Tensorit

FM-tutkielma
Markus Horneman
Opiskelijanumero: 2434548
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2020

Sisältö

Johdanto

Lineaarialgebran rakenteet ja lineaarialgebran ominaisuudet ovat tekniikan sovellusten ja luonnontieteiden ilmiöiden matemaattisen käsittelyn pohjalla. Yleisimmin esiintyviä lineaarialgebran käsitteitä ja rakenteita ovat vektoriavaruus, lineaarinen kuvaus ja matriisit. Tietenkin on myös paljon muita lineaarisia rakenteita, mutta nämä kolme käsitettä ovat sellaisia, joihin jokainen on törmännyt perehtyessään tekniikan ja luonnontieteiden ilmiöiden matemaattiseen käsittelyyn.

Lineaarialgebra on intuitiivista ja sen avulla pystytään perustelemaan monia tekniikan ja luonnontieteiden sovellukset ja löytämään ratkaisuja moniin ongelmiin. Kun ymmärrys maailmasta on kasvanut ja ongelmat ovat monimutkaistuneet, eivät nämä perinteiset lineaariset rakenteet enää riitä mallintamaan ja perustelemaan kaikkia moderneja sovelluksia ja löydettyjä luonnontieteen ilmiöitä. Näin ollen täytyy lineaarialgebran teoriaa laajentaa multilineaarialgebraan. Sovelletuissa tieteissä multilineaarialgebran rakenteista todennäköisesti yleisimpänä esiintyvät tensorit. Varsinkin modernissa fysiikassa tensorit ilmenevät monissa matemaattisissa teorioissa, ja näistä yhtenä tunnetuimpana teoriana on yleinen suhteellisuusteoria. Näiden teorioiden ymmärtämisen ja matemaattisen käsittelyn vaatimuksena on, että ymmärtää tensorin käsitteen ja osaa käsitellä tensoreita fysiikan yhtälöiden alkioina.

Tässä tutkielmassa lähdetään liikkeelle multilineaarisen algebran perusrakenteesta, multilineaarisesta kuvauksesta, jonka pohjalta päädytään määrittelemään rakenne nimeltä tensoritulo. Suurin osa tutkielmasta keskittyy tensoritulon tarkasteluun ja tensoritulon ominaisuuksien tutkimiseen. Lopulta tensoritulon pohjalta määritellään tensorit ja selviää, että tensorit ovat vain tensoritulon erityistapauksen, tensoripotenssin, alkioita. Näin ollen tensoritulon ominaisuuksien määrittely ei ole ollut turhaa tensorien näkökulmasta, sillä määritellyt ominaisuudet pätevät myös tensoreilla. Tensoreilla on myös oma laaja matemaattinen teoria, jota on kehitetty vielä eteenpäin, mutta siihen lukijan täytyy perehtyä muista teoksista.

Tämä tutkielma määrittelee multilineaarisen kuvauksen, tensoritulon ja tensorit multilineaarisen algebran näkökulmasta ja antaa lukijalle valmiudet tensoreiden abstraktiin ymmärtämiseen ja tensorialgebran opiskeluun. Tutkielman ymmärtämisen vaatimuksena on, että lukijalla on hyvät pohjatiedot lineaarialgebrasta, sillä multilineaarialgebra on suoraan "jatkoa" lineaarialgebralle ja lineaarialgebran käsitteet ja teoriat esiintyvät kaikissa lauseissa, määritelmissä ja todistuksissa. Tutkielman lähteinä on käytetty Werner Greubin lineaarialgebran [1] ja multilineaarialgebran [2] teoksia.

1 Lineaarialgebra

Tässä kappaleessa on esitettynä joitakin lineaarialgebran perustavimpia määritelmiä, jotka lukijan on hyvä osata ennen tutkielmaan tutustumista. Tässä kappaleessa ei kuitenkaan syvennytä tarkemmin esitettyihin määritelmiin ja niiden ominaisuuksiin, vaan ne on listattuna kertauksen ja yksikäsitteisyyden vuoksi.

Määritelmä 1.1. Olkoot S mielivaltainen joukko, K kunta ja $C(S)$ kaikkien sellaisten kuvausten joukko $f : S \to K$, että

$$f(s) \neq 0,$$

vain äärellisellä määrällä alkioita $s \in S$. Määritellään sellaiset operaatiot $f + g$ ja λg, kaikilla $f, g \in C(S)$ ja $\lambda \in K$, että

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s)$$

ja

$$(\lambda f)(s) = \lambda \cdot f(s).$$

Nyt joukko $C(S)$ on vektoriavaruus. Erityisesti joukko S on avaruuden $C(S)$ kanta, jos alkiot $s \in S$ samaistetaan karakteristisen funktion $\chi_{\{s\}}$ kanssa. Toisin sanottuna

$$\chi_{\{s\}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t = s \\ 0 & \text{jos } t \neq s, \end{cases}$$

missä $t \in S$. Avaruutta $C(S)$ sanotaan vapaaksi vektoriavaruudeksi yli joukon S.

Määritelmä 1.2. Olkoon V vektoriavaruus ja V' sen aliavaruus. Määritellään nyt sellainen avaruus, että

$$V/V' = \{v + V' : v \in V\}.$$

Avaruutta V/V' sanotaan avaruuden V tekijäavaruudeksi ja se on vektoriavaruus. Avaruus V/V' on siis kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka ovat yhdensuuntaisia aliavaruuden V' kanssa.

Määritelmä 1.3. Olkoot V_1 ja V_2 vektoriavaruuksia kerroinkuntanaan K ja $\varphi : V_1 \to V_2$ sellainen kuvaus, että

$$\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y \quad x, y \in E$$

ja

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi x \quad \lambda \in K, x \in E.$$

Nyt kuvausta φ sanotaan lineaariseksi kuvaukseksi. Jos $V_2 = K$ tällöin kuvausta φ sanotaan lineaariseksi funktioksi.

Määritelmä 1.4. Olkoot V vektoriavaruus ja $V_1 \subset V$ ja olkoot nyt $i : V_1 \to V$ sellainen injektiivinen kuvaus, että

$$i(x) = x, \quad x \in V_1.$$

Nyt kuvausta i sanotaan kanoniseksi injektioksi aliavaruudelta V_1 avaruudelle V.

Määritelmä 1.5. Olkoot V vektoriavaruus. Tarkastellaan nyt mielivaltaista aliavaruuksien $V_\alpha \subset V$, $\alpha \in A$, perhettä. Tällöin myös leikkaus $\bigcap_\alpha V_\alpha$ on avaruuden V aliavaruus. Määritellään nyt summa $\sum_\alpha V_\alpha$ kaikkien niiden vektorien joukkona, jotka voidaan kirjoittaa äärellisenä summana

$$x = \sum_\alpha x_\alpha \quad x_\alpha \in V_\alpha.$$

Myös summa $\sum_\alpha V_\alpha$ on avaruuden V aliavaruus. Nyt jos jokaiselle $\alpha \in A$ pätee

$$V_\alpha \bigcap \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta = 0$$

voidaan tällöin jokainen vektori summassa $\sum_\alpha V_\alpha$ esittää yksikäsitteisesti vektorien x_α summana.

Olkoot $i_\alpha : V_\alpha \to V$ kanoninen injektio. Nyt voidaan määritellä sellainen kuvaus $\pi_\alpha : V \to V_\alpha$, että

$$\pi_\alpha(x) = x_\alpha,$$

missä

$$x = \sum_\alpha x_\alpha, \quad x_\alpha \in V_\alpha.$$

Kuvaus π_α on surjektiivinen lineaarinen kuvaus, jota kutsutaan kanoniseksi projektioksi.

Määritelmä 1.6. Olkoot V_1 ja V_2 vektoriavaruuksia kerroinkuntanaan K ja $V_1 \times V_2$ kaikkien järjestettyjen parien (x, y) joukko, missä $x \in V_1,\ y \in V_2$. Nyt operaatiot

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \lambda \in K$$

muodostavat vektoriavaruusrakenteen avaruudelle $V_1 \times V_2$. Tätä vektoriavaruutta sanotaan avaruuksien V_1 ja V_2 suoraksi summaksi ja siitä käytetään merkintää $V_1 \oplus V_2$.

Huomautus 1.7. Kanoniset injektiot $i_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2$ ja $i_2 : V_2 \to V_1 \oplus V_2$ on määritelty

$$i_1(x) = (x, 0) \quad i_2(y) = (0, y).$$

Huomautus 1.8. Kanoniset projektiot $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \to V_1$ ja $\pi_2 : V_1 \oplus V_2 \to V_2$ on määritelty

$$\pi_1(x, y) = x \quad \pi_2 : (x, y) = y.$$

Määritelmä 1.9. Olkoot $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ mielivaltainen vektoriavaruusperhe. Nyt tarkastellan kaikkien sellaisten kuvausten

$$x : A \to \cup_\alpha V_\alpha$$

muodostamaa joukkoa, että

$$x(\alpha) \in V_\alpha,\ \alpha \in A$$

ja

$$x(\alpha) \neq 0 \text{ vain äärellisellä määrällä alkioita } \alpha.$$

Nyt määritellään kahden tällaisen kuvauksen x_1 ja x_2 summa

$$(x_1 + x_2)(\alpha) = x_1(\alpha) + x_2(\alpha)$$

ja määritellään kuvaus λx

$$(\lambda x)(\alpha) = \lambda x(\alpha).$$

Nyt nämä operaatiot muodostavat vektoriavaruusrakenteen kaikkien kuvausten x muodostavalle joukolle. Tätä vektoriavaruutta sanotaan vektoriavaruuksien V_α suoraksi summaksi ja siitä käytetään merkintää $\oplus_\alpha V_\alpha$. Nollavektori avaruudelle $\oplus_\alpha V_\alpha$ on sellainen kuvaus, että

$$x(\alpha) = 0_\alpha,$$

missä 0_α on avaruuden V_α nollavektori.

Huomautus 1.10. Kanoninen injektio $i_\varrho : V_\varrho \to \oplus_\alpha V_\alpha$ on määritelty

$$i_\varrho(x) = \alpha \to \begin{cases} 0_\alpha & \varrho \neq \alpha \\ x & \varrho = \alpha, \end{cases}$$

missä $\varrho \in A$ ja $x \in V_\varrho$.

Huomautus 1.11. Kanoninen projektio $\pi_\varrho : \oplus_\alpha V_\alpha \to V_\varrho$ on määritelty

$$\pi_\varrho(x) = x_\varrho,$$

missä $\varrho \in A$ ja $x \in \oplus_\alpha V_\alpha$.

Määritelmä 1.12. Olkoot V_1 ja V_2 vektoriavaruuksia kerroinkuntanaan K. Nyt kuvausta $\Phi : V_1 \times V_2 \to K$ sanotaan bilineaariseksi funktioksi, jos se toteuttaa seuraavat ehdot

1) $\Phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\Phi(x_1, y) + \mu\Phi(x_2, y) \quad x_1, x_2 \in V_1, y \in V_2$

2) $\Phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\Phi(x, y_1) + \mu\Phi(x, y_2) \quad x \in V_1, y_1, y_2 \in V_2.$

Määritelmä 1.13. Olkoot Φ bilineaarinen funktio ja määritellään sellaiset aliavaruudet $N_{V_1} \in V_1$ ja $N_{V_2} \in V_2$, että

$$N_{V_1} = \{x \mid \Phi(x, y) = 0\} \quad \text{kaikilla } y \in V_2$$

ja

$$N_{V_2} = \{y \mid \Phi(x, y) = 0\} \quad \text{kaikilla } x \in V_1.$$

Aliavaruuksia N_{V_1} ja N_{V_2} sanotaan kuvauksen Φ nolla-avaruuksiksi.

Määritelmä 1.14. Bilineaarista funktiota Φ sanotaan degeneroitumattomaksi, jos $N_{V_1} = 0$ ja $N_{V_2} = 0$. Degeneroitumattomasta funktiosta käytetään merkintää $<, >$ ja tällöin kirjoitetaan

$$\Phi(x, y) =< x, y > \qquad x \in V_1, y \in V_2.$$

Määritelmä 1.15. Oletetaan, että V^*, V ovat vektoriavaruuspari ja oletetaan, että on olemassa degeneroimaton bilineaarinen funktio $<, >: V^* \times V \to K$. Nyt paria (V^*, V) kutsutaan duaalipariksi.

Määritelmä 1.16. Oletetaan, että (V_1^*, V_1) ja (V_2^*, V_2) ovat duaaliavaruuspareja ja kuvaukset $\phi : V_1 \to V_2$ ja $\phi^* : V_1^* \leftarrow V_2^*$ ovat lineaarisia kuvauksia. Nyt kuvauksia ϕ ja ϕ^* sanotaan duaaleiksi kuvauksiksi jos

$$< y^*, \phi x >=< \phi^* y^*, x > \qquad y^* \in V_2^*, x \in V_1.$$

Määritelmä 1.17. Olkoot V vektoriavaruus ja $(,) : V \times V \to K$ sellainen bilineaarinen funktio, että

$$(x, y) = (y, x)$$

ja

$$(x, x) \geq 0, \text{ ja } (x, x) = 0 \text{ vain jos } x = 0.$$

Nyt kuvausta $(,)$ sanotaan sisätuloksi ja avaruutta, jossa sisätulo on määritelty sanotaan sisätuloavaruudeksi.

Määritelmä 1.18. Sisätuloavaruutta, missä V on äärellisulotteinen, sanotaan Euklidiseksi avaruudeksi.

2 Multilineaarinen kuvaus

Multilineaarisen algebran perusrakenteena ja perustavimpana määritelmänä on multilineaarinen kuvaus. Multilineaarisen kuvauksen määritelmä toimii koko tensorialgebran pohjana ja koko tensorien teoria ja määritelmä rakennetaan multilineaaristen kuvausten päälle, jolloin multilineaarisen kuvauksen määritelmä tulee ymmärtää hyvin, mikäli haluaa ymmärtää tensorien rakennetta. Multilineaarinen kuvaus määritellään seuraavasti.

2.1 Määritelmä

Määritelmä 2.1. Olkoon K kunta, $p \in N$ ja V_i, $i = 1, \cdots, p$, sekä G vektoriavaruuksia kerroinkuntanaan K. Kuvausta $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to G$ sanotaan *p-lineaariseksi (multilineaariseksi), jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla* i $(1 \leq i \leq p)$

1) $\phi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \cdots, x_p)$

$$= \phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p) + \phi(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p).$$

2) $\phi(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots x_p) = \lambda\phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p)$,

missä $x_i, y_i \in V_i$ *ja* $\lambda \in K$*. Jos* $G = K$*, sanotaan, että* ϕ *on p-lineaarinen funktio.*

Määritelmän mukaan multilineaarinen kuvaus on siis kuvaus, jossa yhden tai useamman vektoriavaruuden alkiot kuvautuvat yhdelle vektoriavaruudelle yhdeksi alkioksi, ja jossa halutut ehdot 1 ja 2 toteutuvat. Multilineaarikuvauksen määritelmän huomataan muistuttavan paljon jo tuttua lineaarikuvauksen määritelmää, sillä lineaarikuvauksen voidaan todeta olevan yksinkertaisin multilineaarikuvaus.

Huomautus 2.2. Multilineaarista kuvausta $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to G$, jossa $p = 1$, sanotaan *lineaarikuvaukseksi.*

Huomautus 2.3. Multilineaarista kuvausta $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to G$, jossa $p = 2$, sanotaan *bilineaarikuvaukseksi.*

Määritelmä 2.4. Olkoot $V_i, i = 1, \cdots, p$, sekä G vektoriavaruuksia. Määritellään nyt joukko

$$B(V_1, \cdots, V_p; G) = \{\phi \mid \phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to G \text{ on p-lineaarikuvaus}\}.$$

Joukko $B(V_1, \cdots, V_p; G)$ on siis kaikkien p-lineaaristen kuvausten $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to G$ joukko. Mikäli kuvaus ϕ on p-lineaarinen funktio, merkitään kaikkien p-lineaaristen funktioiden joukko $B(V_1, \cdots, V_p)$. Mikäli kuvaus ϕ on lineaarinen kuvaus käytetään kirjaimen "B" sijasta kirjainta "L" ilmaisemaan kaikkien lineaaristen kuvaajien tai funktioiden joukkoa.

Määritelmä 2.5. Olkoot $\phi, \psi \in B(E_1 \cdots E_p; G)$. Määritellään kaikilla ϕ, ψ operaatiot $+$ ja $\cdot$ seuraavasti

$$+ : (\phi + \psi)(x_1, \cdots, x_p) = \phi(x_1, \cdots, x_p) + \psi(x_1, \cdots, x_p)$$

$$\cdot : (\lambda \cdot \phi)(x_1, \cdots, x_p) = \lambda \cdot \phi(x_1, \cdots, x_p)$$

kaikilla $x_i \in V_i$ ja $\lambda \in K$.

Lause 2.6. $(B(V_1, \cdots, V_p; G), +, \cdot)$ *on vektoriavaruus.*

Todistus. Tarkastellaan kuvauksia $f, g, p \in B(V_1, \cdots, V_p; G)$. Osoitetaan, että (kolmikko) $(B(V_1, \cdots, V_p; G), +, \cdot)$ toteuttaa vektoriavaruuden ehdot.

1) Kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee
$(f + g)(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p) + g(x_1, \cdots, x_p)$
$= g(x_1, \cdots, x_p) + f(x_1, \cdots, x_p) = (g + f)(x_1, \cdots, x_p)$,
joten $f + g = g + f$ ja opetaatio $+$ on vaihdannainen.

2) Kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee
$((f + g) + p)(x_1, \cdots, x_p)$
$= (f + g)(x_1, \cdots, x_p) + p(x_1, \cdots, x_p)$
$= (f(x_1, \cdots, x_p) + g(x_1, \cdots, x_p)) + p(x_1, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, x_p) + (g(x_1, \cdots, x_p) + p(x_1, \cdots, x_p))$
$= f(x_1, \cdots, x_p) + (g + p)(x_1, \cdots, x_p)$
$= (f + (g + p)(x_1, \cdots, x_p)$,
joten $(f + g) + p = f + (g + p)$ ja operaatio $+$ on liitännäinen.

3) Määritellään kuvaus 0 sellaiseksi, että $0(x_1, \cdots, x_p) = 0 \in G$ kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$.
Nyt kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee
$(0 + f)(x_1, \cdots, x_p) = 0(x_1, \cdots, x_p) + f(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p)$
ja
$(f + 0)(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p) + 0(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p)$.
Joten operaatiolle $+$ on olemassa nollavektori (neutraalialkio). Kuvausta 0 sanotaan avaruuden $(B(V_1, \cdots, V_p; G), +, \cdot)$ neutraalialkioksi.

4) Olkoot f mielivaltainen ja -1 on kertolaskun neutraalialkion vasta-alkio yhteenlaskun suhteen. Nyt kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee

$(f + (-1 \cdot f))(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p) + (-1 \cdot f)(x_1, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, x_p) + (-f(x_1, \cdots, x_p))$
$= 0(x_1, \cdots, x_p)$,
missä 0 on kohdassa kolme määritelty neutraalialkio. Näin ollen joukossa $B(E_1, \cdots, E_p; G)$ jokaiselle alkiolle operaation + suhteen on olemassa vasta-alkio.

5) Olkoot 1 kerroinkunnan K tulon neutraalialkio ja f mielivaltainen. Nyt kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee
$(1 \cdot f)(x_1, \cdots, x_p) = 1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p)$.
Nyt koska $f(x_1, \cdots, x_p) \in G$, niin tällöin $1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p)$.
Joten $1 \cdot f = f$, kaikilla $f \in B(V_1, \cdots, V_p; G)$

$6-8$) Olkoot λ_1 ja λ_2 kerroinkunnan K alkoita. Nyt kaikilla $(x_1, \cdots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$ pätee

$\lambda_1 \cdot (f + g)(x_1, \cdots, x_p)$
$= (f + g)(x_1, \cdots, \lambda_1 x_i, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, \lambda_1 x_i, \cdots, x_p) + g(x_1, \cdots, \lambda_1 x_i, \cdots, x_p)$
$= \lambda_1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p) + \lambda_1 \cdot g(x_1, \cdots, x_p)$.
Joten $\lambda_1 \cdot (f + g) = \lambda_1 \cdot f + \lambda_1 \cdot g$.

$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot f(x_1, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, (\lambda_1 + \lambda_2)x_i, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_i, \cdots, x_p)$
$= f(x_1, \cdots, \lambda_1 x_i, \cdots, x_p) + = f(x_1, \cdots, \lambda_2 x_i, \cdots, x_p)$
$= \lambda_1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p) + \lambda_2 \cdot f(x_1, \cdots, x_p)$
Joten $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot f = \lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot f$

$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot f(x_1, \cdots, x_p)) = \lambda_1 \lambda_2 \cdot f(x_1, \cdots, x_p)$
$= \lambda_2 \lambda_1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p)$
$= \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot f(x_1, \cdots, x_p))$.
Joten $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot f) = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot f)$.

Koska ehdot 1-8 toteutuvat, $B(E_1, \cdots, E_p; G)$ on vektoriavaruus. $\square$

Lause 2.6 on tärkeä huomio p-lineaarisista kuvauksista, sillä tämä lause osoittaa, että p-lineaaristen kuvausten joukko muodostaa vektoriavaruuden, joten voimme käsitellä näitä funktiojoukkoja vektoriavaruuksina.

Viimeisenä ennen tensoritulon määrittelyä, määritellään p-lineaarisen kuvauksen universaalisuusominaisuus ja siitä seuraavat apulauseet, jotka seuraavat suoraan universaalisuusominaisuudesta.

Määritelmä 2.7. Olkoot $V_1, \cdots, V_p$ $(i = 1, \cdots, p)$ ja T vektoriavaruuksia ja

$$\bigotimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$$

määritelmän 2.1 mukainen p-lineaarinen kuvaus. Sanotaan, että tällä kuvauksella on universaalisuusominaisuus, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

> $\bigotimes_1$: Vektorit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, $(x_i \in V_i)$ generoivat avaruuden T.
>
> $\bigotimes_2$: Jokainen *p-lineaarinen kuvaus* $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to H$, *missä* H *on vektoriavaruus, voidaan esittää lineaarisen kuvauksen* $f : T \to H$ *avulla:*
>
> $$\phi(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p).$$

Kuvausta $\bigotimes$ *sanotaan universaalikuvaukseksi ja sitä merkitään* $\bigotimes(x_1, \cdots, x_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$.

Määritelmä 2.7 tarkoittaa, jos on olemassa p-lineaarinen kuvaus $\bigotimes(x_1, \cdots, x_p)$, jonka alkiot $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ muodostavat kannan avaruudelle T (avaruus T on siis alkioiden $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ lineaarikombinaatioiden joukko), ja jos löydetään yhdistetty kuvaus $f(\bigotimes(x_1, \cdots, x_p)) = \phi(x_1, ..., x_p)$, niin sanotaan, että p-lineaarisella kuvauksella $\bigotimes$ on universaalisuusominaisuus. Nyt täytyy kuitenkin osoittaa, että tälläinen kuvaus $\bigotimes$ on yksikäsitteisesti olemassa.

Lause 2.8. *On olemassa p-lineaarinen kuvaus, joka toteuttaa määritelmän 2.7 ehdot* $\otimes_1$ *ja* $\otimes_2$. *Toisin sanottuna, on olemassa universaali p-lineaarikuvaus.*

Todistus. Olkoot $C(V_1 \times \cdots \times V_p)$ vapaa vektoriavaruus ja $N(V_1, \cdots, V_p) \subset C(V_1 \times \cdots \times V_p)$ sellainen, että sen generoi vektorit

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \cdots, x_p) - \lambda(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_p) - \mu(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p),$$

kaikilla $i = 1, \cdots, p$, $x_i, y_i \in V_i$ ja $\lambda, \mu K$.

Olkoot joukko T sellainen, että

$$T = \{c + N(V_1, \cdots, V_p) \mid c \in C(V_1 \times \cdots \times V_p)\}$$

ja kuvaus $\pi : C(V_1 \times \cdots \times V_p) \to T$ kanoninen projektio; määriteltynä

$$\pi(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_p) + N(V_1, \cdots, V_p).$$

Määritellään vielä sellainen multilineaarinen kuvaus $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$, että

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p = \pi(x_1, \cdots, x_p).$$

Osoitetaan nyt, että kuvaus $\otimes$ on multilineaarinen ja että se toteuttaa universaalisuusominaisuuden ehdot.

Kuvaukselle π pätee, että

$$\pi(x_1, \cdots, x_{p-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \cdots, x_p)$$

$$= \lambda\pi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p) + \mu\pi(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p)$$

joten saadaan tällöin yhtälö

$$x_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda x_i + \mu y_i) \otimes \cdots \otimes x_p = \pi(x_1, \cdots, x_{p-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \cdots, x_p)$$

$$= \lambda\pi(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_p) + \mu\pi(x_1, \cdots, y_i, \cdots x_p)$$

$$= \lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p) + \mu(x_1 \otimes \cdots \otimes y_i \otimes \cdots \otimes x_p)$$

kaikille $x_i, y_i \in V_i$. Tämä osoittaa, että kuvaus $\otimes$ on multilineaarinen.

Nyt ehdon $\otimes_1$ osoittamiseksi tarkastellaan sitä tosiasiaa, että jokainen vektori $z \in T$ saadaan äärellisenä summana

$$z = \pi\big(\sum_i \lambda^i(x_1, \cdots, x_p)\big), \quad x_i \in V_i,\ i = 1, \cdots, p.$$

Nyt voidaan muodostaa yhtälö

$$\sum_i \lambda^i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_i \lambda^i\pi(x_1, \cdots, x_p) = \pi\big(\sum_i \lambda^i(x_1, \cdots, x_p)\big) = z,$$

joka osoittaa, että vektorit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ generoivat avaruuden T.

Nyt ehdon $\otimes_2$ osoittamiseksi tarkastellaan p-lineaarista kuvausta $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to H$, missä H on jokin vektoriavaruus. Koska vektorijoukko $\{(x_1, \cdots, x_p) \mid x_i \in V_i \text{ kaikilla } i = 1, \cdots, p\}$ muodostaa kannan avaruudelle $C(V_1 \times \cdots \times V_p)$, on tällöin olemassa sellainen yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus

$$g : C(V_1 \times \cdots \times V_p) \to H,$$

että

$$g(x_1, \cdots, x_p) = \phi(x_1, \cdots, x_p).$$

Nyt valitaan sellaiset vektorit

$$z = (x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu y_i, \cdots, x_p) - \lambda(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_p) - \mu(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p),$$

että vektorit z generoivat avaruuden $N(V_1, \cdots, V_p)$. Tällöin saadaan yhtälö

$g(z) = g(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu y_i, \cdots, x_p) - \lambda g(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_p) - \mu g(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p)$

$= \phi(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu y_i, \cdots, x_p) - \lambda\phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_p) - \mu\phi(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p)$

$= 0,$

kaikille $i = 1, \cdots p$, ja tästä seuraa, että $N(V_1, \cdots, V_p) \subset \text{Ker } g$. Näin ollen$g$ indusoi sellaisen lineaarisen kuvauksen

$$f : T \to H,$$

että

$$f \circ \pi = g.$$

Erityisesti tämä tarkoittaa, että

$$(f \circ \otimes)(x_1, \cdots, x_p) = f\pi(x_1, \cdots, x_p) = g(x_1, \cdots, x_p) = \phi(x_1, \cdots, x_p).$$

Näin ollen kuvaus $\otimes$ toteuttaa ehdon $\otimes_2$ ja kuvauksella $\otimes$ on universaalio-minaisuus. $\square$

Lause 2.9. *Oletetaan, että* $\bigotimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$ *ja* $\hat{\bigotimes} : V_1 \times \cdots \times V_p \to \hat{T}$ *ovat universaaleja p-lineaarikuvauksia. Tällöin on olemassa lineaarinen isomorfismi* $f : T \to \hat{T}$.

Todistus. Ominaisuuden $\otimes_2$ mukaan universaalikuvaus $\bigotimes$ indusoi lineaari-kuvauksen $f : T \to \hat{T}$, jolle pätee

$$f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = x_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} x_p, \quad x_i \in V_i.$$

Koska vektorit $x_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} x_p$ ominaisuuden $\otimes_1$ mukaan generoivat avaruuden $\hat{T}$, on kuvaus f tällöin surjektio.

Toisaalta ehdon $\otimes_2$ mukaan universaalikuvaus $\hat{\bigotimes}$ indusoi lineaarikuvauksen $g : \hat{T} \to T$, jolle pätee

$$g(x_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} x_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p.$$

Nyt saadaan muodostettua yhtälö

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \cdots \otimes x_p &= g(x_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} x_p) \\ &= gf(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p), \end{aligned}$$

jolloin $g \circ f = \iota$, missä ι on neutraalikuvaus ja näin ollen kuvaus f on injektio. Näin ollen kuvaus $f : T \to \hat{T}$ on isomorfismi.

$\square$

Seuraus 2.10. *Universaali p-lineaarikuvaus on lineaarista isomorfismia vail-le yksikäsitteinen.*

2.2 Universaalin p-lineaarikuvauksen ominaisuuksia

Tässä osiossa tarkastellaan muutamia suoraan määritelmästä seuraavia universaalin p-lineaarikuvauksen ominaisuuksia. Osissa oletetaan, että avaruudet $V_i,\ i = 1, \cdots, p$ ja T ovat vektoriavaruuksia ja $\bigotimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$ on universaali p-lineaarikuvaus.

Lemma 2.11. *Olkoot vektorit $a_j^k \in V_k$ jollekin $k \in \{1, \cdots, p\}$ mielivaltaisia ja muut vektorit $a_j^i \in V_i$, $j = 1, \cdots, r$, lineaarisesti riippumattomia. Nyt relaatiosta*

$$\sum_{j=1}^{r}(a_j^1 \otimes \cdots \otimes a_j^k \otimes \cdots \otimes a_j^p) = 0$$

seuraa, että $a_j^k = 0$.

Todistus. Vektorit $a_j^i \in V_{i\setminus k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, joten voidaan valita sellaiset lineaariset funktiot, että

$$f_j^i(a_m^i) = \delta_j^m \quad (j, m = 1, \cdots, r),$$

missä $\delta_j^m = 0$, kun $j \neq m$ ja $\delta_j^m = 1$, kun $j = m$. Tarkastellaan sellaista p-lineaarista kuvausta, että

$$\Phi(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_p) = \sum_{j=1}^{r} f_j^1(x_1) \cdots f_j^{k-1}(x_{k-1}) f_j^{k+1}(x_{k+1}) \cdots f_j^p(x_p) g_j^k(x_k)$$

kaikilla $x_i \in V_i$, missä g_j^k ovat mielivaltaisia lineaarisia funktioita.

Nyt universaalisuusehdon $\otimes_2$ mukaan on olemassa sellainen lineaarinen funktio h , että

$$h(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_{j=1}^{r} f_j^1(x_1) \cdots f_j^{k-1}(x_{k-1}) f_j^{k+1}(x_{k+1}) \cdots f_j^p(x_p) g_j^k(x_k).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} &h(\sum_m a_m^1 \otimes \cdots \otimes a_m^k \otimes \cdots \otimes a_m^p) \\ &= \sum_{j,m} f_j^1(a_m^1) \cdots f_j^{k-1}(a_m^{k-1}) f_j^{k+1}(a_m^{k+1}) \cdots f_j^p(a_m^p) g_j^k(a_m^k) \\ &= \sum_j g_j^k(a_j^k). \end{aligned}$$

Koska $\sum_m a_m^1 \otimes \cdots \otimes a_m^k \otimes \cdots \otimes a_m^p = 0$, saadaan

$$\sum_j g_j^k(a_j^k) = 0,$$

ja koska funktiot g_j^k ovat mielivaltaisia, seuraa

$$a_j^k = 0.$$

$\square$

Seuraus 2.12. *Mikäli kaikki vektorit $x_i \neq 0$, tällöin $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \neq 0$.*

Lemma 2.13. *Olkoot vektorien $\{e^i_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in A_i}$ muodostama joukko avaruuden V_i, $i = 1, \cdots, (k-1), (k+1), \cdots, p$, kanta ja merkitään $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots \alpha_p)$. Tällöin jokainen vektori $z \in T$ voidaan kirjoittaa summana*

$$z = \sum_\alpha (e^1_\alpha \otimes \cdots \otimes e^{k-1}_\alpha \otimes y^k_\alpha \otimes e^{k+1}_\alpha \cdots \otimes e^p_\alpha),$$

missä vain äärellisen moni vektoreista $y^k_\alpha \in V_k$ ovat nollasta poikkeavia. Lisäksi vektori z yksikäsitteisesi määrää vektorit y^k_α.

Todistus. Nyt ominaisuuden $\otimes_1$ näkökulmasta, jokainen $z \in T$ saadaan alkioiden $x^i_v \in V_i,\ i = 1, \cdots, p$, äärellisenä summana

$$z = \sum_v x^1_v \otimes \cdots \otimes x^p_v.$$

Nyt jokainen alkio x^i_v voidaan kirjoittaa

$$x^i_v = \sum_\alpha \lambda^{\alpha,i}_v e^i_\alpha \qquad \lambda^{\alpha,i}_v \in K$$

ja on vain äärellinen sellaisia määrä multi-indeksejä α, että $\lambda^{\alpha,i}_v \neq 0$. Näin ollen saadaan

$$z = \sum_{v,\alpha} (\lambda^{\alpha,1}_v e^1_\alpha \otimes \cdots \otimes \lambda^{\alpha,(k-1)}_v e^{k-1}_\alpha \otimes x^k_v \otimes \lambda^{\alpha,(k+1)}_v e^{k+1}_\alpha \otimes \cdots \otimes \lambda^{\alpha,p}_v e^p_\alpha)$$

$$= \sum_{v,\alpha} (e^1_\alpha \otimes \cdots \otimes e^{k-1}_\alpha \otimes \lambda^\alpha_v x^k_v \otimes e^{k+1}_\alpha \otimes \cdots \otimes e^p_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha (e^1_\alpha \otimes \cdots \otimes e^{k-1}_\alpha \otimes y^k_\alpha \otimes e^{k+1}_\alpha \otimes \cdots \otimes e^p_\alpha),$$

missä

$$y_\alpha^k = \sum_v \lambda_v^\alpha x_v^k.$$

Osoitetaan seuraavaksi vektoreiden y_α^k yksikäsitteisyys. Tätä varten oletetaan, että

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha (e_\alpha^1 \otimes \cdots \otimes e_\alpha^{k-1} \otimes y_\alpha^k \otimes e_\alpha^{k+1} \cdots \otimes e_\alpha^p) \\
&= \sum_\alpha (e_\alpha^1 \otimes \cdots \otimes e_\alpha^{k-1} \otimes y_\alpha'^k \otimes e_\alpha^{k+1} \cdots \otimes e_\alpha^p),
\end{aligned}$$

missä $y_\alpha^k, y_\alpha'^k \in V_k$. Tällöin

$$\sum_\alpha (e_\alpha^1 \otimes \cdots \otimes e_\alpha^{k-1} \otimes (y_\alpha^k - y_\alpha'^k) \otimes e_\alpha^{k+1} \cdots \otimes e_\alpha^p) = 0,$$

ja näin ollen Lemman 2.11 mukaan saadaan $y_\alpha^k = y_\alpha'^k$. □

Lemma 2.14. *Olkoot $p = 2$, tällöin jokainen nollasta poikkeava vektori $z \in T$ voidaan kirjoittaa summana*

$$z = \sum_{j=1}^r x_j^1 \otimes x_j^2,$$

missä vektorit $x_j^1 \in V_1$, $j = 1, \cdots, r$, ovat lineaarisesti riippumattomia ja vektorit $x_j^2 \in V_2$, $j = 1, \cdots, r$, ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Valitaan vektorille z sellainen esitysmuoto $z = \sum_{j=1}^r x_j^1 \otimes x_j^2$, missä r on mahdollisimman pieni. Jos $r = 1$, seuraa lineaarisuudesta suoraan, että $x_1^1 \neq 0$ ja $x_1^2 \neq 0$. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, missä $r \geq 2$. Tehdään vastaoletus, että vektorit x_j^1 ovat lineaarisesti riippuvia. Tällöin voimme olettaa, että

$$x_r^1 = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j x_j^1.$$

Tällöin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{j=1}^r x_j^1 \otimes x_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{r-1} x_j^1 \otimes x_j^2 + x_r^1 \otimes x_r^2 \\
&= \sum_{j=1}^{r-1} x_j^1 \otimes x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j x_j^1 \right) \otimes x_j^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} x_j^1 \otimes x_j^2 + \sum_{j=1}^{r-1} (\lambda_j x_j^1 \otimes x_j^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} (x_j^1 \otimes x_j^2 + x_j^1 \otimes (\lambda_j x_j^2))$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} x_j^1 \otimes (x_j^2 + \lambda_j x_j^2).$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} x_j^1 \otimes x_j'^2$$

eli jokaiselle vektorille z löydetään esitysmuoto, jossa on $r-1$ termiä. Tämä tulos on ristiriidassa sen kanssa, että vektorille z valittiin esitysmuoto, missä r on mahdollisimman pieni. Tällöin tämä tarkoittaa, etteivät vektorit x_r^1 ole lineaarisesti riippuvia, vaan ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Samalla tavalla voidaan myös osoittaa, että vektorit x_j^2 ovat lineaarisesti riippumattomia. $\square$

3 Tensoritulo

3.1 Määritelmä

Määritelmä 3.1. Kahden vektoriavaruuden E ja F muodostamaa paria $(T, \otimes)$; missä $\otimes : E \times F \to T$ on universaali bilineaarinen kuvaus, sanotaan tensorituloksi. Avaruutta T kutsutaan myös avaruuksien E ja F tensorituloksi ja sitä merkitään $E \otimes F$.

Tensoritulo tarkoittaa siis kahden vektoriavaruuden E ja F universaalin bilineaarisen kuvauksen välistä operaatiota kolmannelle vektoriavaruudelle T, mutta myös tämän opetaarion lopputulemasta käytetään nimitystä tensoritulo (aivan kuten reaalilukujen tulon yhteydessä). Tensoritulo on hyvin käyttökelpoinen työkalu monissa sovelluksissa ja multilineaaristen rakenteiden käsittelyssä, sillä tensoritulo antaa mahdollisuuden käsitellä multilineaarisia rakenteita lineaarisina rakenteina, kunhan ensin löydetään avaruuksille E ja F tensoritulo.

3.2 Tensoritulon ominaisuuksia

Lause 3.2. *Avaruudet $E \otimes F$ ja $F \otimes E$ ovat isomorfiset.*

Todistus. Olkoot $\phi : E \times F \to F \otimes E$ ja $\psi : F \times E \to E \otimes F$ sellaisia bilineaarisia kuvauksia, että

$$\phi(x, y) = y \otimes x$$

ja

$$\psi(y, x) = x \otimes y.$$

Nyt universaalin ominaisuuden ehdon $\otimes_2$ mukaan on olemassa sellaiset lineaariset kuvaukset $f : E \otimes F \to F \otimes E$ ja $g : F \otimes E \to E \otimes F$, että

$$y \otimes x = f(x \otimes y)$$

ja

$$x \otimes y = g(y \otimes x)$$

kaikille $x \in E$ ja $y \in F$. Ehdosta $\otimes_1$ seuraa, että $g \circ f = \iota$ ja $f \circ g = \iota$, missä ι on identiteettikuvaus ja näin ollen kuvaukset f ja g ovat toistensa käänteiskuvauksia ja avaruudet $E \otimes F$ ja $F \otimes E$ ovat isomorfiset. $\square$

Lause 3.3. *Olkoot E, F ja G vektoriavaruuksia. Tällöin avaruudet $L(E \otimes F; G)$ ja $B(E, F; G)$ ovat isomorfiset.*

Todistus. Määritellään kuvaus $\Phi : L(E \otimes F; G) \to B(E, F; G)$ asettamalla

$$\Phi(f) = f \circ \bigotimes$$

kaikilla $f \in L(E \otimes F; G)$. Tällöin Φ on lineaarinen. Koska jokainen bilineaarinen kuvaus $\phi : E \times F \to G$ voidaan ehdon $\otimes_2$ mukaisesti ilmaista tensoritulon avulla, on Φ surjektiivinen. Oletetaan nyt, että $f \circ \bigotimes = 0$ jollekin lineaariselle kuvaukselle $f : E \otimes F \to G$. Ehdon $\otimes_1$ perusteella tulot $x \otimes y$, missä $x \in E$ ja $y \in F$ generoivat avaruuden $E \otimes F$, joten $f = 0$. Tästä seuraa, että Φ on injektio. Näin ollen Φ on lineaarinen isomorfismi. $\square$

Lause 3.4. *Olkoot $\varphi : E \times F \to G$ bilineaarinen kuvaus ja $f : E \otimes F \to G$ on universaalisuusominaisuuden mukaan indusoitunut lineaarikuvaus;*
$f(x \otimes y) = \varphi(x, y)$, missä $x \in E$ ja $y \in F$. Tällöin
1) Kuvaus f on surjektio, jos ja vain jos vektorit $\varphi(x, y)$ toteuttavat ehdon $\otimes_1$, eli $\operatorname{Im} \varphi$ generoi avaruuden G.
2) Kuvaus f on injektio, jos ja vain jos kuvaus φ toteuttaa ehdon $\otimes_2$, eli jokainen bilineaarikuvaus $\psi : E \times F \to H$, missä H on vektoriavaruus, voidaan esittää lineaarisen kuvauksen $h : G \to H$ avulla, missä $\psi(x, y) = h\varphi(x, y)$.

Todistus.
1)
Oletetaan, että kuvaus f on surjektio ja näin ollen $\operatorname{Im} f$ generoi avaruuden G. Koska $\varphi(x, y) = f(x \otimes y)$, niin tästä seuraa, että $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} f$ ja tällöin $\operatorname{Im} \varphi$ generoi avaruuden G ja vektorit $\varphi(x, y)$ toteuttavat ehdon $\otimes_1$.

Nyt oletetaan, että vektorit $\varphi(x, y)$ toteuttavat ehdon $\otimes_1$, tällöin $\operatorname{Im} \varphi = G$ ja näin ollen $\operatorname{Im} f = G$ ja kuvaus f on surjektio.

2)
Oletetaan, että kuvaus f on injektio. Tällöin pari $(\operatorname{Im} \varphi, \varphi)$ on avaruuksien E ja F tensoritulo, sillä tällöin $f : E \otimes F \to \operatorname{Im} \varphi$ on bijektio ja avaruudet $E \otimes F$ ja $\operatorname{Im} \varphi$ ovat isomorfiset. Nyt jokainen bilineaarinen kuvaus $\psi : E \times F \to H$ indusoi sellaisen lineaarisen kuvauksen $h : \operatorname{Im} \varphi \to H$, että

$$\psi(x, y) = h\varphi(x, y).$$

Toisaalta koska kuvaus f on injektio, on tällöin olemassa sellainen kuvaus $f^{-1} : G \to E \otimes F$, että

$$f^{-1}(\varphi(x, y)) = f^{-1} f(x \otimes y) = x \otimes y.$$

Ja koska avaruus $E \otimes F$ on tensoritulo, on tällöin olemassa sellainen lineaarinen kuvaus $f' : E \otimes F \to H$, että

$$\psi(x, y) = f'(x \otimes y).$$

Tällöin saadaan muodostettua yhdistetty kuvaus $(f' \circ f^{-1}) : G \to H$, jolle pätee

$$\psi(x, y) = (f' \circ f^{-1})\varphi(x, y).$$

Ajatellaan kuvausta h' kuvauksen h laajennettuna lineaarikuvauksena $h' : G \to H$, missä $h' = f' \circ f^{-1}$. Tästä seuraa, että

$$\psi(x, y) = h'\varphi(x, y)$$

ja näin kuvaus φ toteuttaa ehdon $\otimes_2$.

Päinvastoin oletetaan, että kuvaus φ toteuttaa ehdon $\otimes_2$. Nyt bilineaarinen kuvaus $\otimes : E \times F \to E \otimes F$ indusoi sellaisen lineaarisen kuvauksen $g : G \to E \otimes F$, että

$$x \otimes y = g\varphi(x, y).$$

Toisaalta $\varphi(x, y) = f(x \otimes y)$, josta seuraa, että

$$x \otimes y = gf(x \otimes y).$$

Nyt $g \circ f = \iota$ ja näin ollen kuvaus f on injektio. $\square$

3.3 Ali- ja tekijäavaruuus

Ali- ja tekijäavaruudet ovat matemaattisesti merkittäviä rakenteita, joten on mielekästä myös tarkastella, miten avaruuksien E ja F välinen tensoritulo käyttäytyy näiden avaruuksien mielivaltaisilla aliavaruuksilla $E^{'}$ ja $F^{'}$ tai näiden avaruuksien tekijäavaruuksilla E/E' ja F/F'.

Lause 3.5. *Olkoot E, F ja T vektoriavaruuksia, ja $E^{'} \subset E, F^{'} \subset F$. Oletetaan, että $\bigotimes : E \times F \to T$ on universaali p-lineaarikuvaus. Määritellään kuvaus $\bigotimes^{'}$ siten, että*

$$\bigotimes^{'} = \bigotimes : E^{'} \times F^{'} \to T^{'},$$

missä $T' = \mathrm{Im}\,\otimes'$. Pari $(T^{'}, \bigotimes^{'})$ on avaruuksien $E^{'}$ ja $F^{'}$ tensoritulo.

Todistus. Ehto $\otimes_1$ seuraa suoraan lauseen määrittelystä, sillä Im $\otimes' = T'$. Nyt ehdon $\otimes_2$ osoitusta varten tarkastellaan bilineaarista kuvausta $\phi^{'} : E^{'} \times F^{'} \to H$. Laajennetaan kuvaus $\phi^{'}$ bilineaariseksi kuvaukseksi $\phi : E \times F \to H$. Koska kuvauksella $\otimes$ on universaali ominaisuus, on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus

$$f : T \to H,$$

että

$$f(x \otimes y) = \phi(x, y),$$

kaikilla $x \in E, y \in F$. Tästä seuraa

$$f(x_1 \otimes' y_1) = f(x_1 \otimes y_1) = \phi(x_1, y_1) = \phi'(x_1, y_1)$$

kaikilla $x_1 \in E^{'}, y_1 \in F^{'}$, mikä todistaa ehdon $\otimes_2$. Näin ollen kuvaus $\otimes'$ toteuttaa universaalisuus ehdon ja pari $(T', \otimes')$ on avaruuksien E_1 ja F_1 tensoritulo. $\square$

Tämä lause osoittaa, että vektoriavaruuksien E ja F välinen tensoritulo indusoi tensoritulon näiden avaruuksien aliavaruuksille. Tarkastellaan seuraavaksi tekijäavaruuksien $E/E^{'}$ ja $F/F^{'}$ välistä tensorituloa.

Lause 3.6. *Olkoot E ja F vektoriavaruuksia ja $E^{'} \subset E$, $F^{'} \subset F$. Olkoon*

$$T(E^{'}, F^{'}) = E^{'} \otimes F + E \otimes F^{'},$$

missä $E^{'} \otimes F + E \otimes F^{'} \subset E \otimes F$. Määritellään sellainen bilineaarinen kuvaus $\beta : E \times F \to (E \otimes F)/T(E^{'}, F^{'})$, että

$$\beta(x, y) = \pi(x \otimes y),$$

missä π on kanoninen projektio. Kuvaus β indusoi bilineaarisen kuvauksen

$$\bar{\beta} : E/E' \times F/F' \to (E \otimes F)/T(E', F'),$$

missä $\bar{\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \beta(x, y)$ kaikilla $\bar{x} \in E/E'$ ja $\bar{y} \in F/F'$.

Näin muodostunut pari $((E \otimes F)/T(E', F'), \bar{\beta})$ on avaruuksien E/E' ja F/F' tensoritulo.

Todistus. Koska $\beta(x_1, y) = 0,\ x_1 \in E', y \in F$ ja $\beta(x, y_1) = 0,\ x \in E, y_1 \in F'$, niin kuvaus β indusoi kuvauksen $\bar{\beta}$.
Koska kanoninen projektio on surjektio, niin tällöin $\operatorname{Im} \pi = (E \otimes F)/T(E', F')$. Toisaalta koska $\beta(x, y) = \pi(x \otimes y)$, niin tällöin $\operatorname{Im} \beta = \operatorname{Im} \pi$. Nyt kuvauksen $\bar{\beta}$ määrittelystä seuraa $\operatorname{Im} \bar{\beta} = \operatorname{Im} \beta$ ja näin ollen $\operatorname{Im} \bar{\beta} = (E \otimes F)/T(E', F')$. Näin ollen kuvaus $\bar{\beta}$ toteuttaa universaalisuusominaisuuden ehdon $\otimes_1$.
Ehdon $\otimes_2$ toteamiseksi tarkastellaan mielivaltaista bilineaarista kuvausta

$$\psi : E/E' \times F/F' \to H.$$

Määritellään vielä sellainen bilineaarinen kuvaus $\phi : E \times F \to H$, että

$$\phi(x, y) = \psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Nyt on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus $f : E \otimes F \to H$, että

$$\phi(x, y) = f(x \otimes y) \quad x \in E, y \in F.$$

Erityisesti

$$f(x_1 \otimes y) = \phi(x_1, y) = \psi(0, \bar{y}) = 0,$$

missä $x_1 \in E'$, $y \in F$ ja vastaavasti

$$f(x \otimes y_1) = 0,$$

missä $y_1 \in F'$, $x \in E$. Koska $T(E', F') \subset \operatorname{Ker} f$, indusoi kuvaus f sellaisen lineaarisen kuvauksen

$$\bar{f} : (E \otimes F)/T(E', F') \to H,$$

että

$$\bar{f} \circ \pi = f.$$

Nyt seuraa, että

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x}, \bar{y}) &= \phi(x, y) = f(x \otimes y) \\ &= \bar{f}\pi(x \otimes y) = \bar{f}\beta(x, y) = \bar{f}\bar{\beta}(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned}$$

missä $\bar{x} \in E/E'$ ja $\bar{y} \in F/F'$. Eli $\psi = \bar{f} \circ \bar{\beta}$ ja näin ollen kuvaus $\bar{\beta}$ toteuttaa ehdon $\otimes_2$ joten kuvaus $\bar{\beta}$ toteuttaa universaalisuusehdon, ja pari $((E \otimes F)/T(E', F'), \bar{\beta})$ on avaruuksien E/E' ja F/F' tensoritulo.

$\square$

Seuraus 3.7. *On olemassa kanoninen isomorfismi*

$$E/E^{'} \otimes F/F^{'} \to (E \otimes F)/(E^{'} \otimes F + E \otimes F^{'}).$$

3.4 Suoria hajotelmia

Tässä kappalessa tarkastellaan, kuinka vektoriavaruuksien E ja F välinen tensoritulo indusoituu näiden aliavaruuksien muodostamille rakenteille. Ensin tarkastellaan, miten käyttäytyy vektoriavaruusperheiden tensoritulojen suora summa. Tämän jälkeen tutkitaan tensoritulon käyttäytymistä suorilla hajotelmilla ja lopulta vielä katsotaan, mitä ominaisuuksia ja tuloksia määritellyistä ominaisuuksista seuraa.

Lause 3.8. *Olkoot E_α, $\alpha \in I$ ja F_β, $\beta \in J$ vektoriavaruusperheitä ja jokainen pari (α, β), $(E_\alpha \otimes F_\beta, \otimes)$ on tensoritulo. Bilineaarinen kuvaus $\phi : \tilde{E} \times \tilde{F} \to \tilde{G}$, missä $\tilde{E} = \oplus_\alpha E_\alpha$, $\tilde{F} = \oplus_\beta F_\beta$ ja $\tilde{G}$ on tensoritulojen $(E_\alpha \otimes F_\beta, \otimes)$ suora summa $\tilde{G} = \oplus_\alpha (E_\alpha \otimes F_\beta)$. Määritellään kuvaus ϕ seuraavasti*

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\alpha,\beta} (i_{\alpha\beta}(\pi_\alpha \tilde{x} \otimes \rho_\beta \tilde{y})),$$

missä

$$\pi_\alpha : \tilde{E} \to E_\alpha \quad \rho_\beta : \tilde{F} \to F_\beta$$

ovat kanonisia projektiota ja

$$i_{\alpha\beta} : E_\alpha \otimes F_\beta \to \tilde{G}$$

ovat kanonisia injektioita. Nyt pari $(\tilde{G}, \phi)$ on avaruuksien $\tilde{E}$ ja $\tilde{F}$ tensoritulo.

Todistus. Ehdon $\otimes_1$ todistus on triviaali, sillä ehto $\otimes_1$ toteutuu suoraan lauseen määrittelystä. Ehdon $\otimes_2$ toteutumisen osoittamiseksi tarkastellaan mielivaltaista bilineaarista kuvausta $\tilde{\psi} : \tilde{E} \times \tilde{F} \to H$. Määritellään myös sellainen bilineaarinen kuvaus $\psi_{\alpha\beta} : E_\alpha \times F_\beta \to H$, että

$$\psi_{\alpha\beta}(x, y) = \tilde{\psi}(i_\alpha x, j_\beta y),$$

missä

$$i_\alpha : E_\alpha \to \tilde{E} \text{ ja } j_\beta : F_\beta \to \tilde{F}$$

ovat kanonisia injektioita. Nyt $\psi_{\alpha\beta}$ indusoi sellaisen lineaarisen kuvauksen $f_{\alpha\beta} : E_\alpha \otimes F_\beta \to H$, että

$$\psi_{\alpha\beta}(x, y) = f_{\alpha\beta}(x \otimes y) \quad x \in E_\alpha, y \in F_\beta.$$

Määritellään nyt lineaarinen kuvaus $f : \tilde{G} \to H$,

$$f = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta} \circ \pi_{\alpha\beta},$$

missä

$$\pi_{\alpha\beta} : \tilde{G} \to E_\alpha \otimes F_\beta$$

ovat kanonisia projektioita. Nyt seuraa

$$(f \circ \psi)(\tilde{x}, \tilde{y}) = f \sum_{\alpha\beta} i_{\alpha\beta}(\pi_\alpha \tilde{x} \otimes \rho_\beta \tilde{y})$$

$$= \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(\pi_\alpha \tilde{x} \otimes \rho_\beta \tilde{y})$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}(\pi_\alpha \tilde{x}, \rho_\beta \tilde{y})$$

$$= \tilde{\psi}(\sum_\alpha i_\alpha \pi_\alpha \tilde{x}, \sum_\beta j_\beta \rho_\beta \tilde{y})$$

$$= \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Nyt $f \circ \phi = \tilde{\psi}$, mikä toteuttaa ehdon $\otimes_2$ □

Nyt lause 3.8 osoitaa, että vektoriavaruuksien E ja F suorille summille on olemassa tensoritulo lauseen määrittelemällä tavalla.

Lause 3.9. *Oletetaan, että pari $(E \otimes F, \otimes)$ on vektoriavaruuksien E ja F tensoritulo ja että vektoriavaruuksille E ja F on olemassa suorat hajotelmat $E = \sum_\alpha E_\alpha$,$F = \sum_\beta F_\beta$. Nyt tensoritulo $(E \otimes F)$ voidaan kirjoittaa aliavaruuksien $E_\alpha \otimes F_\beta$ suorana summana,*

$$E \otimes F = \sum_{\alpha,\beta} E_\alpha \otimes F_\beta.$$

Todistus. Ehto $\otimes_1$ tarkoittaa, että tulot $x \otimes y; x \in E, y \in F$ generoivat avaruuden $E \otimes F$. Koska $x = \sum_\alpha x_\alpha, x_\alpha \in E_\alpha$ ja $y = \sum_\beta y_\beta, y_\beta \in F_\beta$ seuraa, että

$$x \otimes y = \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\beta.$$

Tämä osoittaa, että avaruus $E \otimes F$ on aliavaruuksiensa $E_\alpha \otimes F_\beta$ summa. Nyt täytyy vielä osoittaa, että hajotelma on suora. Ajatellaan suoria summia $\tilde{E} = \oplus_\alpha E_\alpha$, $\tilde{F} = \oplus_\beta F_\beta$ ja $\tilde{G} = \oplus_{\alpha,\beta} E_\alpha \otimes F_\beta$ ja olkoon injektiot $i_\alpha, j_\beta, i_{\alpha\beta}$

ja projektiot $\pi_\alpha, \rho_\beta, \pi_{\alpha\beta}$ määritelty, kuten lauseessa 3.8. Tällöin on olemassa sellainen bilineaarinen kuvaus $\phi : \tilde{E} \times \tilde{F} \to \tilde{G}$, että

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}(\pi_\alpha \tilde{x} \otimes \rho_\beta \tilde{y}).$$

Kuten lauseessa 3.8 osoitettiin, pari $(\tilde{G}, \phi)$ on avaruuksien $\tilde{E}$ ja $\tilde{F}$ tensoritulo. Olkoot $f : E \to \tilde{E}$ ja $g : F \to \tilde{F}$ lineaarisia isomorfismeja

$$f(x) = \sum_{\alpha} i_\alpha x_\alpha \text{ ja } g(y) = \sum_{\beta} j_\beta y_\beta,$$

missä

$$x = \sum_{\alpha} x_\alpha, x_\alpha \in E_\alpha \text{ ja } y = \sum_{\beta} y_\beta . y_\beta \in F_\beta.$$

Määritellään seuraavaksi bilineaarinen kuvaus $\psi : E \times F \to \tilde{G}$

$$\psi(x, y) = \phi(f(x), g(y)).$$

Näin ollen on olemassa lineaarinen kuvaus $h : E \otimes F \to \tilde{G}$

$$h(x \otimes y) = \psi(x, y),$$

mistä seuraa

$$g(x \otimes y) = \phi(f(x), g(y)).$$

Nyt kuvaus h kuvaa jokaisen avaruuden $E \otimes F$ aliavaruuden $E_\alpha \otimes F_\beta$ avaruuden $\tilde{G}$ jokaiselle aliavaruudelle $i_{\alpha\beta}(E_\alpha \otimes f_\beta)$, sillä kun tarkastellaan mielivaltaisia aliavaruuksia E_τ ja F_σ voidaan osoittaa, että

$$h(x \otimes y) = \phi(f(x), g(y)) = \phi(i_\tau x, j_\sigma y)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}(\pi_\alpha i_\tau \otimes \rho_\beta j_\sigma y) = i_{\tau\sigma}(x \otimes y),$$

kun $x \in E_\tau$ ja $y \in F_\sigma$.
Näin ollen hajotelma

$$\tilde{G} = \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}(E_\alpha \otimes F_\beta)$$

on suora ja tällöin myös hajotelma

$$E \otimes F = \sum_{\alpha,\beta} E_\alpha \otimes F_\beta$$

on suora. □

Lause 3.10. *Oletetaan, että vektoriavaruuksilla E, F ja G on suorat hajotelmat $E = \sum_\alpha E_\alpha$, $F = \sum_\beta F_\beta$ ja $G = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta}$. Tiedetään, että pari $(G_{\alpha,\beta}, \otimes)$ on avaruuksien E_α ja F_β tensoritulo, missä $\otimes : E_\alpha \times F_\beta \to G_{\alpha,\beta}$. Määritellään nyt sellainen bilineaarinen kuvaus $\phi : E \times F \to G$, että*

$$\phi(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\beta,$$

missä

$$x = \sum_\alpha x_\alpha \text{ ja } y = \sum_\beta y_\beta.$$

Pari (G, ϕ) on avaruuksien E ja F tensoritulo.

Todistus. Taas kerran ehto $\otimes_1$ seuraa selvästi määrittelystä. Ehdon $\otimes_2$ toteamiseksi tarkastellaan mielivaltaista bilineaarista kuvausta $\psi : E \times F \to H$ ja olkoon $\psi_{\alpha\beta}$ kuvauksen ψ rajotelma $\psi_{\alpha\beta} : E_\alpha \times F_\beta \to H$. Nyt on olemassa lineaarinen kuvaus $f_{\alpha\beta} : G_{\alpha\beta} \to H$; $f_{\alpha\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) = \psi_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\beta)$. Määritellään vielä lineaarinen kuvaus $f : G \to H$ siten, että

$$f(z) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta}),$$

missä $z = \sum_{\alpha,\beta} z_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}$.

Tällöin

$$\begin{aligned}(f \circ \phi)(x, y) &= f\phi(x, y) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\beta \\ &= \psi(x, y),\end{aligned}$$

eli $f \circ \phi = \psi$ ja ehto $\otimes_2$ toteutuu. $\square$

3.5 Kantavektorien tensoritulo

Lause 3.11. *Olkoot $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ avaruuden E kanta ja $(b_\beta)_{\beta \in J}$ avaruuden F kanta. Nyt tensoritulot $(a_\alpha \otimes b_\beta)_{\alpha \in E, \beta \in F}$ muodostavat kannan tensoritulolle $E \otimes F$.*

Todistus. Olkoot $E_\alpha \subset E$ ja $F_\beta \subset F$ sellaisia, että $Dim\ E_\alpha = 1$ ja $Dim\ F = 1$. Valitut alkiot $a_\alpha \in E_\alpha$ ja $b_\beta \in F_\beta$ generoivat avaruudet E_α ja F_β. Nyt $E = \sum_\alpha E_\alpha, F = \sum_\beta F_\beta$ ja lauseen 3.9 mukaan seuraa

$$E \otimes F = \sum_{\alpha,\beta} E_\alpha \otimes F_\beta.$$

Nyt $a_\alpha \neq 0$ ja $b_\beta \neq 0$, joten tästä seuraa, että myös $a_\alpha \otimes b_\beta \neq 0$. Toisaalta ehdosta $\otimes_1$ voidaan todeta, että alkio $a_\alpha \otimes b_\beta$ virittää avaruuden $E_\alpha \otimes F_\beta$. Koska $E \otimes F$ on yksiulotteisten aliavaruuksien suora summa ja alkiot $a_\alpha \otimes b_\beta$ generoivat nämä aliavaruudet, näin ollen nämä alkiot muodostavat kannan avaruudelle $E \otimes F$. □

Seuraus 3.12. *Oletetaan, että vektoriavaruudet E ja F ovat äärellisulotteisia, tällöin tensoritulo $E \otimes F$ on äärellisulotteinen, ja*

$$dim(E \otimes F) = dim(E) \cdot dim(F).$$

3.6 Soveltaminen bilineaarikuvauksille

Lause 3.13. *Olkoot avaruudet E ja F äärellisulotteisia, $\phi : E \times F \to G$ bilineaarikuvaus ja $S \subset G$ joukon $\operatorname{Im} \phi$ generoima aliavaruus, tällöin*

$$dim\ S \leq dim\ E \cdot dim\ F.$$

Todistus. Olkoot $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ja $(y_\beta)_{\beta \in J}$ vektoriavaruuksien E ja F kannat. Näin ollen vektorit $x_\alpha \otimes y_\beta$ muodostavat kannan avaruudelle $E \otimes F$. Kuvaukset joukolta $(x_\alpha \otimes y_\beta)$ kolmannelle vektoriavaruudelle G voidaan yksikäsitteisesti laajentaa lineaarikuvauksiksi

$$f : E \otimes F \to G.$$

Jokainen lineaarikuvaus $f : E \otimes F \to G$ saadaan määritettyä tällä tavalla. Nyt isomorfismista

$$L(E \otimes F; G) \tilde{=} B(E, F; G),$$

seuraa, että jokainen bilineaarikuvaus $\phi : E \times F \to G$ saadaan yksikäsitteisesti laajennettua kuvauksista $(x_\alpha, y_\beta) \to G$. Erityisesti vektorit $\phi(x_\alpha, y_\beta)$ generoivat avaruuden S. Koska avaruudet E ja F ovat äärellisuletteisia seuraa tästä, että

$$dim\ S \leq dim\ E \cdot dim\ F.$$

□

Lause 3.14. *Olkoot vektoriavaruudet E, F ja G äärellisulotteisia ja $B(E,F;G)$ kuten määritelmässä* 2.4. *Nyt*

$$dim\ B(E,F;G) = dim\ E \cdot dim\ F \cdot dim\ G.$$

Todistus. Olkoot x_i $(i = 1, \cdots, n)$ ja y_j $(j = 1, \cdots, m)$ avaruuksien E ja F kannat ja $z_\gamma(\gamma = 1, \cdots, h)$ avaruuden G kanta. Nyt tulot $x_i \otimes y_j$ muodostavat avaruuden $E \otimes F$ kannan ja määritellään lineaarikuvaukset f_γ^{kl}, missä $k = 1, \cdots, n$ ja $l = 1, \cdots, m$, siten, että

$$f_\gamma^{kl}(x_i \otimes y_j) = \sigma_i^k \sigma_j^l z_\gamma,$$

missä $\sigma_b^a = 1$, kun $a = b$ ja $\sigma_b^a = 0$, kun $a \neq b$. Nyt kuvaukset f_γ^{kl} muodostavat kannan avaruudelle $B(E,F;G)$. Koska avaruudet E, F ja G ovat äärellisulotteisia, niin saadaan

$$dim\ B(E,F;G) = dim\ E \cdot dim\ F \cdot dim\ G.$$

□

Seuraus 3.15. *Erityisesti $dim\ B(E,F) = dim\ E \cdot dim\ F$.*

4 Lineaarikuvausten tensoritulo

4.1 Tensoritulo

Tässä kappaleessa perehdytään, miten tensoritulo toimii lineaarikuvausten välillä. Kappaleessa tarkastellaan mielivaltaisia vektoriavaruuksia E_1, E_2, F_1 ja F_2 ja lineaarikuvausten $L(E_1;F_1)$ ja $L(E_2;F_2)$ muodostamia joukkoja.

Lause 4.1. *Olkoot $\varphi_1 \in L(E_1;F_1)$ ja $\varphi_2 \in L(E_2;F_2)$. Tällöin on olemassa sellainen bilineaarikuvaus*

$$\beta : L(E_1;F_1) \times L(E_2;F_2) \to L(E_1 \otimes E_2; F_1 \otimes F_2),$$

että

$$\beta(\varphi_1, \varphi_2) = \chi,$$

missä $\chi \in L(E_1 \otimes E_2; F_1 \otimes F_2)$ on $\chi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1 x_1 \otimes \varphi_2 x_2$ ja $x_1 \in E_1$ ja $x_2 \in E_2$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että kuvaukset φ_1 ja φ_2 indusoivat bilineaarisen kuvauksen $\theta : E_1 \times E_2 \to F_1 \otimes F_2$. Kuvaus θ saadan muodostettua valitsemalla mielivaltaiset alkiot $y_1 \in F_1$ ja $y_2 \in F_2$. Avaruudet F_1 ja F_2 ovat vektoriavaruuksia, ja näin ollen on olemassa tensoritulo $y_1 \otimes y_2$. Toisaalta $\varphi_1 x_1 = y_1$ ja $\varphi_2 x_2 = y_2$, jolloin $y_1 \otimes y_2 = \varphi_1 x_1 \otimes \varphi_2 x_2$. Näin saadaan kuvausten φ_1 ja φ_2 indusoima bilineaarikuvaus

$$\theta(x_1, x_2) = \varphi_1 x_1 \otimes \varphi_2 x_2,$$

kaikilla $x_1 \in E_1$ ja $x_2 \in E_2$. Nyt universaalisuusehdon mukaan kuvaus θ indusoi sellaisen yksikäsitteisen lineaarikuvauksen $\chi : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$, että

$$\theta(x_1, x_2) = \chi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1 x_1 \otimes \varphi_2 x_2.$$

Nyt saatu yhteys kuvausten φ_1, φ_2 ja χ välillä, todellakin osoittaa sen, että on olemassa bilineaarikuvaus

$$\beta : L(E_1; F_1) \times L(E_2; F_2) \to L(E_1 \otimes E_2; F_1 \otimes F_2),$$

ja että

$$\beta(\varphi_1, \varphi_2) = \chi.$$

□

Lause 4.2. *Olkoot*

$$\beta : L(E_1; F_1) \times L(E_2; F_2) \to L(E_1 \otimes E_2; F_1 \otimes F_2)$$

lauseen 4.1 *mukainen bilineaarikuvaus. Nyt kuvauksen* β *indusoima lineaarikuvaus*

$$f : L(E_1; F_1) \otimes L(E_2; F_2) \to L(E_1 \otimes E_2; F_1 \otimes F_2)$$

on injektio.

Todistus. Olkoot $\omega \in L(E_1; F_1) \otimes L(E_2; F_2)$ sellainen, että $f(\omega) = 0$. Jos $\omega \neq 0$ tällöin lemman 2.14 mukaan ω voidaan kirjoittaa summana

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \otimes \psi_i, \quad \phi_i \in L(E_1, F_1), \psi_i \in L(E_2, F_2),$$

missä kuvaukset $\phi_i,\ i = 1, \cdots, r$, ovat lineaarisesti riippumattomia ja $\psi_i,\ i = 1, \cdots, r$, ovat lineaarisesti riippumattomia.
Tällöin

$$f(\omega) = \sum_i \beta(\phi_i, \psi_i)$$

ja koska $f(\omega) = 0$ seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{r} \phi_i(x_1) \otimes \psi_i(x_2) = 0,$$

missä $x_1 \in E_1$ ja $x_2 \in E_2$.
Tarkastellaan vektoria $a \in E_1$, jolle pätee $\phi_1(a) \neq 0$. Olkoon $p \geq 1$ lineaarisesti riippumattomien vektorien maksimimäärä joukossa $\phi_1(a), \cdots, \phi_r(a)$. Järjestetään vektorit $\phi_i(a)$ siten, että saadaan lineaarisesti riippumattomien vektoreiden joukko $\phi_1(a), \cdots, \phi_p(a)$. Tällöin

$$\phi_j(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\phi_i(a), \quad j = p+1, \cdots, r.$$

Nyt relaatiosta $\sum_{i=1}^{r} \phi_i(x_1) \otimes \psi_i(x_2) = 0$ saadaan

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(a) \otimes \psi_i(x_2) + \sum_{j=p+1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\phi_i(a) \right) \otimes \psi_j(x_2) = 0, \quad x_2 \in E_2;$$

eli toisin sanoen

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(a) \otimes \left(\sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j(x_2) + \psi_i(x_2) \right) = 0.$$

Koska vektorit $\phi_i(a)$, $i = 1, \cdots, p$, ovat lineaarisesti riippumattomia, niin lemman 2.11 mukaan

$$\psi_i(x_2) + \sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j(x_2) = 0, \quad i = 1, \cdots, p,$$

jokaiselle $x_2 \in E_2$, eli $\psi_i + \sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j = 0$. Tällöin kuvaukset ψ_i ovat lineaarisesti riippuvia, mikä on ristiriidassa oletukselle, että kuvaukset ψ_i ovat lineaarisesti riippumattomia ja tällöin $f(\omega) = 0$, jos ja vain jos $\omega = 0$ ja näin ollen lineaarinen kuvaus f on injektio. □

Seuraus 4.3. *Lauseet* 3.4 *ja* 4.2 *osoittavat, että kuvaus β toteuttaa universaalisuusominaisuuden ehdon $\otimes_2$.*

Seuraus 4.4. *Pari $(Im\ \beta, \beta)$ on avaruuksien $L(E_1; F_1)$ ja $L(E_2; F_2)$ tensoritulo.*

Seuraus 4.5. *Olkoot $\beta : L(E) \times L(F) \to L(E \otimes E)$ sellainen bilineaarinen kuvaus, että*

$$\beta(f, g)(x \otimes y) = f(x)g(y),$$

missä $f \in L(E)$, $g \in L(F)$. Nyt pari $(Im\beta, \beta)$ on avaruuksien $L(E)$ ja $L(F)$ tensoritulo.

4.2 Kuvaus $\varphi \otimes \psi$

Yleisesti ottaen, mikäli vektoriavaruudet E_1, E_2, F_1 ja F_2 ovat mielivaltaisia, ei pari $(L(E_1 \otimes F_1; E_2 \otimes F_2), \beta)$ ole tensoritulo. Kuitenkin *seurauksen* 4.4 mukaan tensoritulo avaruuksien $L(E_1; F_1)$ ja $L(E_2; F_2)$ välillä on olemassa.

Määritelmä 4.6. Olkoot $\beta(\varphi, \psi)$ lauseen 4.1 mukainen bilineaarikuvaus. Kuvausta $\beta(\varphi, \psi)$ sanotaan kuvausten φ ja ψ tensorituloksi. Kirjoitetaan $\beta(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$ ja edelleen lauseen 4.1 mukaan

$$(\varphi \otimes \psi)(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1 x_1 \otimes \psi x_2,$$

missä $x_1 \in E_1$ ja $x_2 \in E_2$.

Näin saadut kuvaukset $\varphi \otimes \psi \in L(E_1; F_1) \otimes L(E_2; F_2)$ muodostavat juurikin seurauksen 4.4 mukaisen tensoritulon $(Im\ \beta, \beta)$. Tarkastellaan nyt muodostuneen kuvauksen $\varphi \otimes \psi$ ominaisuuksia.

Lause 4.7. *Olkoot*

$$\varphi_1 : E_1 \to E_2 \quad \varphi_2 : E_2 \to E_3$$

ja

$$\psi_1 : F_1 \to F_2 \quad \psi_2 : F_2 \to F_3$$

lineaarikuvauksia, missä E_3 ja F_3 ovat vektoriavauuksia. Tällöin

$$(\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \otimes (\psi_2 \circ \psi_1).$$

Todistus. Määritelmän 4.6 mukaan yhtälön vasen puoli saadaan nyt muotoon

$$(\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1) = \varphi_2(\varphi_1) \otimes \psi_2(\psi_1).$$

Tällöin

$$(\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1) = \varphi_2 \circ \varphi_1 \otimes \psi_2 \circ \psi_1.$$

□

Lause 4.8. *Oletetaan, että kuvaukset $\varphi : E_1 \to E_2$ ja $\psi : F_1 \to F_2$ ovat injektioita. Tällöin kuvaus $\varphi \otimes \psi$ on injektio.*

Todistus. Kuvaukset φ ja ψ ovat injektioita, joten on olemassa sellaiset lineaariset kuvaukset $\tilde{\varphi} : E_2 \to E_1$ ja $\tilde{\psi} : F_2 \to F_1$, että

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi = \iota \text{ ja } \tilde{\psi} \circ \psi = \iota,$$

missä ι on identtinen kuvaus. Nyt

$$(\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}) \circ (\varphi \otimes \psi) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi) \otimes (\tilde{\psi} \circ \psi) = \iota \otimes \iota = \iota,$$

jolloin kuvaukselle $\varphi \otimes \psi$ on olemassa vasen käänteiskuvaus ja kuvaus $\varphi \otimes \psi$ on injektio. □

Lause 4.9. $\operatorname{Im}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{Im} \varphi \otimes \operatorname{Im} \psi$.

Todistus. Tämä seuraa suoraan kuvauksen $\varphi \otimes \psi$ määrittelystä. □

Seuraus 4.10. *Jos kuvaukset φ ja ψ ovat surjektioita, niin myös tensoritulo $\varphi \otimes \psi$ on surjektio.*

Lause 4.11. $\operatorname{Ker}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{Ker} \varphi \otimes F_1 + E_1 \otimes \operatorname{Ker} \psi$.

Todistus. Tarkastellaan nyt injektiivisia lineaarisia kuvauksia

$$\hat{\varphi} : E_1/\operatorname{Ker} \varphi \to E_2 \text{ ja } \hat{\psi} : F_1/\operatorname{Ker} \hat{\psi} \to F_2.$$

Nyt tensoritulo

$$\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} : E_1/\operatorname{Ker} \varphi \otimes F_1/\operatorname{Ker} \psi \to E_2 \otimes F_2$$

on injektiivinen. Olkoon kuvaukset π_1, π_2 ja π kanonisia projektioita

$$\pi_1 : E_1 \to E_1/\operatorname{Ker} \varphi, \quad \pi_2 : F_1 \to F_1/\operatorname{Ker} \psi,$$

ja

$$\pi : E_1 \otimes F_1 \to (E_1 \otimes F_1)/T(\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Ker} \psi),$$

missä $T(\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Ker} \psi) = \operatorname{Ker} \varphi \otimes F_1 + E_1 \otimes \operatorname{Ker} \varphi$. Nyt seurauksesta 3.7 seuraa, että on olemassa sellainen lineaarinen isomorfismi

$$g : E_1/\operatorname{Ker} \varphi \otimes F_1/\operatorname{Ker} \psi \to E_1 \otimes F_1/T(\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Ker} \psi),$$

että

$$g(\pi_1 x \otimes \pi_2 y) = \pi(x \otimes y).$$

Määritellään nyt lineaarinen kuvaus $\chi : (E_1 \otimes F_1)/T(\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Ker} \psi) \to E_2 \otimes F_2$;

$$\chi = (\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi}) \circ g^{-1},$$

missä $\hat{\varphi} \circ \pi_1 = \varphi$ ja $\hat{\psi} \circ \pi_2 = \psi$. Kuvaus χ on selvästi injektio, ja mikäli $x \in E_1$ ja $y \in F_1$ ovat mielivaltaisia, saadaan

$$\begin{aligned}(\chi \circ \pi)(x \otimes y) &= (\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi}) g^{-1} g(\pi_1 x \otimes \pi_2 y) \\ &= \hat{\varphi} \pi_1 x \otimes \hat{\psi} \pi_2 y \\ &= \varphi x \otimes \psi y,\end{aligned}$$

joten $\chi \circ \pi = \varphi \otimes \psi$.
Nyt koska kuvaus χ on injektio seuraa, että

$$\operatorname{Ker}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{Ker} \pi = T(\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Ker} \psi) = \operatorname{Ker} \varphi \otimes F_1 + E_1 \otimes \operatorname{Ker} \psi.$$

□

5 Usean vektoriavaruuden tensoritulo

Edellisessä luvussa määriteltiin kahden vektoriavaruuden E ja F välinen tensoritulo. Kahden vektoriavaruuden tensoritulo tuottaa vektoriavaruuden, jolloin myös tämä vektoriavaruus voi toimia tensoritulossa alkiona jonkun kolmannen vektoriavaruuden kanssa, mikä tuottaa taas vektoriavaruuden. Kun tätä toistetaan, saadaan tensoritulo, jossa tekijöinä toimii p kappaletta vektoriavaruuksia. Tässä kappaleessa määritellään tensoritulo avaruuksien E_p, $p > 2$ välillä.

5.1 Määritelmä

Määritelmä 5.1. Vektoriavaruuksien E_i $(i = 1, ..., p)$ muodostamaa paria $(T, \otimes)$, missä $\otimes : E_1 \times ... \times E_p \to T$ on universaali p-lineaarikuvaus, sanotaan avaruuksien E_i tensorituloksi. Kuten tapauksessa $p = 2$ avaruutta T kutsutaan avaruuksien E_i *tensorituloksi* ja sitä merkitään $E_1 \otimes \cdots \otimes E_P$.

Lause 5.2. *Olkoot E_1, E_2, E_3 mielivaltaisia vektoriavaruuksia. Nyt on olemassa sellainen lineaarinen isomorfismi*

$$f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

että

$$f(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z,$$

missä $x \in E_1,\ y \in E_2$ ja $z \in E_3$.

Todistus. Koska avaruudet $E_1,\ E_2$ ja E_3 ovat vektoriavaruuksia, voidaan määritellä sellainen trilineaarikuvaus

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

että

$$(x, y, z) \to (x \otimes y) \otimes z.$$

Tällöin universaalisuusehdon mukaan indusoituu sellainen lineaarinen kuvaus

$$f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

että

$$f(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Näin ollen on olemasssa kuvaus $f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$. Nyt täytyy vielä osoittaa, että kuvaus f on isomorfismi.

Nyt jokaiselle kiinnitetylle alkiolle $z \in E_3$ on olemassa sellainen bilineaarinen kuvaus $\beta_z : E_1 \times E_2 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$, että

$$\beta_z(x, y) = x \otimes y \otimes z.$$

Tämä kuvaus indusoi nyt lineaarisen kuvauksen

$$g_z : E_1 \otimes E_2 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

siten, että

$$g_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z.$$

Määritellään vielä toinen bilineaarinen kuvaus

$$\psi : (E_1 \otimes E_2) \times E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

siten, että

$$\psi(u, z) = g_z(u) \quad u \in E_1 \otimes E_2, z \in E_3.$$

Kuvaus ψ indusoi sellaisen lineaarisen kuvauksen

$$g : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3,$$

että

$$\psi(u, z) = g(u \otimes z).$$

Nyt voidaan muodostaa yhtälö

$$\begin{aligned} g((x \otimes y) \otimes z) &= \psi(x \otimes y, z) \\ &= g_z(x \otimes y) \\ &= x \otimes y \otimes z. \end{aligned}$$

Nyt yhtälöt

$$gf(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z$$

ja

$$fg((x \otimes y) \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z,$$

osoittavat, että f on lineaarinen isomorfismi ja g on sen käänteisfunktio. □

Seuraus 5.3. *Vastaavasti voidaan osoittaa, että on olemassa sellainen lineaarinen isomorfismi*

$$h : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3),$$

että

$$h(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Seuraus 5.4. *Yhdistetty kuvaus*

$$(h \circ f^{-1}) : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

on isomorfismi.

$$(h \circ f^{-1})((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Seuraus 5.5. *Olkoot E_i, $i = 1, \cdots, p+q$, vektoriavaruuksia, tällöin on olemassa täsmälleen yksi vektoriavaruus isomorfismi*

$$f : E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q} \to (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \otimes (E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}),$$

siten, että

$$f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}),$$

missä $x_i \in E_i$.

Lause 5.6. *Olkoot $E_1, \cdots, E_{p+q}$ vektoriavaruuksia ja*

$$\beta : (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \times (E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}) \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q}$$

sellainen yksikäsitteinen bilineaarikuvaus, että

$$\beta : (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \to x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}.$$

Nyt pari $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q}, \beta)$ on alkioiden $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$ ja $E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}$ tensoritulo.

Todistus. Koska avaruudet $E_1, \cdots, E_{p+q}$ ovat vektoriavaruuksia, on tällöin seurauksen 5.5 mukaan olemassa täsmälleen yksi vektoriavaruus isomorfismi

$$f : (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \otimes (E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}) \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q}$$

siten että,

$$f((x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q})) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}.$$

Nyt universaalisuusehdosta seuraa, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen bilineaarinen kuvaus

$$\beta : (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \times (E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}) \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q},$$

että

$$\begin{aligned} &\beta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \\ &= f((x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q})) \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}. \end{aligned}$$

Nyt määräytynyt pari $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q}, \beta)$ on avaruuksien $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$ ja $E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}$ tensoritulo. □

5.2 Ominaisuuksia

Usean vektoriavaruuden tensoritulo seuraa suoraan kahden vektoriavaruuden tensoritulosta "ketjuttamalla"tensorituloa. Nyt on siis luontevaa, että tulokset, ominaisuudet ja lauseet käyttäytyvät ja voidaan määritellä samalla tavalla kuin kahden vektoriavaruuden tapauksissa. Tässä esitetään oleellisimpia lauseita ja tuloksia usean vektoriavaruuden tensoritulolle. Kuitenkaan tässä ei todisteta lauseita, sillä jokainen tensoritulo on vektoriavaruus ja loppulta kyseessä on vain kahden vektoriavaruuden tensoritulo. Tässä osiossa esitetyt tulokset seuraavat suoraan kahden vektoriavaruuden tensoritulosta.

Lause 5.7. *Olkoot a_v^i avaruuden E_i kanta. Nyt tensoritulot $(a_v^1 \otimes \cdots \otimes a_v^p)$ muodostavat kannan tensoritulolle $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$.*

Lause 5.8. *Olkoot vektoriavaruudet E_i $(i = 1, \cdots, p)$ ja G äärellisulotteisia ja olkoot $L(E_1, \cdots, E_p; G)$ kaikkien p-lineaaristen kuvausten $E_1 \times \cdots \times E_p \to G$ joukko. Tästä seuraa, että*

$$dim\ L(E_1, \cdots, E_p; G) = dim\ E_1 \cdots dim\ E_p \cdot dim\ G$$

Seuraus 5.9. *Erityisesti $dim\ L(E_1, \cdots, E_p) = dim\ E_1 \cdots dim\ E_p$*

Lause 5.10. *Olkoot $\varphi_i : E_1 \to F_i$ $(i = 1, \cdots, p)$ lineaarikuvauksia, tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus*

$$\chi : E_1 \otimes \cdots \otimes E_p \to F_1 \otimes \cdots \otimes F_p,$$

että

$$\chi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \varphi_1 x_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p x_p \qquad x_i \in E_i.$$

Seuraus 5.11. *Olkoot $L(E_1; F_1) \otimes \cdots \otimes L(E_p; F_p)$ avaruuksien $L(E_i; F_i)$ tensoritulo. Tällöin kuvaus $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p) \to \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p$ indusoi injektiivisen lineaarikuvauksen*

$$f : L(E_1; F_1) \otimes \cdots \otimes L(E_p; F_p) \to L(E_1 \otimes \cdots \otimes E_p; F_1 \otimes \cdots \otimes F_p).$$

Lause 5.12. *Olkoot $\varphi_i : E_i \to F_i$ ja $\psi_i : F_i \to G_i$ lineaarikuvauksia. Tällöin*

$$(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_p) \circ (\varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_p) = (\psi_1 \circ \varphi_1) \otimes \cdots \otimes (\psi_p \circ \varphi_p).$$

Lause 5.13. $\mathrm{Im}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \mathrm{Im}\,\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Im}\,\varphi_p$.

Lause 5.14. $\ker(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \sum_{i=1}^{p} E_1 \otimes \cdots \otimes \ker \varphi_i \otimes \cdots \otimes E_p$.

6 Duaaliavaruus

Duaaliavaruus on merkittävä lineaarialgebran rakenne, jolle sovelluksia löytyy paljon, esimerkiksi fysiikan alalta. Yksittäisenä duaaliavaruusrakenteena tunnetuin on todennäköisesti sisätuloavaruus. Tämän vuoksi on oleellista tutustua, kuinka tensoritulo toteutuu duaaliavaruuksilla.

6.1 Tensoritulo

Lause 6.1. *Olkoot E, E', E'', F, F', F'' vektoriavaruuksia ja $\phi : E \times E' \to E''$ ja $\psi : F \times F' \to F''$ bilineaarisia kuvauksia. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi bilineaarinen kuvaus*

$$\chi : (E \otimes F) \times (E' \otimes F') \to E'' \otimes F''$$

että

$$\chi(x \otimes y, x' \otimes y') = \phi(x, x') \otimes \psi(y, y'),$$

missä $x \in E, x' \in E', y \in F, y' \in F'$.

Todistus. Alkiot $x \otimes y$ ja $x' \otimes y'$ generoivat avaruudet $E \otimes F$ ja $E' \otimes F'$. Jos kuvaus χ on olemassa, niin kuvaukset ϕ ja ψ yksikäsitteisesti määräävät kuvauksen χ.
Jotta voidaan todistaa, että kuvaus χ on olemassa, täytyy tarkastella kuvausten ϕ ja ψ indusoimia lineaarikuvauksia

$$f : E \otimes E' \to E'' \quad \text{ja} \quad g : F \otimes F' \to F''.$$

Tällöin on olemassa lineaarinen kuvaus $f \otimes g : (E \otimes E') \otimes (F \otimes F') \to (E'' \otimes F'')$. Olkoot S sellainen lineaarinen isomorfismi

$$S : (E \otimes F) \otimes (E' \otimes F') \to (E \otimes E') \otimes (F \otimes F'),$$

että

$$S : (x \otimes y) \otimes (x' \otimes y') \to (x \otimes x') \otimes (y \otimes y')$$

ja määritellään bilineaarinen kuvaus

$$\chi(u, v) = (f \otimes g)S(u \otimes v) \quad u \in E \otimes F, v \in E' \otimes F'.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \chi(x \otimes y, x' \otimes y') &= (f \otimes g)((x \otimes x') \otimes (y \otimes y')) \\ &= f(x \otimes x') \otimes g(y \otimes y') \\ &= \phi(x, x') \otimes \psi(y, y'). \end{aligned}$$

Näin ollen kuvaus χ on olemassa. $\square$

Kuvausta χ voidaan merkitä nyt bilineaaristen kuvausten ϕ ja ψ tensoritulona $\phi \otimes \psi$.

Seuraus 6.2. *Jokainen bilineaaristen funktioiden pari* (Φ, Ψ), *missä* $\Phi \in B(E \times E')$ *ja* $\Psi \in B(F \times F')$ *indusoi sellaisen bilineaarisen funktion* $\Phi \otimes \Psi \in B((E \otimes F) \times (E' \otimes F'))$, *että*

$$(\Phi \otimes \Psi)(x \otimes y, x' \otimes y') = \Phi(x, x')\Psi(y, y').$$

Osoitetaan seuraavaksi, että degeneroitumattomien funktioiden tensoritulo on myös degeneroitumaton.

Lause 6.3. *Bilineaarinen funktio* $\Phi \otimes \Psi$ *on degeneroitumaton, jos ja vain jos* Φ *ja* Ψ *ovat degeneroitumattomia.*

Todistus. Tarkastellaan lineaarisia kuvauksia

$$\phi : E \to L(E') \quad \psi : F \to L(F') \quad \chi : E \otimes F \to L(E' \otimes F')$$

joille

$$\phi(a)x' = \Phi(a, x') \quad \psi(b)y' = \Psi(b, y') \quad \chi(c)z' = (\Phi \otimes \Psi)(c, z'),$$

missä $a \in E, b \in F, c \in E \otimes F$.Nyt $\phi \otimes \psi : E \otimes F \to L(E') \otimes L(F')$, missä $L(E') \otimes L(F') \subset L(E' \otimes F')$
Osoitetaan nyt, että

$$\chi = i \circ (\phi \otimes \psi),$$

missä $i : L(E') \otimes L(F') \to L(E' \otimes F')$ on injektio. Nyt saadaan

$$(\phi \otimes \psi)(a \otimes b) = \phi(a) \otimes \psi(b)$$

ja

$$i(\phi \otimes \psi)(a \otimes b)(x' \otimes y') = \phi(a)x' \cdot \psi(b)y' = \Phi(a, x')\Psi(b, y').$$

Toisaalta

$$\chi(a \otimes b)(x' \otimes y') = (\Phi \otimes \Psi)(a \otimes b, x' \otimes y') = \Phi(a, x')\Psi(b, y'),$$

jolloin saadaan

$$i(\phi \otimes \psi) = \chi.$$

Nyt koska i on injektio lauseesta 4.11 seuraa

$$\ker \chi = \ker(\phi \otimes \psi) = \ker \phi \otimes F + E \otimes \ker \psi.$$

Nyt nolla-avaruuksia $N_E(\Phi), N_F(\Psi)$ ja $N_{E\otimes F}(\Phi \otimes \Psi)$ yhdistää yhtälö

$$N_{E\otimes F}(\Phi \otimes \Psi) = N_E(\Phi) \otimes F + E \otimes N_F(\psi).$$

Samalla tavalla saadaan myös

$$N_{E'\otimes F'}(\Phi \otimes \Psi) = N'_E(\Phi) \otimes F' + E' \otimes N'_F(\psi).$$

Nyt seuraa, että $\Phi \otimes \Psi$ on degeneroitumaton, jos ja vain jos funktiot Ψ ja Φ ovat degeneroitumattomia. $\square$

Seuraus 6.4. *Olkoot (E^*, E) ja (F^*, F) duaalipareja ja merkitään molempien skalaarituloa $<,>$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi degeneroitumaton bilineaarinen funktio $<,> \in (E^* \otimes F^*, E \otimes F)$, jolle pätee*

$$< x^* \otimes y^*, x \otimes y > = < x^*, x >< y^*, y > .$$

Seuraus 6.5. *Pari $(E^* \otimes F^*, E \otimes F)$ on duaalipari.*

Seuraus 6.5 osoittaa, että duaalisuus indusoituu tensoritulolle, jolloin duaaliparien välistä tensorituloa, voidaan myös tarkastella ja tutkia duaaliavaruutena.

Seuraus 6.6. *Olkoot (E_i^*, E_i) duaaliavaruuspareja ja merkikään näiden skalaarituloa $<,>$. Nyt on olemassa selainen kuvaus $< E_1^* \otimes \cdots \otimes E{*}_p, E_1 \otimes \cdots \otimes E_p >$, että*

$$< x_1^* \otimes \cdots \otimes x_p^*, x_1 \cdots x_p > = < x_1^*, x_1 > \cdots < x_p^*, x_p > .$$

6.2 Duaalikuvaukset

Lause 6.7. *Olkoot (E_i^*, E_i) ja (F_i^*, F_i) $(i = 1, 2)$ neljä duaaliavaruusparia ja kuvaukset*

$$\phi : E_1 \to E_2 \qquad \phi^* : E_1^* \leftarrow E_2^*$$

ja

$$\psi : F_1 \to F_2 \qquad \psi^* : F_1^* \leftarrow F_2^*$$

duaalikuvauksia. Nyt kuvaukset:

$$\phi \otimes \psi : E_1 \otimes F_1 \to E_2 \otimes F_2$$

ja

$$\phi^* \otimes \psi^* : E_1^* \otimes F_1^* \leftarrow E_2^* \otimes F_2^*$$

ovat duaalikuvauksia.

Todistus. Olkoot $x_1 \in E, y_1 \in F, x_2^* \in E_2^*$ ja $y_2^* \in F_2^*$ mielivaltaisia vektoreita. Nyt

$$< x_2^* \otimes y_2^*, (\phi \otimes \psi)(x_1 \otimes y_1) >=< x_2^* \otimes y_2^*, \phi x_1 \otimes \psi y_1 >$$

$$=< x_2^*, \phi x_1 >< y_2^*, \psi y_1 >$$

$$=< \phi^* x_2^*, x_1 >< \psi^* y_2^*, y_1 >$$

$$=< \phi_2^* x_2^* \otimes \psi^* y_2^*, x_1 \otimes y_1 >$$

$$=< (\phi^* \otimes \psi^*)(x_2^* \otimes y_2^*), x_1 \otimes x_2 >,$$

missä

$$(\phi \otimes \psi)^* = \phi^* \otimes \psi^*.$$

Eli kuvaukset $\phi \otimes \psi$ ja $\phi^* \otimes \psi^*$ ovat duaalikuvauspari. □

6.3 Sisätuloavaruus

Yhtenä yleisimpänä duaaliavaruusrakenteena toimii sisätuloavaruus, jossa skalaaritulona toimii vektoreiden sisätulo. Niinpä on oleellista tarkastella, kuinka tensoritulo käyttäytyy sisätuloavaruuksien välillä.

Määritelmä 6.8. Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia ja merkitään molempien sisätuloa $(,)$. Nyt seurauksen 6.4 mukaan on olemassa täsmälleen yksi sellainen bilineaarinen funktio avaruudella $E \otimes F$, että

$$(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2).$$

Nyt saadaan kuvauksen $(,)$ indusoima sisätuloavaruus $E \otimes F$ ja tätä avaruutta kutsutaan sisätuloavaruuksien E ja F tensorituloksi.

Lause 6.9. *Oletetaan, että E ja F ovat Euklidisia avaruuksia, joille dim $E = n$ ja dim $F = m$. Nyt $E \otimes F$ on Euklidinen avaruus.*

Todistus. Olkoot $a_v (v = 1, \cdots, n)$ ja $b_\mu (\mu = 1, \cdots, m)$ avaruuksien E ja F ortonormaalit kannat. Tällöin

$$(a_v \otimes b_\mu, a_\lambda \otimes b_k)$$

$$= (a_v, a_\lambda) \cdot (b_\mu, b_k)$$

$$= \delta_{v\lambda} \delta_{\mu k}.$$

Näin ollen alkiot $a_v \otimes b_\mu$ muodostavat avaruuden $E \otimes F$ ortonormaalin kannan ja avaruus $E \otimes F$ on Euklidinen. □

6.4 Yhdistävä algebra

Määritelmä 6.10. Olkoot E^*, E duaalipari ja määritellään operaatio $\circ$ avaruudella $E^* \otimes E$ seuraavasti

$$(x^* \otimes x) \circ (y^* \otimes y) =< x^*, y > (y^* \otimes x),$$

missä $x,\ y \in E$ ja $x^*,\ y^* \in E'$. Nyt operaatio $\circ$ muodostaa avaruudessa $E^* \otimes E$ assosiatiivisen algebran. Näin muodostunutta algebraa sanotaan yhdistetyksi algebraksi.

Lause 6.11. *Olkoot $T : E^* \otimes E \to L(E; E)$ sellainen lineaarinen kuvaus, että*

$$T(a^* \otimes b)x =< a^*, x > b, \quad x \in E.$$

Nyt kuvaus T on algebra homomorfismi.

Todistus. Olkoot $(a_1^* \otimes b_1), (a_2^* \otimes b_2) \in E^* \otimes E$. Tällöin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} &T[(a_1^* \otimes b_1) \circ (a_2^* \otimes b_2)]x \\ &= T[< a_1^*, b_2 > (a_2^* \otimes b_1)]x \\ &= T[(a_2^* \otimes < a_1^*, b_2 > b_1)]x \\ &=< a_2^*, x >< a_1^*, b_2 > b_1 \\ &=< a_1^*, < a_2^*, x > b_2 > b_1 \\ &= T(a_1^* \otimes b_1) < a_2^*, x > b_2 \\ &= T(a_1^* \otimes b_1) \circ T(a_2^* \otimes b_2)x. \end{aligned}$$

Nyt $T[(a_1^* \otimes b_1) \circ (a_2^* \otimes b_2)] = T(a_1^* \otimes b_1) \circ T(a_2^* \otimes b_2)$ ja kuvaus T on algebra homomorfismi. □

Lause 6.12. *Kuvaus T on injektio*

Todistus. Olkoot $z \in E^* \otimes E$ sellainen alkio, että $T(z) = 0$. Valitaan nyt kanta e_α avaruudelta E. Tällöin alkio z on summa

$$z = \sum_{v=1}^{r} a_v^* \otimes e_v, \quad a_v^* \in E^*.$$

Nyt jokaiselle $x \in E$ pätee

$$\sum_{v=1}^{r} < a^*, x > e_v = 0,$$

josta saadaan

$$< a_v^*, x >= 0.$$

Tästä seuraa, että $a_v^* = 0 (v = 1, \cdots, r)$ ja näin ollen $z = 0$. Tämä todistaa, että T on injektio. □

Seuraus 6.13. *Jos vektoriavaruus E on äärellisulotteinen, kuvaus T on lineaarinen isomorfismi.*

Määritelmä 6.14. Olkoot E äärellisulotteinen vektoriavaruus ja kuvaus ι avaruuden $L(E; E)$ identtinen kuvaus. Koska kuvaus T on isomorfismi, niin tällöin $T^{-1}(\iota)$ on yhdistetyn algebran neutraalialkio. Nyt merkitään $t = T^{-1}(\iota)$ ja alkiota t sanotaan avaruuden E yksikkötensoriksi.

Lause 6.15. *Olkoot $\{e^{*v}\}, \{e_v\}$, $v = i, \cdots, n$, duaalikanta parille E^*, E. Tällöin yksikkötensori saadaan summana*

$$t = \sum_{v=1}^{n} e^{*v} \otimes e_v.$$

Todistus. Olkoot $e \in E^* \otimes E$ sellainen, että $e = \sum_{v=1}^{n} e^{*v} \otimes e_v$. Tällöin saadaan

$$T(e) = T\left(\sum_{v=1}^{n} e^{*v} \otimes e_v\right)(x) = \sum_{v=1}^{n} < e^{*v}, x > e_v = x,$$

missä $x \in E$. Näin ollen alkio e on yhdistetyn algebran neutraalialkio ja

$$t = \sum_{v=1}^{n} e^{*v} \otimes e_v.$$

□

Lause 6.16. *Jos yhdistetyllä algebralla $E^* \otimes E$ on olemassa neutraalialkio, on vektoriavaruus E äärellisulotteinen.*

Todistus. Olkoot e yhdistetyn algebran $E^* \otimes E$ neutraalialkio ja olkoot $\{e_\alpha\}$ avaruuden E kanta. Tällöin alkio e saadaan summana

$$e = \sum_{v=1}^{r} a_v^* \otimes e_v,$$

missä $a_v^* \in E^*$. Nyt jokaiselle alkiolle $x^* \in E^*$ ja $x \in E$ pätee

$$e \circ (x^* \otimes x) = \sum_{v=1}^{r} (a_v^* \otimes e_v) \circ (x^* \otimes x)$$

$$= \sum_{v=1}^{r} < a_v^*, x > (x^* \otimes e_v)$$

$$= \sum_{v=1}^{r} \lambda^v (x^* \otimes e_v),$$

missä $\lambda^v =< a_v^*, x >$. Koska e on neutraalialkio, niin tällöin

$$\sum_{v=1}^{r} \lambda^v (x^* \otimes e_v) = x^* \otimes x,$$

mistä saadaan

$$x = \sum_{v=1}^{r} \lambda^v e_v.$$

Vektorit $e_1, \cdots e_r$, generoivat avaruuden E ja näin ollen avaruus E on äärellisulotteinen.

□

Seuraus 6.17. *Jos vektoriavaruus E on ääretönulotteinen, ei yhdistetyllä algebralla ole neutraalialkiota.*

7 Äärellisulotteiset vektoriavaruudet

Yksi merkittävin ja selvin ominaisuus avaruudella on se, onko avaruus ääretönulotteinen vai äärellisulotteinen. Tähän mennessä on tarkasteltu tensorituloa mielivaltaisilla vektoriavaruuksilla ja tähän mennessä osoitetut tulokset toimivat kaikilla vektoriavaruuksilla. Nyt tarkastellaan sitä, miten vektoriavaruuksien äärellisyys vaikuttaa tensorituloon.

Lause 7.1. *Olkoot E ja F äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joille $dim\ E = n$ ja $dim\ F = m$. Nyt bilineaariselle kuvaukselle $\phi : E \times F \to T$, missä $dim\ T = nm$, ehdot $\otimes_1$ ja $\otimes_2$ ovat ekvivalentit.*

Todistus. Olkoot f kuvauksen ϕ indusoima lineaarinen kuvaus

$$f : E \otimes F \to F.$$

Jos kuvaus ϕ toteuttaa ehdon $\otimes_1$, niin tällöin kuvaus f on surjektio. Koska $dim\ T = nm = dim(E \otimes F)$, seuraa, että kuvaus f on isomorfismi ja näin ollen kuvaus ϕ toteuttaa ehdon $\otimes_2$.
Toisaalta, jos kuvaus ϕ toteuttaa ehdon $\otimes_2$, tällöin kuvaus f on injektio ja kuvaus f lineaarinen isomorfismi. Jolloin kuvaus ϕ toteuttaa ehdon $\otimes_1$. □

Lause 7.1 tarkoittaa, että mikäli vektoriavaruudet E, F ja T ovat äärellisulotteisia, bilineaarisen kuvauksen ϕ toteuttaessa ehdon $\otimes_1$, se toteuttaa myös ehdon $\otimes_2$ ja päin vastoin.

Lause 7.2. *Olkoot E, E', F ja F' äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja olkoot bilineaarinen kuvaus*

$$\beta : L(E; E') \times L(F; F') \to L(E \otimes F; E' \otimes F')$$

sellainen, että

$$(\phi \times \psi) \to \phi \otimes \psi.$$

Pari $(L(E_1 \otimes F_1; E_2 \otimes F_2), \beta)$ on avaaruuksien $L(E; E')$ ja $L(F; F')$ tensoritulo.

Todistus. Olkoot $\phi : E \to E'$ ja $\psi : F \to F'$ lineaarisia kuvauksi, missä $dim\ E = n, \dim\ E' = n', dim\ F = m$ ja $dim\ F' = m'$. Aikaisemmin on osoitettu, että tällainen kuvaus β toteuttaa ehdon $\otimes_2$. Koska avaruudet E, E', F ja F' ovat äärellisulotteisia, pätee yhtälö

$$dim\ L(E \otimes F; E' \otimes F') = (nm) \cdot (n'm')$$

$$= (nn') \cdot (mm')$$

$$= dim\ L(E, E') \cdot dim\ L(F; F').$$

Näin ollen kuvaus β toteuttaa myös ehdon $\otimes_1$. □

8 Tensorit

8.1 Määritelmä

Määritelmä 8.1. Olkoot E vektoriavaruus ja käsitellään paria $(\otimes^p E, \otimes^p)$, missä:

$$\otimes^p E = E \otimes \cdots \otimes E \quad p \geq 2.$$

Määritellään vielä tilanteet, missä $p = 0$ tai $p = 1$ siten, että $\otimes^1 = E$ ja $\otimes^0 = K$. Sanotaan, että $(\otimes^p E, \otimes^p)$ on avaruuden E p:s tensoripotenssi ja avaruutta $\otimes^p E$ kutsutaan myös avaruuden E p:nneksi potenssiksi ja sen alkioita sanotaan p asteisiksi tensoreiksi tai pelkästään tensoreiksi.

Tensorit ovat siis avaruuden $\otimes^p E$ alkioita, missä avaruutta $\otimes^p E$ sanotaan vektoriavaruuden E p:nneksi tensoripotenssiksi. Muotoa $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p,\ p \geq 1$ ja astetta nolla olevia tensoreita sanotaan hajoaviksi tensoreiksi.

Huomautus 8.2. "Astetta nolla"olevat tensorit ovat kerroinkunnan K alkioita.

Lause 8.3. *Olkoot β sellainen yksikäsitteinen bilineaarinen kuvaus*

$$\beta : \otimes^p E \times \otimes^q E \to \otimes^{p+q} E,$$

että

$$\beta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q},$$

missä $x_i \in E$. Nyt pari $(\otimes^{p+q} E, \beta)$ on avaruuksien $\otimes^p$ ja $\otimes^q$ tensoritulo.

Todistus. Todistus seuraa suoraan tensoritulon ominaisuuksista. □

Lause 8.3 osoittaa, että vektoriavaruuden E tensoripotenssien $\otimes^p E$ ja $\otimes^q E$ välille löydetään tensoritulo, jolloin myös muodostunutta avaruutta $\otimes^{p+q} E$ voidaan käsitellä tensoritulona. Erityisesti avaruus $\otimes^{p+q} E$ on edelleen avaruuden E $p+q:s$ tensoripotenssi.

8.2 Tensorien Ominaisuuksia

Lause 8.4. *Olkoot $u = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \in \otimes^p E$ ja $v = (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \in \otimes^q E$ tensoreita. Nyt saadaan uusi tensori $u \otimes v$ avaruudelle $\otimes^{p+q} E$, missä*

$$u \otimes v = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{q+p}, \quad x_i \in E.$$

Todistus. Koska alkiot u ja v ovat tensoreita, niin tällöin on olemassa yksikäsitteinen bilineaarikuvaus

$$\beta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q} E) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}.$$

Kuvaus β voidaan kirjoittaa myös alkioiden u ja v tensoritulona, jolloin

$$u \otimes v = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \quad x_i \in E.$$

□

Näin muodostunutta uutta tensoria $u \otimes v$ sanotaan tensorien u ja v tuloksi.

Seuraus 8.5. *Tensorien u ja v tulo on assosiatiivinen.*

Huomautus 8.6. Tensoritulo $\lambda \otimes z$, missä $\lambda \in \otimes^0 E = K$ ja $z \in \otimes^p E$ tuottaa vektorin avaruudelle $\otimes^p E$. Tämä uusi vektori saadaan kertomalla vektoria z skalaarilla λ.

Lause 8.7. *Olkoot* $e_{v_{v \in I}}$ *avaruuden* E *kanta. Nyt tulot* $e_{v_1} \otimes \cdots \otimes e_{v_p}$ *muodostavat avaruuden* $\otimes^p E$ *kannan.*

Todistus. Todistus seuraa suoraan tensoritulon ominaisuuksista. □

Seuraus 8.8. *Olkoot avaruus* E *äärellisulotteinen ja* e_v $(v = 1, ..., n)$ *avaruuden* E *kanta. Nyt* $dim\ \otimes^p E = n^p$*, missä* $n = dim\ E$*.*

Lause 8.9. *Jokainen tensori* $z \in \otimes^p E$ *voidaan kirjoittaa yksikäsitteisenä summana*

$$z = \sum_{(v)} \zeta^{v_1,...,v_p} e_{v_1} \otimes ... \otimes e_{v_p}.$$

missä $\zeta^{v_i} \in K$*. Kertoimia* $\zeta^{v_1,...,v_p}$ *sanotaan tensorin* z *tekijöiksi kannan* e_v *suhteen.*

Lähdeluettelo

[1] W.H. Greup, *Linear Algebra,* 3rd edition, Springer-Verlag, New York 1967.

[2] W.H. Greup, *Multilinear Algebra,* 2nd edition, Springer-Verlag, New York 1978.