Hausdorffin ja affiinin ulottuvuuden yhtäsuuruus

Pro gradu -tutkielma
Valtteri Kössö
2497417
Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö
Oulun yliopisto
28.10.2020

Sisällys

Johdanto

Iteroitujen funktiosysteemien eri fraktaaliulottuvuuksien yhtäsuuruutta on tutkittu jo suhteellisen kauan. Jos systeemin funktiot ovat *similariteetteja*, monien ulottuvuuksien käyttäytyminen tunnetaan jo kohtalaisen hyvin. Sen sijaan, jos systeemi koostuu *affiineista kuvauksista*, eri ulottuvuuksien keskinäinen käyttäytyminen on suhteellisen huonosti tunnettu jopa tasossa. Tutkielmassa osoitetaan ehtokokoelma *Hausdorffin* ja *affiinin ulottuvuuden* yhtäsuuruudelle tasossa. Affiini ulottuvuus liittyy affiinien kuvausten lineaarisiin osiin ja sen esitteli ensimmäisen kerran Falconer (1988). Tutkielmassa hyödynnetään *itseaffiinien* ja *Bernoullin mittojen Lyapunovin ulottuvuutta*, joka on analoginen käsite affiinille ulottuvuudelle. Lyapunovin ulottuvuuden avulla johdetaan tuloksia joukoille. Toisin sanoen osoitetaan, että affiinia ulottuvuutta voidaan aina arvioida Bernoullin mittojen Lyapunovin ulottuvuudella, kun siirrytään *alisysteemeihin*. Lisäksi näytetään, että alisysteemit voidaan valita suhteellisen säännöllisesti käyttäytyviksi.

Tämän tutkielman päälähteenä on käytetty I. Morrisin ja P. Shmerkinin (2019) artikkelia *On equality of Hausdorff and affinity dimensions, via self-affine measures on positive subsystems*. Tutkielman luvut 2 – 5 mukailevat sisällöllisesti artikkelin lukuja 3 – 6 täydentäen ja perustellen.

Ensimmäisessä luvussa käydään lyhyesti läpi tarvittavia peruskäsitteitä ja joitain niiden ominaisuuksia. Lisää käsitteitä esitellään myös muiden lukujen aluissa. *Sanoja* käytetään tutkielmassa kuvausten indeksoinnissa mutta niiden muodostama avaruus esitellään vain pintapuolisesti. *Singulaariarvofunktio* on keskeisessä osassa affiinin ulottuvuuden määrittelyssä ja ominaisuuksien tutkinnassa. Sekä singulaariarvofunktiosta että affiinista ulottuvuudesta esitellään peruskäsitteet. Lisäksi perehdytään hieman *Lyapunovin eksponentteihin*, joita voidaan hyödyntää tutkittaessa tarkastelusuunnan vaikutusta iteroidun funktiosysteemin kuvausten ratoihin.

Toisessa luvussa perehdytään iteroidun funktiosysteemin affiinien kuvausten lineaaristen osien vaikutukseen singulaariarvofunktion tasapainotilan ominaisuuksiin ja Lyapunovin eksponentteihin.

Kolmannessa luvussa esitellään lyhyesti *projektiivinen reaaliakseli.* Luvussa osoitetaan, että tutkittaessa tietynlaisten funktiosysteemien käyttäytymistä, voidaan siirtyä näiden alisysteemeihin, joille voidaan taata säännöllinen käyttäytyminen tietyissä rajoissa. Alisysteemit esimerkiksi säilyttävät kartion aidosti ja *vahva jaottomuus* säilyy niihin siirryttäessä.

Neljännessä luvussa perehdytään joihinkin erotteluehtoihin. Luvussa tarkastellaan erotteluehtojen säilymistä alisysteemeihin siirryttäessä. Lisäksi osoitetaan, millä ehdoin voidaan varmistaa alisysteemin toteuttavan *vahvan erotteluehdon.* Alisysteemien Lyapunovin eksponenttien ja entropian osoitetaan lisäksi olevan lähellä *Käenmäen mitan* vastaavia suureita.

Viimeisessä luvussa esitellään aluksi muutamia eri ulottuvuuksiin ja niiden yhtäsuuruuksiin liittyviä tuloksia muista lähteistä. Tämän jälkeen osoitetaan joitain riittäviä ehtokokoelmia Hausdorffin ja affiinin ulottuvuuden yhtäsuuruudelle.

Merkinnät

Käytetään seuraavia merkintöjä:

- Kokonaislukujen joukko: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \}$.
- Kokonaisluvut, jotka ovat yhtäsuuria tai suurempia kuin annettu luku $r \in \mathbb{R}$: $\mathbb{Z}_{\geq r} := \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq r\}$.
- Joukon $A \subseteq X$ sulkeuma: $\mathtt{cl}(A)$, sisus: $\mathtt{int}(A)$ ja reuna: ∂A.
- Kunta $\mathbb{K}$ kertoimiset $n \times m$ matriisit: $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
- Kunta $\mathbb{K}$ kertoimiset $n \times n$ matriisit, joiden determinantti on kunnan nolla-alkiosta $\mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ poikkeava: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \mathtt{det}\, A \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$.
- Kunta $\mathbb{K}$ kertoimiset $n \times n$ matriisit, joiden determinantti on aidosti positiivinen: $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{K}) := \{A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \mathtt{det}\, A > \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$. Tässä oletetaan, että kunta $\mathbb{K}$ on järjestetty.
- Kunta $\mathbb{K}$ kertoimiset $n \times n$ matriisit, joiden determinantti on kunnan ykkösalkio $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \mathtt{det}\, A = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}$.
- Kattofunktio: $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\lceil x \rceil := \mathtt{min}\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$.
- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ s-ulotteinen Lebesguen mitta: $\mathscr{L}^s$, missä $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- Pistevieras eli erillinen yhdiste: $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, missä $A_\lambda \cap A_\mu = \varnothing$ kaikilla $\lambda, \mu \in \Lambda$, joille $\lambda \neq \mu$.
- Joukon $A \subseteq X$ komplementti: $A^{\complement} := X \setminus A$. Tässä X on perusjoukko.
- Yläraja-arvo: $\overline{\mathtt{lim}}_{x \to 0} f(x) := \mathtt{lim}_{r \to 0} \left(\sup_{x \in [0,r]} f(x) \right)$.
- Joukon A karteesinen tulo itsensä kanssa yli numeroituvan indeksijoukon Λ: $\bigtimes_{\Lambda} A := A^\Lambda := A \times A \times A \times \cdots$.

1 Perusteet

1.0.1 Määritelmä

- Olkoon X joukko. Kokoelmaa $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ joukon X osajoukkoja kutsutaan *joukon X σ-algebraksi*, jos seuraavat ehdot pätevät

  - $\varnothing \in \mathcal{F}$
  - jos $F \in \mathcal{F}$, niin $F^{\complement} \in \mathcal{F}$
  - jos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, niin $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$
  - jos joukot$F_i \in \mathcal{F}$ ovat pistevieraita kaikilla $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, niin $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$.

- Olkoot X joukko ja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. *Joukon $\mathcal{F}$ generoima σ-algebra* on pienin joukon X σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathcal{F}$.

- Joukon X kaikkien avointen osajoukkojen generoimaa σ-algebraa kutsutaan *joukon X Borelin σ-algebraksi* ja merkitään $\mathcal{B}(X)$.

1.0.2 Määritelmä

- Olkoot X perusjoukko ja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jokin sen σ-algebra. Kuvaus $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \{r \mid r \geq 0 \quad \text{tai} \quad r = \infty\}$ on *mitta*, jos seuraavat ehdot pätevät

  - $\mu(\varnothing) = 0$
  - $\mu\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} F_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \mu(F_i)$, missä $F_i \in \mathcal{F}$ erillisiä kaikilla i.

- *Mitta-avaruus* on kolmikko $(X, \mathcal{F}, \mu)$, missä X on joukko, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jokin sen σ-algebra ja $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitta. Jos $\mu(X) = 1$, mitta-avaruutta $(X, \mathcal{F}, \mu)$ kutsutaan myös *todennäköisyysavaruudeksi*.

1.0.3 Määritelmä

- Olkoot $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ mitta-avaruuksia. Jatkuvaa kuvaus $f : X \longrightarrow Y$ on *mitallinen*, jos $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ kaikilla $G \in \mathcal{G}$. Jos lisäksi $(X, \mathcal{F}, \mu) = (Y, \mathcal{G}, \nu)$ ja $\mu(f^{-1}(F)) = \mu(F)$ kaikilla $F \in \mathcal{F}$, niin kuvaus f on *mitan μ säilyttävä* eli mitta μ on *invariantti kuvauksessa f*.

- *Mitan säilyttävä systeemi* on nelikko $(X, \mathcal{F}, \mu, f)$, missä $(X, \mathcal{F}, \mu)$ on mitta-avaruus ja f on mitan μ säilyttävä kuvaus.
- Mitan säilyttävä systeemi $(X, \mathcal{F}, \mu, f)$ on *ergodinen*, jos kaikilla joukoilla $F \in \mathcal{F}$, jotka ovat f-invariantteja, eli $f^{-1}(F) = F$, pätee joko $\mu(F) = 0$ tai $\mu(F^{\complement}) = 0$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että ei ole olemassa f-invarianttia joukkoa F, jolle $\mu(F) > 0$ ja $\mu(F^{\complement}) > 0$ (katso esimerkiksi Friedman, 1970, 4).

1.0.4 Määritelmä

- Olkoot X metrinen avaruus ja $s \geq 0$. Joukon $A \subseteq X$ *s-ulotteinen Hausdorffin mitta* $\mathscr{H}^s$ on

$$\mathscr{H}^s(A) := \sup_{\ell > 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \operatorname{diam} F_i \leq \ell, \\ F_i \in \mathcal{F} \quad \text{kaikilla} \quad i = 1, 2, \dots \Big\},$$

missä diam on joukon halkaisija ja infimum on yli kaikkien joukon A numeroituvien peitteiden $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- Joukon $A \subseteq X$ *Hausdorffin ulottuvuus* $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ on luku

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} A &:= \sup\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(A) < \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(A) = 0\}. \end{aligned}$$

1.0.5 Huomautus

Hausdorffin mitta on ulkomitta (katso esimerkiksi Mattila, 1995, kohta 4.3). Lisäksi Hausdorffin ulottuvuus on hyvin määritelty (katso esimerkiksi Mattila, 1995, kohta 4.7).

1.0.6 Määritelmä

Olkoot $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f, f_n : X \longrightarrow X$ mitallisia kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Jono $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *suppenee paikallisesti mitan μ suhteen* kohti kuvausta f, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ ja äärellismittaisilla $F \in \mathcal{F}$ pätee

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in F \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

1.1 Jonoavaruudet

1.1.1 Määritelmä

Määritellään kaikilla $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ joukko $\mathcal{I}_k^\ell$ seuraavasti

$$\mathcal{I}_k^\ell := \{(i_1, \ldots, i_\ell) \mid i_j \in \mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad 1 \leq i_j \leq k \quad \text{kaikilla} \quad j = 1, \ldots, \ell\}.$$

Asetetaan lisäksi $\mathcal{I}_k^0 := \{\varnothing\}$. Kutsutaan jonoa $\boldsymbol{\imath} := (i_1, \ldots, i_l) \in \mathcal{I}_k^\ell$ *sanaksi*, jonka pituus on ℓ. Merkitään pituutta $|\boldsymbol{\imath}| := \ell$. Kutsutaan joukkoa $\mathcal{I}_k^\ell$ *ℓ-pituisten sanojen sanastoksi* ja joukkoa $\mathcal{I}_k := \bigcup_{\ell=0}^\infty \mathcal{I}_k^\ell$ *kaikkien äärellisten sanojen sanastoksi*. Määritellään *äärettömien sanojen sanasto* $\mathcal{I}_k^\infty$ asettamalla

$$\mathcal{I}_k^\infty := \{(i_1, i_2, \ldots) \mid i_j \in \mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad 1 \leq i_j \leq k \quad \text{kaikilla} \quad j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}.$$

Merkitään lisäksi $\mathcal{I}_k^* := \mathcal{I}_k \cup \mathcal{I}_k^\infty$.

1.1.2 Huomautus

Joukko $\mathcal{I}_k^\infty$ voidaan tulkita myös numeroituvasti äärettömänä karteesisena tulona $\bigtimes_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \{1, \ldots, k\}$.

1.1.3 Määritelmä

- Äärellisen sanan $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k$ ja mielivaltaisen sanan $\boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^*$ *yhdiste* $\boldsymbol{\imath\jmath}$ on sana $\boldsymbol{\imath\jmath} := (i_1, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots) \in \mathcal{I}_k^*$, missä $r := |\boldsymbol{\imath}|$.

- Sana $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k$ on sanan $\boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^*$ *rajoittuma*, jos $\boldsymbol{\jmath} = \boldsymbol{\imath\imath}'$ jollakin sanalla $\boldsymbol{\imath}' \in \mathcal{I}_k^*$. Merkitään tällöin $\boldsymbol{\imath} < \boldsymbol{\jmath}$. Jos tällaista sanaa $\boldsymbol{\imath}'$ ei ole olemassa, niin merkitään $\boldsymbol{\imath} \not< \boldsymbol{\jmath}$.

- Sanojen $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^*$ *yhteinen alku* $\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath}$ on maksimaalinen sana, jolle $\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{\imath}$ ja $\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{\jmath}$.

- Sana $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^*$ on sanan $\boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^*$ *alisana*, jos on olemassa sanat $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' \in \mathcal{I}_k^*$, joille pätee $\boldsymbol{\jmath} = \boldsymbol{k\imath k}'$. Merkitään tällöin $\boldsymbol{\imath} \subset \boldsymbol{\jmath}$.

1.1.4 Määritelmä

Määritellään äärellisen sanan $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k$ määräämä *sylinterijoukko* $[\boldsymbol{\imath}] \subseteq \mathcal{I}_k^\infty$ asettamalla

$$[\boldsymbol{\imath}] := \{\boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\jmath} \mid \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^\infty\}.$$

Merkitään lisäksi kaikkien avaruuden $\mathcal{I}_k^\infty$ sylinterijoukkojen kokoelmaa $\mathcal{U}_k := \{[\boldsymbol{\imath}] \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k\}$.

1.1.5 Lause

Joukko $\mathcal{U}_k$ muodostaa kannan eräälle avaruuden $\mathcal{I}_k^\infty$ topologialle.

Todistus. Selvästi $\mathcal{U}_k \neq \varnothing$ ja $\bigcup_{\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k} [\boldsymbol{\imath}] \supseteq \mathcal{I}_k^\infty$, joten riittää osoittaa, että jokainen joukon $\mathcal{U}_k$ alkioiden äärellinen leikkaus kuuluu edelleen joukkoon $\mathcal{U}_k$ (katso esimerkiksi Armstrong, 1983, lause 2.5). Olkoot $U, V \in \mathcal{U}_k$. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $\varnothing \neq U \neq \mathcal{I}_k^\infty$ ja $\varnothing \neq V \neq \mathcal{I}_k^\infty$. Siten $U = [\boldsymbol{\imath}]$ ja $V = [\boldsymbol{\jmath}]$ joillakin $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k$. Jos $\boldsymbol{\imath} < \boldsymbol{\jmath}$, niin $\boldsymbol{\jmath} = \boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\imath}'$ jollakin $\boldsymbol{\imath}' \in \mathcal{I}_k$. Siten

$$[\boldsymbol{\jmath}] = \{\boldsymbol{\jmath}\boldsymbol{\jmath}' \mid \boldsymbol{\jmath}' \in \mathcal{I}_k^\infty\} = \{\boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{\jmath}' \mid \boldsymbol{\jmath}' \in \mathcal{I}_k^\infty\} \subseteq \{\boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\imath}^* \mid \boldsymbol{\imath}^* \in \mathcal{I}_k^\infty\} = [\boldsymbol{\imath}],$$

joten $[\boldsymbol{\imath}] \cap [\boldsymbol{\jmath}] = [\boldsymbol{\jmath}] \in \mathcal{U}_k$. Vastaavasti, jos $\boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{\imath}$, niin $[\boldsymbol{\imath}] \cap [\boldsymbol{\jmath}] = [\boldsymbol{\imath}] \in \mathcal{U}_k$. Jos $\boldsymbol{\imath} \not< \boldsymbol{\jmath}$ ja $\boldsymbol{\jmath} \not< \boldsymbol{\imath}$, niin edellisen päättelyn nojalla on oltava $[\boldsymbol{\imath}] \cap [\boldsymbol{\jmath}] = \varnothing \in \mathcal{U}_k$. Siten $U \cap V \in \mathcal{U}_k$ kaikilla $U, V \in \mathcal{U}_k$, joten myös jokainen äärellinen leikkaus kuuluu joukkoon $\mathcal{U}_k$.

□

1.1.6 Huomautus

Jokaiselle $[\boldsymbol{\imath}] \in \mathcal{U}_k$ pätee

$$[\boldsymbol{\imath}] = \{\boldsymbol{\imath}\} \times \mathcal{I}_k^\infty = \{i_1\} \times \{i_2\} \times \cdots \times \{i_r\} \times \left(\bigtimes_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \{1, \ldots, k\} \right).$$

Siten kannan $\mathcal{U}_k$ joukkoon $\mathcal{I}_k^\infty$ virittämä topologia on *tulotopologia*.

1.1.7 Määritelmä

Määritellään kuvaus $d_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}_k^\infty \times \mathcal{I}_k^\infty \longrightarrow [0, \infty[$ asettamalla $d_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) := 2^{-|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath}|}$ kaikilla $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^\infty$, joille $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$. Asetetaan lisäksi $d_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\imath}) := 0$ kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^\infty$.

1.1.8 Lause

Pari $(\mathcal{J}_k^\infty, d_{\mathcal{J}})$ *on metrinen avaruus.*

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus $d_{\mathcal{J}}$ on metriikka. Olkoot $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{J}_k^\infty$. Jos $\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{\jmath}$, niin kuvauksen $d_{\mathcal{J}}$ määritelmän nojalla $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) = 0$. Oletetaan sitten $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$, jolloin on olemassa pienin luku $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, jolla pätee $i_n \neq j_n$. Siten $|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath}| = n - 1$, joten $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) = 2^{-n+1} \neq 0$. Näin ollen $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) = 0$ jos ja vain jos $\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{\jmath}$.

Selvästi $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) = d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{\imath})$, koska sanojen yhteisen alun määritelmä on symmetrinen eli $\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath} = \boldsymbol{\jmath} \wedge \boldsymbol{\imath}$.

Osoitetaan vielä kolmioepäyhtälö. Olkoot $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_k^\infty$. Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$, jolloin on olemassa pienin luku $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, jolla $i_n \neq j_n$. Tällöin on oltava $\min\{|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}|, |\boldsymbol{\jmath} \wedge \boldsymbol{k}|\} \leq n - 1$, koska muuten olisi olemassa äärellinen sana $\boldsymbol{k}'$, jolle $|\boldsymbol{k}'| > n - 1$, $\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\imath}'$ ja $\boldsymbol{\jmath} = \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\jmath}'$ joillakin äärettömillä sanoilla $\boldsymbol{\imath}'$ ja $\boldsymbol{\jmath}'$. Koska tällöin $\boldsymbol{k}' < \boldsymbol{\imath}$ ja $\boldsymbol{k}' < \boldsymbol{\jmath}$, niin olisi $|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{\jmath}| \geq |\boldsymbol{k}'| > n - 1$, mikä olisi ristiriita luvun n valinnan kanssa. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}| \leq n - 1$. Nyt

$$d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{k}) + d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\jmath}) = 2^{-|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}|} + 2^{-|\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\jmath}|} \geq 2^{-|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}|} \geq 2^{-n+1} = d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}).$$

Jos $\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{\jmath}$, niin väite on selvä, koska $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}) = 0 = 0 + 0 \leq d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{k}) + d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\jmath})$. □

1.1.9 Huomautus

Metriikka $d_{\mathcal{J}}$ generoi joukkoon $\mathcal{J}_k^\infty$ kannan $\mathcal{U}_k$ määräämän tulotopologian. Perustellaan tämä.

Olkoot $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{J}_k^\infty$, $r > 0$ ja $B(\boldsymbol{\imath}, r)$ metriikan $d_{\mathcal{J}}$ mukainen $\boldsymbol{\imath}$-keskinen r-säteinen avoin pallo eli $B(\boldsymbol{\imath}, r) := \{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_k^\infty \mid d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{k}) < r\}$. Nyt jollakin $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pätee $2^{-n} < r \leq 2^{-n+1}$. Olkoon $\boldsymbol{\jmath} := (i_1, \ldots, i_n) < \boldsymbol{\imath}$. Sylinterijoukon määritelmän nojalla $[\boldsymbol{\jmath}] = \{\boldsymbol{\jmath}\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_k^\infty\}$ eli kaikilla sanoilla $\boldsymbol{k} \in [\boldsymbol{\jmath}]$ pätee $|\boldsymbol{\jmath} \wedge \boldsymbol{k}| \geq |\boldsymbol{\jmath}| = n$. Siten $d_{\mathcal{J}}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\jmath}) = 2^{-|\boldsymbol{\jmath} \wedge \boldsymbol{k}|} < r$ kaikilla $\boldsymbol{k} \in [\boldsymbol{\jmath}]$ eli $[\boldsymbol{\jmath}] \subseteq B(\boldsymbol{\imath}, r)$.

Toisaalta, jos $\boldsymbol{k} \in B(\boldsymbol{\imath}, r)$, niin $2^{-|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}|} < r \leq 2^{-|\boldsymbol{\jmath}|+1}$ eli $|\boldsymbol{\imath} \wedge \boldsymbol{k}| \geq |\boldsymbol{\jmath}|$. Koska lisäksi $\boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{\imath}$, on oltava myös $\boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{k}$ eli $\boldsymbol{k} \in [\boldsymbol{\jmath}]$, joten $B(\boldsymbol{\imath}, r) \subseteq [\boldsymbol{\jmath}]$. Siten jokainen avoin pallo on sylinterijoukko ja päinvastoin.

1.1.10 Lause

Metrinen avaruus $(\mathcal{J}_k^\infty, \mathscr{d}_\mathcal{J})$ *on kompakti.*

Todistus. Äärellinen joukko $\{1, \ldots, k\}$ diskreetillä topologialla on kompakti ja toisaalta joukko $\mathcal{J}_k^\infty$ on karteesinen tulo $\bigtimes_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \{1, \ldots, k\}$. Huomautuksen 1.1.9 nojalla metriikka $\mathscr{d}_\mathcal{J}$ generoi diskreettien topologioiden tulotopologian, joten $\mathcal{J}_k^\infty$ on *Tihonovin lauseen* (katso esimerkiksi Krantz, 2012, lause 2.2.1) nojalla kompaktien joukkojen tulona kompakti.

□

1.1.11 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\Gamma \subseteq \mathcal{J}_k$ ja $\boldsymbol{\imath} := (i_1, i_2, \ldots, i_\ell) \in \mathcal{J}_k$, missä $k, n, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ja $\ell \leq k$. Merkitään tällöin sanan $\boldsymbol{\imath}$ indeksoimaa joukon $\mathscr{A}$ matriisien tuloa

$$A_{\boldsymbol{\imath}} := A_{i_\ell} A_{i_{\ell-1}} \cdots A_{i_1}$$

ja näiden tulojen muodostamaa joukkoa

$$\mathscr{A}_\Gamma := \{A_{\boldsymbol{\jmath}} \mid \boldsymbol{\jmath} \in \Gamma\}.$$

1.2 Singulaariarvofunktio

1.2.1 Määritelmä

Matriisin $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *singulaariarvot* $\alpha_1(A) \geq \alpha_2(A) \geq \cdots \geq \alpha_n(A) > 0$ ovat matriisin $A^\top A$ ominaisarvojen neliöjuuret vähenevässä järjestyksessä. Tässä $A^\top$ on matriisin A transpoosi.

1.2.2 Huomautus

Kun $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, niin matriisi $A^\top A$ on positiivisesti definiitti, joten sen kaikki ominaisarvot ovat positiivisia (katso esimerkiksi Bernstein, 2009, 328). Siten edellinen määritelmä on hyvin asetettu.

1.2.3 Määritelmä

Olkoot $s > 0$ ja $m := \lceil s \rceil$. Määritellään kaikilla $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *singulaariarvo-*

funktio $\varphi^s : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ asettamalla

$$\varphi^s(A) := \begin{cases} \alpha_1(A)\alpha_2(A)\cdots\alpha_{m-1}(A)(\alpha_m(A))^{s-m+1}, & \text{jos } 0 < s < n \\ |\det(A)|^{s/n}, & \text{jos } s \geq n. \end{cases}$$

Asetetaan lisäksi $\varphi^0(A) := 1$ kaikilla $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.2.4 Huomautus
Singulaariarvoille on olemassa seuraava geometrinen tulkinta:

> Olkoot $B \subseteq \mathbb{R}^n$ n-ulotteinen yksikköpallo ja $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Tällöin kuvauksen A jokainen singulaariarvo on puolet ellipsin $A(B)$ jonkin pääakselin pituudesta.

Siten $\omega_n \varphi^n(A) = \omega_n \alpha_1(A)\cdots\alpha_n(A) = \mathscr{L}^n(A(B))$, missä $\omega_n := \mathscr{L}^n(B)$ on n-ulotteisen yksikköpallon tilavuus ja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, ja edelleen

$$\varphi^s(A) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \frac{\mathscr{L}^s(A(D))}{\mathscr{L}^s(D)}, \tag{1.2.1}$$

missä supremum on yli kaikkien s-ulotteisten pallojen tai ellipsien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (Falconer, 1988, s. 341). Lisäksi pätee $\|A\| = \alpha_1(A)$, $\|A^{-1}\|^{-1} = \alpha_n(A)$ ja $|\det A| = \alpha_1(A)\alpha_2(A)\cdots\alpha_n(A)$ (Morris & Shmerkin, 2019, s. 1553).

1.2.5 Lause (Falconer, 1988, Lemma 2.1)
Singulaariarvofunktio on submultiplikatiivinen. Toisin sanoen kaikilla matriiseilla $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pätee* $\varphi^s(AB) \leq \varphi^s(A)\varphi^s(B)$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $1 \leq s \leq n$ on kokonaisluku. Olkoot $D \subseteq \mathbb{R}^n$ s-ulotteinen ellipsoidi ja $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Tällöin yhtälön (1.2.1) nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\mathscr{L}^s(AB(D))}{\mathscr{L}^s(D)} &= \frac{\mathscr{L}^s(A(B(D)))\mathscr{L}^s(B(D))}{\mathscr{L}^s(B(D))\mathscr{L}^s(D)} \leq \varphi^s(A)\frac{\mathscr{L}^s(B(D))}{\mathscr{L}^s(D)} \\ &\leq \varphi^s(A)\varphi^s(B). \end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla ellipsoideilla D, on oltava

$$\varphi^s(A)\varphi^s(B) \geq \sup_{D \in \mathfrak{D}} \frac{\mathscr{L}^s(AB(D))}{\mathscr{L}^s(D)},$$

missä $\mathcal{D}$ on kaikkien s-ulotteisten ellipsoidien kokoelma. Siten yhtälön (1.2.1) nojalla $\varphi^s(AB) \leq \varphi^s(A)\varphi^s(B)$.

Oletetaan sitten, että $m-1 < s < m$ jollakin kokonaisluvulla $1 \leq m \leq n$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\varphi^s(AB) &= \alpha_1(AB)\cdots\alpha_{m-1}(AB)(\alpha_m(AB))^{s-m+1} \\
&= (\alpha_1(AB)\cdots\alpha_m(AB))^{s-m+1}\,(\alpha_1(AB)\cdots\alpha_{m-1}(AB))^{m-s} \\
&= (\varphi^m(AB))^{s-m+1}\left(\varphi^{m-1}(AB)\right)^{m-s} \\
&\overset{(*)}{\leq} (\varphi^m(A))^{s-m+1}\,(\varphi^m(B))^{s-m+1}\left(\varphi^{m-1}(A)\right)^{m-s}\left(\varphi^{m-1}(B)\right)^{m-s} \\
&= (\alpha_1(A)\cdots\alpha_m(A))^{s-m+1}\,(\alpha_1(B)\cdots\alpha_m(B))^{s-m+1} \\
&\qquad (\alpha_1(A)\cdots\alpha_{m-1}(A))^{m-s}\,(\alpha_1(B)\cdots\alpha_{m-1}(B))^{m-s} \\
&= \alpha_1(A)\cdots\alpha_{m-1}(A)(\alpha_m(A))^{s-m+1}\alpha_1(B)\cdots\alpha_{m-1}(B)(\alpha_m(B))^{s-m+1} \\
&= \varphi^s(B)\varphi^s(A).
\end{aligned}
$$

$(*)$ $s-m+1, m-s > 0$ ja $m, m-1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Jos $s > n$, niin väite on selvä, sillä tulon determinantti on determinanttien tulo.

□

1.3 Affiini ulottuvuus

1.3.1 Määritelmä

- × Kuvaus $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on *affiini kuvaus*, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ja vektori $v \in \mathbb{R}^m$, että $T(x) = A(x) + v$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

- × Kuvaus $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on *kutistuskuvaus*, jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq r < 1$, että $\|T(x) - T(y)\| \leq r\|x-y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vakion r pienintä mahdollista arvoa kutsutaan kutistuskuvauksen T *kutistussuhteeksi*.

1.3.2 Määritelmä

Olkoot $T_1, \ldots, T_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kutistuskuvauksia. Joukkoa $\mathscr{T} := \{T_1, \ldots, T_k\}$

kutsutaan *iteroiduksi funktiosysteemiksi.* Epätyhjää kompaktia joukkoa $E \subseteq \mathbb{R}^n$, jolle

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} T_i(E),$$

kutsutaan funktiosysteemiin $\mathscr{T}$ liittyväksi *invariantiksi joukoksi.* Jos kaikki funktiosysteemin $\mathscr{T}$ kuvaukset ovat affiineja, joukkoa E kutsutaan myös *itseaffiiniksi joukoksi.*

1.3.3 Huomautus

Jokaiseen affiinien kutistuskuvausten iteroituun funktiosysteemiin $\mathscr{T}$ liittyy täsmälleen yksi itseaffiini joukko.

1.3.4 Lause (Feketen subadditiivinen lemma)

Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ subadditiivinen jono *eli kaikilla indekseillä* $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *pätee* $a_{m+n} \leq a_m + a_n$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{a_n}{n}.$$

Todistus. Katso esimerkiksi Fekete (1923).

□

1.3.5 Seuraus

Olkoon $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ submultiplikatiivinen jono *eli kaikilla* $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *pätee* $b_{m+n} \leq b_m b_n$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{b_n}) = \inf_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \ln(\sqrt[n]{b_n}).$$

Todistus. Olkoon $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ submultiplikatiivinen jono. Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ subadditiivinen jono, jolle pätee $a_n := \ln b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Koska nyt

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\ln b_n}{n} = \ln(\sqrt[n]{b_n})$$

ja logaritmifunktio on jatkuva, niin lauseen 1.3.4 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{b_n}) = \inf_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \ln(\sqrt[n]{b_n}).$$

Erityisesti raja-arvo $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{b_n})$ on olemassa.

□

1.3.6 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ kutistuskuvauksia. Iteroidun funktiosysteemin $\mathscr{A}$ *affiini ulottuvuus* $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ on luku t, jolle pätee

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^t(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r} = 1.$$

Jos affiineille kutistuskuvauksille $\mathscr{T} := \{T_1, \dots, T_k\}$ pätee joillakin vektoreilla $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ $T_i(x) = A_i(x) + v_i$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, niin merkitään lisäksi $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} := \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$.

1.3.7 Huomautus (Falconer, 1988, väite 4.1, kohta (b))
Määritelmä 1.3.6 on hyvin asetettu, koska on olemassa yksikäsitteinen luku $t \geq 0$, jolle pätee

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^t(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r} = 1.$$

Todistus. Singulaariarvofunktion submultiplikatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^{q+r}} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) &= \sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^q} \sum_{\mathtt{j}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}A_{\mathtt{j}}) \leq \sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^q} \sum_{\mathtt{j}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})\varphi^s(A_{\mathtt{j}}) \\ &= \sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^q} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \sum_{\mathtt{j}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{j}}),\end{aligned}$$

joten $\left(\sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \right)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ on submultiplikatiivinen jono. Siten raja-arvo

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in \mathcal{J}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r}$$

on olemassa kaikilla $s \geq 0$ seurauksen 1.3.5 nojalla.

Koska kuvaukset $A_1, \dots, A_k$ ovat kutistuskuvauksia, niin kaikilla indekseillä $i = 1, \dots, k$ pätee $1 > a_i \geq \alpha_1(A_i) \geq \alpha_2(A_i) \geq \cdots \geq \alpha_n(A_i) \geq b_i > 0$. Olkoot $a := \max_i a_i$ ja $b := \min_i b_i$. Tällöin

$$\begin{aligned}\varphi^s(A_{\mathtt{i}}) &\leq \overbrace{\alpha_1(A_{\mathtt{i}})\alpha_1(A_{\mathtt{i}}) \cdots \alpha_1(A_{\mathtt{i}})}^{m-1 \text{ kappaletta}} \alpha_1(A_{\mathtt{i}})^{s-m+1} \\ &= (\alpha_1(A_{\mathtt{i}}))^s \leq (a^{|\mathtt{i}|})^s = a^{s|\mathtt{i}|}.\end{aligned}$$

Vastaavasti $\varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \geq b^{s|\mathtt{i}|}$. Jos $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, niin kaikilla $h > 0$ pätee

$$\varphi^s(T)(\alpha_n(T))^h \leq \varphi^{s+h}(T) \leq \varphi^s(T)(\alpha_1(T))^h, \tag{1.3.1}$$

joten

$$\begin{aligned} 0 < b^{rh} &\leq \frac{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})(\alpha_n(A_{\mathtt{i}}))^h}{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})} \leq \frac{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^{s+h}(A_{\mathtt{i}})}{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})} \\ &\leq \frac{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})(\alpha_1(A_{\mathtt{i}}))^h}{\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}})} \leq a^{rh} < 1. \end{aligned}$$

Siten raja-arvo

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r}$$

on jatkuva ja aidosti vähenevä luvun s funktiona. Koska lisäksi

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^0(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r} = \lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} 1 \right)^{1/r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{k^r} = k > 1$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/r} \right) &\overset{(*)}{=} \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} |\det A_{\mathtt{i}}|^{s/n} \right)^{1/r} \right) \\ &\overset{(\triangle)}{\leq} \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{I}_k^r} c^{rs/n} \right)^{1/r} \right) \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{k^r c^{rs/n}} \right) \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{r\to\infty} k c^{s/n} \right) \\ &= \lim_{s\to\infty} k c^{s/n} = 0, \end{aligned}$$

niin *Bolzanon lauseen* ja aidon monotonisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen luku s, jolle raja-arvo on tasan yksi.

(∗) Voidaan olettaa, että $s > n$.

(△) On olemassa sellainen vakio $0 < c < 1$, että $|\det A_i| < c$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, jolloin $|\det A_{\mathtt{i}}| = |\det A_{i_1} \det A_{i_2} \cdots \det A_{i_r}| < c^r$ kaikilla $\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^r$.

$\square$

1.3.8 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ kutistuskuvauksia, $s \geq 0$ ja $B \subseteq \mathcal{I}_k^\infty$. Asetetaan kaikilla $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\mathcal{M}_\ell^{s,\mathscr{A}}(B) := \inf_{\Lambda_\ell}\{\sum_{\mathtt{i} \in \Lambda_\ell} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) \mid B \subseteq \bigcup_{\mathtt{i} \in \Lambda_\ell} [\mathtt{i}]\}, \tag{1.3.2}$$

missä infimum on yli kaikkien joukkojen $\Lambda_\ell \subseteq \bigcup_{r=\ell}^\infty \mathcal{I}_k^r$. Merkitään lisäksi

$$\mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(B) := \lim_{\ell \to \infty} \mathcal{M}_\ell^{s,\mathscr{A}}(B) \tag{1.3.3}$$

1.3.9 Huomautus

Funktio $\mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}$ on mitta, kun valitaan peiteluokiksi joukko $\mathcal{U}_k$ ja esimitaksi $\varphi^s(A_{\mathtt{i}})$ *Carathéodoryn konstruktiossa* (katso esimerkiksi Mattila, 1995, kohdat 4.1 ja 4.2).

1.3.10 Lause (Falconer, 1988, väite 4.1)

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *kutistuskuvauksia. Tällöin*

$$\begin{aligned}\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} &\overset{\text{(I)}}{=} \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) < \infty\} \overset{\text{(II)}}{=} \sup\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_{\mathtt{i}}) = \infty\} \\ &\overset{\text{(III)}}{=} \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{I}_k^\infty) = 0\} \overset{\text{(IV)}}{=} \sup\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{I}_k^\infty) = \infty\}.\end{aligned}$$

Todistus. Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ kutistuskuvauksia ja $0 \leq r < t < \infty$.

(IV) Osoitetaan ensin, että jos $\mathcal{M}^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{I}_k^\infty) < \infty$, niin $\mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{I}_k^\infty) = 0$. Oletetaan, että $m := \mathcal{M}^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{I}_k^\infty) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $\varepsilon \leq m$. Tällöin on olemassa sellainen $\ell_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, että kaikilla $\ell \geq \ell_\varepsilon$ pätee $\left|\mathcal{M}_\ell^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) - m\right| < \varepsilon$ eli on olemassa sellainen $\Lambda'_\varepsilon \subseteq \bigcup_{l=\ell}^\infty \mathcal{J}_k^l$, että $\mathcal{J}_k^\infty \subseteq \bigcup_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon}[\mathtt{i}]$ ja $\left|\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^r(A_\mathtt{i}) - m\right| \leq \varepsilon$. Erityisesti

$$\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^r(A_\mathtt{i}) < m + \varepsilon \leq 2m < \infty.$$

Koska kuvaukset $A_1, \ldots, A_k$ ovat kutistuskuvauksia, myös kuvaus $A_\mathtt{i}$ on kutistuskuvaus kaikilla $\mathtt{i} \in \Lambda'_\varepsilon$. Tällöin huomautuksen 1.3.7 todistuksen nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^t(A_\mathtt{i}) &= \sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^{r+(t-r)}(A_\mathtt{i}) \overset{(1.3.1)}{\leq} \sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^r(A_\mathtt{i})(\alpha_1(A_\mathtt{i}))^{t-r} \\ &\leq \sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^r(A_\mathtt{i}) a^{|\mathtt{i}|(t-r)} \leq a^{\ell(t-r)} \sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^r(A_\mathtt{i}) \\ &\leq 2m(a^{t-r})^\ell < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun ℓ on tarpeeksi suuri, koska $a^{t-r} < 1$, missä a on kuten huomautuksen 1.3.7 todistuksessa. Siten $\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{M}_\ell^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = 0$ eli $\mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = 0$. Näin ollen, jos

$$\sup\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \infty\} > r$$

niin

$$\inf\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = 0\} \leq t.$$

Osoitetaan sitten, että jos $\mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) > 0$ niin $\mathcal{M}^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \infty$. Oletetaan, että $\mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) > 0$. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $m := \min\{1, \mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)\}$. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $\varepsilon \leq m/2$. Määritelmän 1.3.8 nojalla $\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{M}_\ell^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \mathcal{M}^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)$, joten on olemassa sellainen luku $\ell_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, että $\mathcal{M}_\ell^{t,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) > m - \varepsilon \geq m/2 > 0$ kaikilla $\ell \geq \ell_\varepsilon$. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\Lambda'_\varepsilon \subseteq \bigcup_{l=\ell}^\infty \mathcal{J}_k^l$, että $\mathcal{J}_k^\infty \subseteq \bigcup_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon}[\mathtt{i}]$ ja $\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda'_\varepsilon} \varphi^t(A_\mathtt{i}) > m - \varepsilon \geq m/2 > 0$. Koska kuvaukset $A_1, \ldots, A_k$ ovat kutistuskuvauksia, myös kuvaus $A_\mathtt{i}$ on kutistuskuvaus kaikilla $\mathtt{i} \in \Lambda'_\varepsilon$.

Tällöin huomautuksen 1.3.7 todistuksen nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda'_\varepsilon}\varphi^r(A_{\mathbf{i}}) &= \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda'_\varepsilon}\varphi^{t+(r-t)}(A_{\mathbf{i}}) \overset{(1.3.1)}{\geq} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda'_\varepsilon}\varphi^t(A_{\mathbf{i}})(\alpha_n(A_{\mathbf{i}}))^{-(t-r)} \\ &\geq \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda'_\varepsilon}\varphi^r(A_{\mathbf{i}})\left(\frac{1}{b}\right)^{|\mathbf{i}|(t-r)} \geq \left(\frac{1}{b}\right)^{\ell(t-r)}\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda'_\varepsilon}\varphi^t(A_{\mathbf{i}}) \\ &\geq \frac{m}{2}\left(\frac{1}{b^{t-r}}\right)^{\ell},\end{aligned}$$

missä luku b on kuten huomautuksen 1.3.7 todistuksessa. Koska $(1/b)^{t-r} > 1$, niin $\lim_{\ell\to\infty} b^{\ell(r-t)} = \infty$. Siten $\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{M}_\ell^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \infty$, joten $\mathcal{M}^{r,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \infty$. Näin ollen, jos

$$\inf\{s\in\mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = 0\} \leq t$$

niin

$$\sup\{s\in\mathbb{R} \mid \mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty) = \infty\} > r.$$

Koska $r < t$ ovat mielivaltaisia, yhtälö (IV) pätee.

(II) Osoitetaan ensin, että jos $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_i) < \infty$, niin $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^t(A_i) < \infty$. Oletetaan, että $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_i) < \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^t(A_{\mathbf{i}}) &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^{r+(t-r)}(A_{\mathbf{i}}) \overset{(1.3.1)}{\leq} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}})(\alpha_1(A_{\mathbf{i}}))^{t-r} \\ &\leq \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}})1^{|\mathbf{i}|(t-r)} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}}) < \infty.\end{aligned}$$

Siten

$$\inf\{s\in\mathbb{R} \mid \sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_i) < \infty\} \geq \sup\{s\in\mathbb{R} \mid \sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_i) = \infty\}.$$

Osoitetaan sitten, että jos $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^t(A_i) = \infty$, niin $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_i) = \infty$. Oletetaan, että $\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^t(A_i) = \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}}) &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^{t+(r-t)}(A_{\mathbf{i}}) \overset{(1.3.1)}{\geq} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^t(A_{\mathbf{i}})(\alpha_n(A_{\mathbf{i}}))^{-(t-r)} \\ &\geq \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}})\left(\frac{1}{1}\right)^{|\mathbf{i}|(t-r)} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^r(A_{\mathbf{i}}) = \infty.\end{aligned}$$

Siten

$$\mathtt{sup}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) = \infty\} \geq \mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\}.$$

Näin ollen yhtälö (II) pätee.

(I) Olkoon $q \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $q > \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$. Tällöin huomautuksen 1.3.7 nojalla

$$\lim_{\ell \to \infty} \left(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^\ell} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/\ell} < 1.$$

Siten sarja

$$\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^r} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) \right)$$

suppenee *juuritestin* perusteella. Erityisesti $\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) < \infty$, joten $\mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\} \leq q$. Koska luku $q > \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ on mielivaltainen, on lisäksi oltava $\mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\} \leq \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$, koska jos olisi $\mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\} > \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$, niin olisi $\mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\} > q' > \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ jollakin luvulla $q' \in \mathbb{R}$. Koska $q > \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ on mielivaltainen, voitaisiin lisäksi valita $q < q'$, jolloin olisi oltava $\mathtt{inf}\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}_k} \varphi^s(A_i) < \infty\} > q'$, mikä olisi ristiriita luvun q' valinnan kanssa.

Oletetaan sitten, että $q < \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$. Huomautuksen 1.3.7 nojalla

$$\lim_{\ell \to \infty} \left(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^\ell} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/\ell} > 1,$$

joten sarja

$$\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^r} \varphi^q(A_{\mathtt{i}}) \right)$$

hajaantuu juuritestin perusteella. Tällöin yhtäsuuruuden (II) todistuksen nojalla kaikilla $q' < q$ sarjan $\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^{q'}(A_{\mathtt{i}})$ täytyy hajaantua, koska jos sarja $\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^{q'}(A_{\mathtt{i}})$ suppenisi, erityisesti olisi $\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k} \varphi^{q'}(A_{\mathtt{i}}) < \infty$

eli myös $\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\mathcal{J}_k}\varphi^(A_{\boldsymbol{\imath}})<\infty$, mikä olisi ristiriita luvun q valinnan kanssa. Siten on oltava $\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_i)<\infty\}>q$. Vastaavasti kuin edellä, koska $q<\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}$ on mielivaltainen, on oltava myös $\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{i\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_i)<\infty\}\geq\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}$. Siten yhtäsuuruus (I) pätee.

(III) Osoitetaan ensin, että

$$\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}\leq\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})<\infty\}.$$

Olkoon $q\in\mathbb{R}$. Oletetaan, että $q>\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})<\infty\}$. Yhtäsuuruuden (II) todistuksen nojalla $\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\mathcal{J}_k}\varphi^q(A_{\boldsymbol{\imath}})<m<\infty$, missä $m\in\mathbb{R}$. Siten kaikilla $\Lambda_\ell\subseteq\bigcup_{r=\ell}^\infty\mathcal{J}_k^r\subseteq\mathcal{J}_k$ pätee

$$\mathtt{inf}_{\Lambda_\ell}\{\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\Lambda_\ell}\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})\mid E\subseteq\bigcup_{\boldsymbol{\imath}\in\Lambda_\ell}[\boldsymbol{\imath}]\}<m,$$

joten myös $\mathcal{M}^{q,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)\leq m$. Siten yhtäsuuruuden (IV) todistuksen nojalla $\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}\leq q$ ja edelleen

$$\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\mathcal{M}^{s,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}\leq\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})<\infty\}.$$

Osoitetaan sitten, että

$$\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}\leq\mathtt{inf}\{s\in\mathbb{R}\mid\mathscr{M}^{s,A}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}.$$

Olkoon $q\in\mathbb{R}$. Oletetaan, että $\mathcal{M}^{q,\mathscr{A}}(\mathcal{J}_k^\infty)<1$. Tällöin on olemassa sellainen avaruuden $\mathcal{J}_k^\infty$ peitejoukko Λ, että $\sum_{\boldsymbol{\imath}\in\Lambda}\varphi^q(A_{\boldsymbol{\imath}})<1$. Olkoon $p:=\mathtt{max}\{|\boldsymbol{\imath}|\mid\boldsymbol{\imath}\in\Lambda\}$. Määritellään avaruuden $\mathcal{J}_k^\infty$ peitejoukot Λ_ℓ, missä $\ell\geq p$, seuraavasti

$$\begin{aligned}\Lambda_\ell:=\{\boldsymbol{\imath}_1\ldots\boldsymbol{\imath}_t\mid\boldsymbol{\imath}_j\in\Lambda\quad&\text{kaikilla}\quad j=1,\ldots,t,\\&|\boldsymbol{\imath}_1\ldots\boldsymbol{\imath}_t|\geq\ell,|\boldsymbol{\imath}_1,\ldots,\boldsymbol{\imath}_{t-1}|<\ell\}.\end{aligned}$$

Singulaariarvofunktion submultiplikatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda}\varphi^q(A_{\mathtt{i}_1}\cdots A_{\mathtt{i}_t}A_{\mathtt{i}}) &\le \sum_{\mathtt{i}\in\Lambda}\varphi^q(A_{\mathtt{i}_1}\cdots A_{\mathtt{i}_t})\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\\ &= \varphi^q(A_{\mathtt{i}_1}\cdots A_{\mathtt{i}_t})\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda}\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\\ &\le \varphi^q(A_{\mathtt{i}_1}\cdots A_{\mathtt{i}_t})\cdot 1.\end{aligned}$$

Toistamalla edellinen päättely rekursiivisesti jokaiselle joukolle Λ_ℓ ja sanalle $\mathtt{i}_j$ saadaan

$$\sum_{\mathtt{i}\in\Lambda_\ell}\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\le 1$$

kaikilla Λ_ℓ. Jos $\mathtt{i}\in\mathcal{J}_k^{\ell+p}$, niin $\mathtt{i}=\mathtt{i}'\mathtt{j}$ joillakin sanoilla $\mathtt{i}$ ja $\mathtt{j}$, joilla $\mathtt{i}'\in\Lambda_\ell$ ja $|\mathtt{j}|\le p$. Lisäksi jokaista tällaista sanaa $\mathtt{i}'$ kohti on olemassa enintään k^p erilaista sanaa $\mathtt{j}$. Koska $\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\le\varphi^q(A_{\mathtt{i}'})$, niin

$$\begin{aligned}\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{J}_k^{\ell+p}}\varphi^q(A_{\mathtt{i}}) &\le \sum_{\mathtt{i}'\mathtt{j}\in\mathcal{J}_k^{\ell+p}}\varphi^q(A_{\mathtt{i}'})\varphi^q(A_{\mathtt{j}})\\ &\le k^p\sum_{\mathtt{i}'\in\Lambda_\ell}\varphi^q(A_{\mathtt{i}'})\le k^p.\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla r, niin

$$\begin{aligned}\lim_{\ell\to\infty}\Bigg(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{J}_k^{\ell}}\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\Bigg)^{1/\ell} &= \lim_{\ell+p\to\infty}\Bigg(\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{J}_k^{\ell+p}}\varphi^q(A_{\mathtt{i}})\Bigg)^{1/(\ell+p)}\\ &\le \lim_{\ell\to\infty}(k^p)^{1/(\ell+p)}\\ &= \lim_{\ell\to\infty}k^{p/(\ell+p)}=1.\end{aligned}$$

Siten $\dim_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}\le q$, koska raja-arvo on jatkuva ja aidosti vähenevä singulaariarvofunktion eksponentin funktiona huomautuksen 1.3.7 todistuksen nojalla. Lisäksi luku q voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua $\inf\{s\in\mathbb{R}\mid\mathscr{M}^{s,A}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}$ yhtäsuuruuden (II) ja sen todistuksen nojalla. Koska $\inf\{s\in\mathbb{R}\mid\mathscr{M}^{s,A}(\mathcal{J}_k^\infty)=0\}\le q$, niin on oltava $\dim_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}\le\inf\{s\in\mathbb{R}\mid\sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{J}_k}\varphi^s(A_{\mathtt{i}})<\infty\}$, samoin kuin yhtäsuuruuden (IV) todistuksessa. Näin ollen yhtälö (III) pätee.

$\square$

1.4 Lyapunovin eksponentit ja ulottuvuus

1.4.1 Määritelmä

Määritellään jonoavaruuteen $\mathcal{I}_k^\infty$ *vasensiirto* $\sigma : \mathcal{I}_k^\infty \longrightarrow \mathcal{I}_k^\infty$ asettamalla $\sigma((i_1, i_2, i_3, \ldots)) := (i_2, i_3, \ldots)$.

1.4.2 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja $(\mathcal{I}_k^\infty, \mathcal{F}, \mu, \sigma)$ ergodinen mitan säilyttävä systeemi. Asetetaan kaikilla $x \in \mathcal{I}_k^\infty$ ja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$A(x, n) := A_{x_n} \cdots A_{x_1}.$$

Kutsutaan paria $(A(x,n), \sigma)$ (*lineaariseksi*) *kosykliksi*, jonka generoi joukko $\mathscr{A}$.

1.4.3 Huomautus

Kosyklille $(A(x,n), \sigma)$ pätee

$$A(x,n) = A(\sigma^{n-1}(x), 1)A(\sigma^{n-2}(x), 1) \cdots A(\sigma(x), 1)A(x, 1),$$

missä $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{I}_k^\infty$ ja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

1.4.4 Määritelmä

Olkoon μ σ-invariantti mitta avaruudessa $\mathcal{I}_k^\infty$. Mitan μ *Lyapunovin eksponentit* $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$ ja $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$ suhteessa joukkoon $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ovat

$$\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \ln\big(\alpha_1(A(x,n))\big) d\mu(x)$$

ja

$$\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \ln\big(\alpha_2(A(x,n))\big) d\mu(x).$$

1.4.5 Määritelmä

Määritellään joukon $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *Lyapunovin yläeksponentti* $\lambda^*(\mathscr{A})$ asettamalla

$$\lambda^*(\mathscr{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\|A(x,n)\|,$$

missä raja-arvo on olemassa ja vakio μ-melkein kaikilla x eikä riipu matriisinormin $\|\cdot\|$ valinnasta (katso esimerkiksi Bessa et al., 2018).

1.4.6 Huomautus
Olkoot $A := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{J}_k^\infty$ ja $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Oletetaan, että $m \geq n$. Huomautuksen 1.2.4 nojalla $\alpha_1(A) = \|A\|$, joten

$$\begin{aligned}
\ln\big(\alpha_1(A(x, m+n))\big) &= \ln\|A(x, m+n)\| \\
&= \ln\|A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}} A_{x_m} \cdots A_{x_1}\| \\
&\leq \ln\big(\|A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}}\| \cdot \|A_{x_m} \cdots A_{x_1}\|\big) \\
&= \ln\big(\|A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}}\|\big) + \ln\left(\|A_{x_m} \cdots A_{x_1}\|\right) \\
&= \ln\big(\alpha_1(A(\sigma(x, m), n))\big) + \ln\big(\alpha_1(A(x, m))\big)
\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
\int \ln\big(\alpha_1(A(x, m+n))\big) d\mu(x) \leq &\int \ln\big(\alpha_1(A(x, n))\big) d\mu(x) \\
&+ \int \ln\big(\alpha_1(A(x, m))\big) d\mu(x),
\end{aligned}$$

sillä mitta μ on σ-invariantti. Siten jono

$$\left(\int \ln\big(\alpha_1(A(x, n))\big) d\mu(x)\right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$$

on subadditiivinen, joten Lyapunovin eksponentin $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$ määräävä raja-arvo on olemassa lauseen 1.3.4 nojalla. Vastaavasti huomautuksen 1.2.4 nojalla $\alpha_2(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$, joten

$$\begin{aligned}
-\ln\big(\alpha_2(A(x, m+n))\big) &= -\ln\|(A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}} A_{x_m} \cdots A_{x_1})^{-1}\|^{-1} \\
&= \ln\|(A_{x_m} \cdots A_{x_1})^{-1}(A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}})^{-1}\| \\
&\leq \ln\big(\|(A_{x_m} \cdots A_{x_1})^{-1}\| \cdot \|(A_{x_{m+n}} \cdots A_{x_{m+1}})^{-1}\|\big) \\
&= -\ln\big(\alpha_2(A(x, m))\big) - \ln\big(\alpha_2(A(\sigma(x, m), n))\big)
\end{aligned}$$

eli jono

$$\left(-\int \ln\big(\alpha_2(A(x, n))\big) d\mu(x)\right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$$

on subadditiivinen, joten Lyapunovin eksponentin $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$ määräävä raja-arvo on olemassa lauseen 1.3.4 nojalla. Siten määritelmä 1.4.4 on hyvin asetettu.

1.4.7 Huomautus

Mitan μ Lyapunovin eksponentit $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$ ja $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$ voidaan tulkita myös *kosyklin* $(A(x,n),\sigma)$ *Lyapunovin eksponenteiksi.*

1.4.8 Määritelmä

Olkoot $\Omega \neq \varnothing$ metristyvä kompakti joukko ja $\mathcal{D} := \{D_1, \ldots, D_r\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sen ositus Borelin joukkoihin. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ todennäköisyysavaruus. Olkoon $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ jatkuva mitan μ säilyttävä kuvaus. Merkitään

- $\mathrm{H}_\mu(\mathcal{D}) := -\sum_{D\in\mathcal{D}} \mu(D) \ln \mu(D)$, missä $0 \ln 0 := 0$ (*Shannonin entropia*)
- $\mathrm{H}_{\mathrm{top}}(\mathcal{D}) := \ln (\inf_{\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}} |\mathcal{E}|)$, missä infimum on yli kaikkien peitteen $\mathcal{D}$ äärellisten osapeitteiden $\mathcal{E}$ ja $|\mathcal{E}|$ on peitteen $\mathcal{E}$ alkioiden lukumäärä
- $\mathcal{D} \vee \mathcal{E}$ ositusta, jonka alkiot ovat ositusten $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{E}$ alkioiden leikkaukset
- $\mathcal{D}_f^n := \mathcal{D} \vee f^{-1}(\mathcal{D}) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{D})$.

Määritellään kuvauksen f *mittateoreettinen entropia* $\mathrm{h}_\mu(f)$ suhteessa mittaan μ asettamalla

$$\mathrm{h}_\mu(f) := \sup_{\mathcal{D}\in\mathscr{D}} \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \mathrm{H}_\mu(\mathcal{D}_f^n) \right),$$

missä supremum on yli kaikkien joukon Ω äärellisten Borelin ositusten kokoelman $\mathscr{D}$. Määritellään kuvauksen f *topologinen entropia* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$ asettamalla

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f) := \sup_{\mathcal{D}\in\mathscr{D}} \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \mathrm{H}_{\mathrm{top}}(\mathcal{D}_f^n) \right),$$

missä supremum on yli kaikkien joukon Ω avointen peitteiden kokoelman $\mathscr{D}$.

1.4.9 Huomautus

Mittateoreettisen entropian määritelmässä 1.4.8 oleva yläraja-arvo voidaan korvata tavallisella raja-arvolla (katso esimerkiksi Pollicott & Yuri, 1998, lemma 8.7). Lisäksi jokaisella avoimella peitteellä on olemassa äärellinen osapeite, koska perusjoukko Ω on kompakti.

1.4.10 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja μ σ-invariantti Borelin todennäköisyysmitta avaruudessa $\mathcal{J}_k^\infty$. Mitan μ *Lyapunovin ulottuvuus* $\mathtt{dim}_{\mathcal{L}\mathcal{Y}}$ suhteessa joukkoon $\mathscr{A}$ on

$$\mathtt{dim}_{\mathcal{L}\mathcal{Y}}(\mu, \mathscr{A}) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)}, & \text{jos } \mathrm{h}_\mu(\sigma) < -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}, & \text{jos } -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \leq \mathrm{h}_\mu(\sigma) < -\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) \\ \dfrac{2\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}, & \text{jos } -\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) \leq \mathrm{h}_\mu(\sigma). \end{cases}$$

2 Singulaariarvofunktion tasapainotilat

2.1 Määritelmä
Olkoon $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Matriisi A on

× *diagonaalinen*, jos $a_{i,j} = 0$ kaikilla erisuurilla $i, j = 1, \ldots, n$, missä $a_{i,j}$ on matriisin A paikalla (i, j) oleva alkio

× *antidiagonaalinen*, jos $a_{i,i} = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$

× *singulaarinen*, jos $\det A = 0$ eli matriisi A ei ole kääntyvä

× *hyperbolinen*, jos matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja niiden itseisarvot ovat erisuuret

2.2 Määritelmä
Olkoot $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Matriisit $A_1, \ldots, A_k$ ovat

× *keskenään jaottomia*, jos niillä ei ole yhteistä invarianttia yksiulotteista aliavaruutta eli toisin sanoen ei ole olemassa sellaista origon kautta kulkevaa suoraa $L \subseteq \mathbb{R}^2$, että $L = A_i(L)$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$

× *keskenään vahvasti jaottomia*, jos niillä ei ole yhteistä invarianttia yksiulotteisten aliavaruuksien äärellistä yhdistettä eli toisin sanoen ei ole olemassa sellaista kokoelmaa origon kautta kulkevia suoria $L_1, \ldots, L_m \subseteq \mathbb{R}^2$, että
$$\bigcup_{j=1}^{m} L_j = A_i \left(\bigcup_{k=1}^{m} L_j \right)$$
kaikilla $i = 1, \ldots, k$

× *eksponentiaalisesti eroteltavia*, jos on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $\|A_{\boldsymbol{\imath}} - A_{\boldsymbol{\jmath}}\| > c^n$ kaikilla erisuurilla sanoilla $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^n$.

2.3 Määritelmä
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja $s > 0$. Määritellään joukkoon $\mathscr{A}$ liittyvä *topologinen paine* $\mathrm{P}(s, \mathscr{A})$ asettamalla
$$\mathrm{P}(s, \mathscr{A}) := \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \Big(\sum_{\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n} \varphi^s(A_{i_n} \cdots A_{i_1}) \Big) \right).$$

2.4 Huomautus

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $s > 0$ ja $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Oletetaan, että $m \geq n$. Tällöin singulaariarvofunktion φ^s subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
&\ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n+m}} \varphi^s(A_{i_{n+m}}\cdots A_{i_1})\Big) \\
&\leq \ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n+m}} \varphi^s(A_{i_{n+m}}\cdots A_{i_{n+1}})\varphi^s(A_{i_n}\cdots A_{i_1})\Big) \\
&= \ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n+m}} \varphi^s(A_{i_{n+m}}\cdots A_{i_{n+1}}) \cdot \sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n+m}} \varphi^s(A_{i_n}\cdots A_{i_1})\Big) \\
&= \ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{m}} \varphi^s(A_{i_m}\cdots A_{i_1})\Big) + \ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n}} \varphi^s(A_{i_n}\cdots A_{i_1})\Big).
\end{aligned}$$

Siten jono

$$\left(\ln\Big(\sum_{\mathtt{i}\in\mathfrak{I}_k^{n}} \varphi^s(A_{i_n}\cdots A_{i_1})\Big)\right)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$$

on subadditiivinen, joten Feketen subadditiivisen lemman, lause 1.3.4, nojalla määritelmän 2.3 raja-arvo on erityisesti olemassa eli määritelmä 2.3 on hyvin asetettu.

2.5 Huomautus

Huomautuksen 1.3.7 todistuksen nojalla kuvaus $s \mapsto \mathrm{P}(s, \mathscr{A})$ on jatkuva. Jos kuvaukset $\mathscr{A}$ ovat kutistuskuvauksia, niin kuvaus $s \mapsto \mathrm{P}(s, \mathscr{A})$ on myös aidosti vähenevä.

2.6 Lause (Variaatioperiaate)

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *ja* $s > 0$. *Topologiselle paineelle* $\mathrm{P}(s, \mathscr{A})$ *pätee*

$$\mathrm{P}(s, \mathscr{A}) = \sup_{\mu}\left(\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \inf_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\int \ln\left(\varphi^s(A(x,n))\right)d\mu(x)\right)\right), \tag{2.1}$$

missä supremum on yli kaikkien joukon $\mathfrak{I}_k^\infty$ σ*-invarianttien Borelin todennäköisyysmittojen* μ. *Lisäksi kuvauksen* f *topologiselle entropialle* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f)$ *pätee* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_\mu(\mathrm{h}_\mu(f))$, *missä supremum on samoin kuin edellä.*

Todistus. Katso esimerkiksi Przytycki & Urbanski (2010) lause 3.4.1.

□

2.7 Määritelmä

Olkoon $\mu : \mathcal{J}_k^\infty \longrightarrow [0,1]$ σ-invariantti Borelin todennäköisyysmitta. Jos mitta μ saavuttaa ylärajan (2.1), niin mitta μ on *singulaariarvofunktion* φ^s *tasapainotila*. Jos lisäksi $s = \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\, \mathscr{A}$, niin tasapainotilaa μ kutsutaan *Käenmäen mitaksi* ja merkitään $\kappa_{s,\mathscr{A}} := \mu$.

2.8 Huomautus

Jokaisella joukolla $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja luvulla $s > 0$ on olemassa vähintään yksi tasapainotila eli $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ on aina olemassa muttei välttämättä yksikäsitteinen (katso esimerkiksi Käenmäki, 2004, lauseet 2.6 ja 4.1).

2.9 Huomautus

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja $s := \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\, \mathscr{A}$. Tällöin suoraan määritelmän 1.3.6 nojalla on oltava $\mathrm{P}(s, \mathscr{A}) = 0$. Siten lauseen 2.6 nojalla

$$\mathrm{h}_\mu(\sigma) \leq -\inf_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\varphi^s(A(x,n))\right) d\mu(x) \right). \tag{2.2}$$

Määritelmien 1.2.3 ja 1.4.4 sekä huomautuksen 1.4.6 nojalla

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\varphi^s(A(x,n))\right) d\mu(x) \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_1(A(x,n))^s\right) d\mu(x), & \text{jos } 0 \leq s < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_1(A(x,n))\alpha_2(A(x,n))^{s-1}\right) d\mu(x), & \text{jos } 1 \leq s < 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(|\mathtt{det}(A(x,n))|^{s/2}\right) d\mu(x), & \text{jos } 2 \leq s \end{cases} \\
&= \begin{cases} s \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_1(A(x,n))\right) d\mu(x), & \text{jos } 0 \leq s < 1 \\ \begin{aligned} &\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_1(A(x,n)\right) d\mu(x) \\ &+ (s-1) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_2(A(x,n))\right) d\mu(x) \end{aligned}, & \text{jos } 1 \leq s < 2 \\ \frac{s}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \mathtt{ln}\left(\alpha_1(A(x,n))\alpha_2(A(x,n))\right) d\mu(x), & \text{jos } 2 \leq s \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} s\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu), & \text{jos } 0 \le s < 1 \\ \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + (s-1)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu), & \text{jos } 1 \le s < 2 \\ \frac{s}{2}(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)), & \text{jos } 2 \le s. \end{cases}$$

Näin ollen

$$\mathrm{h}_\mu(\sigma) \le \begin{cases} -s\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu), & \text{jos } 0 \le s < 1 \\ -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - (s-1)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu), & \text{jos } 1 \le s < 2 \\ -\frac{s}{2}(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)), & \text{jos } 2 \le s. \end{cases}$$

Jos $0 \le s < 1$, niin $\mathrm{h}_\mu(\sigma) \le -s\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) < \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$, joten

$$\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}) = \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)} \le s = \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}.$$

Jos $1 \le s < 2$, niin $\mathrm{h}_\mu(\sigma) \le -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - (s-1)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$, joten

$$\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}) = 1 + \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)} \le s = \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}.$$

Jos $2 \le s$, niin $\mathrm{h}_\mu(\sigma) \le -\frac{s}{2}(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu))$, joten

$$\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}) = \frac{2\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)} \le s = \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}.$$

Siten aina pätee $\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, A) \le \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$. Koska lisäksi epäyhtälö 2.2 on aito jos ja vain jos μ ei ole Käenmäen mitta, niin $\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, A) = \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ täsmälleen, kun μ on Käenmäen mitta.

2.10 Määritelmä (Klenke, 2008, lause 1.64)
Olkoon $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Olkoon $p := (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k$, $0 \le p_j \le 1$, sellainen että $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen todennäköisyysmitta μ joukossa $\mathcal{B}(\mathcal{I}_k^\infty)$, että

$$\mu([\boldsymbol{\imath}]) = \mu([(i_1, \ldots, i_k)]) = \prod_{j=1}^k p_{i_j}$$

kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^\infty$. Mittaa μ kutsutaan *Bernoullin mitaksi.*

2.11 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 3.2)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$*, keskenään jaottomia mutta eivät vahvasti jaottomia matriiseja. Oletetaan lisäksi, että yksi matriiseista* $\mathscr{A}$ *on hyperbolinen. Tällöin on olemassa sellainen kannan vaihto, että kaikki matriisit* $\mathscr{A}$ *ovat joko diagonaalisia tai antidiagonaalisia. Lisäksi vähintään yksi matriiseista on tällöin diagonaalinen ja vähintään yksi antidiagonaalinen.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi $A_i \in \mathscr{A}$ on hyperbolinen. Tällöin matriisin A_i ominaisarvojen itseisarvot ovat erisuuret eli erityisesti ominaisarvot ovat erisuuret. Siten matriisin A_i ominaisvektorit ovat lineaarisesti vapaat, joten matriisi A_i on diagonalisoituva. Näin ollen voidaan olettaa, että sopivan kannan vaihdon jälkeen matriisi A_i on diagonaalinen. Nyt matriisin A_i eräät lineaarisesti vapaat ominaisvektorit ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ standardikantavektorit e_0 ja e_1 eli on olemassa luvut λ_0 ja λ_1, joille pätee $A_i(e_0) = \lambda_0 e_0$ ja $A_i(e_1) = \lambda_1 e_1$. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $|\lambda_0| < |\lambda_1|$, koska tapaukset ovat symmetriset. Olkoon $x := x_0 e_0 + x_1 e_1 \in \mathbb{R}^2$. Oletetaan, että vektorin x rata kuvauksessa A_i on äärellinen. Tällöin jollakin $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ pätee $x = A_i^{n'}(x)$. Toisaalta vektorille $A_i(x) = A_i(x_0 e_0 + x_1 e_1) = x_0 A_i(e_0) + x_1 A_i(e_1) = x_0 \lambda_0 e_0 + x_1 \lambda_1 e_1$ pätee $\sphericalangle(A_i(x), e_1) \leq \sphericalangle(x, e_1)$, missä yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen, kun $x = e_0$ tai $x = e_1$. Toistamalla tätä iteratiivisesti saadaan $\lim_{n\to\infty} A_i^n(x) = e_1$, kun $e_0 \neq x \neq e_1$. Tämä on ristiriita, koska oletuksen mukaan kaikilla $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ pätee $A_i^{kn'}(x) = x$. Siten jokaisen muun suoran paitsi koordinaattiakseleiden projektiivinen rata kuvauksessa A_i on ääretön. Näin ollen ainoa joukko suoria, joka voi olla kiinnitetty kaikilla matriiseilla $\mathscr{A}$ on $\{\overline{e_0}, \overline{e_1}\}$, missä $\overline{e_0}$ on vektorin e_0 ja $\overline{e_1}$ vektorin e_1 suuntainen suora. Koska matriisit $\mathscr{A}$ eivät ole vahvasti jaottomia, matriisin A_j on kuvattava suora $\overline{e_i}$ joko suoralle $\overline{e_i}$ tai suoralle $\overline{e_{1-i}}$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Jos $A_j(\overline{e_i}) = \overline{e_i}$ kaikilla $i = 0, 1$, niin matriisi A_j on diagonaalinen ja jos $A_j(\overline{e_i}) = \overline{e_{1-i}}$ kaikilla $i = 0, 1$, niin matriisi A_j on antidiagonaalinen. Lisäksi on oltava $A_j(\overline{e_0}) = \overline{e_1}$ jollakin $1 \leq j \leq k$, koska matriisit $\mathscr{A}$ ovat jaottomia eli jokainen niistä ei voi kiinnittää suoraa $\overline{e_0}$.

$\square$

2.12 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, väite 3.3)
Olkoot $\mathscr{A} = \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *jaottomia matriiseja. Tällöin singulaariarvofunktiolla* φ^s *on olemassa yksikäsitteinen tasapainotila* μ*. Mitta* μ *on ergodinen ja sillä on seuraava Gibbsin ominaisuus:*

> *on olemassa sellainen* $C > 0$*, että*
>
> $$C^{-1} \leq \frac{\mu([\boldsymbol{\imath}])}{\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}} \leq C \tag{2.3}$$
>
> *kaikilla äärellisillä sanoilla* $\boldsymbol{\imath} \in \mathfrak{I}_k^n$.

Todistus. Katso Käenmäki & Reeve (2014) väitteet 2.3, 3.4 ja lause 3.7.

□

2.13 Seuraus
Mitan μ *kantaja on* $\mathfrak{I}_k^\infty$.

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{\jmath}\boldsymbol{\jmath}' = \boldsymbol{\imath} \in \mathfrak{I}_k^\infty$, missä $\boldsymbol{\jmath} \in \mathfrak{I}_k^n$. Nyt $\boldsymbol{\imath} \in [\boldsymbol{\jmath}]$. Lisäksi Gibbsin ominaisuuden (2.3) nojalla

$$0 < D^{-1} \leq \mu([\boldsymbol{\jmath}]) \leq D < \infty,$$

missä $D := D(n) := C\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}})\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}$. Koska tämä pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ja $[\boldsymbol{\jmath}^*] \subseteq [\boldsymbol{\jmath}]$ aina, kun $\boldsymbol{\jmath} < \boldsymbol{\jmath}^*$, niin jokaisella $\boldsymbol{\imath} \in \mathfrak{I}_k^\infty$ on olemassa mielivaltaisen pieni avoin ympäristö $[\boldsymbol{\jmath}]$, jolle $0 < \mu([\boldsymbol{\jmath}]) < \infty$.

□

2.14 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lemma 3.4)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *sellainen ja mitta* μ *sellainen singulaariarvofunktion* φ^s *tasapainotila, että* $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$*. Tällöin* μ *on kuvauksen* $A \mapsto |\det A|^{s/2}$ *tasapainotila eli se maksimoi lausekkeen*

$$\mathrm{h}_\nu(\sigma) + \int \ln(|\det A_{i_1}|^{s/2}) d\nu(\boldsymbol{\imath})$$

suhteessa kaikkiin σ*-invariantteihin avaruuden* $\mathfrak{I}_k^\infty$ *Borelin todennäköisyysmittoihin* ν*. Erityisesti* μ *on Bernoullin mitta.*

Todistus. *Birkhoffin ergodisen lauseen*, (katso esimerkiksi Silva, 2008, lause 5.1.1) ja *Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen* (katso esimerkiksi Bauer, 2001, lause 15.6) nojalla

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int \ln \left(\alpha_1(A(\boldsymbol{\imath}, n)) \right) d\mu(\boldsymbol{\imath}) \right) \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int \ln \left(\alpha_2(A(\boldsymbol{\imath}, n)) \right) d\mu(\boldsymbol{\imath}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int \ln \left(\alpha_1(A(\boldsymbol{\imath}, n)) \alpha_2(A(\boldsymbol{\imath}, n)) \right) d\mu(\boldsymbol{\imath}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int \ln |\det(A(\boldsymbol{\imath}, n))| d\mu(\boldsymbol{\imath}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int \frac{1}{n} \ln \left| \det \left(\prod_{j=0}^{n-1} A(\sigma^j(\boldsymbol{\imath}), 1) \right) \right| d\mu(\boldsymbol{\imath}) \right) \\
&= \int \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left| \det A(\sigma^j(\boldsymbol{\imath}), 1) \right| \right) \right) d\mu(\boldsymbol{\imath}) \\
&= \int \ln |\det A(\boldsymbol{\imath}, 1)| d\mu(\boldsymbol{\imath}) = \int \ln |\det A_{i_1}| d\mu(\boldsymbol{\imath}).
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan mitalle μ pätee $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) =: \lambda$, joten määritelmän 1.4.4 ja edellisen laskun nojalla

$$\begin{aligned}
&\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln \left(\varphi^s(A(\boldsymbol{\imath}, n)) \right) d\mu(\boldsymbol{\imath}) \\
&\quad = \begin{cases} s\lambda, & \text{jos } 0 \leq s < 1 \\ \lambda + (s-1)\lambda, & \text{jos } 1 \leq s < 2 \\ \frac{s}{2}(\lambda + \lambda), & \text{jos } 2 \leq s \end{cases} \\
&\quad = s\lambda = \frac{s}{2} \left(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) \right) \\
&\quad = \frac{s}{2} \int \ln(|\det A_{i_1}|) d\mu(\boldsymbol{\imath}).
\end{aligned}$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa mitta ν, jolle

$$\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \int_{\mathcal{I}_k^\infty} \ln(|\det A_{i_1}|) d\nu(\boldsymbol{\imath}) > \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \int_{\mathcal{I}_k^\infty} \ln(|\det A_{i_1}|) d\mu(\boldsymbol{\imath}).$$

Tällöin mitan ν σ-invarianssin ja epäyhtälön $\varphi^s(A) \geq |\det A|^{s/2}$ nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln\left(\varphi^s(A(\mathtt{i}, n))\right) d\nu(\mathtt{i}) \\
&\geq \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln\left(|\det A(\mathtt{i}, n)|^{s/2}\right) d\nu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln\left|\det\left(\prod_{i=0}^{n-1} A(\sigma^i(\mathtt{i}), 1)\right)\right| d\nu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln\left|\det\left(\prod_{i=0}^{n-1} A(\mathtt{i}, 1)\right)\right| d\nu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int n \ln|\det A(\mathtt{i}, 1)| d\nu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \inf_{n\geq 1} \int \ln|\det A(\mathtt{i}, 1)| d\nu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \int \ln|\det A_{i_1}| d\nu(\mathtt{i}) \\
&> \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{s}{2} \int \ln|\det A_{i_1}| d\mu(\mathtt{i}) \\
&= \mathrm{h}_\mu(\sigma) + \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \ln\left(\varphi^s(A(\mathtt{i}, n))\right) d\mu(\mathtt{i}).
\end{aligned}$$

Siten μ ei ole singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila, mikä on ristiriita.

Oletetaan sitten, että μ ei ole Bernoullin mitta. Määritellään Bernoullin mitta ν asettamalla $\nu([i]) := \mu([i])$ kaikilla kirjaimilla $i = 1, \ldots, k$. Koska $\ln(|\det A_{i_1}|^{s/2})$ riippuu vain sanan $\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^\infty$ ensimmäisestä kirjaimesta i_1, niin

$$\int \ln(|\det A_{i_1}|^{s/2}) d\nu(\mathtt{i}) = \int \ln(|\det A_{i_1}|^{s/2}) d\mu(\mathtt{i}).$$

Olkoon $\mathcal{D} := \{[i] \mid i = 1, \ldots k\}$. Koska nyt $\mathcal{D}$ on generoiva ositus ja *Kolmogorovin-Sinain lauseen* (katso esimerkiksi Sinai, 1959) nojalla generoiva ositus antaa entropian, niin

$$\mathrm{h}_\mu(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \mathrm{H}_\mu(\mathcal{D}_\sigma^n)\right) < \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} \mathrm{H}_\mu(\mathcal{D}_\sigma^1)\right) = \mathrm{H}_\mu(\mathcal{D})$$

ja lisäksi

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_\nu(\sigma) &= \lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{n}\sum_{D\in\mathcal{D}_\sigma^m}\nu(D)\ln\nu(D)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\nu([i])\ln\nu([i])n\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{D\in\mathcal{D}}^{k}\nu(D)\ln\nu(D)\Big) = \mathrm{H}_\mu(\mathcal{D}),
\end{aligned}$$

joten $\mathrm{h}_\mu(\sigma) < \mathrm{h}_\nu(\sigma)$. Siten

$$\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \int \ln(|\det A_{i_1}|^{s/2})d\mu(\boldsymbol{\imath}) < \mathrm{h}_\nu(\sigma) + \int \ln(|\det A_{i_1}|^{s/2})d\nu(\boldsymbol{\imath}),$$

mikä on ristiriita, koska μ on kuvauksen $A \mapsto |\det A|^{s/2}$ tasapainotila.

□

2.15 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 3.5)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1,\dots,A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Oletetaan, että vähintään yksi matriiseista on diagonaalinen ja hyperbolinen ja vähintään yksi antidiagonaalinen. Tällöin kaikilla $0 < s < 2$ pätee, että joukkoon $\mathscr{A}$ liittyvä singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila μ ei ole Bernoullin mitta.

Todistus. Koska yksi matriiseista $\mathscr{A}$ on diagonaalinen ja hyperbolinen, niin lauseen 2.11 todistuksen nojalla ainoat suorat, jotka voivat olla invariantteja, ovat koordinaattiakselit. Toisaalta yksi matriiseista $\mathscr{A}$ on antidiagonaalinen eli erityisesti se ei kiinnitä kumpaakaan koordinaattiakselia. Siten matriisit $\mathscr{A}$ ovat keskenään jaottomia eli lausetta 2.12 voidaan soveltaa. Olkoon μ singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila suhteessa kuvauksiin $\mathscr{A}$. Tehdään vastaoletus eli, että μ on Bernoullin mitta. Olkoot $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^n$ toistensa permutaatioita eli $i_k = j_{\varsigma(k)}$ kaikilla $k = 1,\dots,n$, missä ς on n-permutaatio. Gibbsin ominaisuuden (2.3) nojalla kaikilla äärellisillä sanoilla $\boldsymbol{k}$ pätee

$$C^{-1} \le \frac{\mu([\boldsymbol{k}])}{\varphi^s(A_{\boldsymbol{k}})e^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}} \le C,$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$\frac{\mu([\boldsymbol{k}])}{C\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}} \leq \varphi^s(A_{\boldsymbol{k}}) \leq \frac{C\mu([\boldsymbol{k}])}{\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}},$$

missä vakio $C \geq 1$ ei riipu sanan $\boldsymbol{k}$ pituudesta n. Koska μ on Bernoullin mitta, niin $\mu([\boldsymbol{\imath}]) = \mu([\boldsymbol{\jmath}])$. Siten

$$\varphi^s(A_{\boldsymbol{\imath}}) \leq \frac{C\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}}{\mu([\boldsymbol{\imath}])} = C^2 \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{P}(s,\mathscr{A})}}{C\mu([\boldsymbol{\jmath}])} \leq C^2 \varphi^s(A_{\boldsymbol{\jmath}}).$$

Oletetaan sitten, että A_i on diagonaalinen ja hyperbolinen ja että A_j on antidiagonaalinen. Nyt

$$\frac{\varphi^s(A_i^{2n} A_j)}{\varphi^s(A_i^n A_j A_i^n)} \leq C^2$$

kaikilla n, koska sanat $\boldsymbol{\imath}' := (\overbrace{i, \ldots, i}^{2n \text{ kpl}}, j)$ ja $\boldsymbol{\jmath}' := (\overbrace{i, \ldots, i}^{n \text{ kpl}}, j, \overbrace{i, \ldots, i}^{n \text{ kpl}})$ ovat toistensa permutaatioita. Siten epäyhtälön säilymisperiaatteen nojalla

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^s(A_i^{2n} A_j)}{\varphi^s(A_i^n A_j A_i^n)} \leq C^2 < \infty. \tag{2.4}$$

Merkitään

$$A_i := \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_j := \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Koska diagonaalimatriisien tulo on diagonaalimatriisi ja diagonaalimatriisin ja antidiagonaalimatriisin tulo on antidiagonaalimatriisi, niin

$$A_{\boldsymbol{\imath}'} = \begin{bmatrix} 0 & a^{2n}c \\ b^{2n}d & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_{\boldsymbol{\jmath}'} = \begin{bmatrix} 0 & a^n c b^n \\ b^n d a^n & 0 \end{bmatrix}$$

ja edelleen

$$(A_{\boldsymbol{\imath}'})^\top A_{\boldsymbol{\imath}'} = \begin{bmatrix} a^{4n}c^2 & 0 \\ 0 & b^{4n}d^2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad (A_{\boldsymbol{\jmath}'})^\top A_{\boldsymbol{\jmath}'} = \begin{bmatrix} a^{2n}b^{2n}c^2 & 0 \\ 0 & a^{2n}b^{2n}d^2 \end{bmatrix}.$$

Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $|a| > |b|$, joten matriisin $A_{\boldsymbol{\imath}'}$ singulaariarvot ovat $\alpha_1(A_{\boldsymbol{\imath}'}) = a^{2n}|c|$ ja $\alpha_2(A_{\boldsymbol{\imath}'}) = b^{2n}|d|$, kun n on niin suuri, että $a^{2n}|c| \geq b^{2n}|d|$ riippumatta lukujen $|c|$ ja $|d|$ järjestyksestä. Siten voidaan edelleen olettaa, että $|c| \geq |d|$, jolloin $\alpha_1(A_{\boldsymbol{j}'}) = |a^n b^n c|$ ja $\alpha_2(A_{\boldsymbol{j}'}) = |a^n b^n d|$. Olkoon $m := \lceil s \rceil$. Nyt jos $1 < s < 2$, niin $m = 2$ ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^s(A_{\boldsymbol{i}'})}{\varphi^s(A_{\boldsymbol{j}'})} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}|c|(b^{2n}|d|)^{s-2+1}}{|a^n b^n c| \cdot |a^n b^n d|^{s-2+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^{2n-n-n(s-1)}}{|b|^{-2n(s-1)+n+n(s-1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a}{b}\right|^{(2-s)n} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Vastaavasti jos $0 < s \leq 1$, niin $m = 1$ ja

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^s(A_{\boldsymbol{i}'})}{\varphi^s(A_{\boldsymbol{j}'})} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a^{2n}|c|)^{s-1+1}}{|a^n b^n c|^{s-1+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|a|^{2n}}{|a|^n |b|^n}\right)^s \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a}{b}\right|^{ns} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita yhtälön (2.4) kanssa. Siten μ ei voi olla Bernoullin mitta millään luvulla s.

$\square$

2.16 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 3.1)
Olkoot matriisit $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ keskenään jaottomia. Oletetaan lisäksi, että vähintään yksi matriiseista $\mathscr{A}$ on hyperbolinen. Olkoot $0 < s < 2$ ja μ avaruuden $\mathfrak{I}_k^\infty$ Borelin todennäköisyysmitta, joka on singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila suhteessa kuvauksiin $\mathscr{A}$. Tällöin mitan μ kantaja on $\mathfrak{I}_k^\infty$ ja sen Lyapunovin eksponentit $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$ ja $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$ ovat erisuuret.

Todistus. Oletetaan ensin, että matriisit $\mathscr{A}$ ovat keskenään jaottomia mutta eivät vahvasti jaottomia. Koska oletuksen mukaan vähintään yksi matriisi A_i on lisäksi hyperbolinen, niin lauseen 2.11 nojalla matriisit ovat joko diagonaalisia tai antidiagonaalisia ja kumpikin vaihtoehto esiintyy. Siten lauseen

2.15 nojalla singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila μ ei ole Bernoullin mitta millään $0 < s < 2$. Jos olisi $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$, niin lauseen 2.14 nojalla μ olisi Bernoullin mitta, mikä on mahdotonta. Siten $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \neq \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$.

Oletetaan sitten, että matriisit $\mathscr{A}$ ovat keskenään vahvasti jaottomia. Jos olisi $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$, niin lauseen 2.14 nojalla μ olisi Bernoullin mitta. Kuitenkin *Furstenbergin lauseen* (katso esimerkiksi Bougerol & Lacroix, 1985, lause 4.2) nojalla vahvasti jaottomaan joukkoon liittyvän Bernoullin mitan Lyapunovin eksponentit ovat aina erisuuret, mikä on ristiriita. Näin ollen $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \neq \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$. Lisäksi seurauksen 2.13 nojalla mitan μ kantaja on aina $\mathcal{J}_k^{\infty}$.

$\square$

3 Säännölliset alisysteemit

3.1 Määritelmä
Olkoon osajoukko $\mathscr{A} := \{A_1, A_2, \ldots\} \subseteq \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ epätyhjä ja kompakti. Joukon $\mathscr{A}$ *yhteisspektrisäde* (eng. *joint spectral radius*) $\rho(\mathscr{A})$ on

$$\rho(\mathscr{A}) := \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{A}} \|A_1 \cdots A_n\|^{1/n} \Big)$$

ja *alempi spektrisäde* (eng. *lower spectral radius*) $\varrho(\mathscr{A})$ on

$$\varrho(\mathscr{A}) := \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{A}} \|A_1 \cdots A_n\|^{1/n} \Big).$$

3.2 Huomautus
Yhteisspektrisäteelle $\rho(\mathscr{A})$ pätee

$$\rho(\mathscr{A}) = \inf_{n\geq 1} \Big(\sup_{A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{A}} \|A_1 \cdots A_n\|^{1/n} \Big)$$

ja vastaavasti alemmalle spektrisäteelle $\varrho(\mathscr{A})$ pätee

$$\varrho(\mathscr{A}) = \inf_{n\geq 1} \Big(\inf_{A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{A}} \|A_1 \cdots A_n\|^{1/n} \Big),$$

(katso esimerkiksi Jungers, 2009, lemma 1.2 ja väite 1.1). Erityisesti määritelmän 3.1 raja-arvot ovat olemassa. Sekä $\rho(\mathscr{A})$ että $\varrho(\mathscr{A})$ ovat lisäksi riippumattomia sekä matriisinormin että kannan valinnasta äärellisulotteisten matriisinormien ekvivalenssin vuoksi. Siten määritelmä 3.1 on hyvin asetettu.

3.3 Määritelmä
Olkoon $A \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ hyperbolinen matriisi. Olkoot $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ matriisin A ominaisarvot. Matriisin A *vakaa suunta* on ominaisarvoa λ_1 vastaava *ominaissuunta* eli ominaisarvoa λ_1 vastaavien ominaisvektoreiden määräämän suoran suunta. Matriisin A *epävakaa suunta* on vastaavasti ominaisarvoa λ_2 vastaava ominaissuunta.

Projektiivisen kuvauksen A *epävakaa ominaisavaruus* on sen puoleensavetävä kiintopiste ja *vakaa ominaisavaruus* hylkivä kiintopiste.

3.4 Määritelmä
Määritellään joukkoon $\mathbb{R}^2$ ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla $(x,y) \sim (w,z)$ jos ja vain jos $(x,y) = (tw, tz)$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kutsutaan relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkien joukkoa *projektiiviseksi reaaliakseliksi*, jota merkitään $\mathbb{RP}^1$. Merkitään $\bar{u} := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \sim u\} \in \mathbb{RP}^1$ ekvivalenssiluokkaa, jonka määrää vektori $u \in \mathbb{R}^2$.

3.5 Huomautus
Projektiivisen reaaliakselin voi ajatella koostuvan kaikista origon kautta kulkevista suorista.

3.6 Määritelmä
Olkoon $\bar{u} \in \mathbb{RP}^1$ suora, jonka generoi vektori $u \in \mathbb{R}^2$, joka ei ole nollavektori. Määritellään joukkoon $\mathbb{RP}^1$ kuvaus $d_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \bar{v}) := \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

kaikilla nollavektorista poikkeavilla vektoreilla $u \in \bar{u} \in \mathbb{RP}^1$ ja $v \in \bar{v} \in \mathbb{RP}^1$. Tässä $\|\cdot\|$ on euklidinen normi ja $\wedge$ kiilatulo (katso esimerkiksi Ivancevic & Ivancevic, 2007, 177).

3.7 Huomautus
Kuvaus $d_{\mathbb{RP}^1}$ on hyvin määritelty eli se ei riipu vektoreiden $u \in \bar{u}$ ja $v \in \bar{v}$ valinnasta, koska

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\|(\|u\|\hat{u}) \wedge (\|v\|\hat{v})\|}{\|u\| \cdot \|v\|} \\ &= \frac{\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|\hat{u} \wedge \hat{v}\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \|\hat{u} \wedge \hat{v}\|, \end{aligned}$$

kaikilla vektoreilla $u \in \bar{u}$ ja $v \in \bar{v}$. Tässä $\hat{u}$ on vektorin u ja $\hat{v}$ vektorin v suuntainen yksikkövektori.

3.8 Huomautus
Differentiaali-1-muodoille $u := (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$\begin{aligned}
\|u \wedge v\|^2 &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = u_1^2v_2^2 - 2u_1v_2u_2v_1 + u_2^2v_1^2 \\
&= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - (u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2) \\
&= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 \\
&= \langle u \,|\, u \rangle \langle v \,|\, v \rangle - \langle u \,|\, v \rangle^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2\left(1 - \left(\frac{\langle u \,|\, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}\right)^2\right) \\
&= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2(\sphericalangle(u, v)).
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2(\sphericalangle(u, v))}}{\|u\| \cdot \|v\|} \\
&= \sqrt{1 - \cos^2(\sphericalangle(u, v))} = |\sin(\sphericalangle(u, v))|,
\end{aligned}$$

missä $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on skalaaritulo ja $\sphericalangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suorien välinen (suunnattu) kulma.

3.9 Lause
Pari $(\mathbb{RP}^1, d_{\mathbb{RP}^1})$ *on metrinen avaruus.*

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus $d_{\mathbb{RP}^1}$ on metriikka. Olkoot $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{RP}^1$, $u \in \bar{u}$ ja $v \in \bar{v}$. Jos $\bar{u} = \bar{v}$, niin ekvivalenssiluokkien määritelmän nojalla on oltava $u = tv$ jollakin $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jolloin $d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$, koska differentiaali-1-muodon kiilatulo itsensä kanssa on nolla. Oletetaan sitten, että $\bar{u} \neq \bar{v}$. Tällöin vektorit u ja v eivät voi olla saman- eivätkä vastakkaissuuntaiset eli $\sphericalangle(u, v) \neq n\pi$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Siten $\sin(\sphericalangle(u, v)) \neq 0$, joten huomautuksen 3.8 nojalla myös $d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \bar{v}) \neq 0$.

Kuvaus $d_{\mathbb{RP}^1}$ on selvästi symmetrinen, koska suorien järjestys ei vaikuta niiden välisen kulman sinin itseisarvon suuruuteen.

Osoitetaan vielä kolmioepäyhtälö. Koska suunnatuille kulmille pätee

$\sphericalangle(u,w) + \sphericalangle(w,v) = \sphericalangle(u,v)$, niin

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u},\bar{v}) &= |\sin(\sphericalangle(u,v))| \\
&= |\sin(\sphericalangle(u,w) + \sphericalangle(w,v))| \\
&= |\sin(\sphericalangle(u,w))\cos(\sphericalangle(w,v)) + \cos(\sphericalangle(u,w))\sin(\sphericalangle(w,v))| \\
&\leq |\sin(\sphericalangle(u,w))\cos(\sphericalangle(w,v))| + |\cos(\sphericalangle(u,w))\sin(\sphericalangle(w,v))| \\
&\leq |\sin(\sphericalangle(u,w))| \cdot 1 + 1 \cdot |\sin(\sphericalangle(w,v))| \\
&= d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u},\bar{w}) + d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{w},\bar{v}).
\end{aligned}$$

□

3.10 Määritelmä

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko A on *positiivisesti homogeeninen*, jos kaikilla $x \in A$ pätee $tx \in A$ kaikilla $t > 0$. Joukko A on *kupera*, jos se sisältää jokaisen pisteidensä välisen yhdysjanan eli toisin sanoen kaikilla $x, y \in A$ pätee $(1-t)x + ty \in A$ kaikilla $t \in]0,1[$.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ *kartio* $\mathcal{C}$ on suljettu positiivisesti homogeeninen kupera joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ osajoukko, jonka sisus on epätyhjä. Kuvaus $A \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *säilyttää kartion* $\mathcal{C}$ *aidosti*, jos $A(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{int}(\mathcal{C})$.

3.11 Huomautus

Koska kartio $\mathcal{C}$ on positiivisesti homogeeninen joukko, se koostuu origosta lähtevistä puolisuorista. Lisäksi, koska kartio on kupera joukko, sen täytyy sisältää täsmälleen ne puolisuorat, joiden avautumiskulma suhteessa x-akseliin on jollain välillä. Siten joukko $\mathcal{C}$ on kartio jos ja vain jos on olemassa sellainen suljettu projektiivinen väli $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{RP}^1$, että $\mathcal{C}$ on jompikumpi joukon $\{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \bar{u} \in \mathcal{K}\}$ kahdesta yhtenäisestä komponentista.

Jos matriisi A säilyttää kartion $\mathcal{C}$ (aidosti), sen täytyy kuvata erityisesti kartion $\mathcal{C}$ reunasuorat kartion sisälle (aidosti) eli matriisin A alkiot ovat (aidosti) positiivisia näiden reunasuorien määräämässä kannassa. Vastaavasti, jos matriisin alkiot ovat (aidosti) positiivisia kartion $\mathcal{C}$ reunasuorien määräämässä kanssa, se säilyttää kartion $\mathcal{C}$ (aidosti). Siten matriisi A säilyttää kartion $\mathcal{C}$ (aidosti) jos ja vain jos on olemassa kanta, jossa kaikki matriisin A alkiot ovat (aidosti) positiivisia.

3.12 Lause (Oseledetsin multiplikatiivinen ergodinen lause)
Olkoon f kääntyvä mitan säilyttävä kuvaus todennäköisyysavaruudessa $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Olkoon $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sellainen joukko, että kosyklille $(A(x,n), \sigma)$ pätee

$$\int |\ln(\|A(x,1)\|)| d\mu(x) < \infty.$$

Oletetaan lisäksi, että mitan μ Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret. Tällöin on olemassa mitalliset kuvaukset $\mathfrak{s}, \mathfrak{u} : X \longrightarrow \mathbb{RP}^1$, joille pätee μ-melkein kaikilla $x \in X$

(a) *$A(x,n)\mathfrak{u}(x) = \mathfrak{u}(f^n(x))$ ja $A(x,n)\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(f^n(x))$*

(b) *kaikilla nollasta poikkeavilla $u \in \mathfrak{u}(x)$ ja $v \in \mathfrak{s}(x)$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \ln \|A(x,n)(u)\| \right) = \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \ln \|A(x,n)(v)\| \right) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu).$$

Todistus. Katso esimerkiksi Oseledets (1968).

□

3.13 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 4.3)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Olkoon μ ergodinen σ-invariantti mitta, jonka kantaja on $\mathfrak{I}_k^\infty$ ja jonka Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret. Olkoot $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n > n_0$ ja osajoukko $\Gamma \subseteq \mathfrak{I}_k^n$, joille pätee

(a) $|\Gamma| > \mathrm{e}^{n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon)}$

(b) *on olemassa suljettu projektiivinen väli $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{RP}^1$, jolle*
$A_{\mathtt{i}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{int}(\mathcal{K})$ kaikilla $\mathtt{i} \in \Gamma$

(c) $\rho(\mathscr{A}_\Gamma) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon)}$

(d) *kaikilla $u \in \bar{u} \in \mathcal{K}$ ja $\mathtt{i} \in \Gamma$ pätee $\|A_{\mathtt{i}}(u)\| \geq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \varepsilon)} \|u\|$*

(e) *kaikilla* $\mathbf{\imath} \in \Gamma$ *pätee* $\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} \leq \det A_{\mathbf{\imath}} \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}$

(f) *jos* $\mathbf{\jmath} \in \mathcal{I}_k^{\ell}$*, missä* $1 \leq \ell \leq n_0$*, niin* $\mathbf{\jmath}$ *on alisana jokaisessa sanassa* $\mathbf{\imath} \in \Gamma$.

Todistus. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että

$$0 < \varepsilon < \frac{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}{4}. \tag{3.1}$$

Jotta lausetta 3.12 voidaan soveltaa, korvataan todistuksessa ergodinen mitan säilyttävä systeemi $(\mathcal{I}_k^{\infty}, \mathcal{B}(\mathcal{I}_k^{\infty}), \mu, \sigma)$ sen *kääntyvällä luonnollisella laajennoksella*† .

Määritellään avaruuteen $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ mitta ν asettamalla

$$\nu(B) := \mu\left(\{x \in \mathcal{I}_k^{\infty} \mid (\mathscr{u}(x), \mathscr{s}(x)) \in B\}\right),$$

missä $\mathscr{u}$ ja $\mathscr{s}$ ovat lauseen 3.12 antamat kuvaukset. Tällöin erityisesti avaruuden $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ diagonaali on nollamittainen, koska $\mathscr{u}(x) \neq \mathscr{s}(x)$ μ-melkein kaikilla x eli $\mu\left(\{x \in \mathcal{I}_k^{\infty} \mid \mathscr{u}(x) = \mathscr{s}(x)\}\right) = 0$, sillä jos olisi $\mathscr{u}(x) = \mathscr{s}(x)$ positiivimittaisella määrällä sanoja x, niin olisi olemassa nollavektorista poikkeavat vektorit $u \in \mathscr{u}(x)$ ja $v \in \mathscr{s}(x)$, joille $u = v$. Tällöin erityisesti olisi oltava

$$\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\|A(x,n)(u)\|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\|A(x,n)(v)\|\right) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu),$$

mikä on mahdotonta, koska oletuksen mukaan $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \neq \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$. Olkoon $(\overline{w_u}, \overline{w_s})$ sellainen mitan ν kantajan piste, että $\overline{w_u} \neq \overline{w_s}$. Valitaan $\delta > 0$, jolle pätee

$$\{\bar{u} \in \mathbb{RP}^1 \mid \mathscr{d}_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \overline{w_u}) \leq 2\delta\} \cap \{\bar{v} \in \mathbb{RP}^1 \mid \mathscr{d}_{\mathbb{RP}^1}(\bar{v}, \overline{w_s}) \leq \delta\} = \varnothing.$$

Olkoot

$$Z := \{x \in \mathcal{I}_k^{\infty} \mid \mathscr{d}_{\mathbb{RP}^1}(\mathscr{u}(x), \overline{w_u}) \leq \delta \quad \text{ja} \quad \mathscr{d}_{\mathbb{RP}^1}(\mathscr{s}(x), \overline{w_s}) \leq \delta\}$$

† Mitan luonnollinen laajennos kaksipuoleiseen jonoavaruuten
$\{(\ldots, i_{-3}, i_{-2}, i_{-1}, i_0, i_1, i_2, i_3, \ldots) \mid i_j \in \{1, \ldots, k\}$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}\}$
(katso esimerkiksi Petersen, 1989, 13).

$$\mathcal{K} := \{\bar{u} \in \mathbb{RP}^1 \mid d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \overline{w_u}) \leq 2\delta\}$$

ja

$$\mathcal{J} := \{\bar{u} \in \mathbb{RP}^1 \mid d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \overline{w_s}) \leq \delta\}.$$

Olkoon $t > 0$ lisäksi sellainen, että $\|\hat{u} \wedge \hat{v}\| \geq t$ aina, kun $\hat{u} \in \bar{u} \in \mathcal{K}$ ja $\hat{v} \in \bar{v} \in \mathcal{J}$ ovat yksikkövektoreita.

Lauseen 3.12 nojalla, μ-melkein kaikilla $x \in \mathcal{J}_k^\infty$ pätee sekä

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\|A(x,n)(u)\|}{\|u\|}\right)\right) = \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu), \tag{3.2}$$

että

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\|A(x,n)(v)\|}{\|v\|}\right)\right) = \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) \tag{3.3}$$

tasaisesti suhteessa kaikkiin yksikkövektoreihin $u \in u(x)$ ja $v \in s(x)$. Huomautuksen 1.4.6 nojalla

$$\begin{aligned}\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\alpha_1(A(x,n))\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\alpha_2(A(x,n))\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(\alpha_1(A(x,n))\alpha_2(A(x,n))\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln|\det A(x,n)|\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

μ-melkein kaikilla $x \in \mathcal{J}_k^\infty$. Koska mitan μ kantaja on $\mathcal{J}_k^\infty$, jokaiselle sanalle $\boldsymbol{k}$, jolle $|\boldsymbol{k}| \leq n_0$, pätee

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x))\right) = \mu([\boldsymbol{k}]) > 0 \tag{3.5}$$

μ-melkein kaikilla $x \in \mathcal{J}_k^\infty$ Birkhoffin ergodisen lauseen yksinkertaistuksen (katso esimerkiksi Silva, 2008, 175 yhtälö (5.1)) nojalla. Tässä kuvaus $\mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]} : [\boldsymbol{k}] \longrightarrow \{0,1\}$ on joukon $[\boldsymbol{k}]$ *indikaattorifunktio*. *Shannonin-MacMillanin-Breimanin lauseen* (katso esimerkiksi Algoet & Cover, 1988, 900) nojalla

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(\mu([x_1\cdots x_n]))\right) = -\mathrm{h}_\mu(\sigma) \tag{3.6}$$

μ-melkein kaikilla $x \in \mathcal{J}_k^\infty$. *Subadditiivisen ergodisen lauseen* (katso esimerkiksi Furman, 1997, 798 – 799) nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\|A(x,n)\|\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}f_n(x)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\int f_n(x)d\mu(x)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\int \ln\alpha_1(A(x,n))d\mu(x)\right)\\
&= \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

μ-melkein kaikilla $x \in \mathcal{J}_k^\infty$, missä $f_n(x) := \ln\|A(x,n)\|$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ja $x \in \mathcal{J}_k^\infty$.

Konstruoidaan seuraavaksi joukko $X \subseteq \mathcal{J}_k^\infty$, jolle edellä mainitut ominaisuudet pätevät tasaisesti sopivissa rajoissa ajassa n. Olkoon $\omega := \frac{1}{3}\mu(Z)^2$. Valitaan luvut $n_1, n_2, \ldots, n_6$ seuraavasti, missä $x \in \mathcal{J}_k^\infty$

(n_1) Yhtälön (3.2) nojalla kaikilla $\varepsilon' > 0$ on olemassa sellainen $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, että kaikilla $n \geq n_{\varepsilon'}$ pätee

$$\left|\frac{1}{n}\ln(\|A(x,n)(u)\|) - \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)\right| \leq \varepsilon',$$

kun $u \in \mathcal{u}(x)$ on yksikkövektori. Tällöin erityisesti

$$\frac{1}{n}\ln(\|A(x,n)(u)\|) \geq \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \varepsilon'.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln t = 0$ ja luvun t valinnan perusteella voidaan olettaa, että $t \leq 1$, niin jollakin $n_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pätee

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln t}{n} > 0$$

kaikilla $n \geq n_1 := \max\{n_t, n_{\varepsilon'}\}$. Siten, kun valitaan $\varepsilon' := \varepsilon/2 + n_1^{-1}\ln t$, niin kaikilla $n \geq n_1$ pätee

$$\begin{aligned}
\ln\|A(x,n)(u)\| &\geq n\big(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \varepsilon'\big)\\
&= n\big(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\ln t}{n_1}\big)\\
&= n\big(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\ln t}{n}\big)\\
&= n\big(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \frac{\varepsilon}{2}\big) - \ln t.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(n_2) Yhtälön (3.3) nojalla kaikilla $\varepsilon' > 0$ on olemassa sellainen $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, että kaikilla $n \geq n_{\varepsilon'}$ pätee

$$\left|\frac{1}{n}\ln(\|A(x,n)(v)\|) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)\right| \leq \varepsilon',$$

kun $v \in \jmath(x)$ on yksikkövektori. Tällöin erityisesti

$$\frac{1}{n}\ln(\|A(x,n)(v)\|) \leq \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon'.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln t = 0$ ja luvun t valinnan perusteella voidaan olettaa, että $t \leq 1$, niin jollakin $n_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pätee

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln t}{n} > 0$$

kaikilla $n \geq n_2 := \max\{n_t, n_{\varepsilon'}\}$. Siten, kun valitaan $\varepsilon' := \varepsilon/2 + n_2^{-1}\ln t$, niin kaikilla $n \geq n_2$ pätee

$$\begin{aligned}\ln\|A(x,n)(v)\| &\leq n\big(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon'\big)\\ &= n\big(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln t}{n_2}\big)\\ &= n\big(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln t}{n}\big)\\ &= n\big(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \frac{\varepsilon}{2}\big) + \ln t.\end{aligned} \tag{3.9}$$

(n_3) Yhtälön (3.4) nojalla kaikilla $\varepsilon' > 0$ on olemassa sellainen $n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, että kaikilla $n \geq n_3$ pätee

$$\left|\frac{1}{n}\ln|\det A(x,n)| - (\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu))\right| < \varepsilon',$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$\begin{aligned}n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) - \varepsilon') &\leq \ln|\det A(x,n)|\\ &\leq n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon').\end{aligned} \tag{3.10}$$

(n_4) Olkoon $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}\min\{\mu([\boldsymbol{k}]) \mid |\boldsymbol{k}| \leq n_0\}$. Yhtälön (3.5) nojalla on olemassa sellainen $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, että kaikilla $n \geq n_{\varepsilon'}$ pätee

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) - \mu([\boldsymbol{k}])\right| \leq \varepsilon',$$

minkä perusteella

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) \geq n\big(\mu([\boldsymbol{k}]) - \varepsilon'\big)$$

kaikilla $n \geq n_{\varepsilon'}$. Valitaan n_4, jolle $n_4\big(\mu([\boldsymbol{k}]) - \varepsilon'\big) > n_0$. Nyt kaikilla $n \geq n_4$ pätee

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) > n_0$$

kaikilla sanoilla $\boldsymbol{k}$, joille $|\boldsymbol{k}| \leq n_0$, joten

$$\min_{|\boldsymbol{k}| \leq n_0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) > n_0. \tag{3.11}$$

(n_5) Yhtälön (3.6) nojalla kaikilla $\varepsilon' > 0$ on olemassa sellainen $n_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, että kaikilla $n \geq n_5$ pätee

$$\left| \frac{1}{n} \ln(\mu([x_1 \cdots x_n])) + \mathrm{h}_\mu(\sigma) \right| < \frac{\varepsilon'}{2},$$

joten

$$\frac{1}{n} \ln(\mu([x_1 \cdots x_n])) < -\mathrm{h}_\mu(\sigma) + \frac{\varepsilon'}{2},$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$\ln \mu([x_1 \cdots x_n]) < -n \left(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \frac{\varepsilon'}{2} \right). \tag{3.12}$$

(n_6) Yhtälön (3.7) nojalla kaikilla $\varepsilon' > 0$ on olemassa sellainen $n_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, että kaikilla $n \geq n_6$ pätee

$$\left| \frac{1}{n} \ln\|A(x,n)\| - \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) \right| < \varepsilon',$$

joten

$$\frac{1}{n} \ln\|A(x,n)\| < \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon',$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$\ln\|A(x,n)\| < n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon'). \tag{3.13}$$

Olkoon $Y_n \subseteq \mathcal{J}_k^\infty$ kaikilla $n \geq \max\{n_1, n_2, \ldots, n_6\}$. Koska yhtälöt (3.2) – (3.7) suppenevat pisteittäin, ne erityisesti suppenevat paikallisesti mitassa. Olkoon (g_n) jokin yhtälöiden (3.2) – (3.7) funktiojonoista ja g sitä vastaava rajafunktio. Määritelmän 1.0.6 nojalla luku $\mu(\{x \in Y_n \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon'\})$ saadaan mielivaltainen pieneksi kaikilla $\varepsilon' > 0$, kun luku n valitaan tarpeeksi suureksi. Koska tämä pätee jokaiselle yhtälölle (3.2) – (3.7), ottamalla leikkaus eri kuvauksiin liittyvistä joukoista voidaan olettaa, että $\mu(Y_n) > 1 - \omega$ ja että edelliset arviot pätevät kaikilla $x \in Y_n$.

Koska μ on ergodinen, niin

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(\sigma^{-i}(Z) \cap Z) \right) = \mu(Z)^2,$$

(katso esimerkiksi Berend & Bergelson, 1984, huomautus 2.1). Siten äärettömän monella n pätee

$$\mu(\sigma^{-n}(Z) \cap Z) > \frac{2}{3}\mu(Z)^2 = 2\omega,$$

joten erityisesti äärettömän monella n pätee

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{-n}(Z) \cap Z \cap Y_n) &= \mu\big((\sigma^{-n}(Z) \cap Z) \setminus Y_n^{\complement}\big) \\
&\geq \mu(\sigma^{-n}(Z) \cap Z) - \mu(Y_n^{\complement}) \\
&> 2\omega - \omega = \omega.
\end{aligned}$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ lisäksi sellainen, että $\mu((\sigma^{-n}(Z)) \cap Z \cap Y_n) > \omega$ ja

$$\mathrm{e}^{-n\varepsilon/2} < \omega, \tag{3.14}$$

$$\mathrm{e}^{-n\varepsilon} < \delta \tag{3.15}$$

ja

$$1 - \mathrm{e}^{n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon)} > \mathrm{e}^{-n\varepsilon/2}. \tag{3.16}$$

Olkoot $X := \sigma^{-n}(Z) \cap Z \cap Y_n$ ja $\Gamma := \{\mathtt{i} \in \mathcal{J}_k^n \mid \mu([\mathtt{i}] \cap X) > 0\}$. Koska $\mu(X) > 0$ ja sylinterijoukot ovat joukon X numeroituva peite, niin on oltava

$\mu([\mathbf{\imath}] \cap X) > 0$ jollakin $\mathbf{\imath} \in \mathcal{J}_k^n$, koska jos olisi $\mu([\mathbf{\imath}] \cap X) = 0$ kaikilla $\mathbf{\imath} \in \mathcal{J}_k^n$, niin olisi

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} [\mathbf{\imath}_j] \cap X\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mu([\mathbf{\imath}_j] \cap X) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} 0 = 0.$$

Siten $\Gamma \neq \varnothing$. Osoitetaan seuraavaksi, että joukko Γ toteuttaa väitteen ehdot.

(a) Epäyhtälön (3.14) ja joukon X valinnan perusteella

$$\mu\left(\bigcup_{\mathbf{\imath} \in \Gamma} [\mathbf{\imath}]\right) \geq \mu(X) > \omega > \mathrm{e}^{-n\varepsilon/2}.$$

Epäyhtälön (3.12) nojalla

$$\mu([\mathbf{\imath}]) < \mathrm{e}^{-n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon/2)}$$

kaikilla $\mathbf{\imath} \in \Gamma$. Siten

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-n\varepsilon/2} < \mu\left(\bigcup_{\mathbf{\imath} \in \Gamma} [\mathbf{\imath}]\right) &\leq \sum_{\mathbf{\imath} \in \Gamma} \mu([\mathbf{\imath}]) \\ &< \mathrm{e}^{-n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon/2)} \sum_{\mathbf{\imath} \in \Gamma} 1 = \mathrm{e}^{-n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon/2)} |\Gamma| \end{aligned}$$

eli $|\Gamma| > \mathrm{e}^{-n\varepsilon/2 + n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon/2)} = \mathrm{e}^{n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon)}$.

(c) Epäyhtälön (3.13) nojalla kaikilla $\mathbf{\imath} \in \Gamma$ pätee $\|A_{\mathbf{\imath}}\| \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon)}$, joten huomautuksen 3.2 nojalla $\rho(\mathscr{A}_\Gamma) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon)}$.

(e) Epäyhtälön (3.10) nojalla

$$\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) - \varepsilon)} \leq |\det A(x, n)| \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + \varepsilon)}.$$

(f) Olkoot $\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_k^{n_0}$ ja $\mathbf{\imath} \in \Gamma \subseteq \mathcal{J}_k^n$. Tällöin on olemassa $x \in [\mathbf{\imath}] \cap X$, koska jos olisi $[\mathbf{\imath}] \cap X = \varnothing$, niin erityisesti $\mu([\mathbf{\imath}] \cap X) = 0$, mikä olisi ristiriita joukon Γ valinnan kanssa. Epäyhtälön (3.11) nojalla on olemassa

$m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m < n - n_0$, jolle pätee $\mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^m(x)) = 1$, koska jos olisi $\mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^m(x)) = 0$ kaikilla $0 \leq m < n - n_0$, niin

$$\begin{aligned}\min_{|\boldsymbol{k}| \leq n_0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) &= \min_{|\boldsymbol{k}| \leq n_0} \left(\sum_{i=0}^{n-n_0} 0 + \sum_{i=n-n_0+1}^{n-1} \mathbb{1}_{[\boldsymbol{k}]}(\sigma^i(x)) \right) \\ &\leq \sum_{i=n-n_0+1}^{n-1} 1 = n_0 - 1 < n_0,\end{aligned}$$

mikä olisi ristiriita epäyhtälön (3.11) kanssa. Siten on oltava

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n_0}) = \boldsymbol{k}.$$

Koska $m + n_0 < n$, niin sana x valinnan perusteella

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n_0}, \ldots, x_n) = \boldsymbol{\imath},$$

joten sana $\boldsymbol{k}$ on sanan $\boldsymbol{\imath}$ alisana.

(d) Olkoon $u \in \bar{u} \in \mathcal{K}$. Koska $\boldsymbol{u}(x) \neq \boldsymbol{s}(x)$, niin on olemassa yksikkövektorit $v_u \in \boldsymbol{u}(x)$ ja $v_s \in \boldsymbol{s}(x)$ ja luvut $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, joille pätee $u = \beta v_u + \gamma v_s$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\|u \wedge v_s\| &= \|(\beta v_u + \gamma v_s) \wedge v_s\| = \|\beta v_u \wedge v_s + \gamma v_s \wedge v_s\| \\ &= \|\beta v_u \wedge v_s\| = |\beta| \cdot \|v_u \wedge v_s\|,\end{aligned}$$

koska v_s on differentiaali-1-muoto eli sen kiilatulo itsensä kanssa on nolla. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}|\beta| = \frac{\|u \wedge v_s\|}{\|v_u \wedge v_s\|} &\geq \|u \wedge v_s\| = \|\|u\|\hat{u} \wedge v_s\| \\ &= \|u\| \cdot \|\hat{u} \wedge v_s\| \geq \|u\|t,\end{aligned}$$

missä $\hat{u}$ on vektorin u suuntainen yksikkövektori ja siten $\hat{u} \in \bar{u}$. Tässä $\|v_u \wedge v_s\| \leq 1$, koska v_s ja v_u ovat yksikkövektoreita eli $v_u \wedge v_s$ on yksikkö-2-vektori. Vastaavasti

$$\|u \wedge v_u\| = \|\beta v_u \wedge v_u + \gamma v_s \wedge v_u\| = |\gamma| \cdot \|v_s \wedge v_u\|,$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}|\gamma| &= \frac{\|u \wedge v_u\|}{\|v_s \wedge v_u\|} = \frac{\|\|u\|\hat{u} \wedge v_u\|}{\|-v_u \wedge v_s\|} \\ &= \frac{\|u\| \cdot \|\hat{u} \wedge v_u\|}{\|v_u \wedge v_s\|} \leq \frac{\|u\|}{\|v_u \wedge v_s\|} \leq \frac{\|u\|}{t}.\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}\|A(x,n)(u)\| &= \|A(x,n)(\beta v_u + \gamma v_s)\| \\ &\geq |\beta| \cdot \|A(x,n)(v_u)\| - |\gamma| \cdot \|A(x,n)(v_s)\| \\ &\geq \|u\| t \|A(x,n)(v_u)\| - \frac{\|u\|}{t}\|A(x,n)(v_s)\| \\ &\overset{(*)}{\geq} \left(\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon/2)} - \mathrm{e}^{n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon/2)}\right)\|u\| \\ &= \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon/2)}\left(1 - \mathrm{e}^{n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}\right)\|u\| \\ &\overset{(\triangle)}{\geq} \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\|,\end{aligned}$$

missä $(*)$ pätee epäyhtälöiden (3.8) ja (3.9) ja $(\triangle)$ epäyhtälön (3.16) nojalla. Kun $x \in [\boldsymbol{\imath}] \cap X$, missä $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$, väite seuraa tästä, koska tällöin $A(x,n) = A_{\boldsymbol{\imath}}$.

(b) Olkoot $\bar{u} \in \mathcal{K}$ ja $x \in X \subseteq Z$. Tällöin

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{RP}^1}\left(\overline{A(x,n)(u)}, \boldsymbol{u}(\sigma^n(x))\right) &\overset{(a)}{=} d_{\mathbb{RP}^1}\left(\overline{A(x,n)(u)}, \overline{A(x,n)(v_u)}\right) \\ &= \frac{\|A(x,n)(u) \wedge A(x,n)(v_u)\|}{\|A(x,n)(u)\| \cdot \|A(x,n)(v_u)\|} \\ &\overset{(3.8)}{\leq} \frac{|\det A(x,n)| \cdot \|u \wedge v_u\|}{\mathrm{e}^{n(2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-2\varepsilon)}\|u\| \cdot \|v_u\|} \\ &\overset{(3.10)}{\leq} \mathrm{e}^{n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+3\varepsilon)} d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \boldsymbol{u}(x)) \\ &\overset{(3.1)}{\leq} \mathrm{e}^{-n\varepsilon} d_{\mathbb{RP}^1}(\bar{u}, \boldsymbol{u}(x)) \overset{(3.15)}{<} \delta.\end{aligned}$$

Koska $x \in X$, niin joukon Z määritelmän nojalla $\sigma^n(x) \in Z$, joten $d_{\mathbb{RP}^1}(\boldsymbol{u}(\sigma^n(x)), \overline{w_u}) \leq \delta$. Siten

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{RP}^1}(\overline{A(x,n)(u)}, \overline{w_u}) \leq & d_{\mathbb{RP}^1}(\overline{A(x,n)(u)}, A(x,n)\boldsymbol{u}(x)) \\ &+ d_{\mathbb{RP}^1}(\boldsymbol{u}(T^n(x)), \overline{w_u}) < 2\delta.\end{aligned}$$

Näin ollen erityisesti, jos $x \in X$ ja $u \in \bar{u} \in \mathcal{K}$, niin $A(x,n)\bar{u} \in \mathtt{int}(\mathcal{K})$. Siten kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$ pätee, jos $x \in X \cap [\boldsymbol{\imath}]$, niin matriisi $A(x,n) = A_{\boldsymbol{\imath}}$ kuvaa joukon $\mathcal{K}$ joukolle $\mathtt{int}(\mathcal{K})$.

□

3.14 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 4.4)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, μ, $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ja $\varepsilon > 0$ kuten lauseessa 3.13. Tällöin on olemassa joukko $\Gamma \subseteq \mathfrak{I}_k^n$, jolle lauseen 3.13 lisäksi pätee $\det A_{\boldsymbol{\imath}} > 0$ ja $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathtt{int}(\mathcal{C})$ kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$, missä kartio $\mathcal{C}$ ei riipu indeksistä $\boldsymbol{\imath}$.

Todistus. Olkoot Γ lauseen 3.13 mukainen joukko, jonka konstruktiossa luku ε on korvattu luvulla $\varepsilon/2$ ja n on niin suuri, että $\mathrm{e}^{-n\varepsilon} < 1/16$. Olkoot $\mathcal{K}$ kuten lauseen 3.13 kohdassa (b) sekä $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ joukon $\{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \bar{u} \in \mathcal{K}\}$ yhtenäiset komponentit. Lineaarisuuden nojalla kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$ pätee joko $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{C}_1$ tai $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{C}_2$ ja joko $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_2) \subseteq \mathcal{C}_2$ tai $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_2) \subseteq \mathcal{C}_1$.

Olkoon $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ sellainen, että $|\Gamma_0| \geq \frac{1}{4}|\Gamma|$, luvut $\det A_{\boldsymbol{\imath}}$ ovat samanmerkkisiä kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma_0$ ja kaikki matriisit $\mathscr{A}_{\Gamma_0}$ joko säilyttävät molemmat kartiot $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ tai eivät kumpaakaan. Merkitään $\Gamma' := \{\boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\jmath} \mid \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \Gamma_0\}$ ja $n' := 2n$. Tällöin kaikilla $\boldsymbol{\imath} := \boldsymbol{\jmath}\boldsymbol{\jmath}' \in \Gamma'$ pätee

$$\det A_{\boldsymbol{\imath}} = \det A_{\boldsymbol{\jmath}\boldsymbol{\jmath}'} = \det(A_{\boldsymbol{\jmath}} A_{\boldsymbol{\jmath}'}) = \det A_{\boldsymbol{\jmath}} \det A_{\boldsymbol{\jmath}'} > 0$$

eli joko $\det A_{\boldsymbol{\jmath}}, \det A'_{\boldsymbol{\jmath}} < 0$ tai $\det A_{\boldsymbol{\jmath}}, \det A'_{\boldsymbol{\jmath}} > 0$. Lisäksi kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma'$ pätee $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathtt{int}(\mathcal{C})$, koska joko $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_i) \subseteq \mathcal{C}_i$, jolloin väite on selvä, tai $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_{3-i}) \subseteq \mathcal{C}_i$, jolloin $A_{\boldsymbol{\jmath}}(\mathcal{C}_i) \subseteq \mathcal{C}_{3-i}$ eli $A_{\boldsymbol{\imath}}(\mathcal{C}_i) = A_{\boldsymbol{\jmath}}(A_{\boldsymbol{\jmath}}(\mathcal{C}_i)) \subseteq A_{\boldsymbol{\jmath}}(\mathcal{C}_{3-i}) \subseteq \mathcal{C}_{3-(3-i)} = \mathcal{C}_i$ kaikilla $i = 1, 2$. Lisäksi lauseen 3.13 kohdan (a) nojalla

$$|\Gamma'| = |\Gamma_0|^2 \geq \frac{1}{16}|\Gamma|^2 \overset{(a)}{\geq} \frac{1}{16}\mathrm{e}^{2n(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon/2)} > \mathrm{e}^{2n(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon)} = \mathrm{e}^{n'(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon)}.$$

Vastaavasti nähdään, että Γ' toteuttaa myös muut lauseen 3.13 väitteet, kun todistuksessa korvataan luku $\varepsilon/2$ luvulla ε ja luku n luvulla $2n$.

□

3.15 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 4.5)
Olkoot matriisit $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *vahvasti jaottomia ja olkoot* $\bar{u}, \bar{s} \in \mathbb{RP}^1$ *hyperbolisen matriisin* $A_{\boldsymbol{\imath}}$ *epävakaa ja vakaa suunta, missä* $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$ *ja* Γ *on lauseen 3.14 mukainen joukko. Tällöin on olemassa* $n \geq 1$ *ja* $\boldsymbol{k} \in \mathfrak{I}_k^n$*, joilla pätee* $\{A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}), A_{\boldsymbol{k}}(\bar{s})\} \cap \{\bar{u}, \bar{s}\} = \varnothing$*.*

Todistus. Oletetaan ensin, että kaikilla sanoilla $\boldsymbol{\jmath} \in \mathfrak{I}_k$ pätee $A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{u}) = \bar{s}$ tai $A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{s}) = \bar{s}$, missä $\bar{u}$ on hyperbolisen matriisin $A_{\boldsymbol{\imath}}$ epävakaa ja $\bar{s}$ vakaa suunta. Vahvan jaottomuuden nojalla on olemassa sana $\boldsymbol{\jmath}_1$, jolle pätee $A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s}) \neq \bar{s}$. Siten oletuksen nojalla on oltava $A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{u}) = \bar{s}$, jolloin on olemassa sana $\boldsymbol{\jmath}_2 \neq \boldsymbol{\jmath}_1$, jolle pätee myös $A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{s}) \neq \bar{s}$ eli $A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{u}) = \bar{s}$. Lisäksi sana $\boldsymbol{\jmath}_2$ voidaan valita niin, että $A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s}) \neq A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{s})$, sillä jos olisi $A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s}) = A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{s})$ kaikilla sanoilla $\boldsymbol{\jmath}_2$, niin erityisesti jokainen joukon $\mathscr{A}$ matriisi säilyttäisi joukon $\bar{s} \cup A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s})$, mikä olisi ristiriidassa vahvan jaottomuuden kanssa. Olkoon A mielivaltainen 2×2 matriisi, joka ei kiinnitä suoraa $\bar{s}$. Koska nyt $A(A_{\boldsymbol{\jmath}_i}(\bar{u})) = A(\bar{s}) \neq \bar{s}$, niin $A(A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s})) = \bar{s} = A(A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{s}))$. Lisäksi, koska $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, niin kuvaus A on erityisesti injektiivinen avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja siten lineaarikuvauksena injektiivinen myös avaruudessa $\mathbb{RP}^1$, joten $A_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\bar{s}) = A_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\bar{s})$, mikä on ristiriita. Siten on olemassa sana $\boldsymbol{\jmath} \in \mathfrak{I}_k$, jolle pätee $A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{u}) \neq \bar{s}$ ja $A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{s}) \neq \bar{s}$.

Vahvan jaottomuuden ja edellisen päättelyn nojalla on olemassa $\boldsymbol{\jmath}' \in \mathfrak{I}_k$, jolle $A_{\boldsymbol{\jmath}'}(\bar{u}) \neq \bar{u}$ ja $A_{\boldsymbol{\jmath}'}(\bar{u}) \neq \bar{s}$. Koska matriisi $A_{\boldsymbol{\imath}}$ on hyperbolinen, niin kaikilla $\bar{v} \neq \bar{s}$ pätee lauseen 2.11 todistuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{\imath}}^n(\bar{v}) = \bar{u}$, koska tämä lasku lauseen todistuksessa ei riipu kantavektoreiden valinnasta. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{\imath}}^n(A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{u})) = \bar{u} = \lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{\imath}}^n(A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{s}))$, joten

$$\lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{\jmath}'} A_{\boldsymbol{\imath}}^n A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{u}) \notin \{\bar{u}, \bar{s}\} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} A_{\boldsymbol{\jmath}'} A_{\boldsymbol{\imath}}^n A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{s}) \notin \{\bar{u}, \bar{s}\}.$$

Siten, kun n on tarpeeksi suuri, niin $\{A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}), A_{\boldsymbol{k}}(\bar{s})\} \cap \{\bar{u}, \bar{s}\} = \varnothing$, missä $\boldsymbol{k} := \boldsymbol{\jmath}'\boldsymbol{\imath}^n\boldsymbol{\jmath}$ on äärellinen sana.

□

3.16 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 4.2)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *ja* μ *ergodinen* σ*-invariantti mitta, jonka kantaja on* $\mathfrak{I}_k^\infty$ *ja jonka Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret. Olkoot*

$n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa luku $n > n_0$ ja osajoukko $\Gamma \subseteq \mathcal{I}_k^n$, joille pätee

(a) $|\Gamma| \geq \mathrm{e}^{n(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon)}$

(b) *on olemassa kartio $\mathcal{C}$, jonka matriisit $\mathscr{A}_\Gamma$ säilyttävät aidosti*

(c) *kaikilla $u \in \mathcal{C}$ ja $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$ pätee $\|A_{\boldsymbol{\imath}}(u)\| \geq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\|$, erityisesti $\varrho(\mathscr{A}_\Gamma) \geq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}$*

(d) $\rho(\mathscr{A}_\Gamma) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}$

(e) *kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$ pätee $\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} \leq \det A_{\boldsymbol{\imath}} \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}$, erityisesti $\mathscr{A}_\Gamma \subseteq \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$*

(f) *jos $\mathscr{A}$ on vahvasti jaoton, niin myös $\mathscr{A}_\Gamma$ on*

(g) *jos $\boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{I}_k^\ell$, missä $1 \leq \ell \leq n_0$, niin $\boldsymbol{\jmath}$ on alisana jokaisessa sanassa $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$.*

Todistus.

(a) Lauseen 3.13 kohdan (a) nojalla $|\Gamma| > \mathrm{e}^{n(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon)}$, joten erityisesti $|\Gamma| \geq \mathrm{e}^{n(\mathrm{h}_\mu(\sigma)-\varepsilon)}$.

(b) Lauseen 3.14 nojalla matriisit $\mathscr{A}$ säilyttävät aidosti erään kartion $\mathcal{C}$, joka ei riipu indeksistä $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$.

(c) Lauseen 3.14 todistuksen nojalla kartio $\mathcal{C}$ on jompikumpi lauseen 3.13 projektiivisen välin $\mathcal{K}$ kahdesta yhtenäisestä komponentista. Siten lauseen 3.13 kohdan (d) nojalla kaikilla $u \in \bar{u} \in \mathcal{K}$ eli erityisesti kaikilla $u \in \mathcal{C}$ pätee $\|A_{\boldsymbol{\imath}}(u)\| \geq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\|$ kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$. Koska matriisit $\mathscr{A}_\Gamma$ kuvaavat kartion $\mathcal{C}$ itselleen, niin kaikilla $u \in \mathcal{C}$ ja $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ pätee $A_{\boldsymbol{\imath}_1} \cdots A_{\boldsymbol{\imath}_m}(u) \in \mathcal{C}$, missä $\boldsymbol{\imath}_i \in \Gamma$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Toistamalla edellistä arviota iteratiivisesti saadaan

$$\begin{aligned}\|A_{\boldsymbol{\imath}_1}(A_{\boldsymbol{\imath}_2} \cdots A_{\boldsymbol{\imath}_m}(u) \cdots)\| &\geq \|A_{\boldsymbol{\imath}_2}(A_{\boldsymbol{\imath}_3} \cdots A_{\boldsymbol{\imath}_m}(u) \cdots)\| \cdot \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\| \\ &\geq \cdots \geq \|A_{\boldsymbol{\imath}_m}(u)\| \cdot \mathrm{e}^{n(m-1)(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\|^{m-1} \\ &\geq \mathrm{e}^{nm(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}\|u\|^m.\end{aligned}$$

Siten $\|A_{\mathtt{i}_1} \cdots A_{\mathtt{i}_m}\| \geq \mathrm{e}^{nm(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}$ kaikilla m ja $\mathtt{i}_i \in \Gamma$, kun vektorin u oletetaan olevan yksikkövektori. Määritelmän 3.1 nojalla

$$\begin{aligned}
\varrho(\mathscr{A}_\Gamma) &= \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{A_{\mathtt{i}_1},\dots,A_{\mathtt{i}_m}\in\mathscr{A}_\Gamma} \|A_{\mathtt{i}_1} \cdots A_{\mathtt{i}_m}\|^{1/m} \right) \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{A_{\mathtt{i}_1},\dots,A_{\mathtt{i}_m}\in\mathscr{A}_\Gamma} (\mathrm{e}^{nm(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)})^{1/m} \right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} = \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

(d) Lauseen 3.13 kohdan (c) nojalla $\rho(\mathscr{A}_\Gamma) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)}$.

(e) Lauseen 3.13 kohdan (c) nojalla

$$\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} \leq |\det A_{\mathtt{i}}| \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}.$$

Koska lauseen 3.14 perusteella voidaan lisäksi olettaa, että $\det A_{\mathtt{i}} > 0$ kaikilla $\mathtt{i} \in \Gamma$, niin on oltava

$$\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} \leq \det A_{\mathtt{i}} \leq \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}.$$

Siten myös $\mathscr{A}_\Gamma \subseteq \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

(g) Seuraa suoraan lauseen 3.13 kohdasta (f).

(f) Voidaan olettaa, että lauseen muut kohdat pätevät joukolle Γ, kun luku ε korvataan luvulla $\varepsilon/2$. Oletetaan lisäksi, että matriisit $\mathscr{A}$ ovat vahvasti jaottomia. Olkoon $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ kohdan (b) mukainen kartio, jonka jokainen matriisi $\mathscr{A}_\Gamma$ aidosti säilyttää. Olkoon $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{RP}^1$ kartion $\mathcal{C}$ projektiivinen kuva eli $\mathcal{K} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{C}\}$. Koska jokainen matriisi $A_{\mathtt{i}} \in \mathscr{A}_\Gamma$ kuvaa kartion $\mathcal{C}$ joukolle $\mathrm{int}(\mathcal{C})$, niin jokainen matriisi $A_{\mathtt{i}} \in \mathscr{A}_\Gamma$ kutistaa joukkoa $\mathcal{K}$ suhteessa metriikkaan $d_{\mathbb{RP}^1}$. Siten jokaisella projektiivisella kuvauksella $A_{\mathtt{i}} \in \mathscr{A}_\Gamma$ on olemassa joukossa $\mathcal{K}$ yksikäsitteinen kiintopiste, joka on kuvauksen $A_{\mathtt{i}}$ attraktori. Siten erityisesti jokaisen kuvauksen $A_{\mathtt{i}} \in \mathscr{A}_\Gamma$ epävakaa ominaisavaruus sisältyy ja vakaa ei sisälly joukkoon $\mathcal{K}$.

Olkoon $\mathtt{i} \in \Gamma$. Koska kuvaus $A_{\mathtt{i}}$ säilyttää kartion $\mathcal{C}$ aidosti, on se hyperbolinen *Perronin-Frobeniuksen lauseen* (katso esimerkiksi Horn &

Johnson, 2012, lause 8.4.4) nojalla. Olkoot $\bar{u} \in \mathbb{RP}^1$ matriisin $A_{\boldsymbol{\imath}}$ epävakaa ja $\bar{s} \in \mathbb{RP}^1$ vakaa ominaisavaruus. Lauseen 3.15 nojalla on olemassa sellainen kokonaisluku m_1 ja sellainen sana $\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_k^{m_1}$, joka ei välttämättä kuulu joukkoon Γ ja jolle pätee $A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) \notin \{\bar{u}, \bar{s}\}$ ja $A_{\boldsymbol{k}}(\bar{s}) \neq \bar{s}$. Koska $\bar{s} \notin \mathcal{K}$, niin kaikilla $\bar{v} \in \mathcal{K}$ pätee $\lim_{m\to\infty} A_{\boldsymbol{\imath}}^m(\bar{v}) = \bar{u}$. Siten selvästi

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^m(\mathcal{K}) = \{A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u})\}.$$

Koska lisäksi $A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^1(\mathcal{K}) \supseteq A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^2(\mathcal{K}) \supseteq A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^3(\mathcal{K}) \supseteq \cdots$, on olemassa luku $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, jolle $A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}(\mathcal{K}) \cap \{\bar{u}, \bar{s}\} = \varnothing$. Vastaavasti, kun valitaan tarpeeksi suuri $m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, niin $A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3}(A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}(\mathcal{K})) \subseteq \operatorname{int}(\mathcal{K})$, koska $A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) \neq \bar{s}$ ja $\bar{u} \in \operatorname{int}(\mathcal{K})$. Kohdan (e) nojalla voidaan valita luku $m_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, jolle pätee

$$\begin{aligned} e^{(m_1+nm_2+nm_3+nm_4)(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} &\leq |\det A_{\boldsymbol{k}}| \cdot \det(A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2+m_3+m_4}) \\ &\leq e^{(m_1+nm_2+nm_3+nm_4)(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

koska tulon determinantti on determinanttien tulo. Lisäksi kohdan (d) nojalla, kun luku m_4 on tarpeeksi suuri, niin

$$\begin{aligned} \|A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}\| &\leq \|A_{\boldsymbol{\imath}}\|^{m_2+m_3+m_4} \cdot \|A_{\boldsymbol{k}}\| \\ &\leq \left(e^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon/2)}\right)^{m_2+m_3+m_4} \left(\max_{1\leq i\leq k} \|A_i\|\right)^{m_1} \\ &\leq e^{(m_1+nm_2+nm_3+nm_4)(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Koska $A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}(\bar{u}) \in \mathcal{K}$ ja kuvaus $A_{\boldsymbol{\imath}}$ säilyttää joukon $\mathcal{K}$, niin kohdan (c) nojalla, kun m_4 on tarpeeksi suuri, kaikilla $\bar{u} \in \mathcal{K}$ pätee

$$\begin{aligned} \|A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}(u)\| &\geq \|u\| e^{nm_4(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon/2)} \alpha_2(A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}) \\ &\geq \|u\| e^{nm_4(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon/2)} \left(\min_{1\leq i\leq k} \alpha_2(A_i)\right)^{m_1+nm_2+nm_3} \\ &\geq e^{(m_1+n(m_2+m_3+m_3))(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\varepsilon)} \|u\|. \end{aligned}$$

Koska $\det(A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}) \neq 0$ ja

$$A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2}(\mathcal{K}) \subseteq A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_4}(\mathcal{K}) \subseteq \operatorname{int}(\mathcal{K})$$

eli joko $A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2} \mathcal{C} \subseteq \mathtt{int}(\mathcal{C})$ tai $A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2} \mathcal{C} \subseteq \mathtt{int}(-\mathcal{C})$, niin matriisin $(A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2})^2$ determinantti on positiivinen ja

$$(A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2})^2(\mathcal{C}) \subseteq \mathtt{int}(\mathcal{C}).$$

Olkoot luvut $k := 2(m_1 + nm_2 + nm_3 + nm_4)$ ja $n' := nk$ sekä sana $\boldsymbol{\jmath} := (\boldsymbol{\imath}^{m_3+m_4} \boldsymbol{k} \boldsymbol{\imath}^{m_2})^{2n} \in \mathcal{J}_k^{n'}$. Osoitetaan, että matriiseilla $A_{\boldsymbol{\jmath}}$ ja $A_{\boldsymbol{\imath}}^k$ ei ole yhtään yhteistä ominaisavaruutta. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että olisi olemassa $\bar{v} \in \mathbb{RP}^1$, jolle $A_{\boldsymbol{\imath}}^k(\bar{v}) = \bar{v} = A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{v})$. Tällöin olisi oltava joko $\bar{v} = \bar{u}$ tai $\bar{v} = \bar{s}$, koska matriisi $A_{\boldsymbol{\imath}}$ on hyperbolinen eli sen ainoat invariantit ominaisavaruudet ovat $\bar{u}$ ja $\bar{s}$ ja tämä pätee myös matriisille $A_{\boldsymbol{\imath}}^k$. Jos $\bar{v} = \bar{u}$, niin vastaoletuksen nojalla

$$\bar{u} = A_{\boldsymbol{\jmath}}(\bar{u}) = (A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_2})^{2n}(\bar{u}) =: (A')^2(\bar{u}).$$

Matriisi $(A')^2$ säilyttää kartion $\mathcal{C}$ aidosti, joten Perronin-Frobeniuksen lauseen nojalla se on hyperbolinen. Jos olisi $A'(\bar{u}) = \bar{u}'$, missä suora $\bar{u}' \in \mathbb{RP}^1$ ei ole yhdensuuntainen suoran $\bar{u}$ kanssa, niin olisi oltava $(A')^2(\bar{u}') = (A')^2(A'(\bar{u})) = A'((A')^2(\bar{u})) = A'(\lambda\bar{u}) = \lambda_{\bar{u}} A'(\bar{u}) = \lambda_{\bar{u}}\bar{u}'$, missä $\lambda_{\bar{u}} \in \mathbb{R}$ on suoraa $\bar{u}$ vastaava ominaisarvo. Siten erisuuntaisilla suorilla $\bar{u}$ ja $\bar{u}'$ olisi erityisesti itseisarvoltaan sama ominaisarvo, mikä on ristiriita hyperbolisuuden kanssa. Näin ollen $A'(\bar{u}) = \bar{u}$. Koska $\bar{u}$ on invariantti kuvauksessa $A_{\boldsymbol{\imath}}$, niin $A_{\boldsymbol{\imath}}^{m_3+m_4} A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) = \bar{u}$ ja koska $\bar{u}$ on invariantti kuvauksessa $A_{\boldsymbol{\imath}}^{-1}$, niin $A_{\boldsymbol{k}}(\bar{u}) = \bar{u}$, mikä on ristiriita sana $\boldsymbol{k}$ valinnan kanssa. Vastaavasti tapaus $\bar{v} = \bar{s}$ johtaa ristiriitaan $A_{\boldsymbol{k}}(\bar{s}) = \bar{s}$.

Olkoon

$$\Gamma' := \{\boldsymbol{\imath}_1 \cdots \boldsymbol{\imath}_k \mid \boldsymbol{\imath}_j \in \Gamma\} \cup \{\boldsymbol{\jmath}\} \subseteq \mathcal{J}_k^{n'}.$$

Aiemmin on osoitettu, että kaikilla $\boldsymbol{\ell} \in \Gamma'$ pätee $A_{\boldsymbol{\ell}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathtt{int}(\mathcal{C})$. Selvästi lauseen muut kohdat pätevät jokaiselle sanalle $\boldsymbol{\jmath}' \in \Gamma'$, $\boldsymbol{\jmath}' \neq \boldsymbol{\jmath}$, kun luku n korvataan luvulla n', koska muiden kohtien todistukset koskevat alisysteemiin $\mathscr{A}_\Gamma$ siirtymistä ja tässä iteraatiossa siirrytään alisysteemin $\mathscr{A}_\Gamma$ alisysteemin $\mathscr{A}_{\Gamma' \setminus \{\boldsymbol{\jmath}\}}$ eli erityisesti alisysteemiin. Edellä osoitettiin, että muut kohdat pätevät myös sanalla $\boldsymbol{\jmath}$. Lisäksi joukko Γ' sisältää hyperboliset matriisit $A_{\boldsymbol{\imath}}^k$ ja $A_{\boldsymbol{\jmath}}$, joilla ei ole yhteistä invarianttia aliavaruutta. Siten erityisesti jokainen $\bar{u} \in \mathbb{RP}^1$ on kiinnitetty enintään toisella matriiseista $A_{\boldsymbol{\imath}}^k$ ja $A_{\boldsymbol{\jmath}}$, joten rata $\{((A_{\boldsymbol{\imath}}^k)^n)(\bar{u}) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ tai $\{(A_{\boldsymbol{\jmath}}^n)(\bar{u}) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ on ääretön eli se ei voi sisältyä aliavaruuksien äärelliseen yhdisteeseen eli matriisit $\mathscr{A}_\Gamma$ ovat vahvasti jaottomia.

$\square$

4 Erotteluehdot

4.1 Määritelmä
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid i = 1, \ldots, k\}$ affiineja kutistuskuvauksia ja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ niihin liittyvä itseaffiini joukko. Iteroitu funktiosysteemi $\mathscr{T}$ toteuttaa

× *vahvan erotteluehdon*, jos $T_i(E) \cap T_j(E) = \varnothing$ aina, kun $1 \leq i < j \leq k$

× *vahvan avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa rajoitettu avoin joukko U, jolle pätee $U \cap E \neq \varnothing$, $T_i(U) \subseteq U$ ja $T_i(U) \cap T_j(U) = \varnothing$ kaikilla $1 \leq i, j \leq k$, joille $i \neq j$

× *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa rajoitettu avoin joukko $U \neq \varnothing$, jolle $T_i(U) \subseteq U$ ja $T_i(U) \cap T_j(U) = \varnothing$ kaikilla $1 \leq i, j \leq k$, joille $i \neq j$.

4.2 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 5.2)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, k\}$ affiineja kutistuskuvauksia, jotka toteuttavat vahvan avoimen joukon ehdon. Tällöin jollakin $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on olemassa sellainen sana $\boldsymbol{\imath}_0 \in \mathcal{I}_k^{n_0}$, että kuvaukset $\mathscr{T}_\Gamma$ toteuttavat vahvan avoimen joukon ehdon samalla avoimella joukolla kaikilla indeksijoukoilla $\Gamma \subseteq \mathcal{I}_k^{n_1}$, $n_1 \geq n_0$, joihin kuuluu sellainen sana $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$, että $\boldsymbol{\imath}_0 \subset \boldsymbol{\imath}$.

Todistus. Olkoon $U \neq \varnothing$ avoin joukko, jolle $T_i(U) \subseteq U$ ja $T_i(U) \cap T_j(U) = \varnothing$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$. Vahvan avoimen joukon ehdon nojalla on olemassa $x \in U \cap E$, missä E on kuvauksiin $\mathscr{T}$ liittyvä itseaffiini joukko. Koska $x \in E$, on olemassa sana $\boldsymbol{\imath}' \in \mathcal{I}_k^\infty$, jolle pätee $\lim_{m\to\infty} T_{i'_1} \cdots T_{i'_m}(\mathrm{cl}(U)) = x$. Koska toisaalta $x \in U$ ja joukko U on avoin, niin jollakin $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pätee $T_{i'_1} \cdots T_{i'_{n_0}}(\mathrm{cl}(U)) \subseteq U$. Merkitään $\boldsymbol{\imath}_0 := (i'_1, \ldots i'_{n_0}) \in \mathcal{I}_k^{n_0}$. Olkoot $n_1 \geq n_0$ ja $\Gamma \subseteq \mathcal{I}_k^{n_1}$ sellaisia, että $\boldsymbol{\jmath}_0 := \boldsymbol{k}\boldsymbol{\imath}_0\boldsymbol{k}' \in \Gamma$ joillakin sanoilla $\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{k}'$, jotka voivat olla tyhjiä.

Osoitetaan ensin, että kuvaukset $\mathscr{T}_\Gamma$ toteuttavat avoimen joukon ehdon. Olkoot $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \Gamma$ sellaisia, että $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$. Olkoon $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ pienin luku, jolle pätee $i_{n'} \neq j_{n'}$. Avoimen joukon ehdon ja joukon U valinnan nojalla

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{\imath}}(U) &= T_{i_1}(T_{i_2}(\cdots T_{i_{n_1}}(U) \cdots) \\ &\subseteq T_{i_1}(T_{i_2}(\cdots T_{i_{n_1-1}}(U) \cdots) \subseteq \cdots \subseteq T_{i_1}(U) \subseteq U. \end{aligned}$$

Jos olisi $T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \nsubseteq T_{i_{n'}}(U)$, niin olisi olemassa sellainen $y \in \mathbb{R}^2$, että $y \in T_{\boldsymbol{\imath}}(U)$ ja $y \notin T_{i_{n'}}(U)$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska edellisen päättelyn nojalla $T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \subseteq U$ eli $y \in U$ ja toisaalta avoimen joukon ehdon nojalla $T_{i_{n'}}(U) \subseteq U$ eli $y \notin U$. Vastaavasti $T_{\boldsymbol{\jmath}}(U) \subseteq T_{j_{n'}}(U)$. Avoimen joukon ehdon nojalla $T_{i_{n'}}(U) \cap T_{j_{n'}}(U) = \varnothing$, joten myös $T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \cap T_{\boldsymbol{\jmath}}(U) = \varnothing$. Siten $\mathcal{T}_\Gamma$ täyttää avoimen joukon ehdon joukolla U.

Osoitetaan vielä vahva avoimen joukon ehto. Koska avoimen joukon ehto on voimassa kuvauksille $\mathcal{T}_\Gamma$, riittää osoittaa, että $U \cap E_\Gamma \neq \varnothing$, missä E_Γ on iteroidun funktiosysteemin $\mathcal{T}_\Gamma$ attraktori. Olkoon $z \in \mathbb{R}^2$ kuvauksen $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}$ kiintopiste eli $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(z) = z$. Sanan $\boldsymbol{\imath}_0$ valinnan perusteella

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(\mathtt{cl}(U)) &= T_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\imath}_0\boldsymbol{k}'}(\mathtt{cl}(U)) = T_{\boldsymbol{k}}(T_{\boldsymbol{\imath}_0}(T_{\boldsymbol{k}'}(\mathtt{cl}(U)))) \\ &\subseteq T_{\boldsymbol{k}}(T_{\boldsymbol{\imath}_0}(\mathtt{cl}(U))) \subseteq T_{\boldsymbol{k}}(U) \subseteq U \subseteq \mathtt{cl}(U). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Oletetaan ensin, että $z \notin \mathtt{cl}(U)$. Koska joukko $\mathtt{cl}(U)$ on suljettu, on olemassa sellainen piste $u' \in \partial U$, että $\|z - u'\| = \mathtt{inf}\{\|z - u\| \mid u \in \mathtt{cl}(U)\} > 0$. Lisäksi on oltava $\|T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(z) - T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(u')\| < \|z - u'\|$, koska kuvaus $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}$ on kutistuskuvaus. Tämä johtaa kuitenkin ristiriitaan pisteen u' valinnan kanssa, koska laskun (4.1) perusteella $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(u') \in \mathtt{cl}(U)$ ja koska $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(z) = z$. Oletetaan sitten, että $z \in \partial U$ eli $z \in \mathtt{cl}(U)$ ja $z \notin U$, koska joukko U on avoin. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska laskun (4.1) perusteella $T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(\mathtt{cl}(U)) \subseteq U$ eli erityisesti $z = T_{\boldsymbol{\jmath}_0}(z) \in U$. Siten on oltava $z \in U$. Koska kuvauksen $T_{\boldsymbol{\jmath}}$ kiintopiste kuuluu myös iteroidun funktiosysteemin $\mathcal{T}_\Gamma$ attraktorille E_Γ, niin $U \cap E_\Gamma \neq \varnothing$ eli vahva avoimen joukon ehto on voimassa.

$\square$

4.3 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 5.3)
Olkoot $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ keskenään jaottomia hyperbolisia matriiseja. Olkoon $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Tällöin joukko $\{A_{\boldsymbol{\imath}}B \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n\}$ on jaoton äärettömän monella $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Todistus. Tehdään vastaoletus. Tällöin on olemassa jono $(\bar{v}_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{RP}^1$ jolle $A_{\boldsymbol{\imath}}B(\bar{v}_n) = \bar{v}_n$ kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n$ aina, kun $n \geq n'$ jollakin $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Koska matriisit $A_1, \ldots, A_k$ ovat keskenään jaottomia, on olemassa sellaiset indeksit

$1 \leq i < j \leq k$, että matriisit A_i ja A_j eivät ole toistensa skalaarimonikertoja. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $A_1 \neq rA_2$ kaikilla $r \neq 0$. Nyt $A_1^{n-1}A_2B(\bar{v}_n) = \bar{v}_n = A_1^n B(\bar{v}_n)$ kaikilla $n \geq n'$, joten $A_1^{-1}A_2B(\bar{v}_n) = B(\bar{v}_n)$ kaikilla $n \geq n'$. Koska $A_1^{-1}A_2$ ei ole identiteettimatriisin skalaarimonikerta, se kiinnittää enintään kaksi joukon $\mathbb{RP}^1$ alkiota. Siten jono $(B(\bar{v}_n))_{n=1}^{\infty}$ voi saada enintään kaksi erisuurta arvoa, kun $n \geq n'$. Näin ollen on olemassa $\bar{u} \in \mathbb{RP}^1$ ja aidosti kasvava jono $(n_r)_{r=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, joille pätee $B(\bar{v}_{n_r}) = \bar{u}$ kaikilla $r \geq 1$. Erityisesti

$$A_1^{n_r}(\bar{u}) = A_2^{n_r}(\bar{u}) = \cdots = A_k^{n_r}(\bar{u}) \tag{4.2}$$

kaikilla r. Koska matriisit A_i ovat hyperbolisia, niin jono $(A_i^{n_r}(\bar{u}))_{r=1}^{\infty}$ suppenee projektiivisesti kohti matriisin A_i invarianttia aliavaruutta kaikilla i, kun $r \to \infty$. Siten antamalla $r \to \infty$ yhtälössä (4.2) nähdään, että matriiseilla $A_1, \ldots, A_k$ on olemassa yhteinen invariantti aliavaruus, mikä on ristiriita.

□

4.4 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 5.1)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid i = 1, \ldots, k, A_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), v_i \in \mathbb{R}^2\}$ *kääntyviä affiineja kutistuskuvauksia, jotka toteuttavat vahvan avoimen joukon ehdon. Olkoon* μ *avaruuden* $\mathfrak{I}_k^{\infty}$ σ*-invariantti mitta, joka toteuttaa lauseen 3.16 oletukset. Oletetaan lisäksi, että kuvaukset* $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\}$ *toteuttavat lauseen 3.16 oletukset. Tällöin kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *ja* $\Gamma \subseteq \mathfrak{I}_k^n$*, jotka toteuttavat vähintään lauseen 3.16 kohdat (a) – (f) ja lisäksi kuvaukset* $\mathscr{T}_\Gamma$ *toteuttavat vahvan erotteluehdon.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ja $\mathtt{i}_0 \in \mathfrak{I}_k^{n_0}$ kuten lauseessa 4.2. Valitaan $n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ ja $\Gamma' \subseteq \mathfrak{I}_k^{n_1}$ niin, että lauseen 3.16 ehdot täyttyvät. Lauseen 4.2 nojalla joukko $\mathscr{T}_{\Gamma'}$ toteuttaa vahvan avoimen joukon ehdon, joten on olemassa avoin joukko U, luku $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ja sana $\mathtt{i}_1 \in \mathfrak{I}_k^{mn_1}$, joille $T_{\mathtt{i}_1}(\mathrm{cl}(U)) \subseteq U$, kuten lauseen 4.2 todistuksessa.

Olkoon m' (tarpeeksi suuri) kokonaisluku, joka kiinnitetään myöhemmin. Olkoot $n := m'n_1 + mn_1$ ja $\Gamma := \{\mathtt{j}\mathtt{i}_1 \mid \mathtt{j} \in (\Gamma')^{m'}\} \subseteq \mathfrak{I}_k^n$. Nyt iteroitu funktiosysteemi $\mathscr{T}_\Gamma$ toteuttaa vahvan erotteluehdon. Perustellaan tämä. Olkoot

$\boldsymbol{\jmath}_1, \boldsymbol{\jmath}_2 \in \Gamma$ erisuuria. Tällöin on olemassa sanat $\boldsymbol{\jmath}_1'$ ja $\boldsymbol{\jmath}_2'$, jotka alkavat eri symboleilla a_1 ja a_2 ja joille pätee $\boldsymbol{\jmath}_i = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\jmath}_i'\boldsymbol{\imath}_1$ kaikilla $i = 1, 2$ jollakin sanalla $\boldsymbol{k}$, joka voi olla tyhjä. Avoimen joukon ehdon nojalla $T_{a_1}(U) \cap T_{a_2}(U) = \varnothing$, joten

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{\jmath}_1}(\mathtt{cl}(U)) \cap T_{\boldsymbol{\jmath}_2}(\mathtt{cl}(U)) &= T_{\boldsymbol{k}}(T_{\boldsymbol{\jmath}_1'}(T_{\boldsymbol{\imath}_1}(\mathtt{cl}(U)))) \cap T_{\boldsymbol{k}}(T_{\boldsymbol{\jmath}_2'}(T_{\boldsymbol{\imath}_2}(\mathtt{cl}(U)))) \\ &= T_{\boldsymbol{k}}\Big(T_{\boldsymbol{\jmath}_1'}(T_{\boldsymbol{\imath}_1}(\mathtt{cl}(U))) \cap T_{\boldsymbol{\jmath}_2'}(T_{\boldsymbol{\imath}_2}(\mathtt{cl}(U)))\Big) \\ &\subseteq T_{\boldsymbol{k}}(T_{a_1}(U) \cap T_{a_2}(U)) = T_{\boldsymbol{k}}(\varnothing) = \varnothing. \end{aligned}$$

Siten vahva erotteluehto pätee, koska $E \subseteq \mathtt{cl}(U)$.

Osoitetaan sitten, että m' voidaan valita niin, että Γ toteuttaa lauseen 3.16 kohdat (a) – (f), kun luvun ε tilalla on käyttäytyminen $\mathscr{O}(\varepsilon)^{\dagger}$, mikä riittää väitteen todistamiseen. Koska lauseen 3.13 kohdan (f) nojalla voidaan olettaa, että $\boldsymbol{\imath}_1 \subset \boldsymbol{\jmath}$ kaikilla $\boldsymbol{\jmath} \in \Gamma'$, niin se ei vaikuta seuraaviin arvioihin, kun $\varepsilon \to 0$.

(a) Kolmogorovin-Sinain lauseen nojalla alisysteemin $\mathscr{T}_\Gamma$ vasensiirron σ topologiselle entropialle pätee

$$\begin{aligned} \mathrm{h_{top}}(\sigma) &= \lim_{\ell\to\infty}\left(\frac{1}{\ell}\ln\left(\inf_{\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_\sigma^\ell}|\mathcal{E}|\right)\right) \\ &= \lim_{\ell\to\infty}\left(\frac{1}{\ell}\ln|\Gamma|^{\ell}\right) \\ &= \lim_{\ell\to\infty}\ln|\Gamma'|^{m'} = m'\ln|\Gamma'|. \end{aligned}$$

Lauseen 3.13 kohdan (a) nojalla $\ln(|\Gamma'|) > n_1(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon)$. Kun lisäksi valitaan m' niin, että

$$m' > \frac{m\mathrm{h}_\mu(\sigma) - 2m\varepsilon}{\varepsilon},$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$m'n_1(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon) > (m'n_1 + mn_1)(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - 2\varepsilon),$$

† Tässä merkintä $\mathscr{O}(\varepsilon)$ tarkoittaa, että kyseessä oleva termi on pienempi kuin $C\varepsilon$ jollakin vakiolla $C > 0$

niin

$$m' \ln(|\Gamma'|) > m' n_1(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon) > n(\mathrm{h}_\mu(\sigma) - 2\varepsilon),$$

mistä väite seuraa.

(c) – (e) Vastaavalla laskulla kuin kohdassa (a) nähdään, että lauseen 3.16 kohdat (c) – (e) pätevät myös käyttäytymiselle $\mathscr{O}(\varepsilon)$, kun m' on tarpeeksi suuri. Implisiittiset vakiot kohdan (a) todistuksessa riippuvat mitasta μ, mutta se ei vaikuta todistukseen, koska ε voidaan valita mielivaltaisen pieneksi.

(b) Selvä lauseen 3.16 kohdan (b) nojalla.

(f) Oletetaan sitten, että alkuperäiset matriisit $\mathscr{A}$ ovat vahvasti jaottomia. Koska matriisit $\mathscr{A}_\Gamma$ säilyttävät kartion aidosti kohdan (b) nojalla, ne ovat hyperbolisia Perronin-Frobeniuksen lauseen nojalla, joten riittää osoittaa, että ne ovat keskenään jaottomia. Tämä kuitenkin seuraa lauseesta 4.3 olettaen, että luku m' on valittu lauseen antamasta äärettömästä joukosta.

□

4.5 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 5.4)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_1, \ldots, T_k\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ affiini iteroitu funktiosysteemi ja $E \subseteq \mathbb{R}^2$ siihen liittyvä itseaffiini joukko.

(a) *Jos $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} = 2$ ja joukko $\mathscr{T}$ toteuttaa avoimen joukon ehdon, niin $\mathrm{int}(E) \neq \varnothing$. Erityisesti $\dim_{\mathcal{H}} E = 2$.*

(b) *Jos $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} > 2$, niin avoimen joukon ehto ei voi täyttyä.*

Todistus.

(a) Oletetaan, että $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} = 2$ ja että kuvaukset $\mathscr{T}$ toteuttavat avoimen joukon ehdon joukolla $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Koska $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} = 2$, niin määritelmän 1.3.6 nojalla

$$\lim_{\ell \to \infty} \left(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{I}_k^\ell} \varphi^2(A_{\mathtt{i}}) \right)^{1/\ell} = 1,$$

missä $T_j(x) := A_j(x)+v_j$, $A_j \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja $v_j \in \mathbb{R}^2$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Koska

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^\ell} \varphi^2(A_{\boldsymbol{\imath}})\right)^{1/\ell} &= \left(\sum_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^\ell} |\mathtt{det}\, A_{\boldsymbol{\imath}}|^{2/2}\right)^{1/\ell} \\ &= \left(\sum_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^\ell} |\mathtt{det}\, A_{i_1}| \cdots |\mathtt{det}\, A_{i_\ell}|\right)^{1/\ell} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} |\mathtt{det}\, A_i|^\ell\right)^{1/\ell} = \sum_{i=1}^{k} |\mathtt{det}\, A_i|,\end{aligned}$$

niin

$$1 = \lim_{\ell\to\infty} \left(\sum_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^\ell} \varphi^2(A_{\boldsymbol{\imath}})\right)^{1/\ell} = \sum_{i=1}^{k} \mathtt{det}\, A_i.$$

Koska siirto ei vaikuta determinantin arvoon, niin $\sum_{i=1}^k \mathtt{det}\, T_i = 1$, joten $\{T_i(U) \mid 1 \leq i \leq k\}$ on joukon U *ositus mitassa*† . Oletetaan sitten, että $\{T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n\}$ on joukon U ositus mitassa jollakin $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Koska $\{T_{\boldsymbol{\imath}j}(U) \mid 1 \leq j \leq k\}$ on joukon $T_{\boldsymbol{\imath}}(U)$ ositus mitassa kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n$, niin myös $\{T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^{n+1}\}$ on joukon U ositus mitassa. Siten induktioperiaatteen nojalla $\{T_{\boldsymbol{\imath}}(U) \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^n\}$ on joukon U ositus mitassa kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Siten

$$U \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^n} \mathtt{cl}(T_{\boldsymbol{\imath}}(U)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\boldsymbol{\imath}\in \mathcal{I}_k^n} T_{\boldsymbol{\imath}}(\mathtt{cl}(U)) = E$$

eli $\mathtt{int}(E) \neq \varnothing$, koska U on avoin. Siten myös $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E = 2$, koska $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} U \leq \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E \leq \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^2 = 2$.

(b) Oletetaan, että $\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{T} > 2$. Edellisen kohdan laskun nojalla tämän kanssa yhtäpitävästi $\sum_{i=1}^k \mathtt{det}(T_i) > 1$. Jos avoimen joukon ehto olisi

† Tässä *ositus mitassa* tarkoittaa ositusta, joka on tehty mitan suhteen eli $T_i(U) \subseteq U$ kaikilla i, $\mathscr{L}^2(T_i(U) \cap T_j(U)) = 0$ kaikilla $i \neq j$ ja $\mathscr{L}^2(U) = \sum_i \mathscr{L}^2(T_i(U))$.

voimassa avoimella rajoitetulla joukolla U, niin joukot $T_1(U), \dots, T_k(U)$ olisivat pistevieraita joukon U osajoukkoja, joille pätisi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^2\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} T_i(U)\right) &= \sum_{i=1}^{k} \mathscr{L}^2(T_i(U)) = \sum_{i=1}^{k} \mathtt{det}(T_i)\mathscr{L}^2(U)\\ &= \mathscr{L}^2(U)\sum_{i=1}^{k} \mathtt{det}(T_i) > \mathscr{L}^2(U),\end{aligned}$$

mikä on mahdotonta, koska erityisesti $\bigsqcup_{i=1}^{k} T_i(U) \subseteq U$ eli mitan monotonisuuden nojalla $\mathscr{L}^2\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} T_i(U)\right) \leq \mathscr{L}^2(U)$.

□

4.6 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 1.1)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. *Jos* $0 < \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} < 2$, *matriisit* $\mathscr{A}$ *eivät säilytä epätriviaalia aliavaruutta ja yksi matriiseista* $\mathscr{A}$ *on hyperbolinen, niin kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on olemassa luku* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, *osajoukko* $\Gamma \subseteq \mathfrak{I}_k^n$ *ja Bernoullin mitta* ν *joukossa* $\Gamma^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$, *joille pätee*

(a) $\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\nu, \mathscr{A}_\Gamma) \geq \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} - \varepsilon$, *lisäksi normalisoinnin jälkeen mitan* ν *ja Käenmäen mitan* $\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}$ *Lyapunovin eksponentit ja mittateoreettinen entropia ovat* ε*-lähellä toisiaan eli toisin sanoen*

  (i) $\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \frac{1}{n}\mathrm{h}_\nu(\sigma) \leq \varepsilon$

  (ii) $\left|\frac{1}{n}\lambda_1^{\mathscr{A}_\Gamma}(\nu) - \lambda_1^{\mathscr{A}_\Gamma}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})\right| \leq \varepsilon$

  (iii) $\left|\frac{1}{n}\lambda_2^{\mathscr{A}_\Gamma}(\nu) - \lambda_2^{\mathscr{A}_\Gamma}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})\right| \leq \varepsilon$

(b) *on olemassa kartio, jonka kuvaukset* $\mathscr{A}_\Gamma$ *säilyttävät aidosti*

(c) *jos matriisit* $\mathscr{A}$ *ovat vahvasti jaottomia, niin myös matriisit* $\mathscr{A}_\Gamma$ *ovat.*

Lisäksi, jos affiinit kuvaukset $T_i(x) := A_i(x) + v_i$ *ovat sellaisia, että joukko* $\mathscr{T} := \{T_1, \dots, T_k\}$ *toteuttaa vahvan avoimen joukon ehdon, niin* Γ *voidaan valita sellaiseksi, että* $\mathscr{T}_\Gamma$ *toteuttaa vahvan erotteluehdon.*

Todistus. Lauseen 2.16 nojalla Käenmäen mitan $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret, joten lauseita 3.16 ja 4.4 voidaan soveltaa. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja n ja Γ kuten lauseessa 3.16 tai 4.4. Tällöin lauseen 4.4 nojalla $\mathscr{T}_\Gamma$ toteuttaa vahvan erotteluehdon.

(b) Seuraa suoraa lauseen 3.16 kohdasta (b).

(c) Seuraa suoraa lauseen 3.16 kohdasta (f).

(a) Olkoon ν tasainen Bernoullin mitta avaruudessa $\Gamma^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$. Merkitään sanaa $\hat{\boldsymbol{\imath}} := \boldsymbol{\imath}_1\boldsymbol{\imath}_2\boldsymbol{\imath}_3 \ldots \in \Gamma^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$, missä $\boldsymbol{\imath}_j \in \Gamma$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(i) Olkoon $\mathcal{D} := \{[\boldsymbol{\imath}] \mid \boldsymbol{\imath} \in \Gamma\}$ avaruuden $\Gamma^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ ositus. Koska $\mathcal{D}$ on generoiva ositus, niin Kolmogorovin-Sinain lauseen nojalla se antaa entropian. Koska lisäksi ν on tasaisesti jakautunut Bernoullin mitta, niin

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_\nu(\sigma) &= \lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\sum_{D\in\mathcal{D}_\sigma^m}\nu(D)\ln\nu(D)\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\sum_{D\in\mathcal{D}_\sigma^m}\frac{1}{|\Gamma|^m}\ln\frac{1}{|\Gamma|^m}\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\ln(|\Gamma|)\frac{1}{|\Gamma|^m}\sum_{D\in\mathcal{D}_\sigma^m}1\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}\ln|\Gamma| = \ln|\Gamma|.
\end{aligned}$$

Siten lauseen 3.16 kohdan (a) nojalla

$$\mathrm{h}_\nu(\sigma) \geq n(\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon),$$

mistä väite seuraa.

(ii) Yhteisspektrisäteen määritelmän 3.1, huomautuksen 1.2.4 ja lauseen 3.16 kohdan (d) nojalla, kun m on tarpeeksi suuri, kaikilla $\boldsymbol{\imath} \in \Gamma$

pätee

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\big(\alpha_1(A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m))\big) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\| A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m)\| d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \int \ln\| \prod_{j=n}^{1} A_{\boldsymbol{\imath}_j} \|^{1/m} d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&\overset{3.1}{\leq} \lim_{m\to\infty} \int \ln \rho(\mathscr{A}_\Gamma) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&\overset{(d)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \int \ln \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})+\varepsilon)} d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon) + \int 1 d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Vastaavasti lauseen 3.16 kohdan (c) nojalla

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) &\overset{3.1}{\geq} \lim_{m\to\infty} \int \ln \varrho(\mathscr{A}_\Gamma) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&\overset{(c)}{\geq} \lim_{m\to\infty} \int \ln \mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})-\varepsilon)} d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Näin ollen

$$
n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon) < \lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) < n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon),
$$

mistä väite seuraa.

(iii) Huomautuksen 1.2.4 ja lauseen 3.16 kohdan (e) nojalla

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\big(\alpha_1(A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m))\big) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&\quad + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\big(\alpha_2(A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m))\big) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\big(\alpha_1(A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m))\alpha_2(A(\hat{\boldsymbol{\imath}}, m))\big) d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int \ln\left|\det \prod_{j=m}^{1} A_{\boldsymbol{\imath}_j}\right| d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=m}^{1} \int \ln\left|\det A_{\boldsymbol{\imath}_j}\right| d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&\overset{(e)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=m}^{1} \int \ln\left|\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon)}\right| d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} mn(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon) \int 1 d\nu(\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon) \\
&= \; n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) &\geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=m}^{1} \int \ln\left|\mathrm{e}^{n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon)}\right| d\nu(x) \\
&= n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon)
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon) &< \lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) \\
&< n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Siten kohdan (ii) nojalla

$$n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) - 2\varepsilon) < \lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) < n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + 2\varepsilon),$$

mistä väite seuraa.

Lyapunovin ulottuvuuden määritelmän 1.4.10 nojalla

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{dim}_{\mathcal{L}\mathcal{Y}}(\nu, \mathscr{A}_\Gamma) \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_\nu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu)}, & \text{jos } \mathrm{h}_\nu(\sigma) < -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_\nu(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu)}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu)}, & \text{jos } -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) \le \mathrm{h}_\nu(\sigma) < -\lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) \\ \dfrac{2\mathrm{h}_\nu(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\nu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu)}, & \text{jos } -\lambda_2^{\mathscr{A}}(\nu) \le \mathrm{h}_\nu(\sigma) \end{cases} \\
&> \begin{cases} \dfrac{n(\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon)}{-n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon)} \\ 1 + \dfrac{n(\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon) + n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon)}{-n(\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - 2\varepsilon)} \\ \dfrac{2n(\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon)}{-n(\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \varepsilon)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - 2\varepsilon}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + 2\varepsilon} \\ 2\dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) - \varepsilon}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + 2\varepsilon} \\ 2\dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \end{cases} \\
&- \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \\ \dfrac{2\varepsilon}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + 2\varepsilon} \\ 2\dfrac{\varepsilon}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -C\varepsilon + \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + 2\varepsilon} \\ 2\dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) + \varepsilon} \end{cases} \\
&= -C'\varepsilon + \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})} \\ 1 + \dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})} \\ 2\dfrac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})} \end{cases} \\
&= \mathtt{dim}_{\mathcal{L}\mathcal{Y}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}, A) - C'\varepsilon \overset{2.9}{=} \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\,\mathscr{A} - C'\varepsilon,
\end{aligned}
$$

missä vakiot $C, C' > 0$ riippuvat Käenmäen mitan $\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma}$ Lyapunovin eksponenteista $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})$ ja $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}_\Gamma})$. Koska ε on mielivaltainen, väite pätee.

$\square$

5 Ulottuvuuksien yhtäsuuruus

5.1 Määritelmä

Olkoon μ ergodinen σ-invariantti mitta avaruudessa $\mathcal{J}_k^\infty$. Olkoon $\hat{\mu}$ mitan μ kääntyvä luonnollinen laajennos. Määritellään avaruuden $\mathbb{RP}^1$ Borelin todennäköisyysmitta η_μ eli mitan μ indusoima *Furstenbergin mitta* asettamalla

$$\eta_\mu(B) := \hat{\mu}(\{x \mid \mathscr{U}(x) \in B\}),$$

missä kuvaus $\mathscr{U}$ saadaan soveltamalla lausetta 3.12 mittaan $\hat{\mu}$.

5.2 Määritelmä

Olkoot $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ joukon X kaikkien Borelin joukkojen kokoelma. Mitan μ *alempi Hausdorffin ulottuvuus* $\underline{\dim}_{\mathcal{H}}$ on

$$\underline{\dim}_{\mathcal{H}}\mu := \inf_{A \in \mathcal{B}}\{\dim_{\mathcal{H}} A \mid \mu(A) > 0\}.$$

5.3 Määritelmä

Metrisen avaruuden mitta μ on *täsmällisulotteinen*, jos on olemassa sellainen luku s, että μ-melkein kaikilla x pätee

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r} = s,$$

missä $B(x,r)$ on x-keskinen r-säteinen avoin pallo. Merkitään tällöin $\dim_{\mathcal{H}} \mu := s$.

5.4 Määritelmä

Olkoot $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ja η_μ Furstenbergin mitta, jonka avaruuden $\mathcal{J}_k^\infty$ mitta μ indusoi. Mitan η_μ *similariteetti ulottuvuus* suhteessa joukkoon $\mathscr{A}$ on

$$\dim_{\mathcal{S}} \eta_\mu = \min\left\{1, \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}\right\}.$$

5.5 Lause (Bárány, 2015, lause 2.8)

Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ kutistuskuvauksia ja μ avaruuden $\mathcal{J}_k^\infty$ Bernoullin mitta. Oletetaan, että on olemassa kartio, jonka kuvaukset $\mathscr{A}$

säilyttävät aidosti ja että $\underline{\dim}_{\mathcal{H}}\eta_\mu \geq \min\{1, \dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A})\}$*, missä* η_μ *on mitan* μ *indusoima Furstenbergin mitta. Tällöin jokaisella siirtovektorilla* $v := (v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^2)^k$*, jolle kuvaukset* $\mathscr{T}_v := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ *toteuttavat vahvan erotteluehdon, vastaava itseaffiini mitta* ν_v *on täsmällisulotteinen ja* $\dim_{\mathcal{H}} \nu_v = \dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A})$*.*

Todistus. Katso Bárány (2015) lause 2.8.

□

5.6 Lause (Rapaport, 2018, Main theorem)
Olkoon $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *jaoton. Oletetaan, että* μ *on avaruuden* $\mathfrak{I}_k^\infty$ *Bernoullin mitta, jonka Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret ja jolle pätee* $\dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}) + \underline{\dim}_{\mathcal{H}}\eta_\mu > 2$*, missä* η_μ *on mitan* μ *indusoima Furstenbergin mitta. Tällöin jokaisella siirtovektorilla* $v := (v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^2)^k$*, jolle joukko* $\mathscr{T}_v := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ *toteuttaa vahvan erotteluehdon, itseaffiinille mitalle* ν_v*, jonka indusoivat* μ *ja* $\mathscr{T}_v$*, pätee* $\dim_{\mathcal{H}} \nu_v = \dim_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A})$*.*

Todistus. Katso Rapaport (2018) Main Theorem.

□

5.7 Huomautus
Furstenbergin lauseen nojalla jokaisen Bernoullin mitan Lyapunovin eksponentit ovat erisuuret, jos liittyvät matriisit $\mathscr{A}$ ovat vahvasti jaottomia ja niiden generoimassa puoliryhmässä on hyperbolinen matriisi. Tämä mahdollistaa lauseen 5.6 soveltamisen jatkossa.

5.8 Lause (Hochman & Solomyak, 2017, lause 1.1)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *vahvasti jaottomia matriiseja, jotka ovat eksponentiaalisesti eroteltavia ja joiden generoimassa puoliryhmässä on hyperbolinen matriisi. Tällöin kaikilla Bernoullin mitoilla* μ *avaruudessa* $\mathfrak{I}_k^\infty$ *pätee, että vastaavalle Furstenbergin mitalle* η_μ *avaruudessa* $\mathbb{RP}^1$ *pätee*

$$\dim_{\mathcal{H}} \eta_\mu = \min\left\{1, \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)}\right\}.$$

Todistus. Katso Hochman & Solomyak (2017) lause 1.1. ◻

5.9 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, seuraus 6.4)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *keskenään vahvasti jaottomia matriiseja, jotka ovat eksponentiaalisesti eroteltavia. Oletetaan lisäksi, että joukossa* $\mathscr{A}$ *on vähintään yksi hyperbolinen matriisi. Tällöin kaikilla Bernoullin mitoilla* μ *avaruudessa* $\mathcal{J}_k^\infty$ *pätee, että vastaavalle Furstenbergin mitalle* η_μ *avaruudessa* $\mathbb{RP}^1$ *pätee*

$$\dim_{\mathcal{H}} \eta_\mu = \min\left\{1, \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}\right\}.$$

Todistus. Merkitään $\widehat{A}_i := A_i(\det A_i)^{-1/2}$ kaikilla $A_i \in \mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Tällöin $\widehat{\mathscr{A}} := \{\widehat{A}_1, \ldots, \widehat{A}_k\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Koska matriisit $\mathscr{A}$ ovat eksponentiaalisesti eroteltavia, on olemassa sellainen vakio $c > 0$, jolle $\|A_{\boldsymbol{\imath}} - A_{\boldsymbol{\jmath}}\| > c^n$ kaikilla erisuurilla sanoilla $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{J}_k^n$. Olkoon

$$\delta := \frac{c^2}{\max_i(\det A_i) \max_i \|\widehat{A}_i\|},$$

missä $i = 1, \ldots, k$. Osoitetaan, että myös matriisit $\widehat{\mathscr{A}}$ ovat eksponentiaalisesti eroteltavia. Toisin sanoen osoitetaan, että $\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\| \geq \delta^n/2$, kun sanat $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{J}_k^n$ ovat erisuuria. Oletetaan, että näin ei ole. Tällöin joillakin sanoilla $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath} \in \mathcal{J}_k^n$, $\boldsymbol{\imath} \neq \boldsymbol{\jmath}$, pätee $\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\| < \delta^n/2$. Tällöin

$$\begin{aligned}
c^{2n} &< \|A_{\boldsymbol{\imath}}A_{\boldsymbol{\jmath}} - A_{\boldsymbol{\jmath}}A_{\boldsymbol{\imath}}\| \\
&= \|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\sqrt{\det A_{\boldsymbol{\jmath}}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\sqrt{\det A_{\boldsymbol{\jmath}}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}}}\| \\
&= \sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}} \det A_{\boldsymbol{\jmath}}}\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\| \\
&\overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} \sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}} \det A_{\boldsymbol{\jmath}}}\left(\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}^2\| + \|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}^2 - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\|\right) \\
&= \sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}} \det A_{\boldsymbol{\jmath}}}\left(\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}(\widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}})\| + \|(\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}})\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\|\right) \\
&\leq 2\sqrt{\det A_{\boldsymbol{\imath}} \det A_{\boldsymbol{\jmath}}}\|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}}\| \cdot \|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\| \\
&\leq \sqrt{\det A_{i_1} \cdots \det A_{i_n} \det A_{j_1} \cdots \det A_{j_n}}\|\widehat{A}_{i_1}\| \cdots \|\widehat{A}_{i_n}\| \cdot 2 \cdot \|\widehat{A}_{\boldsymbol{\imath}} - \widehat{A}_{\boldsymbol{\jmath}}\|
\end{aligned}$$

$$< (\max_i(\det A_i))^n(\max_i\|\widehat{A}_i\|)^n\delta^n,$$

mikä on ristiriita luvun δ valinnan kanssa.

Koska

$$\begin{aligned}\ln\|\widehat{A}(x,n)\| &= \ln\|(\det A_{x_n})^{-1/2}\|A_{x_n}\|\cdots(\det A_{x_1})^{-1/2}\|A_{x_1}\|\|\\ &= \ln\|A_{x_n}\cdots A_{x_1}\| - \frac{1}{2}\ln\big(\det(A_{x_n}\cdots A_{x_1})\big)\\ &= \ln\|A(x,n)\| - \frac{1}{2}\ln(\det(A(x,n))),\end{aligned}$$

niin Lyapunovin yläeksponentti matriiseille $\widehat{\mathscr{A}}$ on

$$\begin{aligned}\lambda^*(\widehat{\mathscr{A}}) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\|\widehat{A}(x,n)\|\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\Big(\ln\|A_{x_n}\cdots A_{x_1}\| - \frac{1}{2}\ln\big(\det(A_{x_n}\cdots A_{x_1})\big)\Big)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\|A(x,n)\|\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\ln(\det A(x,n))\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\alpha_1(A(x,n))\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\ln\big(\alpha_1(A(x,n))\alpha_1(A(x,n))\big)\right)\\ &= \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\alpha_1(A(x,n))\right) - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\alpha_2(A(x,n))\right)\\ &= \lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \frac{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)+\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}{2} = \frac{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu)-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)}{2},\end{aligned}$$

missä $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) > \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$. Siten väite seuraa lauseesta 5.8.

□

5.10 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 6.5)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i(x) := A_i(x)+v_i \mid i=1,\dots,k, A_i\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), v_i\in\mathbb{R}^2\}$ *aidosti kutistavia kääntyviä affiineja kuvauksia. Olkoon* E *kuvauksiin* $\mathscr{T}$ *liittyvä itseaffiini joukko. Oletetaan lisäksi, että*

(a) *matriisit* $\mathscr{A} := \{A_1,\dots,A_k\}$ *ovat vahvasti jaottomia ja niiden generoimassa puoliryhmässä on hyperbolinen matriisi*

(b) *kuvaukset* $\mathscr{T}$ *toteuttavat vahvan avoimen joukon ehdon*

(c) *kuvaukset* $\mathscr{A}$ *ovat eksponentiaalisesti eroteltavia*

(d) $\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{T} + \mathtt{dim}_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) > 2$, *missä* $\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}$ *on Furstenbergin mitta, jonka joukon* $\mathscr{A}$ *Käenmäen mitta* $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ *indusoi.*

Tällöin $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E = \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{T}$.

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{\imath}_0 \in \mathcal{I}_k^m$ sellainen, että $A_{\boldsymbol{\imath}_0}$ on hyperbolinen. Yleisyyden kärsimättä voidaan olettaa, että $|\boldsymbol{\imath}_0| = 1$, koska kuvaukset $\{T_1, \ldots, T_k\}$ voidaan korvata kuvauksilla $\{T_{i_1} \cdots T_{i_m} \mid \boldsymbol{\imath} \in \mathcal{I}_k^m\}$. Tämä iteraatio ei vaikuta lauseen oletuksiin, eritysesti eksponentiaalinen eroteltavuus säilyy (eri vakiolla c). Soveltamalla lausetta 4.6 tarpeeksi pienellä $\varepsilon > 0$ saadaan lauseen 4.6 mukainen luku n, joukko $\Gamma \subseteq \mathcal{I}_k^\infty$ ja Bernoullin mitta ν. Koska eksponentiaalinen eroteltavuus säilyy myös alisysteemeihin siirryttäessä, erityisesti alisysteemi $\mathscr{A}_\Gamma$ on eksponentiaalisesti eroteltava. Siten soveltamalla lausetta 5.9 mittaan ν liittyvään Furstenbergin mittaan η_ν ja joukkoon $\mathscr{A}_\Gamma$ sekä lauseen 4.6 kohdan (a) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathtt{dim}_{\mathcal{H}}\,\eta_\nu &\overset{5.9}{=} \mathtt{min}\left\{1, \frac{\mathrm{h}_\nu(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}_\Gamma}(\nu) - \lambda_2^{\mathscr{A}_\Gamma}(\nu)}\right\} \\
&\overset{(a)}{\geq} \mathtt{min}\left\{1, \frac{\mathrm{h}_\mu(\sigma) - \varepsilon}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) + 2\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}$$

Siten, kun ε on tarpeeksi pieni, $\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\nu, \mathscr{A}_\Gamma) + \mathtt{dim}_{\mathcal{H}}\,\eta_\nu > 2$ lauseen 4.6 nojalla. Koska $\mathscr{T}_\Gamma$ toteuttaa vahvan erotteluehdon lauseen 4.6 nojalla, niin lauseen 5.6 perusteella $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E \geq \mathtt{dim}_{\mathcal{H}}\,\nu_v = \mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\nu, \mathscr{A})$, joka saadaan lauseen 4.6 nojalla mielivaltaisen lähellä lukua $\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\mathscr{A}$. Koska käänteinen epäyhtälö pätee aina (katso esimerkiksi Falconer, 1988, väite 5.1), väite seuraa.

□

5.11 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, Lemma 6.7)
Olkoon $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *sellainen puoliryhmä kutistuskuvauksia, että jollakin* $0 < t < 1$ *pätee* $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)^t$ *kaikilla* $A \in \mathscr{A}$. *Tällöin on olemassa kanta, jossa kaikki joukon* $\mathscr{A}$ *alkiot ovat diagonaalisia.*

Todistus. Koska kaikilla $A, B \in \mathscr{A}$ pätee

$$\begin{aligned}\alpha_1(AB)^{1+1/t} &= \alpha_1(AB)\alpha_1(AB)^{1/t} = \alpha_1(AB)\alpha_2(AB)\\ &= |\mathtt{det}(AB)| = |\mathtt{det}\, A| \cdot |\mathtt{det}\, B|\\ &= \alpha_1(A)\alpha_2(A)\alpha_1(B)\alpha_2(B) = \alpha_1(A)^{1+1/t}\alpha_1(B)^{1+1/t},\end{aligned}$$

niin $\alpha_1(AB) = \alpha_1(A)\alpha_1(B)$. Lisäksi, koska $0 < \alpha_1(A)^{1/t} = \alpha_2(A) < 1$, täytyy olla $\alpha_1(A) \neq \alpha_2(A)$ eli jokaisella matriisilla $A \in \mathscr{A}$ on erisuuret singulaariarvot.

Oletetaan ensin, että $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Olkoon $A_0 \in \mathscr{A}$. Olkoon R_θ matriisi, joka vastaa kulman θ kiertoa. Jokaisella matriisilla $A_i \in \mathscr{A}$ on olemassa singulaariarvohajotelma $A_i = R_{\psi_i} D_i R_{\varphi_i}$ joillakin kulmilla ψ_i ja φ_i, missä $D_i := \mathtt{diag}(\alpha_1(A_i), \alpha_2(A_i))$ on positiivinen diagonaalimatriisi (katso esimerkiksi Horn & Johnson, 2012, lauseet 2.1.13 ja 2.6.3). Nyt

$$\begin{aligned}\|D_i\|^2 = \alpha_1(A_i)^2 &= \alpha_1(A^2) = \|A_i^2\|\\ &= \|R_{\psi_i} D_i R_{\varphi_i} R_{\psi_i} D_i R_{\varphi_i}\| = \|D_i R_{\varphi_i} R_{\psi_i} D_i\|,\end{aligned}$$

mikä on mahdollista vain, jos $R_{\varphi_i} R_{\psi_i} = \pm\mathrm{Id}$, koska matriisin D_i alkiot ovat erisuuret. Koska vastaavasti

$$\|D_0\| \cdot \|D_i\| = \alpha_1(A_0)\alpha_1(A_i) = \alpha_1(A_0 A_i) = \|A_0 A_i\| = \|D_0 R_{\varphi_0} R_{\psi_i} D_i\|,$$

täytyy olla $R_{\varphi_0} R_{\psi_i} = \pm\mathrm{Id}$, $R_{\varphi_0} R_{\psi_0} = \pm\mathrm{Id}$ ja $R_{\varphi_i} R_{\psi_i} = \pm\mathrm{Id}$. Tällöin erityisesti $R_{\varphi_i} = \pm R_{\psi_i}^{-1} = \pm R_{\varphi_0}$ ja $R_{\varphi_i} R_{\varphi_0}^{-1} = R_{\varphi_i}(\pm R_{\psi_i}) = \pm R_{\varphi_i} R_{\psi_i} = \pm\mathrm{Id}$. Näin ollen

$$R_{\varphi_0} A_0 R_{\varphi_0}^{-1} = R_{\varphi_0} R_{\psi_0} D_0 R_{\varphi_0} R_{\varphi_0}^{-1} = \pm\mathrm{Id} D_0 \mathrm{Id} = \pm D_0$$

ja

$$R_{\varphi_0} A_i R_{\varphi_0}^{-1} = R_{\varphi_0} R_{\psi_i} D_i R_{\varphi_i} R_{\varphi_0}^{-1} = \pm\mathrm{Id} D_i(\pm\mathrm{Id}) = \pm D_i,$$

joten matriisit A_0 ja A_i ovat diagonaalisia ja lisäksi hyperbolisia samassa kannassa. Koska kannanvaihtomatriisit R_{φ_0} ja R_{ψ_0} riippuvat vain matriisista A_0 ja matriisi $A_i \in \mathscr{A}$ on mielivaltainen, niin väite pätee. Tämän lisäksi kaikki joukon $\mathscr{A}$ alkiot ovat hyperbolisia.

Oletetaan sitten, että $\mathscr{A} \setminus \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Edellisen päättelyn nojalla on olemassa kanta, jossa jokainen puoliryhmän $\mathscr{A} \cap \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ alkio on diagonaalinen ja hyperbolinen. Erityisesti, jos $A \in \mathscr{A} \setminus \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, niin $A^2 \in \mathscr{A} \cap \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Koska 2×2 matriisi on diagonaalinen ja hyperbolinen, jos sen neliö on diagonaalinen ja hyperbolinen, niin tässä kannassa myös jokainen joukon $\mathscr{A} \setminus \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ alkio on erityisesti diagonaalinen. Siten väite pätee.

□

5.12 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, seuraus 6.8)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ jaottomia ja μ ergodinen mitta, jonka kantaja on $\mathcal{I}_k^\infty$. Jos jollakin $t > 1$ pätee $\alpha_1(A_i)^t \leq \alpha_2(A_i)$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin $t\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) < \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$.

Todistus. Olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ jono, jolle

$$x_n := \int_{\mathcal{I}_k^\infty} \Big(t \ln \alpha_1(A(x,n)) - \ln \alpha_1(A(x,n)) \Big) d\mu(x)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Huomautuksen 1.4.6 todistuksen nojalla jono

$$\left(\int \ln \big(\alpha_1(A(x,n)) \big) d\mu(x) \right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$$

on subadditiivinen, joten integraalin lineaarisuuden nojalla myös jono (x_n) on subadditiivinen. Koska

$$\begin{aligned} t \ln \alpha_1(A(x,n)) - \ln \alpha_1(A(x,n)) &= \ln \frac{\alpha_1(A(x,n))^t}{\alpha_1(A(x,n))} \\ &\leq \ln \frac{\alpha_2(A(x,n))}{\alpha_1(A(x,n))} \\ &\leq \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

niin $x_n \leq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Lisäksi $x_n \to t\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu)$, kun $n \to \infty$, määritelmän 1.4.4 nojalla. Toisaalta jonon (x_n) raja-arvo on negatiivinen jos ja vain jos on olemassa luku n', jolle $x_{n'} < 0$, koska tällöin kaikilla $n > n'$ pätee $x_n = x_{n'+m} \leq x_{n'} + x_m \leq x_{n'} < 0$. Koska mitan μ kantaja on $\mathcal{I}_k^\infty$, tällainen luku n' on olemassa täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen puoliryhmän alkio A, että $\alpha_1(A)^t < \alpha_2(A)$. Jos tällaista alkiota ei olisi, seuraisi ristiriita lauseen 5.11 kanssa, koska matriisit ovat jaottomia. Siten $t\lambda_1^{\mathscr{A}}(\mu) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\mu) < 0$ eli väite pätee.

$\square$

5.13 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 6.6)
Olkoot $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ matriisit keskenään vahvasti jaottomia ja eksponentiaalisesti eroteltavia. Oletetaan, että niiden generoimassa puoliryhmässä on hyperbolinen matriisi ja että ne ovat kutistuskuvauksia. Oletetaan lisäksi, että on olemassa luku $0 \leq t < 1/2$, jolle pätee $\alpha_1(A_i) \leq \alpha_2(A_i)^t$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ ja että

$$\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} \geq \frac{3(1-t)}{2-t}.$$

Tällöin jokaisella siirtovektorilla $v := (v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^2)^k$, jolle kuvaukset $\mathscr{T}_v := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ toteuttavat vahvan erotteluehdon, pätee $\dim_{\mathcal{H}} E_v = \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$, missä E_v on kuvauksiin $\mathscr{T}_v$ liittyvä itseaffiini joukko.

Todistus. Lauseen 5.10 nojalla väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} + \dim_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) > 2$, missä $\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}$ on Furstenbergin mitta, jonka indusoi Käenmäen mitta $\kappa_{s,\mathscr{A}}$. Väite on triviaali, jos $\dim_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) = 1$, koska oletuksen nojalla $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} \geq 1$. Oletetaan, että $\dim_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) < 1$. Tehdään vastaoletus eli että $\dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} + \dim_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) \leq 2$. Olkoon luku $s := \dim_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A} \geq 1$. Lauseen 4.5 nojalla voidaan olettaa, että $s < 2$. Koska Käenmäen mitta $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ on singulaariarvofunktion φ^s tasapainotila, niin yhtälön (2.1) nojalla

$$\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \ln \varphi^s(A(x,n)) d\kappa_{s,\mathscr{A}}(x) = \mathrm{P}(s, \mathscr{A}),$$

joten affiinin ulottuvuuden määritelmän 1.3.6, huomautuksen 2.9 ja ehdon $1 \leq s < 2$ nojalla

$$\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) + (s-1)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) = 0,$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) = -\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) + (1-s)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}). \tag{5.1}$$

Vastaoletuksen nojalla

$$s + \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} = \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\,\mathscr{A} + \mathtt{dim}_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) \leq 2,$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$s\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - s\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) + \mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) \leq 2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - 2\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}).$$

Sijoittamalla tähän entropia yhtälöstä 5.1 saadaan

$$(s-1)\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) + (1-2s)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) \leq 2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - 2\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}),$$

minkä kanssa yhtäpitävästi

$$(s-3)\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) \leq (2s-3)\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})$$

ja edelleen

$$\frac{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})}{\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} \leq \frac{2s-3}{s-3},$$

koska sekä $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) < 0$ että $s - 3 < 0$. Toisaalta oletuksen nojalla on olemassa $0 \leq t < 1/2$, jolle $\alpha_1(A_i) \leq \alpha_2(A_i)^t$, joten lauseen 5.12 nojalla $\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) < t\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})$. Koska $\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) < 0$, niin on oltava

$$t < \frac{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})}{\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} \leq \frac{2s-3}{s-3},$$

minkä perusteella

$$\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\,\mathscr{A} = s < \frac{3(1-t)}{2-t},$$

mikä on ristiriita. Siten on oltava $\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\,\mathscr{A} + \mathtt{dim}_{\mathcal{S}}(\eta_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}, \mathscr{A}) > 2$ eli väite pätee.

$\square$

5.14 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lauseet 1.2 ja 1.3)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid i = 1, \ldots, k, A_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), v_i \in \mathbb{R}^2\}$ *kääntyviä affiineja kutistuskuvauksia. Olkoon* E *kuvauksia* $\mathscr{T}$ *vastaava itseaffiini joukko. Oletetaan lisäksi, että*

(a) *Kuvaukset* $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\}$ *ovat keskenään vahvasti jaottomia ja niiden generoima puoliryhmä sisältää hyperbolisen matriisin*

(b) *Kuvaukset* $\mathscr{T}$ *toteuttavat vahvan avoimen joukon ehdon*

(c) *Kuvaukset* $\mathscr{A}$ *ovat eksponentiaalisesti eroteltavia*

(d) *Vähintään toinen seuraavista pätee*

 (i) $\mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\, \mathscr{A} \geq \frac{3}{2}$

 (ii) *Kuvaukset* $\mathscr{A}$ *toteuttavat niputtuvuusehdon eli* $\alpha_1(A_i)^2 \leq \alpha_2(A_i)$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, k$.

Tällöin $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}}\, E = \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}}\, \mathscr{A}$.

Todistus. Jos kohdat (a) – (c) ja (i) pätevät, niin väite seuraa suoraan lauseesta 5.13 valitsemalla $t := 0$.

Oletetaan sitten, että kohdat (a) – (c) ja (ii) ovat voimassa. Olkoon $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ Käenmäen mitta, kuten lauseessa 2.16. Tällöin mitan $\kappa_{s,\mathscr{A}}$ kantana on $\mathcal{J}_k^\infty$, joten lauseen 5.12 nojalla $2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) < \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})$. Lisäksi koska

$$1 + \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})}{-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} \leq \frac{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} + \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) + \lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} = \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})},$$

jos $-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) \leq \mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma) < -\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})$ ja koska

$$\frac{2\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} \leq \frac{2\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{-2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} = \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})},$$

jos $-\lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) \leq \mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)$, niin

$$\begin{aligned}\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}, \mathscr{A}) \leq \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{-\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} &= \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - 2\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} \\ &< \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} =: t.\end{aligned}$$

Olkoot $\varepsilon > 0$ tarpeeksi pieni ja n, Γ ja ν lauseen 4.6 mukaiset. Olkoon η_ν mittaan ν liittyvä Furstenbergin mitta. Jos $t > 1$, niin kuten lauseen 5.10 todistuksessa valitsemalla $\varepsilon > 0$ tarpeeksi pieneksi, saadaan $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} \eta_\nu = 1$, jolloin väite seuraa lauseista 4.6 ja 5.5 antamalla $\varepsilon \to 0$. Jos $t \leq 1$, niin valitsemalla ε tarpeeksi pieneksi kuten lauseen 5.10 todistuksessa, saadaan

$$\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}} \nu < \frac{\mathrm{h}_{\kappa_{s,\mathscr{A}}}(\sigma)}{\lambda_1^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}}) - \lambda_2^{\mathscr{A}}(\kappa_{s,\mathscr{A}})} = \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} \eta_\nu,$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa lauseesta 5.9. Siten lausetta 5.5 voidaan edelleen soveltaa ja väite seuraa lauseesta 4.6 antamalla $\varepsilon \to 0$.

□

5.15 Lause (Morris & Shmerkin, 2019, lause 6.9)
Olkoot $\mathscr{T} := \{T_i(x) := A_i(x) + v_i \mid i = 1, \ldots, k, A_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), v_i \in \mathbb{R}^2\}$ affiineja kuvauksia, jotka täyttävät lauseen 5.13 tai 5.14 oletukset. Olkoon E kuvauksiin $\mathscr{T}$ liittyvä itseaffiini joukko. Tällöin $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} F(E) = \mathtt{min}\{1, \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E\}$ kaikilla lineaarikuvauksilla $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ nollakuvausta lukuun ottamatta.

Todistus. Merkitään $\mathscr{A} := \{A_1, \ldots, A_k\}$. Lauseiden 5.13 ja 5.14 todistuksissa osoitettiin, että lukua $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E = \mathtt{dim}_{\mathcal{AFF}} \mathscr{A}$ voidaan arvioida luvulla $\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}_\Gamma)$, missä mitta μ ja osajoukko $\Gamma \subseteq \mathcal{I}_k^n$ ovat kuten lauseessa 4.4. Erityisesti joukko $\mathscr{A}_\Gamma$ on jaoton lauseen 3.16 nojalla ja kannan vaihdon jälkeen kaikki sen alkiot ovat aidosti positiivisia huomautuksen 3.11 nojalla. Lisäksi lauseen 5.5 tai 5.6 nojalla systeemiin $\mathscr{A}_\Gamma$ liittyvälle itseaffiinille mitalle ν ja Bernoullin mitalle μ pätee $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} \nu = \mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}_\Gamma)$. Siten kaikilla lineaarikuvauksilla $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} F(E) \geq \mathtt{dim}_{\mathcal{H}}(F\nu) = \mathtt{min}\{1, \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} \nu\} = \mathtt{min}\{1, \mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}_\Gamma)\},$$

(Falconer & Kempton, 2017, seuraus 3.2, tässä $B = \mathbb{RP}^1$, koska $\mathscr{A}_\Gamma$ on jaoton). Koska $\mathtt{dim}_{\mathcal{LY}}(\mu, \mathscr{A}_\Gamma)$ saadaan mielivaltaisen lähelle lukua $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E$ ja kaikilla joukoilla $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ja Lipschitz kuvauksilla $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ pätee $\mathtt{dim}_{\mathcal{H}} F(E) \leq \mathtt{min}\{1, \mathtt{dim}_{\mathcal{H}} E\}$, niin väite seuraa.

□

Lähdeluettelo

Algoet, P. H. & Cover, T. M. (1988). A Sandwich Proof of the Shannon-McMillan-Breiman Theorem. *The Annals of Probability*, *16*, 899–909. Luettu 22 heinäkuuta 2019, http://www.jstor.org/stable/2243846

Armstrong, M. A. (1983). *Basic topology*. Springer-Verlag.

Bárány, B. (2015). On the Ledrappier–Young Formula for Self-affine Measures. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *159*, 405–432. https://doi.org/10.1017/S0305004115000419

Bauer, H. (2001). *Measure and Integration Theory*. De Gruyter.

Berend, D. & Bergelson, V. (1984). Ergodic and mixing sequences of transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *4*(3), 353–366. https://doi.org/10.1017/S0143385700002509

Bernstein, D. S. (2009). *Matrix mathematics : theory, facts, and formulas* (2^{nd}). Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400833344

Bessa, M., Bochi, J., Cambrainha, M., Matheus, C., PauloVarandas & Xu, D. (2018). Positivity of the Top Lyapunov Exponent for Cocycles on Semisimple Lie Groups over Hyperbolic Bases. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, *49*(1), 73–87. https://doi.org/10.1007/s00574-017-0048-6

Bougerol, P. & Lacroix, J. (1985). *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators* (Vol. 8). Birkhäuser Publishing. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9172-2

Falconer, K. J. (1988). The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *103*, 339–350. https://doi.org/10.1017/S0305004100064926

Falconer, K. J. & Kempton, T. (2017). The Dimension of Projections of Self-Affine Sets and Measures. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica*, *42*, 473–486. https://doi.org/10.5186/aasfm.2017.4232

Fekete, M. (1923). Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Mathematische Zeitschrift*, *17*, 228–249.

Friedman, N. A. (1970). *Introduction to ergodic theory* (Vol. 29). Van Nostrand Reinhold Company.

Furman, A. (1997). On the multiplicative ergodic theorem for uniquely ergodic systems. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, *33*, 797–815. https://doi.org/10.1016/S0246-0203(97)80113-6

Hochman, M. & Solomyak, B. (2017). On the dimension of Furstenberg measure for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ random matrix products. *Inventiones Mathematicae*, *210*, 815–875. https://doi.org/10.1007/s00222-017-0740-6

Horn, R. A. & Johnson, C. R. (2012). *Matrix Analysis* (2^{nd}). Cambridge eText.

Ivancevic, V. G. & Ivancevic, T. T. (2007). *Applied Differential Geometry: A Modern Introduction*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Jungers, R. (2009). *The Joint Spectral Radius : Theory and Applications* (Vol. 385). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-95980-9

Klenke, A. (2008). *Probability theory : a comprehensive course*. Springer.

Krantz, S. G. (2012). *A Guide to Topology*. Mathematical Association of America.

Käenmäki, A. (2004). On natural invariant measures on generalised iterated function systems. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica*, *29*, 419–458.

Käenmäki, A. & Reeve, H. W. J. (2014). Multifractal analysis of Birkhoff averages for typical infinitely generated self-affine sets. *Journal of Fractal Geometry*, *1*, 83–152. https://doi.org/10.4171/JFG/3

Mattila, P. (1995). *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. Cambridge University Press.

Morris, I. D. & Shmerkin, P. (2019). On equality of Hausdorff and affinity dimensions, via self-affine measures on positive subsystems. *Tran-*

sactions of the American Mathematical Society, *371*(3), 1547–1582. https://doi.org/10.1090/tran/7334

Oseledets, V. I. (1968). A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, *19*, 197–231.

Petersen, K. E. (1989). Cambridge University Press.

Pollicott, M. & Yuri, M. (1998). *Dynamical systems and ergodic theory* (Vol. 40). Cambridge University Press.

Przytycki, F. & Urbanski, M. (2010). *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*. Cambridge University Press.

Rapaport, A. (2018). On Self-affine Measures with Equal Hausdorff and Lyapunov Dimensions. *Transactions of American Mathematical Society*, *370*, 4759–4783. https://doi.org/10.1090/tran/7099

Silva, C. E. (2008). *Invitation to ergodic theory* (Vol. 42). American Mathematical Society.

Sinai, J. G. (1959). On the Notion of Entropy of a Dynamical System. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, (124), 768–771.