekstissa.

Usein intuitiivisesti ajatellaan, että on olemassa vain yksi äärettömyys, joka on ehtymätön ja jota ei voida ylittää toisella äärettömyydellä [4]. Tämä johtuu siitä, että äärettömyys näyttää olevan yhtenevä ehtymättömyyden kanssa. Esimerkiksi kysyttäessä onko mahdollista saavuttaa jotain mielivaltaista pistettä C janalla AB jakamalla janan osia aina puoleksi, eli jos jakamisprosessia jatketaan loputtomiin, kaikki janan pisteet saavutettaisiin.

Artikkelissa [24] pohditaan sitä, onko positiivinen ääretön sama kuin negatiivinen ääretön. Esimerkiksi $\frac{1}{1-x}$ lähestyy positiivista ääretöntä, kun x lähestyy lukua 1 vasemmalta puolelta ja toisaalta se lähestyy negatiiviista ääretöntä, kun x lähesetyy lukua 1 oikealta puolelta. Ovatko nämä äärettömyydet yhtä suuret? Toisaalta taas pohditaan sitä, miten osoittajan lähestyessä ääretöntä (kun x kasvaa rajatta) nimittäjä voi kasvaa vielä suuremmaksi. Tästä voidaan pitää esimerkkinä osamäärää

$$\frac{x^2+4}{2x^3+3},$$

jossa x kasvaa rajatta.

Rajan käsite liittyy vahvasti äärettömyyteen ja myös sen ymmärtämiseen liittyy vaikeuksia. Artikkelissa [11] manitaan kaksi syytä, jotka aiheuttavat vaikeuksia opiskelijoille. Ensimmäisenä näistä on se, että rajan käsitteen kanssa täytyy pystyä koordinoimaan kahta prosessia yhtäaikaisesti: Sitä, että muuttuja x lähestyy jotain tiettyä arvoa, ja sitä, että tällöin funktion $f(x)$ arvo lähestyy jotain tiettyä arvoa. Toinen vaikeuksia aiheuttava ongelma on se, että rajan käsitteen hyvä ymmärtäminen vaatii ymmärryksen määritelmästä, joka pohjautuu epsiloniin ja deltaan, kahteen infinidesimaaliseen lukuun. Samassa artikkelissa mainitaan myös kaksi väärinymmärrystä, jotka vaikeuttavat äärettömyyden ja rajan käsitteiden ymmärtämistä. Ensimmäisenä näistä on intuitio siitä, että joukon osan täytyy olla kokonaisuutta pienempi, jolloin äärettömän joukon osajoukon täytyy olla äärellinen, sillä se ei voi olla suurin mahdollinen. Toinen väärinymmärrys liittyy kielellisiin ongelmiin tai haittoihin. Kieli vaikuttaa ihmisiin monilla tavoilla, ja etenkin rajan käsitteen kanssa on otettava huomioon se, että "raja"voi tarkoittaa montaa eri asiaa. Sana "raja"esiintyy esimerkiksi maantieteessä joidenkin alueiden rajana (boundaries), nopeusrajoituksissa, minimipalkassa... Muun muassa nämä termit sisältävät sanan limit (raja), mikä vaikeuttaa matemaattisen rajan käsitteen ymmärtämistä.

Artikkelissa [11] käsitellään tutkimusta, jossa on tutkittu muun muassa puhekielen ja kirjakielen (matemaattisten sanojen) vaikutusta äärettömyyden ja rajan käsitteiden ymmärtämiseen. Pääasiassa artikkelissa tarkastellaan sanojen ääretön (infinity) ja ääretön (infinite) käyttöä amerikkalaisten ja Etelä-Koreassa syntyneiden, mutta Yhdysvalloissa vähintään kolmen vuoden ajan opiskelleiden oppilaiden keskuudessa. Artikkelin mukaan Koreassa nämä kaksi sanaa äärettömyydestä ovat enemmän matemaattisia ja harvemmin käytössä puhekielessä, mikä vaikutti siihen, että sanojen käyttö korealaisten keskuudessa oli abstraktimpaa ja matemaattisempaa kuin yhdysvaltalaisten keskuudessa. Yhdysvaltalaiset käyttivät sanaa ääretön yhdessä sanan "määrä"kanssa ja se yhdistettiin useammin tosielämän ilmiöihin. Artikkelin mukaan voidaan olettaa, että yhdysvaltalaisilla sana ääretön esiintyy ensin puhekielessä ja sitten vasta matemaattisessa kielessä, kun taas korealaisilla tämä on päinvastoin. Artikkelin [19] mukaan ongelmia aiheuttaa myös se, että äärettömästä joukosta puhutaan usein siten, että siihen liitetään äärellisen joukon ominaisuuksia.

3.2.2 Äärettömyyden ajatteleminen vain prosessina

John Monaghan kuvailee artikkelissaan [17] tutkimusta, jonka mukaan $\frac{4}{91}$ ensimmäisen vuosikurssin lukiolaisista ja $\frac{32}{97}$ toisen vuosikurssin lukiolaisista näyttivät tiedostavansa toistuvien äärettömien desimaalien olemassaolon. Tutkimuksen mukaan uskominen infinidesimaalisen pieniin lukuihin näyttää olevan harvinaista, mikä johtuu siitä, että äärettömyyden ajatellaan olevan prosessi. Äärettömyden ymmärtämisen vaikeuteen vaikuttaa myös se, että peruskoulun opettajista $79,1\%$ määrittelee äärettömyyden prosessina ja $27,9\%$ objektina [14].

Myöhemmin kuvailtavaan, artikkelissa [4] esitettyyn, kahtiajaon paradoksiin liittyy äärettömyyden oppimisen vaikeuteen yhdistettävä ongelma. Kun oppilailta on kysytty, mitä saadaan summaksi, kun lasketaan $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, niin tavallisin vastaus on ääretön. Tämä viittaa siihen, että summattaessa ääretön määrä lukuja yhteen, oppilailla on taipumus sekoittaa aikaa vievä prosessi siihen, että myös summa olisi ääretön.

Artikkelissa [2] mainitaan, että varsinainen äärettömyys tulee koulussa esillä vasta noin 15-vuotiailla, joten monilla oppilailla ei ole käsitystä varsinaisesta äärettömyydestä. Tästä syystä äärettömyyteen liittyviä ongelmia käsitellään usein muuttamalla ne äärettömiin sarjoihin liittyviksi.

Yleinen ongelma äärettömien desimaalien kanssa on se, että esimerkiksi lukujen $0,999\ldots$ ja 1 kohdalla opiskelijoiden ajattelu rajoittuu luvun $0,999\ldots$ kohdalla prosessikäsitykseen ja luvun 1 kohdalla objektikäsitykseen. Tällä tarkoitetaan sitä, että opiskelijat ajattelevat luvun $0,999\ldots$ jatkuvan, mutta luku 1 ajatellaan jo valmiina objektina. [3]. Kun ääretön prosessi luvun $0,999\ldots$ kohdalla saadaan kapseloitua, voidaan huomata, että lukujen $0,999\ldots$ ja 1 välinen ero on pienempi kuin mikään positiivinen luku, joten eron on oltava 0. Tällöin yhtäpitävyys $0,999\ldots = 1$ pätee. Toinen ongelma luvun $0,999\ldots$ ymmärtämisessä voi artikkelin [3] mukaan olla se, että desimaalien lukumäärän ajatellaan olevan äärellinen, mutta määrittelemätön. Toisaalta taas yhtälön $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ ajatellaan pitävän paikkansa, koska siinä olevia lukuja $\frac{1}{3}$ ja $0,333\ldots$ pidetään molempia prosesseina.

3.2.3 Äärettömyyden abstrakti luonne ja erottaminen jokapäiväisestä elämästä

Artikkelissa[14] mainitaan useita syitä, miksi ääretöntä voi olla vaikea ymmärtää. Heidän mukaansa yksi pääasiallisista vaikeuksista aiheutuu äärettömyyden abstraktista luonteesta. Ääretön on vaikea liittää jokapäiväisiin kokemuksiin ja sen ymmärtäminen on siksi riippuvainen meidän kyvyistämme kuvitella asioita. Vaikeutta lisää se, että matematiikassa äärettömiä summia voidaan laskea viittaamatta aikaan. Matematiikan ulkopuolella jonkin prosessin jatkuminen loputtomiin on merkityksetön, sillä konkreettisessa maailmassa loputtomia prosesseja ei voi olla olemassa [14]. Todellisessa maailmassa pituus ja määrä ovat yleensä suoraan verrannollisia [15], mikä aiheuttaa lisää ongelmia äärettömyyden ymmärtämisessä. Pituuden ja määrän suoraanverrannollisuutta voidaan havainnollistaa esimerkiksi piirtämällä kaksi eripituista janaa. Jos ymmärretään se, että kahden pisteen (esimerkiksi janojen päätepisteiden) välissä on ääretön määrä pisteitä, voidaan huomata, että molemmissa janoissa on ääretön määrä pisteitä. Nämä äärettömät eivät kuitenkaan ole yhtä suuret, sillä janat eivät ole yhtäpitkät. Tästä voidaan päätellä, että pituuden ja määrän suoraanverrannollisuus ei pädekään äärettömissä tapauksissa. Koska janat eivät ole yhtä pitkät, niissä ei voi olla sama ääretön määrä pisteitä huolimatta siitä ajatuksesta, että ääretön on suurin mitä on. Artikkelissa [15] ongelmaksi mainitaan se, että ajatus äärettömän monen objektin keräämisestä yhteen ja ajatteleminen kokonaisuutena on todella vaikeaa.

Artikkelin [14] mukaan äärettömyys on vaikea ymmärtää myös siksi, että sitä ei käytetä jokapäiväisessä elämässä ja se eroaa hyväksytyistä matemaattisista määritelmistä. Yksi ongelma ilmaantuu, kun oppilaat pyrkivät vertailemaan kahta eri suurta ääretöntä keskenään. Esimerkiksi vertaillessa kahta ääretöntä sarjaa, joista toinen on toisen osasarja (esim. toisena sarjana luonnolliset luvut ja toisena luvun 4 monikerrat). Intuitiivisten menetelmien käyttö aiheuttaa myös ongelmia äärettömyyden ymmärtämisessä.

Artikkelin [4] mukaan käsiteltäessä sellaisia käsitteitä, jotka ovat erittäin abstrakteja tai monimutkaisia, ihmisen päättely pyrkii korvaamaan ne tutummilla vastikkeilla, joita voi olla esimerkiksi myös helpompi manipuloida. Nämä niin kutsutut päänsisäiset mallit vaikeuttavat muun muassa äärettömyyden käsitteen ymmärtämistä. Lisäksi tällaisten mallien käyttäminen ei aina ole tiedostettua ja ne voivat johtaa vääristyneisiin tulkintoihin ja johtopäätöksiin juuri siksi, koska ne ovat tietoisesti hallitsemattomia.

Artikkelissa [10] kerrotaan, että aikaisemmin matematiikka on liitetty luonnollisiin ilmiöihin, havaintoihin, mielikuvitukseen ja sitä on laskettu symbolisesti. Ongelmia monille aiheuttaa se, kun koulun luonnollisesta matematiikasta siirrytään yliopiston muodolliseen matematiikkaan, joka on huomattavasti abstraktimpaa.

Artikkelin [21] tutkimuksessa esiintulleet äärettömien joukkojen yhtenevyyksien arvioinnin perustelutavat luokitellaan artikkelissa kahdeksaan eri luokkaan. Bijektiolla kaksi ääretöntä joukkoa voidaan luokitella yhteneviksi, jos jokaiselle joukon alkiolle löydetään sitä vastaava alkio toisesta joukosta. Osa opiskelijoista arvioi kaikki äärettömät joukot yhteneviksi, toiset arvioivat kaksi ääretöntä joukkoa epäyhteneviksi, jos toinen oli joukon osajoukko, eli sisältyi toiseen joukkoon. Jotkut opiskelijoista arvioivat, että äärettömiä joukkoja ei voi vertailla ja osa arvioi äärettömiä joukkoja intervallien avulla. Rajatun ja äärettömän joukon vertailulla tarkoitetaan sitä, että esimerkiksi janassa, joka on rajattu, täytyy olla vähemmän elementtejä kuin rajoittamattomassa joukossa. Voimalla viitataan joukkojen (epä)tasa-arvoiseen tasapainoon, elementtien äärettömään määrään tai kokoon. Kahdeksanteen luokkaan kuuluvat muut määritelmät, kuten äärelliset ideat, sisällön tulkinnat ja vastaamatta jätetyt. Näistä kahdeksasta ainoastaan joukkojen bijektiivisyyden ja "voimasuhteiden"vertailu ovat oikeita tapoja verrata äärettömiä joukkoja keskenään. Artikkelin tutkimuksessa selvisi, että useamman kuin yhden metodin käyttö äärettömiä joukkoja vertaillessa johtaa yleensä ristiriitaisuuksiin, jolloin esimerkiksi mainittaessa, että joukkoja ei voi vertailla, niiden vertailua kuitenkin jatketaan tai julistettaessa ensin kaikki äärettömät yhtäsuuriksi, jälkikäteen sanotaan kuitenkin kahden äärettömän joukon olevan epäyhteneviä.

3.2.4 Todellisen maailman rajallisuus

Yhdeksi vaikeuksien aiheuttajaksi artikkelissa [14] mainitaa myös fyysisen maailman rajoitukset, kuten paperin äärettömän koon, ihmisten taidot ja niin edelleen. Tämä aiheuttaa ongelmia etenkin äärettömyyden ymmärtämisessä geometrisissa konteksteissa.

Artikkelissa [1] kerrotaan, että vaikeuksia äärettömyyden ymmärtämiselle aiheutaa esimerkiksi se, että ennakkoasenteemme ovat äärellisissä joukoissa jolloin pyrimme vertaamaan asioita äärellisiin asioihin ja niiden ominaisuuksiin. Ne aritmeettiset operaatiot, joita voidaan yleisesti käyttää äärellisiin lukuihin, ei toimi äärettömien lukujen kanssa samalla tavalla. Artikkelin [19] mukaan yleisin virhe äärettömyyden ymmärtämisessä on ajatella äärettömyyttä kuin erittäin suurta äärellistä lukua.

Artikkelin [28] mukaan Aristoteles väitti, että vaikka kaikki luonnolliset luvut ovat olemassa, ihminen ei voi kuvitella niiden kokonaisuutta, koska meidän olemassaoloamme rajoittaa aika. Tällaisen kokonaisuuden laskemista ei voida toteuttaa, sillä se vaatisi koko ajan. Tämä ajan ja elämän rajallisuus aiheuttaa ongelmia äärettömyyden ymmärtämisessä.

Artikkelissa [23] kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilaille annetaan tehtävä, jossa on kaksi osaa. Ensimmäisessä osassa kuvataan janaa $AB = 1\,m$. Tähän lisätään ensin jana $BC = \frac{1}{2}\,m$, sitten jana $CD = \frac{1}{4}\,m$ ja niin edelleen. Kysymyksenä on se, että tuleeko tämä janojen lisäämisen prosessi ikinä päätökseen. Tehtävän toisessa osassa kysytään edellisen kohdan janojen pituuksien summaa. 84% vastaajista vastasi ensimmäiseen kyvysmykseen, että janojen osien lisääminen ei lopu koskaan ja 14% vastasi sen loppuvan. Toisessa kohdassa vain 6% vastasi, että janojen pituuksien summa olisi 2, 17% vastasi summan olevan alle 2 ja 51% vastasi summan olevan ääretön. Tästä esimerkistä voidaan huomata se vaikeus, joka liittyy ääretömyyteen, kun arkielämässä käsitellään pääasiassa vain äärellisiä prosesseja ja asioita, mikä mainitaan myös sudenkuoppana, joka voi vaikuttaa tutkimustuloksiin tutkittaessa nuorten ajatuksia äärettömyydestä [23].

Osa oppilaista saattaa ajatella, että äärellinen on jotain, jolla on reunat tai rajat [22]. Tästä syystä esimerkiksi joukkoa $\{2, 5\}$ pidetään äärellisenä, sillä se alkaa luvusta 2 ja päättyy lukuun 5, jolloin se rajoittuu näiden väliin. Tästä ajattelutavasta seuraa se, että äärettömän ajatellaan olevan jotain, jolla ei ole rajoja.

3.2.5 Samat menetelmät vertaillessa äärellisiä ja äärettömiä joukkoja

Myös artikkelissa [20] mainitaan useampi seikka, joka aiheuttaa ongelmia äärettömyyden ymmärtämisessä. Eräs näistä on se, että usein opiskelijat käyttävät vaistonvaraisesti äärettömien joukkojen vertailuun samoja menetelmiä kuin äärellisten joukkojen vertailuun, vaikka tämä johtaa usein ongelmiin. Myös artikkeleissa [2] ja [21] manitaan tämä ongelma, jossa äärettömien joukkojen käsittelyssä käytetään samoja menetelmiä kuin äärellisten joukkojen tapauksessa. Artikkelin [2] mukaan tämä johtuu siitä, että siirtyminen äärellisestä äärettömään ajatellaan usein olevan asteittaista, mikä johtaa siihen, että ihmisillä on taipumus siirtää ne ominaisuudet, jotka ovat aikaisemmin tuntuneet äärellisten asioiden kanssa helpoilta, äärettömyyteen. Tämä vaikuttaa myös siihen, että yksilöt eivät välttämättä ymmärrä eroa erittäin suuren äärellisen joukon ja äärettömän luonnollisten lukujen joukon välillä. Esimerkiksi luokusuoralle laitettaessa useat laittava luonnollisten lukujen joukon koon samaan kohtaan kuin aavikon hiekanjyvien määrän. Lisäksi osa 1. vuoden yliopisto-opiskelijoista on tutkimuksessa ajatellut äärettömyyden olevan suurin mahdollinen luku. Esimerkiksi artikkelissa [8] mainitaan tulkinta, jonka mukaan joukko ja sen aito osajoukko eivät voi olla yhteneviä. Tämä ei kuitenkaan päde äärettömässä tapauksessa, vaan esimerkiksi joukot $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ ovat molemmat äärettömiä, vaikka joukko B on joukon A aito osajoukko. Tällä tavalla ajatellessa yritetään usein vahvistaa uskoa eri kardinaaliluvuista käyttämällä "osittain kokonaista"(part-whole) perustelua, jossa ei oteta huomioon joukon ääretöntä kokoa, yks-yhteen vastaavuuden (bijektio), joka määrittää vastaavuuden äärettömien joukkojen välillä.

Artikkelissa [22] erääksi ongelmaksi äärettömyyden hahmottamisessa todetaan se, että oppilaat ekstrapoloivat äärellisestä äärettömään. Tällä tarkoitetaan sitä, että oppilaat käyttävät äärettömien joukkojen vertailemiseen samoja periaatteita, joilla vertailisivat äärellisiä joukkoja. 8.-luokan oppilaita pyydettiin vertailemaan joukkoja $\{2, 4, 6, \ldots\}$ ja $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ sekä joukkoja $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ja $\{1, 3, 5, \ldots\}$. Heiltä kysyttiin kummassa sarjassa on enemmän elementtejä. Osa oppilaista väitti, että positiivisia kokonaislukuja on enemmän kuin positiivisia parillisia kokonaislukuja, sillä jos otetaan luvut, jotka ovat pienempiä kuin luku 10, niin välillä $[0, 10]$ positiivisia kokonaislukuja on enemmän. Lisäksi perusteluina käytettiin esimerkiksi sitä, että positiivisia kokonaislukuja on enemmän, sillä ne sisältävät sekä parittomat, että parilliset kokonaisluvut tai, että parillisia lukuja on enemmän kuin parittomia, sillä ne sisältävät luvun 0.

Myös artikkelissa [21] kerrotaan, miten muutos äärellisten joukkojen vertailusta äärettömien joukkojen vertailemiseen on ongelmallinen monille opiskelijoille. Tällöin äärettömien joukkojen vertailemiseen käytetään helposti monia eri vertailutapoja, mikä johtaa ristiriitaisuuksiin, tällaisia vertailutapoja voi olla esimerkiksi joukon sisällyttäminen toiseen joukkoon sekä bijektio. Sisällyttämisen avulla tulokseksi saadaan, että äärettömissä joukoissa on eri määrä alkioita, jos toinen joukko on toisen osajoukko, kun taas bijektiota käytettäessä tullaan siihen tulokseen, että samat joukot ovat yhteneviä.

3.2.6 Visuaaliset vihjeet

Eräs ongelmia aiheuttava seikka on se, että opiskelijat ovat alttiita visuaalisille vihjeille. Kuitenkin ne visuaaliset vihjeet, joita voimme ympäristöstämme saada, ovat kaikki äärellisiä, mikä vaikeuttaa äärettömän hahmottamista. Esimerkkinä tästä artikkelissa [8] mainitaan se, että opiskelijoiden on helpompi yhdistää joukko $1, 2, 3...$ joukkoon $1^2, 2^2, 3^2...$ kuin joukkoon $1, 4, 9...$ vaikka kaksi viimeistä ovat sama joukko.

Artikkelissa [6] mainitaan, että geometristen objektien äärettömiä ilmiöitä on vaikeampi tarkastella, kuin lukuihin perustuvia ilmiöitä. Tämä johtuu siitä oletuksesta, että geometriset objektit on mahdollista visualisoida ja lisäksi niitä pidetään osana todellista maailmaa.

Äärettömät desimaalit tuottavat monille ongelmia. Useissa tutkimuksissa pohditaan esimerkiksi lukujen 0,999... (missä desimaali on jatkuva) ja 1 eroa, ja vastaavasti lukujen $\frac{1}{3}$ ja 0,333... eroja. Yleensä opiskelijat väittävät, että $0,999\ldots < 1$ ja $0,333\ldots < \frac{1}{3}$, kun taas opettjat ja matemaatikot väittävät lukujen olevan samat [24]. Tässä aiheuttaa ongelmia se, että kerrottaessa $0,333\ldots \cdot 3 = 0,999\ldots = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, mutta kuitenkin $1 - 0,999\ldots = 0,000\ldots 1$, missä luku 1 on äärettömän suuren indeksin omaavalla paikalla. Artikkelissa [10] kerrotaan, että osa oppilaista ymmärsi, että $\frac{1}{9} = 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$, mutta eivät hyväksyneet samaa yhtälöä toisinpäin kirjoitettuna ($0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots = \frac{1}{9}$). Syynä tähän annettiin se, että jakamalla $\frac{1}{9}$ peräkkäin saadaan ensin 0,1, sitten 0,01 ja niin edelleen, kun taas $0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$ ei voida summata siten, että saataisiin $\frac{1}{9}$, koska prosessi on potentiaalisesti ääretön eikä sitä voida saada loppuun.

Artikkelissa [4] mainitaan, että on mahdotonta kuvitella janan, neliön ja kuution pisteiden lukumäärien olevan yhteneviä. Tämä johtuu pääasiassa siitä, että kyseisten kuvioden antavat visuaaliset vihjeet viittaavat siihen, että pisteiden lukumäärän pitäisi kasvaa, kun janasta piirretään neliö ja neliö edelleen laajennetaan kuutioksi. Cantorin mukaan on mahdollista, että vaikka vertailtavat joukot olisivat kaikki äärettömiä, kuten janan, neliön ja kuution pisteiden lukumäärän tapauksessa, ne eivät välttämättä silti ole yhteneviä. Toisena esimerkkinä artikkelissa mainitaan tästä luonnolliset luvut ja reaaliluvut, joiden molempien joukko on ääretön, mutta luonnollisten lukujen ja reaalilukujen välille ei voida muodostaa bijektiota, jolloin ne eivät ole yhteneviä.

Artikkelin [21] tutkimuksessa havaitaan, että vertaillessa joukkoja $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ja $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ opiskelijat käyttävät huomattavasti helpommin bijektiivistä vertailumenetelmää kuin joidenkin muiden joukkojen kohdalla.

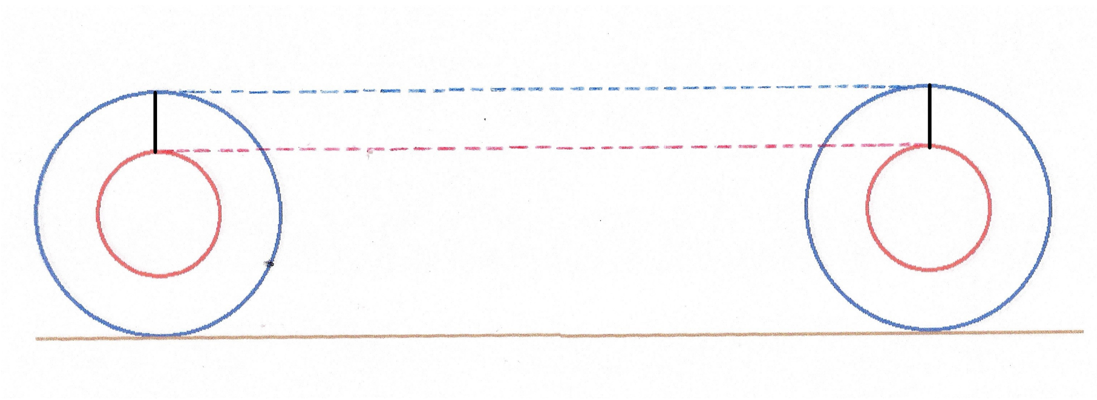
Tähän uskotaan vaikuttavan se, että joukot ovat visuaalisesti samannäköisiä, jolloin alkioita aletaan intuitiivisesti vertailemaan visuaalisesti ja bijektiivisesti.

3.3 Paradokseja

Paradoksilla tarkoitetaan väitettä, joka voi näyttää loogiselta, mutta johtaa kuitenkin loogiseen ristiriitaan tai tilanteeseen, joka ei ole muuten järkevä. Toisaalta paradoksilla voidaan tarkoittaa myös väitettä, joka näyttää epäloogiselta, mutta voi olla loogisesti selitettävissä. Koska paradoksit ovat tällä tavoin ristiritaisia, ne vaikeuttavat siihen liittyvien asioiden ymmärtämistä. Useat paradoksit liittyvät äärettömyyteen, ja näin ollen hankaloittavat äärettömyyden käsitteen ymmärtämistä. Paradokseja voidaan luokitella erityyppisiin paradokseihin, joissa pohditaan eri asioita. Itseensä viittaavissa paradokseissa pohditaan esimerkiksi sitä, voiko joukko olla itsensä osa. Ajan paradoksit viittaavat ajan jatkumiseen äärettömyyteen asti ja niissä pohditaan sitä, onko aika aina jatkunut. Mekaaniset paradoksit viittaavat johonkin toimintaan, joista esimerkkinä on muun muassa myöhemmin tässä kappaleessa kuvailtu Aristoteellisen pyörän paradoksi. [2]. Äärettömät iteratiiviset prosessiparadoksit koostuvat artikkelin [2] mukaan toiminnasta, jota toistetaan ilman loppua. Näissä paradokseissa pohditaan sitä, mitä tapahtuu prosessin valmistuttua.

Artikkelin [14] mukaan yksi tunnetuimmista paradokseista on niin kutsuttu Zenon paradoksi. Siinä Achilles, joka on kilpikonnaa nopeampi, ajaa kilpikonnaa takaa. Aina, kun Achilles saavuttaa paikan, jossa kilpikonna oli ollut hetki sitten, kilpikonna on ehtinyt hieman eteenpäin. Näin ajatellen Achilles ei voisi koskaan todella saavuttaa kilpikonnaa. Jotta voisimme kuvitella tämän prosessin jatkumista äärettömyyteen asti, meidän on ensin sisäistettävä prosessi, jossa uusia vaiheita luodaan jatkuvasti. Tällainen ajatus äärettömiin asti jatkuvasta prosessista vastaa potentiaalista ääretöntä. Ajatellaan tätä paradoksia varsinaisen äärettömyyden näkökulmasta yrittämällä laskea ja verrata Achilleen ja kilpikonnan kulkemia teitä keskenään äärettömän askeleen jälkeen. Ajatelaan, että Achilles juoksee 10 kertaa kilpikonnaa nopeampaa ja kilpikonna aloittaa $0.9\,m$ Achilleen edestä. Näin ollen Achilleen täytyy juosta ääretön sarja $0.9\,m, 0.09\,m, 0.009\,m\ldots$. Tästä voidaan laskea ja tulla johtopäätökseen, että äärettömän määrän askeleiden jälkeen Achilleen matka lähestyy samaa arvoa kuin kilpikonnan kulkema matka, joka on $1\,m$. Koska Achilles kulkee kilpikonnaa nopeampaa, ääretön määrä askelia tapahtuu äärellisessä ajassa, mikä tarkoittaa sitä, että ennemmin tai myöhemmin Achilles saavuttaa kilpikonnan. Artikkelin [4] mukaan Morris Kline on sitä mieltä, että Zenon paradoksi voidaan ratkaista loogisesti viittaamalla Cantorin teoriaan äärettömistä numeroista, jonka mukaan kaksi erimittaista janaa sisältää yhtä monta pistettä, koska voidaan osoittaa pistejoukkojen vastaavuus. Tämän mukaan Achilles ja kilpikonna ovat joka hetki jossakin pisteessä omalla reitillään, eivätkä koskaan ole samassa pisteessä uudelleen. Koska molemmat juoksevat yhtä kauan, he käyvät läpi yhtä monta pistettä. Jotta Achilles voisi voittaa kilpailun, hänen olisi ohitettava kilpikonna ja näin ollen kuljettava useamman pisteen kautta. Tämä on kuitenkin mahdotonta samassa ajassa, yhtä monta pistettä omaavalla reitillä. Näin ollen Achilles ei voi päästä kilpikonnan ohi. Artikkelin [2] mukaan Achilleen ja kilpikonnan paradoksi sisältää kaksi iteraatiota, joista toinen hyödyntää aina sitä, mitä toisessa tapahtui edellisessä iteraatiossa. Lisäksi paradoksi koostuu ideasta, jonka mukaan Achilles ei koskaan saavuta kilpikonnaa, koska nämä kaksi prosessia eivät lopu. Artikkelissa [2] todetaan, että summaamalla Achilleen ja kilpikonnan kulkemat matkat erikseen, voidaan huomata, että rajallisessa ajassa Achilleen kulkema matka on kilpikonnan kulkemaa matkaa pidempi.

Toinen artikkelissa [2] kuvattu paradoksi on niin kutsuttu tennispalloparadoksi. Siinä oletetaan, että on olemassa ääretön joukko numeroituja tennispalloja ja suuri pöytä. Ensin pöydälle laitetaan pallot 1 ja 2, ja poistetaan pallo 1. Sitten laitetaan pöydälle pallot 3 ja 4, ja poistetaan pallo 2. Laitetaan pallot 5 ja 6, ja poistetaan pallo 3. Tätä toistetaan äärettömyyteen asti. Paradoksi koostuu siis iteraatiosta, jossa pöydälle laitetaan aina kaksi uutta palloa ja poistetaan pallo, jossa on pienin numero. Kysymyksenä on, kuinka



Kuva 5: Aristoteellisen pyörän paradoksi. ($https : //en.wikipedia.org/wiki/Aristotle\%27s\_wheel\_paradox$)

monta palloa pöydällä on lopuksi, ja näyttää siltä, ettei tätä voida määrittää. Myös tennispalloparadoksin ratkaisu liittyy potentiaalisen ja varsinaisen äärettömyyden erotteluun.

Eräs äärettömyyteen liittyvä paradoksi on Aristoteellinen pyörän paradoksi [13]. Paradoksissa astetaan kaksi ympyrää sisäkkäin, ja niitä kieritetään eteenpäin siten, että ulompi ympyrä kiestää täyden kierroksen. Tällöin näyttää siltä, että ympyrät kulkevat saman matkan, mikä korreloisi sen kanssa, että ympyröiden piirit ovat yhtä pitkät (kts. kuva 5).

Artikkelissa [4] kuvaillaan niin kutsuttu kahtiajaon paradoksi. Sen mukaan, jotta voisi siirtyä pisteestä A pisteeseen B, on ensin kuljettava puolet tästä pisteiden välisestä matkasta, jolloin saavutaan pisteeseen C. Tämän jälkeen on kuljettava puolet psiteiden C ja B välisestä etäisyydestä, ja tätä puolittamista voidaan jatkaa loputtomasti. Tämä tarkoittaa sitä, että siirtyäkseen pisteestä A pisteeseen B, täytyy siirtyä ääretön määrä etäisyyksiä, mitä ei kuitenkaan voida suorittaa annetussa ajassa. Näin ollen koskaan ei voida saavuttaa pistettä B.

Nuoliparadoksissa ajatellaan nuolta, joka on ammuttu ilmaan [4]. Sen mukaan nuoli ei liiku siinä tilassa jossa se on (voidaan ottaa esimerkiksi valokuva, jossa nuoli on pysähtynyt), mutta toisaalta se ei liiku myöskään siinä tilassa, jossa se ei ole. Tällöin nuoli, joka näyttää liikkuvan, on itseasiassa levossa jokaisessa lennon vaiheessa. Artikkelin [4] mukaan Zeno oli oikeassa tämän paradoksin suhteen, mutta harhaanjohtavaa tässä on se, että paradoksissa sekoitetaan kaksi perustavanlaatuisesti erilaista ominaisuutta, tila ja aika. Tämä perustellaan sillä, että paikasta A paikkaan B kulkeva kappale saavuttaa pisteen B, koska aika on jatkuva. Tällöin liike ei pysähdy jokaisessa pisteessä, kuten Zeno on väittänyt.

Artikkelissa [27] mainitaan paradoksi, jota Bolzano käsitteli. Niin kutsutun kokonaislukuparadoksin mukaan jokainen luku on äärellinen, joten miten kaikkien lukujen joukko voi olla ääretön. Kaikkien lukujen joukko on lueteltava viimeisellä numerolla, ja koska se on itsessään äärellinen numero, koko joukko ei voi olla ääretön. Artikkelin mukaan Bolzano väittää, että viimeisellä paikalla ei esiinny kokonaislukua, koska periaatteen mukaan jokaiselle kokonaisluvulle on olemassa seuraaja.

3.4 Lopuksi

Lähteinä olevien artikkelien perusteella voidaan todeta, että äärettömyys käsitteenä on erittäin vaikea ymmärtää ja lisäksi näitä haasteita syntyy monesta eri syystä. Äärettömyyden ymmärtämiseen vaikuttavat muun muassa ihmisen fysiologiaan liittyvät syyt, joiden mukaan esimerkiksi visuaaliset vihjeet vaikuttavat siihen, miten äärettömyyttä käsitellään. Lisäksi ongelmia aiheuttaa se ympäristö, jossa toimimme jokapäiväisessä elämässä. Ympäristömme antaa meille kuvan siitä, että kaikki täällä maailmassa on äärellistä, mikä aiheuttaa sen, että ääretöntä on yhä vaikeampi ymmärtää.

Muita äärettömyyden ymmärtämiseen liittyviä ongelmia aiheuttaa äärettömyyden abstrakti ja monipuolinen luonne sekä se, miten äärettömyyttä pyritään helposti käsittelemään samalla tavalla kuin äärellisiä joukkoja. Useamman äärettömyyden olemassaolo, äärettömyyden luonne olla sekä prosessi, että objekti ja keskustelun puutteellisuus vaiekuttaa äärettömyyden oppimista.

Äärettömyyden käsitteeseen ja ymmärtämiseen on liittynyt haasteita kautta aikojen. Tämä johtaa siihen, että vaikka äärettömyyttä on käsitelty jo vuosituhansia, uusin määritelmä on vasta noin sata vuotta vanha. Lisäksi äärettömyyden määritelmä ja siihen liittyvät asiat, kuten infinidesimaaliset luvut, sekä niiden hyväksyminen on muttunut vuosisatojen aikana useaan kertaan. Äärettömyyden käsite on aiheuttanut ristiriitaisuuksia ja erimielisyyksiä jopa samaan aikaan eläneiden matemaatikoiden välille.

Vaikka suomalaisessa lukiossa äärettömyys tulee esille esimerkiksi raja-arvoja opetettaessa ja laskettaessa, niiden syvällinen käsittely jää todella vähäiseksi. Lukiossa opetetaan laskemaan raja-arvo, kun muuttuja lähestyy ääretöntä, mutta tästä äärettömyydestä ei puhuta sen enempää.

Lähdeluettelo

[1] Aztekin, S., Arikan, A. ja Sriraman, B.: *The Construct of PhD Students about in Infinity: An Application of Repertory Grids*, The Mathematics Enthusiast: Vol 7: No. 1, Article 9. (2010).

[2] Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. ja Brown, A.: *Some histroical issues and paradoxes regarding the consept of infinity: An apos-based analysis: Part 1*, Educational Studies in Mathematics, 58:335-359, (2005).

[3] Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. ja Brown, A.: *Some histroical issues and paradoxes regarding the consept of infinity: An apos-based analysis: Part 2*, Educational Studies in Mathematics, 60:253-266, (2005).

[4] Fischbein, Efraim: *Tacit models and infinity*, Educational Studies in Mathematics, 48:309-329, (2001).

[5] Font, V., Bolite, J. ja Acevedo, J.: *Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions*, Educational Studies in Mathematics, 75:131-152, (2010).

[6] Jirotkova, D. ja Littler, G.: *Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct*, ERIC Clearinghouse, (2003).

[7] Kajander, A. ja Lovric, M: *"It Does Not Exist": Infinity and Division by Zero in the Ontario Mathematics Curriculum*, Canadian Journal of Schiense, Mathematics and Technology, 18:154-163, (2018).

[8] Kattou, M., Michael, T. Kontoyianni, K. Christou, C. ja Philippou, G.: *Teachers' perception about infinity: A process or an object?*, CERME 6, Working group 10, 1771-1780, (2009).

[9] Katz, K. ja Katz, M.: *Zooming in on infinitesimal 1-.9... in a post-triumvirate era*, Educational Studies in Mathematics, 74:259-273, (2010).

[10] Kidron, I. ja Tall, D.: *The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process*, Educational Studies in Mathematics, 88:183-199, (2015).

[11] Kim, D., Sfard, A. ja Ferrini-Mundy, J.: *Students' colloquial and mathematical discourses of infinity and limit*, Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, s. 201-208, (2005).

[12] Kleiner, I.: *History of the infinitely small and the infinitely large in calculus*, Educational Studies in Mathematics, 48:137-174, (2001).

[13] Knobloch, E.: *Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity*, Archive for History of Exact Sciences, 54:87-99, (1999).

[14] Kolar, V. ja Čadež: *Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity*, Educational Studies in Mathematics, 80:389-412, (2012).

[15] Mamolo, A.: *Intuitions of "infinite numbers": infinite magnitude vs. infinite representation*, The Mathematics Enthusiast, Vol. 6, No. 3, Article 3, 305-330, (2009).

[16] Martinez-Planell, R., Gonzales, A., DiChristina, G. ja Acevedo, V.: *Students' conception of infinite series*, Educational Studies in Mathematics, 81:235-249, (2012).

[17] Monaghan, J.: *Young peoples' ideas of infinity*, Educational Studies in Mathematics, 48:239-257, (2001).

[18] Montes, M. ja Carrillo, J.: *What does it mean as a teacher to "know infinity"? The case of convergence series*, CERME 9, 3220-3226, (2015).

[19] Pantsar, M.: *In search on N_0: how infinity can be created*, Synthese, 192:2489-2511, (2015).

[20] Pehkonen, E., Hannula, M., Maijala, H. ja Soro, R.: *Infinity of numbers: how students understand it*, Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, s. 345-352, (2006).

[21] Pessia, T.: *The transition from comparison of infinite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers*, Educational Studies in Mathematics, 38:209-234, (1999).

[22] Singer, M. ja Voica, C.: *Perception of infinity: does it really help in problem solving?*, The Mathematics Education into the 21st Century Project, Proceedings of the International Conference, The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education Brno, Czech Republic, (2003).

[23] Tall, D. ja Tirosh, D.: *Infinity- the never-ending struggle*, Educational Studies in Mathematics, 48 (2 ja 3):199-238, (2001).

[24] Tall, D.: *Natural and formal infinities*, Educational Studies in Mathematics, 48:199-238, (2001).

[25] Tall, D.: *Intuitions of infinity*, Mathematics in School, (1981).

[26] Trlifajová, K.: *Bolzano's Infinite Quantities*, arXiv.org, math.HO, (7.11.2017).

[27] Waldegg, G.: *Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for Teaching*, Science and Education (Springer), 14:559-577, (2005).

[28] Voskoglou, M.: *On student understanding of the concept of infinity*, Philosophy of Mathematics Education Journal, Issue 30, s. 1-8, (2016).