Grothendieckin ryhmä

LuK-tutkielma
Sami Lyytikäinen
2368313
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisältö

Johdanto

Grothendieckin ryhmä saa nimensä matemaatikko Alexander Grothendieckiltä. Grothendieckin ryhmän konstruktio perustuu Alexander Grothendieckin työhön kategoriateorian ja hänen kehittämänsä K-teorian parissa.

1 Keskeisiä määritelmiä

Grothendieckin ryhmä on ryhmäteorian aihe, joten aihetta käsitellessä muutamat ryhmäteorian käsitteet tulevat keskeisesti esille. Tässä kappaleessa käyn läpi näistä käsitteistä aiheen kannalta tärkeimpien määritelmät.

Määritelmä 1.1. Monoidi on rakenne, joka koostuu epätyhjästä joukosta S sekä siihen määritellystä binäärioperaatiosta $*$. Monoidia merkitään $(S, *)$. Monoideille pätevät seuraavat ehdot:

1. Suljettu: Kaikille alkioille $a, b \in S$ on olemassa alkio $a * b \in S$,
2. Assosiatiivinen: Kaikille alkioille $a, b, c \in S$ pätee $(a * b) * c = a * (b * c)$,
3. Neutraalialkio: On olemassa neutraalialkio $0_S \in S$ kaikille alkioille $a \in S$ siten että $0_S * a = a * 0_S = a$.

Huomautus 1.2. Monoidi on puoliryhmä joka on varustettu neutraalialkiolla.

Määritelmä 1.3. Ryhmä on rakenne, joka koostuu epätyhjästä joukosta R sekä siihen määritellystä binäärioperaatiosta $*$. Ryhmää merkitään $(R, *)$. Ryhmille pätee kaikkien monoidien ehtojen lisäksi vielä seuraava ehto:

4. Käänteisalkio: Kaikille alkioille $a \in R$ on olemassa käänteisalkio $a^{-1} \in R$ siten, että $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 0_R$.

Määritelmä 1.4. Jos ryhmälle tai monoidille pätee seuraava ominaisuus, niin ryhmä tai monoidi on kommutatiivinen.

5. Kommutatiivisuus: Kaikille alkioille $a, b \in G$ pätee $a * b = b * a$,

Esimerkki 1.5. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskuoperaatiolla $+$ muodostaa selkeästi kommutatiivisen monoidin $(\mathbb{N}, +)$, jossa neutraalialkio $0_{\mathbb{N}}$ on luku $0 \in \mathbb{N}$.

Kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskuoperaatiolla $+$ puolestaan muodostaa selkeästi kommutatiivisen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$, jossa neutraalialkio $0_{\mathbb{Z}}$ on luku $0 \in \mathbb{Z}$ ja jokaisen alkion $a \in \mathbb{Z}$ käänteisalkio on $-a \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä 1.6. Binäärirelaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukolla S jos ja vain jos kaikille joukon S alkioille $a, b, c \in S$ pätee:

1. Refleksiivisyys: $a \sim a$
2. Symmetrisyys: $a \sim b$ jos ja vain jos $b \sim a$
3. Transitiivisuus: jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$

Esimerkki 1.7. Perinteinen yhtäsuuruuden binäärirelaatio $=$ muodostaa selkeästi ekvivalenssirelaation tavallisten luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ joukossa, mutta perinteiselle binäärirelaatiolle $<$ pätee näistä ominaisuuksista selkeästi vain transitiivisuus luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ joukossa.

Määritelmä 1.8. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukolla S, ja $a \in S$. Ekvivalenssiluokka $\langle a \rangle$ on niiden alkioiden $x \in S$ joukko, joille pätee $a \sim x$. Merkitään $\langle a \rangle = \{x \in S : a \sim x\}$.

Esimerkki 1.9. Modulolaskennan relaatio modulo 5 joukolla $\mathbb{Z}$ muodostaa ekvivalenssiluokat $\langle a \rangle = \{x \in \mathbb{Z} : a = x + 5 \cdot k\}$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Eli esimerkiksi $\langle 2 \rangle = \{x \in \mathbb{Z}, 2 = x + 5 \cdot k\} = \{..., -3, 2, 7, 13, ...\}$.

Huomautus 1.10. Ekvivalenssirelaation $\sim$ muodostamaa joukon S ekvivalenssiluokken joukkoa merkitään $S/\sim$.

Määritelmä 1.11. Olkoot $(S, *)$ ja $(J, \bullet)$ ryhmiä. Kuvaus $f : S \to J$ on ryhmähomomorfismi, jos

$$f(a * b) = f(a) \bullet f(b)$$

kaikilla $a, b \in S$.

2 Grothendieckin ryhmä ja Grothendieckin kuvaus

Grothendieckin ryhmän konstruktio on universaalein tapa konstruoida kommutatiivinen ryhmä kommutatiivisesta monoidista, ja erityisesti sitä voidaan käyttää yksinkertaisena tapana konstruoida esimerkiksi kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ luonnollisten lukujen joukosta $\mathbb{N}$ sekä rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ kokonaislukujen joukosta $\mathbb{Z}$.

Määritelmä 2.1. Olkoon $(S, +)$ kommutatiivinen monoidi. Määritellään relaatio $\sim$ joukolle $S \times S$ siten, että kaikille $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \times S$ pätee

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2),$$

jos on olemassa $z \in S$ siten, että

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Esimerkki 2.2. Tavallinen yhteenlasku $+$ ja luonnolliset luvut $\mathbb{N}$ muodostavat kommutatiivisen monoidin $(\mathbb{N}, +)$, ja relaatio $\sim$ voidaan määritellä joukolle $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ siten, että kaikille alkioille $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ pätee

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2),$$

jos on olemassa luonnollinen luku $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n_1 + m_2 + k = n_2 + m_1 + k.$$

Eli esimerkiksi $(5, 3) \sim (6, 4)$ koska

$$5 + 4 + k = 6 + 3 + k$$

kun $k \in \mathbb{N}$ on mikä tahansa luonnollinen luku.

(Myöhempiä vaiheita varten on hyvä huomata, että $5-3 = 2$ ja $6-4 = 2$.)

Lause 2.3. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $S \times S$.*

Todistus. Olkoon $(x, y) \in S \times S$, tällöin

$$(x, y) \sim (x, y)$$

jos on olemassa $z \in S$ siten, että

$$x + y + z = x + y + z.$$

Tämä pitää selvästi paikkaansa kaikilla $(x, y) \in S \times S$, eli relaatio on refleksiivinen.

Koska yhtälö

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$x_2 + y_1 + z = x_1 + y_2 + z$$

kanssa, on selvää että relaatio on symmetrinen.

Olkoon $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ja $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$. Tällöin joukossa S on olemassa alkiot $z, w \in S$ siten, että

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z,$$

$$x_2 + y_3 + w = x_3 + y_2 + w.$$

Pitää siis osoittaa, että $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$, eli pitää olla olemassa alkio $h \in S$ siten, että

$$x_1 + y_3 + h = x_3 + y_1 + h.$$

Koska monoidi $(S, +)$ on suljettu ja $y_2, z, w \in S$, niin $y_2 + z + w \in S$, eli voidaan tehdä valinta

$$h = y_2 + z + w.$$

Jatkaen käyttämällä relaatioiden $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ja $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ ehtoja sekä monoidin ominaisuuksia saadaan:

$$x_1 + y_3 + h = y_3 + w + (x_1 + y_2 + z) = y_1 + z + (x_2 + y_3 + w)$$

$$= x_3 + y_1 + (y_2 + z + w) = x_3 + y_1 + h$$

Eli $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$, ja relaatio $\sim$ on refleksiivinen, siis se on ekvivalenssirelaatio. □

Huomautus 2.4. Ekvivalenssirelaation määritelmässä lisätään z kummallekkin puolelle siksi, että kaikille monoideille ei välttämättä päde seuraava supistussääntö:

Jos $a + c = b + c$, niin $a = b$ ja jos $c + a = c + b$ niin $a = b$.

Jos monoidille tai ryhmälle pätee tämä sääntö, niin sillä sanotaan olevan supistumisominaisuus.

Määritelmä 2.5. Olkoot $\langle x, y\rangle$ ekvivalenssiluokka, joka sisältää alkion (x, y) joukossa $S \times S$. Määritellään + operaatio ekvivalenssiluokille $\langle x, y\rangle$ seuraavalla tavalla:

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle .$$

Alkioiden $\langle x, y\rangle$ muodostamaa joukkoa merkitään $G(S)$, ja sitä kutsutaan Grothendieckin ryhmäksi.

Huomautus 2.6. Joukko $G(S)$ on siis ekvivalenssirelaation $\sim$ joukossa $S \times S$ muodostamien ekvivalenssiluokkien joukko $(S \times S)/\sim$.

Esimerkki 2.7. Olkoot $\langle n, m\rangle$ ekvivalenssiluokka joka sisältää alkion $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nyt esimerkiksi $(6,4) \sim (5,3) \sim (10,8) \sim (2,0)$, eli kaikki nämä parit kuuluvat ekvivalenssiluokkaan $\langle 2, 0\rangle$, ja nämä ekvivalenssiluokat muodostavat Grothendieckin ryhmän $G(\mathbb{N})$. Kun $+$ operaatio määritellään vielä samalla tavalla kuin määritelmässä 2.5, niin esimerkiksi $\langle 5,3\rangle + \langle 2,0\rangle = \langle 7,3\rangle$ ja $\langle 3,5\rangle + \langle 0,2\rangle = \langle 3,7\rangle$.

On helppo ajatella ekvivalenssiluokat $\langle n, m\rangle$ kuvaamaan lukuja $n - m$. Kun m on suurempi kuin n, niin ne vastaavat negatiivisia kokonaislukuja, ja koska ne ovat osa ryhmää $G(\mathbb{N})$, sen voidaan ajatella vastaavan kaikkien kokonaislukujen ryhmää. Konstruoimalla Grothendieckin ryhmä joukolle $\mathbb{N}$ ollaan siis konstruoitu positiivisista kokonaisluvuista kaikkien kokonaislukujen joukko.

Lause 2.8. *Grothendieckin ryhmä on kommutatiivinen ryhmä.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että operaatio $+$ on hyvin määritelty, eli että se ei riipu ekvivalenssiluokkien valinnasta. Olkoot

$$x_1, x_2, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2, z, w \in S.$$

Jos $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$ ja $\langle u_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_2\rangle$, niin $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ja $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$, eli:

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$$

$$u_1 + v_2 + w = u_2 + v_1 + w.$$

Täytyy osoittaa, että $\langle x_1 + u_1, y_1 + v_1\rangle = \langle x_2 + u_2, y_2 + v_2\rangle$, eli toisin sanoen että $(x_1 + u_1, y_1 + v_1) \sim (x_2 + u_2, y_2 + v_2)$. Nyt

$$x_1 + u_1 + y_2 + v_2 + (z + w) = (x_1 + y_2 + z) + (u_1 + v_2 + w)$$

$$= (x_2 + y_1 + z) + (u_2 + v_1 + w) = x_2 + u_2 + y_1 + v_1 + (z + w),$$

ja koska kommutatiivinen monoidi $(S, +)$ on suljettu, niin $z + w \in S$, eli $(x_1+u_1, y_1+v_1) \sim (x_2+u_2, y_2+v_2)$ ja $\langle x_1 + u_1, y_1 + v_1\rangle = \langle x_2 + u_2, y_2 + v_2\rangle$. Eli toisin sanoen operaatio $+$ on hyvin määritelty.

Suljettu: Koska monoidi $(S, +)$ on suljettu, $x_1 + x_2$ ja $y_1 + y_2$ kuuluvat joukkoon S. Tämän takia $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$ kuuluu joukkoon $G(S)$, ja rakenne $(G(S), +)$ on siis suljettu.

Assosiatiivisuus: Operaatio $+$ on assosiatiivinen joukossa $G(S)$, koska

$$(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_3\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle$$

$$= \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 \rangle$$

ja

$$\langle x_1, y_1 \rangle + (\langle x_2, y_3 \rangle + \langle x_3, y_3 \rangle) = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2 + x_3, y_2 + y_3 \rangle$$
$$= \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 \rangle .$$

Neutraalialkio: Rakenteen $(G(S), +)$ neutraalialkio on $\langle 0_S, 0_S \rangle$, koska

$$\langle x, y \rangle + \langle 0_S, 0_S \rangle = \langle x + 0_S, y + 0_S \rangle = \langle x, y \rangle$$

ja

$$\langle 0_S, 0_S \rangle + \langle x, y \rangle = \langle 0_S + x, 0_S + y \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Käänteisalkio: Koska

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x + y, y + x \rangle$$

ja

$$(x + y) + 0_S + z = 0_S + (y + x) + z,$$

eli $(x + y, y + x) \sim (0_S, 0_S)$ ja $(y + x, x + y) \sim (0_S, 0_S)$, niin

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle 0_S, 0_S \rangle = 0_{G(S)}.$$

Eli rakenteessa $(G(S), +)$ alkioiden $\langle x, y \rangle \in G(S)$ käänteisalkiot $-\langle x, y \rangle$ ovat alkiot $\langle y, x \rangle$.

Kommutatiivisuus: Kommutatiivisen monoidin $(S, +)$ kommutatiivisuudesta seuraa, että:

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_2 + x_1, y_2 + y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle$$

Siis myös rakenne $(G(S), +)$ on kommutatiivinen.

Siis $(G(S), +)$ on kommutatiivinen ryhmä. □

Määritelmä 2.9. Olkoon y alkio joukossa S. Kuvaus

$$\gamma_S : S \to G(S), x \mapsto \langle x + y, y \rangle$$

on Grothendieckin kuvaus.

Esimerkki 2.10. Grothendieckin kuvaus

$$\gamma_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to G(\mathbb{N}), n \mapsto \langle n + m, m \rangle$$

siis kuvaa luonnolliset luvut $n \in \mathbb{N}$ ekvivalenssiluokaksi $\langle n + m, m \rangle$, esimerkiksi

$$\gamma_{\mathbb{N}}(5) = \langle 8, 3 \rangle ,$$

jos valitaan $m = 3$.

3 Ominaisuuksia

Lause 3.1. *Grothendieckin kuvaus*

$$\gamma_S : S \to G(S), x \mapsto \langle x+y, y \rangle$$

on riippumaton alkion y valinnasta.

Todistus. Jotta kuvaus γ_S olisi riippumaton alkion y valinnasta, alkioille $y, z \in S$, $y \neq z$, täytyy pitää paikkaansa, että

$$\langle x+y, y \rangle = \langle x+z, z \rangle .$$

Tämä on yhdenpitävää sen kanssa, että

$$(x+y, y) \sim (x+z, z).$$

Toisin sanoen relaation $\sim$ määritelmän perusteella, on oltava alkio $w \in S$ siten, että

$$(x+y)+z+w = (x+z)+y+w,$$

mikä on monoidin $(S, +)$ ominaisuuksien perusteella selvästi totta kaikilla $w \in S$ kun $x \neq y$. $\square$

Esimerkki 3.2. Valinnalla $y = 2$, Grothendieckin kuvauksen arvo

$$\gamma_{\mathbb{N}}(5) = \langle 5+2, 2 \rangle = \langle 7, 2 \rangle$$

on siis täysin sama kuin kuvauksen arvo valinnalla $y = 3$,

$$\langle 5+3, 3 \rangle = \langle 8, 3 \rangle .$$

Taas on hyvä huomata, että $7 - 2 = 8 - 3 = 5$.

Lause 3.3. *Grothendieckin kuvaukselle pätee*

$$\gamma_S(x+y) = \gamma_S(x) + \gamma_S(y),$$

eli toisin sanoen se on additiivinen.

Todistus. Lauseen 3.1 perusteella neutraalialkio $0_S \in S$ voidaan valita ekvivalenssiluokkaan lisättäväksi alkioksi, eli lauseen yhtälö saadaan muotoon:

$$\langle x+y+0_S, 0_S \rangle = \langle x+0_S, 0_S \rangle + \langle y+0_S, 0_S \rangle .$$

Operaation $+$ määritelmän perusteella saadaan:

$$\langle x+0_S, 0_S \rangle + \langle y+0_S, 0_S \rangle = \langle x+0_S+y+0_S, 0_S+0_S \rangle = \langle x+y+0_S, 0_S \rangle .$$

Eli kuvaus γ_S on additiivinen. $\square$

Lause 3.4. *Joukon S Grothendieckin ryhmä $G(S)$ voidaan esittää myös muodossa*

$$G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}\,.$$

Todistus. Jokainen joukon $G(S)$ alkio on ekvivalenssiluokka, joka on muotoa $\langle x, y\rangle$ jollain $x, y \in S$, ja

$$\langle x, y\rangle = \langle x+y+x, y+x+y\rangle = \langle x+y, y\rangle + \langle x, x+y\rangle\,.$$

Koska $-\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ saadaan

$$\langle x+y, y\rangle + \langle x, x+y\rangle = \langle x+y, y\rangle - \langle x+y, x\rangle = \gamma_S(x) - \gamma_S(y)$$

□

Lause 3.5. *Olkoot x, y alkiot joukossa S. Nyt $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ jos ja vain jos $x + z = y + z$ jollain $z \in S$.*

Todistus. $\Rightarrow$ Seuraa suoraan kuvauksen γ_S additiivisuudesta ja siitä, että $G(S)$ on ryhmä.

$\Leftarrow$ Jos $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$, niin

$$\langle x+y, y\rangle = \langle y+x, x\rangle\,,$$

ja koska siis $(x+y, y) \sim (y+x, x)$, niin

$$x+y+x+w = y+x+y+w$$

jollain $w \in S$. Nyt kun valitaan $z = x+y+w$, niin saadaan

$$x+z = y+z$$

□

Lause 3.6. *Grothendieckin kuvaus $\gamma_S : S \to G(S)$ on injektio, eli kaikilla $x, y \in S$, $x \neq y$ pätee $\gamma_S(x) \neq \gamma_S(y)$, jos ja vain jos monoidilla S on supistumisominaisuus.*

Todistus. Tämä seuraa suoraan lauseesta 3.5. □

Lause 3.7. *Universaali ominaisuus. Jos H on kommutatiivinen ryhmä ja $\eta : S \to H$ on additiivinen kuvaus, niin on olemassa yksi ja vain yksi ryhmähomomorfismi $\psi : G(S) \to H$ jolle pätee*

$$\eta = \psi \circ \gamma_S.$$

Todistus. Jos $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$, niin $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, eli

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$$

jollain $z \in S$. Nyt koska η on additiivinen kuvaus, niin

$$\eta(x_1) + \eta(y_2) + \eta(z) = \eta(x_2) + \eta(y_1) + \eta(z).$$

Koska H on kommutatiivinen ryhmä, tämä saadaan muotoon

$$\eta(x_1) - \eta(y_1) = \eta(x_2) - \eta(y_2).$$

Eli kun valitaan

$$\psi : G(S) \to H, \langle x, y\rangle \mapsto \eta(x) - \eta(y)$$

niin kuvaus ψ on uniikki, ja sille pätee $\eta = \psi \circ \gamma_S$. □

Lause 3.8. *Olkoot S ja T monoideja. Jokaiselle additiiviselle kuvaukselle $\eta : S \to T$ on olemassa täsmälleen yksi ryhmähomomorfismi*

$$G(\eta) : G(S) \to G(T)$$

siten, että

$$G(\eta) \circ \gamma_S = \gamma_T \circ \eta$$

Todistus. Seuraa suoraan lauseesta 3.7. □

Lause 3.9. *Olkoon $(H, +)$ kommutatiivinen ryhmä, ja olkoon joukko S joukon H epätyhjä osajoukko. Jos joukko S on suljettu operaation $+$ suhteen ja joukko S sisältää neutraalialkion, niin $(S, +)$ on kommutatiivinen monoidi jolla pätee supistamissääntö, joukko $G(S)$ on isomorfinen joukon S virittämän aliryhmän H_0 kanssa, ja $H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.*

Todistus. Kommutatiivisen ryhmän $(H, +)$ epätyhjä osajoukko S joka on suljettu operaation $+$ suhteen on kommutatiivinen monoidi, jolle pätee supistamissääntö. Lauseen 3.7 nojalla on olemassa ryhmähomomorfismi

$$\psi : G(S) \to H$$

siten, että $\psi(\gamma_S(x)) = x$ kaikille joukon S alkioille $x \in S$. Lauseen 3.4 perusteella kuvaajan ψ kuvajoukko on

$$\{x - y : x, y \in S\} = H_0.$$

Jos

$$\psi(\gamma_S(x) - \gamma_S(y)) = 0,$$

niin $x = y$, eli

$$\gamma_S(x) - \gamma_S(y) = 0.$$

Siis kuvaus ψ on injektiivinen. □

Lähdeluettelo

[1] Lang, Serge: *Algebra* Addison-Wesley, 1965.

[2] A.G.Hamilton: *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics* Cambridge University Press, 1982.