Funktioiden integroimissääntöjä lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma

Riku Laiti
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto

Kevät 2022

Sisältö

1 Johdanto

Tulevaisuuden ongelmat – niiden määrittely ja ratkaisujen etsiminen niihin – ovat lukion matematiikan opetuksen keskiössä. Uusi Lukion opetussuunnitelmien perusteet, LOPS 2019, otettiin käyttöön lukion aloittaneilla opiskelijoilla 1.8.2021 alkaen. LOPS:n 2019 oppimiskäsitys perustuu opiskelijoiden ajattelun ja ajatteluvalmiuksien kehittämiselle. Opetellaan uusien näkökulmien soveltamista sekä ratkaisujen etsimistä poikkitieteellisesti ja laaja-alaisesti.

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -oppimateriaaliprojektia, jossa julkaistaan vapaaseen käyttöön aineistoa lukion pitkän matematiikan moduuleille. Tutkielma sisältää opetusmateriaalin ja sille tieteelliseen tietoon perustuvat tavoitteet ja perustelut. Opetusmateriaali koostuu moduulille MAA7 Integraalilaskenta käyttöä varten tarkoitetuista opiskelijan oppimateriaalista, opettajan oppaasta ja tehtävien vastauksista.

Tässä kirjan osiossa keskitytään loppujen moduulissa MAA7 käsiteltävien alkeisfunktioiden integroimissääntöjen käsittelyyn ja sovelletaan niitä x-akselin suhteen määrätyn integraalin laskemiseen. Suurin osa integroimissäännöistä johdetaan pohdintatehtävien avulla, jotta opiskelija itse pääsee osallistumaan matemaattiseen prosessiin ja kehittämään matemaattista identiteettiään.

2 Oppikirjan tavoitteet

Matemaattisten aineiden opiskelijoita pyritään valmistamaan tulevaisuuteen, jonka ongelmat ratkaisuineen eivät ole vielä tiedossa. LOPS:ssa 2019 korostuu opiskelijoiden ajattelun ja sen valmiuksien kehittäminen valmiin ongelmaratkaisumallin sijaan. Opiskelijoiden tulee oppia soveltamaan uusia näkökulmia ja tuottamaan laaja-alaisia tai jopa poikkitieteisiä ratkaisuja. [16] Tämä oppikirja pyrkii vastaamaan tulevaisuuden haasteisiin herättämällä uteliaisuutta matemaattisiin prosesseihin ja vahvistamalla opiskelijan matemaattista identiteettiä.

Jo muinoin oppineet tiesivät taitavan ja asiantuntevan tuutorin olevan tehokkain opettaja. [2] Osaava sokraattinen ohjaaja esittää vähän väitteitä ja kyselee paljon ja tarkkaan harkittuja ohjailevia kysymyksiä, sillä hän tietää, että ihmettely, kyseenalaistaminen ja keskustelu edistävät pitkäkestoista oppimista. Tämä kirja sisältää pohdiskelevia tehtäviä, jotka etenevät konstruktivistisesti, ja se toimii myös itsenäisen opiskelun välineenä.

Opiskelijat oppivat paremmin, kun he ovat uteliaita, kekseliäitä, joustavia ja yhteistyöhön osallistuvia. [16] Siksi kirjan suunnittelu pohjautuu artikkeleiden *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [4] ja *Collaborative Learning in Mathematics* [24] periaatteille, jotka ovat linjassa LOPS:n 2019 oppimiskäsityksen ja toimintakulttuurin kanssa. Habits of Mind artikkelin kirjoittajat vaativat, että opetuksen tavoite on matemaattisen työskentelyprosessin oppimisessa sen sijaan, että opiskeltaisiin pelkkiä matemaattisia tuloksia kuten lauseita [4]. Tavoitetta tukevat opiskelijan matemaattista identiteettiä vahvistavat tehtävätyypit, jotka esitellään artikkelissa Collaborative Learning in Mathematics [24]. Jokainen näistä teksteistä ja niiden vaikutteista kirjaan käsitellään seuraavissa alaluvuissa.

2.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet

Uusi lukion opetussuunnitelman perusteet, LOPS 2019, otettiin käyttöön lukion aloittaneilla opiskelijoilla 1.8.2021 alkaen. Tämän kirjasarjan tekemiselle on tullut tarve uuden LOPS 2019 asettamisen myötä. LOPS 2019 asettaa opiskelijoiden ajattelun ja ajatteluvalmiuksien kehittämisen tärkeimmäksi tavoitteeksi. Lukiossa opetellaan uusien näkökulmien soveltamista ja etsitään ratkaisuja poikkitieteellisesti ja laaja-alaisesti, jotta yleissivistys vahvistuu. Lisäksi sen tavoitteena on "kehittää lukion opetusta niin, että se tukee opiskelijoiden hyvinvointia, antaa opiskelijoille jatko-opinto- ja työelämävalmiuksia nykyistä kattavammin sekä tukee opiskelijoiden yksilöllisiä tarpeita ja oppimista." [17]

Yliopistojen opiskelijavalintojen uudistuksen myötä matematiikan pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen tulosta on alettu painottaa muita aineita enemmän. [17] Muutos ei ole jäänyt huomaamatta opiskelijoilta ja viime vuosien aikana pitkää matematiikkaa on alettu kirjoittaa enemmän kuin lyhyttä. [19] Oppikirjan tavoitteena myös on vähentää opiskelijan stressiä, koska kokonaisvaltaisemman osaamisen luoma hyvän matemaattisen identiteetin tuntemus on osa hyvinvointia.

Tälle osalle oppimateriaalia olennaisia tavoitteita ovat seuraavat LOPS:n 2019 asettamat tavoitteet.

Opiskelijan tulee

- ymmärtää integraalifunktion käsite ja oppia määrittämään yksinkertaisten funktioiden integraalifunktioita
- ymmärtää määrätyn integraalin käsite ja sen yhteyden pinta-alaan sekä tutustuu numeeriseen menetelmään määrätyn integraalin määrittämisessä
- osata määrittää pinta-aloja määrätyn integraalin avulla
- perehtyä integraalilaskennan sovelluksiin
- osata käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa, integraalifunktion määrittämisessä, määrätyn integraalin laskemisessa sovellusten yhteydessä sekä numeerisessa integroinnissa. [16]

LOPS:ssa mainitut oleelliset sisällöt tälle oppimateriaalin osalle ovat:

- integraalifunktio ja tärkeimpien alkeisfunktioiden integrointi
- määrätty integraali
- pinta-alan laskeminen. [16]

Oppimateriaalissa käsitellään moduulin tarpeelliset integroimiskaavat ja kerrataan mainittuja sisältöjä jäljelle jääneiden alkeisfunktioiden osalta. Käsiteltävät alkeisfunktiot ovat rationaali-, juuri- ja eksponenttifunktiot. Suurin osa integroimissäännöistä johdetaan pohdintatehtävien avulla, jotta opiskelija itse pääsee osallistumaan matemaattiseen prosessiin. Pohdintatehtäviä avataan enemmän Tehtävätyypit-luvussa.

Michael Spivakin [23] mukaan integraalilaskentaa opiskeltaessa on tärkeää keskittyä alkeisfunktioihin, koska integrointi on differentiaalilaskennan vakioaihe, joten jokaisen tulee osata sitä [23]. Lisäksi hyödyllisimmät integrointimenetelmät ovat oikeastaan merkittäviä teoreemoja, jotka koskevat kaikkia funktioita, eivätkä vain alkeisfunktioita [23]. Jälkimmäinen syy on oleellisempi. Samaa mieltä on myös Orton [18, 23]. "Vaikka ennen pitkää jotkin yksityiskohdat opittavista integrointimenetelmistä saattaakin unohtaa, ei koskaan tulisi unohtaa perusmenetelmiä" [23].

LOPS:ssa 2019 nimetään yleissivistäviä laaja-alaisen osaamisen teemoja, joista tähän oppimateriaaliin luotuihin pohdinta- ja harjoitustehtäviin on painotettu *vuorovaikutusosaamista* ja *monitieteistä ja luovaa osaamista*. Useat oppimateriaalin pohdintatehtävät sisältävät yhteistyöskentelyä, jossa opiskelijat keskustelevat ilmiöistä, päättelyketjuista tai tuloksista.

Lukion matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistyminen keväällä 2019 toi tarpeen opetella ja harjoitella uusia Abitti-järjestelmän ohjelmia, joista tässä oppimateriaalissa käytetään lähinnä GeoGebra-ohjelmistoa. GeoGebra on määritelty GeoGebra.org sivustolla seuraavasti: "GeoGebra on dynaaminen matematiikan ohjelmisto, joka tuo käyttäjille geometrian, algebran, taulukkolaskennan, kuvaajien piirron, tilastotieteen ja analyysin helppokäyttöisesti samassa paketissa." [7] GeoGebraa käytetään pohdintatehtävissä funktioiden kuvaajien analysoimisen helpottamiseksi, jotta taustalla olevat ilmiöt eivät sekoitu teknisten muotoseikkojen alle.

Ohjelmistotaitojen osalta moduulin MAA7 tavoitteena on, että opiskelija

- osaa piirtää pinta-alan tehtävänannon mukaisesti
- osaa arvioida pinta-alan ylä- ja alasummien avulla dynaamisesti (idea määrätyn integraalin määritelmästä)
- osaa integroida funktion ja laskea määrätyn integraalin arvon (tarkan arvon ja likiarvon)
- osaa havainnollistaa, esim. liukusäätimen avulla, integroimisvakion C vaikutusta integraalifunktion kuvaajaan
- tutustuu pyörähdyskappaleen havainnollistamiseen
- tutustuu menetelmiin laskea määrättyjä integraaleja numeerisesti, esim. suorakaidesäännön avulla. [14]

Näistä oleellisia tälle kirjan osalle ovat erityisesti alkeisfunktioiden integraalien havainnollistamiseen, piirtämiseen ja määrätyn integraalin laskemiseen liittyvät osiot.

2.2 Habits of Mind

Tutkijat Cuoco, Goldenberg ja Mark vaativat artikkelissaan *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* matematiikan opetussuunnitelmissa asetettavan tavoitteeksi lukion opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehittämisen pelkkien matemaattisten tulosten opiskelun sijasta. Tavoitteena on auttaa lukiolaisia oppimaan ja omaksumaan tapoja, joilla matemaatikot ajattelevat ongelmia. [4]

Tällaisten ajattelun tapojen pohjalta tehty opetussuunnitelma yrittää poistaa kuilun matemaattisten tulosten ja niiden tekemisprosessin välillä. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että matemaattisten lauseiden taustalla on monia matemaattisia prosesseja, kuten kokeilemiset, visualisoinnit ja arvailut - unohtamatta tietenkin epäonnistumisia. Ne ovat hyödyllisiä strategioita ja tärkeitä vaiheita matemaattisessa työskentelyssä, jotka vain itse työn tekijä pääsee kokemaan. [4]

Tarkoitus on opettaa yleishyödyllisiä ongelmanratkaisumenetelmiä ja taitoa tunnistaa, milloin niitä on hyvä hyödyntää. Näin opetussuunnitelman ja oppikirjojen sisällöistä saadaan laaja-alaisempia kokonaisuuksia ja ne eivät vanhene nopeasti muuttuvassa maailmassa. *Habits of Mind* -artikkelin kahdeksasta tavoitteesta opiskelijoille olemme valinneet tähän kirjaan neljä päätavoitetta - visualisoija, kuvailija, arvaaja ja kokeilija - joiden pohjalta oppimateriaalin sisältö on kehitetty. [4]

Visualisoija (*Visualizer*)

Visualisointi on usein tärkeä vaihe ratkaisun löytämiseksi, kun ongelma on aluksi haasteellinen hahmottaa. Visualisointi voi olla esimerkiksi laajuuden, kompleksisuuden tai yhteyksien samanaikaista hahmottamista. Orton painottaa artikkelissaan *Students' understanding of integration*, että integraalilaskentaan tutustuttaessa on tärkeää tarjota heti alusta alkaen visuaalisia keinoja, kuten kuvaajat ja diagrammit, jotta yhteys avautuu selkeimmin. [18] Samoja teemoja käsittelee Ferrer. [6] Oppimateriaalissa käytetään oppimisen tehostamiseksi GeoGebra-ohjelmiston visualisointimahdollisuuksia, jotka ovat käytettävissä myös matematiikan ylioppilaskokeissa.

Visualisointia rohkaistaan tekemään graafisten laskinten GeoGebran avulla heti oppimateriaalin alusta alkaen ja erityisesti kuvaajien analysointiin keskitytään pohdintatehtävissä A.1, A.2, A.4, A.5, A.16, A.26 ja useissa pinta-alan laskemista vaativissa harjoitustehtävissä.

Kuvailija (*Describer*)

Matematiikan sanotaan olevan oma kielensä, jolla voidaan kuvailla täsmällisesti ja tiiviisti monimutkaisia ideoita. Tämän kielen harjoittelu on tärkeä osa matemaattisen identiteetin kehittymistä, sillä ideoiden jakaminen ja oppiminen on tehokkainta, kun kuvaavat termit ja kielioppi ovat hallussa ja kokonaisuuksien hallitseminen on helpompaa. Kuvailemista ovat esimerkiksi päättelyketjujen kuvaileminen, asioiden perustelu, väittely ja todistaminen. Lähes jokainen pohdintatehtävä ja muutamat harjoitustehtävät sisältävät ainakin jotain näistä.

Arvaaja (*Guesser*)

Kun ongelma ei näytä aluksi yksinkertaiselta ratkaista, sitä voi lähteä tutkimaan käänteisesti arvaamalla jokin vastaus ja tarkistamalla menikö se oikeaan suuntaan Tästä prosessista voidaan oppia uutta käsitellystä funktiosta, jolloin voidaan tehdä parempi arvaus. Arvaaminen voi auttaa löytämään uudenlaisia näkökulmia, strategioita ja lähestymistapoja. Siten se kehittää intuitiivista algoritmista ajattelua. Arvaamista opiskelija pääsee harjoittelemaan pohdintatehtävässä A.22.

Kokeilija (*Experimenter*)

Funktioilla laskemisessa olennaista on ymmärtää, että muuttujia voidaan muuttaa ja vastaavasti muuttuvat niitä sisältävät funktiot. Yksittäiset funktiot eivät ole oleellisia oppia; tärkeämpää on osata tunnistaa funktion tyyppi ja miten sitä käsitellä.

Kokeileminen on hyvä keino tehdä matemaattista tutkimista ja hahmottaa tulosten rajoitteellisuutta ja oikeellisuutta. Kokeilu on ideoiden purkamista osiin ja uudelleenrakentamista, kuten esimerkiksi muuttujien säätämistä ja kertoimien tai vakioiden vaihtamista. Kokeileminen kehittää kriittistä arviointikykyä, sillä se pakottaa katsomaan kokonaisuutta, sen osia ja sitten arvioimaan lopputulosta. GeoGebra-ohjelmassa funktioiden muokkaaminen on erittäin helppoa ja siten toimii tehokkaana välineenä tehtävissä, jotka haastavat kokeilemaan.

Tässä oppimateriaalissa kokeilemista pääsee harjoittelemaan erityisesti pohdintatehtävissä A.2,A.5, A.10, A.18, ja harjoitustehtävässä 2.

2.3 Tehtävätyypit

Artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* Malcolm Swanin yhteistoiminnallinen oppimiskäsitys näkee oppimisen yhteistyötä vaativana aktiviteettina, jossa oppijat saavat haasteita ja pääsevät ymmärrykseen keskustelun kautta. Matematiikka on sen mukaan toisiinsa kytkeytyvä ideoiden ja päättelyprosessien kokonaisuus. Opetuksessa se painottaa muun muassa merkitysten ja yhteyksien tutkiskelua keskustelun kautta, ongelmien esittämistä ennen selitysten antamista ja virheiden selvittämistä sekä niistä oppimista [24]. Opiskelija pääsee näin aktiivisesti osaksi matemaattisten tulosten muodostamisprosessia, mikä vahvistaa hänen matemaattista identiteettiään ja kehittää tarpeellisia ajattelutapoja. Artikkelin kirjoittajat haluavat, että opiskelijat keskustelevat ja selittävät ideoita, haastavat ja opettavat toisiaan, luovat ja ratkaisevat toistensa kysymyksiä ja työskentelevät yhteistyössä menetelmien ja tulosten jakamiseksi [24]. Toisena tavoitteena on kehittää haastavampia, verkostoituneempia ja yhteistoiminnallisempia lähestymistapoja opetukseen [24]. Näitä näkemyksiä ja niistä johdettuja artikkelissa esiteltyjä pääperiaatteita mielessä pitäen Swan esittelee viisi erilaisia ajattelu- ja oppimistapoja edistävää opetusaktiviteettityyppiä:

- Perustelujen ja ratkaisujen analysointi (Analysing reasoning and solutions)
- Erilaisten esitystapojen yhdistäminen (Interpreting multiple representations)
- Matemaattisten objektien luokittelu (Classifying mathematical objects)
- Matemaattisten väittämien arviointi (Evaluating mathematical statements)
- Ongelmatehtävien luominen (Creating problems). [24]

Oppimateriaali sisältää pohdinta- ja harjoitustehtäviä, joista pohdintatehtävät perustuvat edellisiin tehtävätyyppeihin. Näistä kaksi, useiden esitystapojen tulkinta sekä perustelujen ja ratkaisujen analysointi, valittiin yhteisesti kirjan pohdintatehtävätyyppien teemoiksi. Niiden lisäksi muutama pohdintatehtävä sisältää ongelmatehtävien luomista, ja matemaattisten väittämien arviointia, sillä ne sopivat hyvin matemaattisten lauseiden rajojen etsimiseen, millä on oleellinen osa tässä kirjan osiossa. Tehtävätyypit sisältävät ja tukevat suoraan artikkelista *Habits of mind* valitsemiamme teemoja. Pohdintatehtävien avoimet kysymykset ovat omiaan saamaan opiskelijan pysähtymään oikeasti analysoimaan lukemaansa ja miettimään vastaustaan.

Erilaisten esitystapojen yhdistäminen (*Interpreting Multiple Representations*)

Matemaattiset esitystavat ovat näkyviä tai konkreettisia tuotoksia - kuten diagrammeja, kuvaajia, fysikaalisia malleja, kirjoitusta, matemaattisia lausekkeita, kaavoja ja yhtälöitä tai laskimen näytöllä olevia kuvia - jotka sisältävät, edustavat tai ilmentävät matemaattisia ideoita tai suhteita. Erilaisten esitystapojen yhdistäminen auttaa matematiikan kokonaisuuksien hahmottamista, sillä niiden vertaaminen haastaa perustelemaan, mikä on yhden asian suhde toiseen ja niiden paikka kokonaisuudessa.

Päättelyvirheiden korjaaminen (*Correcting mistakes in reasoning*)

Päättelyvirheiden korjaaminen on yksi Perustelujen ja ratkaisujen analysoinnin aktiviteettityypeistä. Opiskelijat vertailevat erilaisia menetelmiä ongelman ratkaisemiseksi, järjestävät ratkaisuja ja/tai diagnosoivat ratkaisujen virheiden syitä. He alkavat tunnistaa, että ongelman ratkaisemiseksi on olemassa vaihtoehtoisia reittejä, ja kehittävät omia päättelyketjujaan. Tehtävätyyppi mahdollistaa erilaisten päättelyketjujen esiintulon, jotta niistä voi sitten keskustella kriittisesti arvioiden. Opiskelija voi saada uusia näkökulmia aiemmin oppimaansa ja voi päästä myös ohjeistavaan rooliin, missä hän käsittelee omia tai jonkun muun päättelyketjuja. Tehtävätyyppi vaatii sanallista selvittämistä, mikä harjoittaa tarkkojen matemaattisten termien käyttämistä ja opitun asian järjestämistä loogisesti.

Ongelmatehtävien luominen (Creating problems)

Opiskelija pääsee käyttämään luovuuttaan ja testaamaan matemaattisia valmiuksiaan, kun hän luo ongelmatehtäviä. Hänen täytyy ensin itse osata ratkaista tehtävänsä, jotta voi sitten haastaa muita ratkaisemaan sen ja tarvittaessa ohjaamaan prosessia. Tehtävätyyppi voi olla artikkelin mukaan pääosin kahdenlaista: matemaattisten prosessien tekemisen ja purkamisen tutkimista (*mitä tehtävässä on tehty ratkaisun saamiseksi?*) tai olemassa olevien kysymysten muunnelmien luomista (*mitä muuta tilanteesta olisi voinut kysyä?*). Kummassakin tapauksessa on mahdollisuus tuottoisaan keskusteluun odottamattomien ja luovien ratkaisujen syntyessä.

Matemaattisten väittämien arviointi (Evaluating mathematical statements)

Matemaattisten väittämien arviointi laittaa opiskelijan pohtimaan väittämän totuusarvoa, onko se aina, joskus vai ei koskaan tosi. Tehtävätyyppi kehittää opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa sekä on tehokas yleisten ongelmakohtien ja väärinymmärrysten korjaamiseen. Tämä suoraan tukee tulevaisuuden ongelmien ratkaisutaidon kehittymistä. [24] Tehtävätyyppi toimii hyvin sekä yksin tehtynä että yhteisesti keskustellen. Yhteisesti käsiteltynä tehtävästä syntyy mahdollisuus opettajalle seurata opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehitystä. Tämä onnistuu myös hyvin esitettyjen kysymysten myötä [12]. Laaja-alainen tavoite vuorovaikutusosaamiselle saavutetaan, kun opiskelijat perustelevat kantojaan toisilleen [16].

3 Oppimateriaalin perustelu

Tässä oppimateriaalissa käsitellään tiettyjen alkeisfunktioiden integroimissääntöjä eli lauseita ja niiden seurauksia. Oppimateriaali on jaettu kahteen lukuun: rationaali- ja juurifunktion integrointiin sekä eksponenttifunktion integrointiin.

Rationaali- ja juurifunktiot on yhdistetty samaan lukuun, koska se muodostaa narratiivin, jossa lähdetään purkamaan tunnetun potenssifunktion integroimissäännön tähän mennessä tutkimattomia mahdollisuuksia. Aiemmin moduulin aikana on opittu integroimaan potenssifunktioita, kun eksponentissa on luonnollinen luku. Luvussa tutkitaan ensin negatiiviset eksponentit ja sitten rationaaliset eksponentit. Kaikki juurifunktiot ovat potenssifunktioita, ja kurssin tiedoilla integroitavat rationaalifunktiot ovat integroitavissa potenssifunktion integroimissäännöstä johdettavilla lauseilla. Yhdistetyn funktion integroimissääntö palautetaan mieleen, koska sen avulla voidaan laskea monimutkaisempia integraaleja. Sitä hyödynnetään kummassakin luvussa, sillä on oleellista oppia myös ratkaisemaan integraaleja, jotka sisältävät useampaa funktiotyyppiä.

Eksponenttifunktion integroiminen -luku on lyhyempi, mutta käsittelee tarvittavat integroimismenetelmät eksponenttifunktioille. Luvun lauseille ei ole juuri mainittavia johdatteluja tai todistuksia, sillä derivointi on suoraviivainen perustelu integroimissäännöille. Formaalimmat todistukset on LOPS:ssa 2019 rajattu kurssin sisällön ulkopuolelle.

Luvut etenevät konstruktivistisella periaatteella: ensin pohdintatehtävien avulla johdetaan tunnetuista tiedoista - kuten derivointi - integroimissääntöjä. Sitä seuraa pohdintoja sääntöjen rajoitteista tai muista huomioonotettavista seikoista. Luvut sisältävät soveltavia sanallisia laaja-alaisia tehtäviä, jotta opiskelija voi kokea oppimansa olevan hyödyllistä myös muuten kuin määrättyjen integraalien laskemisen yhteydessä.

LOPS:n uudistamisen myötä Integraalilaskentamoduuli (MAA7) tulee järjestyksessä heti Derivaattamoduulin (MAA6) jälkeen. Tämä on aiempaa järjestystä parempi, sillä derivaattamoduulin asiat ovat tuoreemmassa muistissa ja derivaatan ja integraalin yhdistäminen tulee helpommaksi. Käsiteltävät funktiotyypit, integraali työkaluna ja sen toiminta suhteessa derivointiin tunnetaan, joten ongelmia ei pitäisi tulla käsittellisellä tasolla. Jos opiskelijalla on edellisessä MAA6 moduulissa ollut vaikeuksia derivaatan oppimisessa, hänellä on todennäköisesti niitä myös integraalin kanssa. Moduulien MAA6 ja MAA7 sisällöissä on monia samoja ilmiöitä, ja integraalisääntöjä johdetaan tässä oppimateriaalissa intuitiivisesti derivaatan kautta, kuten lukiotason koulutuksessa on tapana [10].

Lukiolain mukaan lukiokoulutuksen tarkoituksena on "antaa opiskelijalle valmiudet aloittaa korkeakoulututkintoon johtavat opinnot yliopistossa tai ammattikorkeakoulussa" [13]. Tarkoituksena on myös "antaa opiskelijoille valmiuksia elinikäiseen oppimiseen ja itsensä jatkuvaan kehittämiseen" [13]. Matemaattinen identiteetti on monimuotoinen käsite, kuten Darragh ja Radovic kokoavat artikkelissaan *Matematics Learner Identity* [5]. Mihin tahansa identiteettiin määrittämiseen kuuluu oleellisesti se miten itse ajattelee. Artikkeli *Habits of Mind* kuvailee millaisia ajattelun tapoja opiskelijalla tulisi olla hyvän matemaattisen identiteetin saavuttamiseksi [4]. Tämän oppikirjan tarkoituksena on tukea matemaattisen lukutaidon kehittymistä, joka tukee opiskelijan matemaattisen identiteetin kehitystä. Matematiikan oppikirjojen perinteinen muoto, jossa keskitytään menettelytapojen kehittämiseen ja harjoitusten suorittamiseen, voi heikentää opiskelijoiden matemaattisen lukutaidon kehittymistä [25]. Tämä oppimateriaali etenee järjestelmällisesti ja pohdintatehtävien saattelemana. Opiskelija pääsee työskentelemään aktiivisesti teorian löytämiseksi, jolloin käsitteellinen ymmärtäminen varmistuu.

Artikkelissaan *Students' Difficulties in Calculus* Tall luettelee erilaisia ongelmakohtia, joita opiskelijat voivat kohdata differentiaali- ja integraalilaskennan opiskelussa. Hän toteaa opiskelijoiden joskus opiskelevan asioita niin, että motivaationa on suorittaa tehtävä hyväksytysti eikä välttämättä ymmärtää perimmäisiä käsitteellisiä ideoita [21]. "Kun opiskelijat kohtaavat vaikeuksia, hallitseva selviytymisstrategia on keskittyä menetelmällisiin puoliin, jotka yleensä asetetaan kokeissa" [21]. Näin riskinä on, että oppimisen siirtovaikutus voi vaikeutua. Matemaattisen lukutaidon kehittämistä tukevat jo aiemmin mainitut soveltavat sanalliset laaja-alaiset tehtävät.

Pohdintatehtävissä A.5 ja A.10 johdatellaan tutkivasti vaihe kerrallaan opiskelija uusiin integroimissääntöihin. Tehtävässä A.5 määrittelyjoukon huomioiminen on oleellinen osa integroimissäännön johtamista. Siksi tätä pohjustaa edellinen pohdinta A.4, jossa erikseen muistutetaan pitämään mielessä funktion määrittelyjoukko. Pohdinnassa A.5 tutkitaan poikkeustapausta potenssifunktion integroimissäännöstä ja päädytään uuden integroimissäännön muodostamiseen. Vaiheet sisältävät myös parityöskentelyä ja vastausten vertailua. Huomautus A.7 taustoittaa ja korjaa pohdintatehtävän A.5 tuomia mahdollisia väärinkäsityksiä integraalifunktion kuvaajan muodosta.

Pohdinta A.24 johtaa oppimateriaalin viimeisen integroimissäännön jälleen derivoinnin kautta sisällyttäen myös luonnollisen logaritmin määritelmän käyttöä, jotta johtaminen tapahtuu e-kantaisen integraalisäännön avulla. Siinä myös harjoitetaan integraalin laskemista tietyllä välillä.Lopuksi on integraalisäännön testaamista GeoGebralla, jotta tarpeellinen komento ei pääse unohtumaan.

Opetushallituksen linjauksen lukio-opintojen tulee olla laaja-alaisia eli oppiainerajat ylittäviä. Ylioppilaskirjoituksiin on sisällytetty soveltavia tehtäviä muista oppiaineista [17]. Oppikirja sisältää useita soveltavia laaja-alaisia pohdintatehtäviä, kuten pohdintatehtävät A.5, A.13, A.18, A.19 ja A.26.

Artikkelissaan *University Students' Difficulties in Solving Application Problems in Calculus: Student Perspectives* Klymchuk, Zverkova, Gruenwald ja Sauerbier pyrkivät löytämään syitä siihen, miksi suurin osa opiskelijoista ei pystynyt käyttämään tietämystään yksinkertaisen funktion rakentamiseen tutussa kontekstissa. Tutkimuksessa raportoidut opiskelijoiden kaksi suurinta vaikeutta liittyivät tehtävän kysymyksen sanamuodon sekä annetun informaation ymmärtämiseen ja tarvittavan laskukaavan käytön tunnistamiseen ja käyttöön. [11] Tall myös mainitsee reaalimaailman ongelmien muuntamisen laskutoimituksiksi olevan haaste. [21] Tutkimus osoittaa, että opiskelijoille on tarpeen opettaa sovellusongelmien ratkaisemisen perustaitoja integraalilaskennan moduulin alusta alkaen. Opiskelijoita tulisi kannustaa kirjoittamaan auki yksityiskohtaisesti kaikki ratkaisun vaiheet, jopa yksinkertaisten sovellusongelmien osalta. Sovellustehtävien harjoituksenpuute on yksi tekijä, johon mahdollinen ratkaisu on lisätä niiden osuutta kaikkien tehtävien määrästä. Sovellustehtävien harjoittelu valmistaa paremmin oikean maailman tehtäviin ja mahdollisesti tuo motivaatiota opiskella, koska opiskelija voi nähdä laajemmin mihin opiskelussa on mahdollisuus edetä. [11] Tämän oppimateriaalin pohdintatehtävien tehtävänannoissa on pidetty mielessä selkeys ja ytimekkyys, jotta tehtävän asettelu ei aiheuta ylimääräistä kuormaa.

Viimeisessä pohdinnassa A.26 sovelletaan biologiaan yleisen kannan eksponenttifunktion integroimissääntöä. Ensin analysoidaan annettu ratkaisu ja sitten piirrettyjä funktioiden kuvaajia, jotta syntyy käsitteellinen yhteys integraalin ja integrandin välille uudessa kontekstissa. Sitten opiskelija ratkaisee itse vastaavanlaisen tehtävän eri alkuarvoilla.

Sen sijaan, että opiskelijat harjoittelevat muistamaan kaavoja, heidän tulee opetella ajattelemaan matemaatikkojen tavoin. [4] Näin ajattelevat myös Wiesner, Weinberg, Fulmer ja Barr artikkelissaan *The Roles of Textual Features, Background Knowledge, and Disciplinary Expertise in Reading a Calculus Textbook*, jossa esitelty tieteenalakohtaisen lukutaidon näkökulma ehdottaa, että matemaattisen lukutaidon kehittäminen on osa matemaattisen yhteisön jäseneksi tulemista [25].

Opiskelijoiden on havaittu keskittyvän integraalilaskennan menetelmällisiin puoliin käsitteellisen ymmärtämisen sijasta [9, 21]. Opettajien tulisi siirtyä sisällön tuntemuksen sijaan opettamaan erityisiä lukustrategioita, kuten artikkelissa *Active Learning in Post-Secondary Mathematics Education* [3] mainittu aktiivinen oppiminen. Aktiivisella oppimisella tarkoitetaan laajalla määritelmällä "kaikkia luokkahuonekäytäntöjä, joissa opiskelijat osallistuvat aktiivisesti toimintaan, kuten lukemiseen, kirjoittamiseen, keskusteluun tai ongelmanratkaisuun, joka edistää korkeamman asteen ajattelua." [3] Tällaisen opiskelun on todettu olevan hyödyllisempää opiskelijoiden käsitteellisen osaamisen ja matemaattisen identiteetin kehittymiselle [3, 21, 25].

Kiat käsittelee artikkelissaan *Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems* opiskelijoiden kohtaamia haasteita integraalilaskennan oppimisen yhteydessä. [9] Kiat ehdottaa että "opettaja voi pyytää opiskelijoita kirjoittamaan mitä ajattelevat käsitteistä tai ideoista ja antaa heidän keskustella niistä keskenään." Opiskelijoiden on hyvä asettaa itsekin kysymyksiä, sillä se on tehokas tapa kehittää korkeamman asteen ajattelua. [9] Skovsmose [22] nostaa esille dialogisen opetuksen ja oppimisen keinona kehittää matematiikkaan liittyviä laajempia kriittisiä taitoja.

Johdannon pohdintatehtävän A.1 tarkoitus on saattaa opiskelija tunnettujen funktiotyyppien integroimiseen derivaattakurssista tunnettujen tietojen kautta. Tehtävässä ei vielä päästä mihinkään varsinaiseen tulokseen, mutta tähän mennessä jo tunnetaan analyysin peruslause ja osataan analysoida funktioiden kuvaajia. Tehtävä toimii visuaalisuutensa puolesta kevyenä aloituksena. Opiskelija näkee funktioiden ja niiden vastaavia derivaattafunktioiden kuvaajia, jotka tulee yhdistää toisiinsa. Opiskelijalla on useita strategioita käytettävissään, esim. kuvaajien muotojen tutkailu, näkyvien "viivojen" lukumäärä tai muuttujan x erityisten kohtien huomaaminen. Varminta voi silti olla funktioiden kuvaajien ja derivaattojen tutkaileminen esim. GeoGebran avulla, mihin tehtävässä kannustetaankin.

Teknologian roolia integraalilaskennan opetuksessa ei pidä aliarvioida, mutta sen ei ole todettu aina takaavan oppimista tehostavia tuloksia [1, 9, 20, 21]. Teknologiset välineet eivät korvaa ihmisen ajattelua. Oikein integroituna teknologiset apuvälineet voivat kuitenkin tehostaa oppimisprosessia [9]. Orton havaitsi tutkimuksessaan *Students' understanding of integration*, että suurella osalla tutkimusta varten haastatelluista opiskelijoista oli ongelmia määrätyn integraalin ja käyrän alle jäävän pinta-alan välisen suhteen ymmärtämisessä. Myös Kiat totesi tutkimuksessaan *Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems* opiskelijoilla olevan käsitteellisiä ongelmia määrätyn integraalin laskemisen yhteydessä [9]. Kumpikin tutkija ehdotti, että opiskelijoille tarjotaan alusta alkaen havainnollistavia kuvia, diagrammeja ja kaavioita yhteyden selkeyttämiseksi [18].

Oppimiseen tarkoitetut teknologiset apuvälineet soveltuvat hyvin erityisesti differentiaali- ja integraalilaskentaan, koska ohjelmat kuten GeoGebra mahdollistavat integraaliin liittyvien ominaisuuksien visuaalisen tarkastelun. Ohjelman hyödyllisyys ongelmanratkaisutehtävissä riippuu kuitenkin sen käytön harjoittelemisen sisällyttämisestä opetukseen [20]. Suhteessa aiempaan kirjaan tämän oppimateriaalin pohdinta- ja harjoitustehtävissä ei tule uutta opittavaa GeoGebran käytöstä. Tehtävissä harjoitellaan funktioiden kuvaajien piirtämistä ja integraalien laskemista tunnetuilla komennoilla. Erityisesti huomautuksessa A.7 kahden integraalin visualisointi voi olla oleellinen tekijä, että sen sisältö tulee ymmärretyksi kokonaisuudessaan. Pohdinnan A.1 viimeisessä kohdassa opiskelijat pohtivat derivaattafunktioiden integraaleja ja saavat jo esimakua siitä millaisia integraalifunktioita ja integroimissääntöjä kappale tulee tarjoamaan.

Aiemmin kurssilla on käsitelty potenssifunktion integroimissääntö, jota käytetään myös osan tämän oppimateriaalin funktiotyyppien integroimiseen. Integroimissääntö on määritelty tähän mennessä, kun potenssifunktion eksponentti k on luonnollinen luku. Tässä oppimateriaalissa otetaan mukaan myös negatiiviset kokonaisluvut eksponentille k, koska silloin on kyseessä rationaalifunktio. Tässä se tehdään kokeilemalla ja huomioita tekemällä. Pohdintatehtävässä A.2 opiskelija huomaa potenssifunktion integroimissäännön toimivan negatiivisille kokonaisluvuille, lukuunottamatta poikkeusta $k = -1$. Kohdassa b) varmistetaan poikkeuksen huomaaminen, koska se ei noudata sääntöä.

Integraalisääntöjä käsitellessä on tärkeää hahmottaa funktioiden, niiden kuvaajien ja integraalin yhteys, jotta käsiteltyjen integroimissääntöjen käyttö ei jää pintapuoliseksi. Manouchehrin ja Sriramanin [15] mukaan tutkijoiden kesken vallitsee yksimielisyys siitä, että matemaattisiin funktioihin perustuvaan päättelyyn ja aistimiseen liittyviä keskeiseisiä elementtejä ovat seuraavat: "funktioiden eri esitystavoilla - taulukoilla, kuvaajilla tai kaavioilla, symbolisilla ilmauksilla ja sanallisilla kuvauksilla - on erilaisia ominaisuuksia, ja erilaisten esitystapojen käyttäminen voi auttaa tekemään funktioista ymmärrettävämpiä kuin pelkästään symbolisella esitystavalla" [15]. Tämä otetaan pohdinnoissa huomioon Swanin tehtävätyypin erilaisten esitystapojen yhdistäminen kautta.

Monet tutkimukset keskittyvät ongelmiin integraalilaskennan käsitteiden muodollisissa määritelmissä ja niiden konfliktissa intuitiivisten ideoiden kanssa [10]. Tämän kirjan osion funktioiden integroimissääntöjen opettamiseen tai oppimiseen liittyviä ongelmia ei näytä olevan tutkittu juurikaan. Yleistäminen on tärkeä osa matemaattisten lauseiden, kuten integroimissääntöjen, muodostamista, joten sitä koskevia tutkimuksia käsitellään myös tässä. Kiatin mukaan opettajien tulee painottaa peruskäsitteiden ymmärtämistä ennen ongelmanratkaisun laskutekniikoihin siirtymistä [9]. Manouchehrin ja Sriramanin mukaan "tehtävät ja kontekstit, jotka kannustavat sääntöjen yleistämiseen, tukevat funktionaalisen päättelyn kehittymistä" [15]. Yleistämisen harjoittelu on tärkeä osa kriittisen ajattelun kehittymistä [15] ja siksi tärkeää myös opiskelijan tulevaisuuden mahdollisuuksien kannalta.

Tutkijat Hashemi, Abu, Kashefi, Mokhtar ja Rahimi avasivat osaltaan opiskelijoiden ongelmakohtia differentiaali- ja integraalilaskentatehtävissä artikkelissaan *Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework*. Artikkelissa esitellään ratkaisuksi oppimisstrategia, MGSDI (Modified Generalization Strategies in Derivatives and Integrals), jossa kehotusten ja kysymysten avulla autetaan opiskelijaa kehittymään yleistämisessä sekä matemaattisessa ajattelussa. Artikkeli sisältää esimerkkejä erikoistavista, arvelevista ja yleistävistä kysymyksistä, jotka kannustavat pohtimaan sisältöjä oleellisista näkökulmista. [8] Esimerkit ovat samankaltaisia sisällöltään kuin mitä artikkelien *Habits of Mind* ja *Collaborative learning in mathematics*, koska ne kehittävät ajattelun tapoja haastamalla muun muassa kuvailemaan, vertailemaan ja kokeilemaan. Lisäksi ne toimivat hyvin yhteistyötä vaativina tehtävinä.

Pohdinnassa A.10 päätellään yleistämällä derivoinnin ja analyysin peruslauseen periaatteen avulla integroimissääntö A.11. Tehtävän a ja b -kohdat toimivat parina, jossa opiskelija voi huomata ensimmäisen kohdan vastauksen olevan samaa muotoa kuin jälkimmäisen kohdan alkutilanteen, joten b-kohdan integroiminen ei pitäisi olla haastava tehtävä. Sama dynamiikka toimii seuraavissa kohdissa, mutta asteluku funktioissa on suurempi.

Pohdintatehtävässä A.21 on vuoropuhelu tilanteesta, jossa kaksi henkilöä koettaa ratkaista kahta integroitavaa funktiota. Opiskelija pääsee analysoimaan samalla taitotasolla olevien opiskelijoiden keskustelua ja päättelyketjuja. Pareittain opiskelijat pohtivat oppimansa integraalisääntöjen mahdollisuuksia ja rajoja. Ensin on muutama esimerkki ja sitten tehdään yleistys, joka vahvistaa käsityksen eksponenttifunktioiden integroimisesta. Painotus tehtävässä on sisäfunktion huomioimisessa.

Pohdinta A.14 tarjoaa lisää dialogista työskentelyä, kun opiskelijat pääsevät analysoimaan valmiita, mutta virheellisiä ratkaisuja pareittain. Tehtävä sisältää kaksi integraalilaskutehtävää ratkaisuineen ja niiden tarkoitus huomauttaa mahdollisista virheellisistä käsityksistä yhdistetyn funktion integroimissääntöä käytettäessä. Opiskelijan täytyy myös erityisesti b-kohdassa muistaa ottaa huomioon kuvaajan ja x-akselin välistä pinta-alaa laskettaessa, että kuvaaja voi kulkea x-akselin alapuolelta, jolloin integraali antaa negatiivisen arvon. Tätä käsitteellistä ajatusvirhettä käsittelee muun muassa Kiat [9]. Opiskelija voi siis oppia viimeistään tästä tehtävästä sen, että pitää tutkailla funktioita joko visuaalisesti ja/tai kulkukaaviolla, jotta tietää, kuinka funktio kulkee suhteessa x-akseliin. Opiskelijat keskustelevat huomaamistaan virheistä analysoituaan ratkaisuja, joten opiskelijat käyvät läpi kummatkin tehtävät. Tehtävässä on mahdollisuus, että opiskelija ei ole huomannut jotain virhettä, jolloin hänen parinsa voi huomauttaa ja korjata ajatusvirheen toisen päättelyssä. Opeoppaassa on avattu virheitä enemmän.

Pohdintatehtävässä A.15 siirrytään juurifunktioihin varmistetaan derivoinnin ja analyysin peruslauseen periaatteen avulla, että potenssifunktioiden integroimissääntö toimii juurifunktioita integroitaessa. Kohdan a) derivointi on helppo edellisen moduulin MAA6 tiedoilla ja seuraavan kohdan ratkaisussa a-kohdan vastaus on avuksi. Kohta c) on lisäesimerkki juurifunktioiden integroimisesta, minkä jälkeen on loogista yleistää tutkitut tapaukset yleiseksi säännöksi ja vastata viimeiseen kohtaan "kyllä, paitsi funktiolle x^{-1}.

Pohdinnassa A.16 opiskelija palauttaa mieleensä millaisia määrittelyjoukkoja juurifunktioilla voi olla. Tehtävä sisältää kokeilua GeoGebralla, päättelyketjujen kuvailua ja vuorovaikutusta toisten opiskelijoiden kanssa. Tehtävässä on mahdollisuus luovuuteen tehtävää luodessa. Lopuksi päädytään uuteen tulokseen, että tunnettu potenssifunktion integroimissääntö toimiikin vielä laajemmin kuin on tajuttu. Kohdassa a) pitäisi tulla tulokseen, että juurifunktioiden määrittelyjoukko rajoittaa myös integroimista, joten se täytyy pitää mielessä laskiessa.

Pohdintatehtävä A.18 laajentaa tätä ja lisää mukaan yhdistetyn funktion integroimissäännön, jota aletaan tästä eteenpäin painottaa useissa pohdintatehtävissä. Pohdinta myös tutkailee opittujen sääntöjen rajoja. Aluksi palautetaan mieleen milloin aiemmin opittua yhdistetyn funktion integroimissääntöä täytyy käyttää. Tässäkin opiskelijan täytyy sanallisesti kirjoittaa ja selvittää parin kanssa miten integroida haastavampia juurifunktioita.

Pohdinnassa A.19 käytetään luovuutta integroitavien funktioiden keksimiseen siten, että samalla tutkitaan mitä tähän mennessä juurifunktioiden integroimisesta tiedetään. Tehtävä laittaa opiskelijan kertaamaan opittua, kokeilemaan uusia asioita ja analysoimaan kokonaisuutta yhteistyössä työparin kanssa.

Tätä seuraavassa pohdinnassa A.22 esitetään integraalilaskun ratkaisu arvaamalla. Oletuksena on, ettei muisteta täysin yhdistetyn funktion integroimissääntöä, mutta derivoimissääntö muistetaan. Arvaaminen voi toimia hyvänäkin tapana muistuttaa itselle, miten jokin sääntö toimii, kun se täytyy itse johtaa ja yleistää. Monenlaisten ongelmanratkaisustrategioiden opettelu on osa matemaattisen identiteetin kehittymistä [4]. Tehtävän funktio sisältää kaikkia tässä oppimateriaalissa käsiteltyjä funktiotyyppejä, joten se voi näyttää aluksi haastavalta. Opiskelija arvioi ratkaisun matemaattista päättelyä ja voi huomata arvaamisen olevan hyödyllinen strategia, kun arvausvastauksen voi tarkistaa.

Lukiotason differentiaali- ja integraalilaskennan opetuksessa keskitytään vähemmän todistamiseen ja muodollisiin määritelmiin [10]. Todistamisen taustalla olevaa loogista päättelyä ja ratkaisujen rakennetta on kuitenkin tärkeä opetella hahmottamaan. Tässä oppimateriaalissa se on toteutettu pohdintatehtävillä, joissa todistamisprosessin tekninen puoli, eli oletukset ja väittämät, on pitkälti annettu ja opiskelija voi keskittyä ratkaisun loogiseen puoleen ja rakenteeseen [24]. Pohdinnat A.9 ja A.12 ovat helpohkoja todistustehtäviä. Ensimmäinen vaatii valmiiden vaiheiden järjestelyä, jotta todistus on täysin järkevä. Todistus perustuu aiemmin opittuun tietoon, että integraali on derivoinnin käänteisoperaatio. Tällä perustellaan muutkin käsitellyt lauseet. Pohdinnassa A.12 taas opiskelija mukailee pohdinnan A.9 todistuksen ratkaisumenetelmää ja järjestystä, mutta tällä kertaa itse pääsee muodostamaan koko todistuksen.

Tämän jälkeen siirrytään lauseiden rajoitteiden tutkimiseen. Pohdintatehtävässä A.13 opiskelijat muodostavat pareissa toisilleen kolme integroitavaa funktiota siten, että yksi niistä ei ole ratkaistavissa tähän asti tunnetuilla tiedoilla. Tehtävä vaatii luovuutta ja yleistämistä, jotta tunnettujen tietojen kokonaisuus tulee tutummaksi.

Lähdeluettelo

[1] Attorps, I., Tossavainen, T. *Varied Ways to Teach the Definite Integral Concept*. International Electronic Journal of Mathematics Education, vol. 8, no. 2-3. 2013.

[2] Bloom B. *The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring*. Educational Researcher, 13(6):4–16, 1984.

[3] Conference Board of the Mathematical Sciences: *Active Learning in Post-Secondary Mathematics Education*. 2016.

https://www.cbmsweb.org/wp-content/uploads/2016/07/active_learning_statement.pdf Viitattu 13.5.2022.

[4] Cuoco, A., Coldenberg, E.P., Mark, J. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Journal of Mathematical Behavior, 15, 375-402. 1996.

[5] Darragh, L., Radovic, D. *Mathematics Learner Identity*. Encyclopedia of Mathematics Education Second Edition. 582-584. Springer Nature Switzerland AG. 2020.

[6] Ferrer, F. P. *Investigating Students' Learning Difficulties in Integral Calculus*. PEOPLE: International Journal of Social Sciences, 2(1), 310-324.

[7] Mikä GeoGebra on? https://www.geogebra.org/about. Viitattu 13.5.2022.

[8] Hashemi, N., Mohd S. A., Hamidreza K., Mahani M., Khadijeh R. *Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework* Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11(2), 227-238. 2015.

[9] Kiat, S. E. *Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems*. The Mathematics Educator, Volume 9, No.1, 39-59, 2005.

[10] Kidron, I. *Calculus Teaching and Learning*. Encyclopedia of Mathematics Education Second Edition. 87-94. Springer Nature Switzerland AG. 2020.

[11] Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., Sauerbier, G. *University Students' Difficulties in Solving Application Problems in Calculus: Student Perspectives*. Mathematics Education Research Journal, Volume 22, No. 1, 81-91. 2010.

[12] Lipman, M. *Ajattelu kasvatuksessa*. Eurooppalaisen filosofian seura ry / niin & näin. Tampere. 2019.

[13] Lukiolaki 2018/714. Annettu Helsingissä 1.8.2019.

[14] Matematiikan Lops-tukimateriaalit:

https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/matematiikan-lops-tukimateriaalit Viitattu 13.5.2022.

[15] Manouchehri, A., Sriraman, B. *Mathematical Cognition: In Secondary Years [13–18] Part 1*. Encyclopedia of Mathematics Education Second Edition, 505-520. Springer Nature Switzerland AG. 2020.

[16] Opetushallitus *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. 2019.

[17] Opetushallitus *Tietoa lukion opetussuunnitelman perusteiden uudistumisesta*
https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/tietoa-lukion-opetussuunnitelman-perusteiden-uudistumisesta
Viitattu 13.5.2022.

[18] Orton, A. *Students' understanding of integration*. Educational Studies in Mathematics, Volume 14, 1–18. 1983.

[19] Pursiainen, J., Kaleva S., Kunnari, J., Muukkonen, H. *Lukio, valintoihin liittyvä stressi ja matematiikka*. Psykologia, 06/2021.
http://www.psykologia.fi/uusin-numero/artikkelit/keskutelua/1019-lukio-valintoihin-liittyva-stressi-ja-matematiikka
Viitattu 13.5.2022.

[20] Takači, D., Takači, A., Budinski, N. *On Visualisation Problems by Using the GeoGebra and Scientific WorkPlace packages*. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 17(4), 191-196. 2010.

[21] Tall, D. *Students' Difficulties in Calculus*. Proceedings of Working Group 3, 13–28. ICME-7 1992, Québec. 1993.

[22] Skovsmose, O. *Dialogic Teaching and Learning in Mathematics Education*. Encyclopedia of Mathematics Education Second Edition, 195-197. Springer Nature Switzerland AG. 2020.

[23] Spivak, M. *Calculus*. Publish or Perish, Inc. Houston. 2008.

[24] Swan, M. *Collaborative learning in mathematics*. National Institute of Adult Continuing Education, 162–176. 2006.

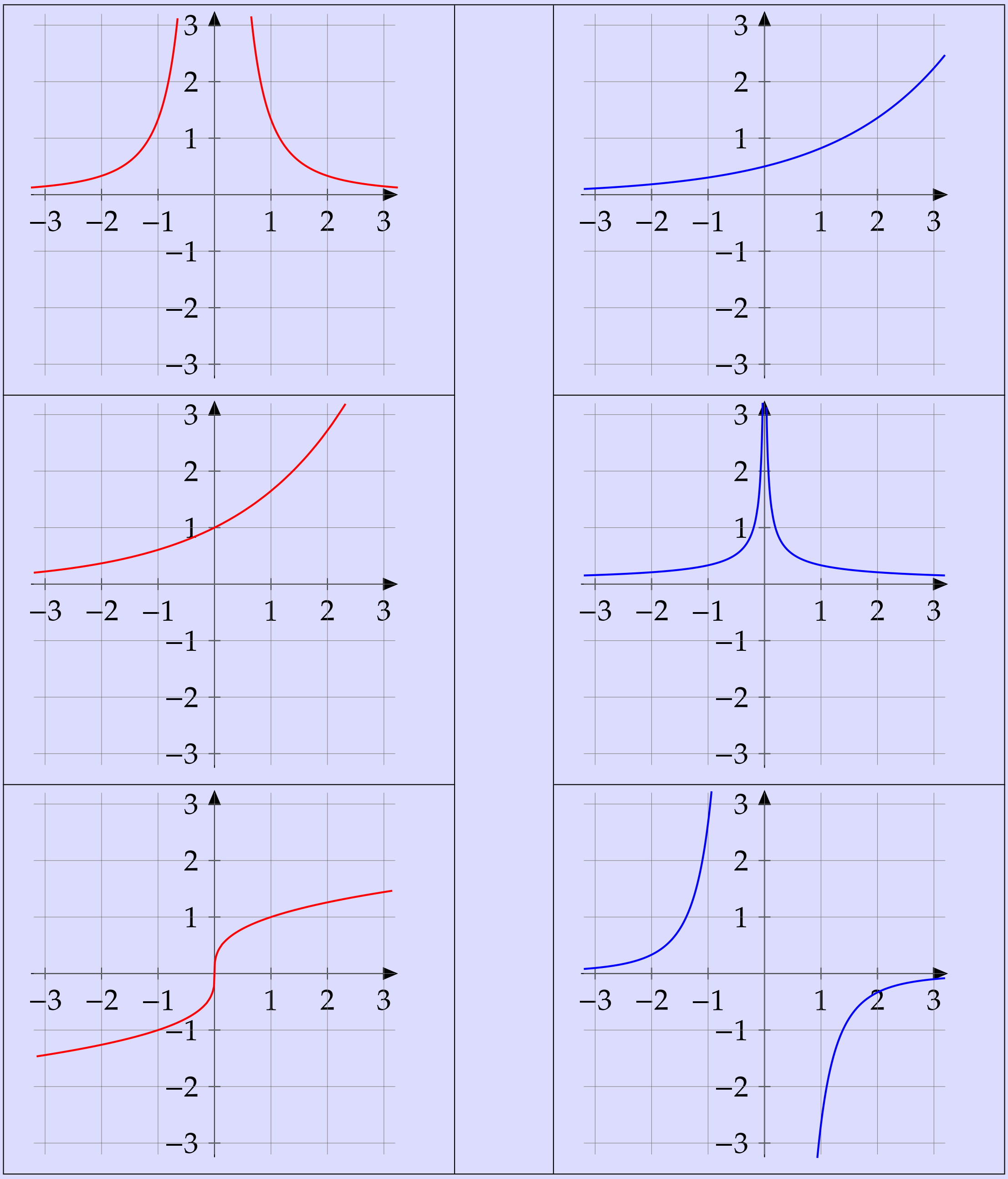
[25] Wiesner, E., Weinberg, A., Fulmer, E. F., Barr, J. *The Roles of Textual Features, Background Knowledge, and Disciplinary Expertise in Reading a Calculus Textbook*. Journal for Research in Mathematics Education, Volume 51, No. 2, 204–233. 2020.

A Funktioiden integroimissääntöjä

Edellisellä kurssilla on opittu derivointisäännöt tärkeimmille alkeisfunktiolle. Tässä kappaleessa käsitellään osaa niistä uudelleen integraalin yhteydessä. Seuraava pohdinta antaa hieman esimakua millaisia funktiotyyppejä tässä osiossa käsitellään. Mitä huomaat funktioiden integraaleista verrattuna aiemmin oppimaasi?

Pohdinta A.1 Käytä tarpeen mukaan seuraavissa kohdissa GeoGebraa apunasi.

a) Yhdistä vasemman sarakkeen funktioiden kuvaajat vastaaviin funktioiden derivaattojen kuvaajiin oikeassa sarakkeessa. Millä perusteilla teet valintasi?



b) Derivoi vasemmassa sarakkeessa olevat funktiot $f(x) = \frac{4}{3x^2}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, jotta voit nimetä oikean sarakkeen funktiot.

c) Pohdi parin kanssa mitä huomaatte derivaattafunktioiden integraaleista.

A.1 Rationaalifunktion ja juurifunktion integrointi

Potenssifunktioiden integrointia on tähän mennessä käsitelty vain tapauksissa joissa eksponentti on luonnollinen luku. Eksponentti voi olla tietenkin myös negatiivinen, joten siirrytään seuraavaksi kokonaislukuihin.

Pohdinta A.2

a) Integroi laskimen avulla erilaisia funktioita $f(x) = x^k$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $k < 0$. Tutkaile myös funktioiden kuvaajia. Mitä huomaat?

b) Minkä funktioiden derivaattoja seuraavat funktiot ovat

$f(x) = x^{-4}$, $g(x) = x^{-9}$ ja $h(x) = x^{-1}$?

Potenssifunktion integroimissäännön voidaan todeta pätevän myös negatiivisille kokonaisluvuille lukuunottamatta lukua -1.

Lause A.3 Potenssifunktioiden integroimissääntö:

Olkoon $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$. Tällöin

$$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Lause pätee myös kokonaislukujen joukkoa suuremmille lukujoukoille, mikä huomataan myöhemmin. Rakennetaan osaamista kuitenkin osa kerrallaan ja mietitään mitä rajoitteita edellisellä säännöllä on.

Pohdinta A.4 Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, seuraava väittämä ei voi pitää paikkansa:

$$\int_{-1}^{2} x^{-2} \, dx = \Bigg/_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) - (1) = -\frac{3}{2}$$

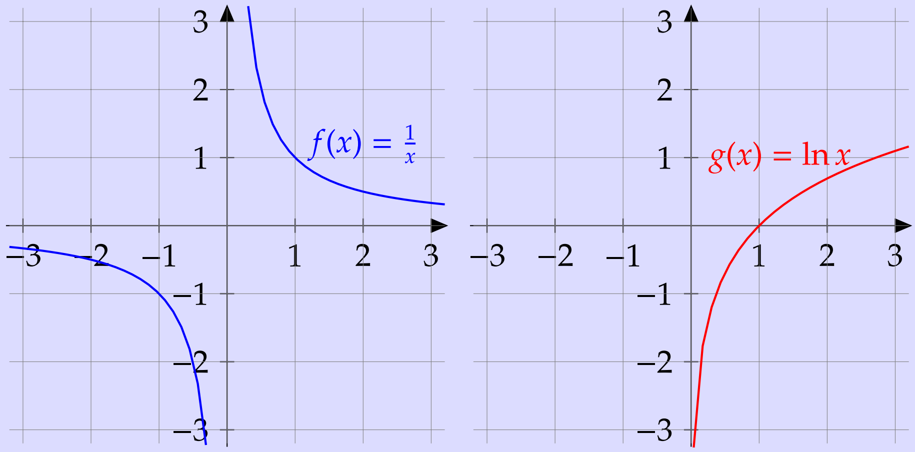
Miksi väittämä on virheellinen?

Tutkaillaan tarkemmin tapauksen x^{-1} integroimista.

Pohdinta A.5 *Mitä jos $k = -1$?*

a) Mikä on funktion $g(x) = \ln x$ derivaattafunktio?

b) Mitkä ovat funktioiden $g(x)$ ja $g'(x)$ määrittelyjoukot?



c) Miten funktiota $g(x)$ täytyy muuttaa, että seuraavat ehdot toteutuvat?

1. Funktioiden $g(x)$ ja $g'(x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. Muutetun funktion derivaattafunktio on $\frac{1}{x}$.

d) Vertaa parin kanssa c-kohtaan saamianne vastauksia ja esitelkää miten päädyitte omiin tuloksiinne.

e) Mikä on funktion $f(x) = x^{-1}$ integroimissääntö?

Integroidessa on tärkeää huomioida integrandin ja integraalifunktion määrittelyjoukkojen olevan samat. Edellisen pohdinnan perusteella voidaan todeta seuraava integroimissääntö.

Lause A.6 Funktion $\frac{1}{x}$ integrointi. Oletetaan, että $x > 0$ tai $x < 0$. Tällöin

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

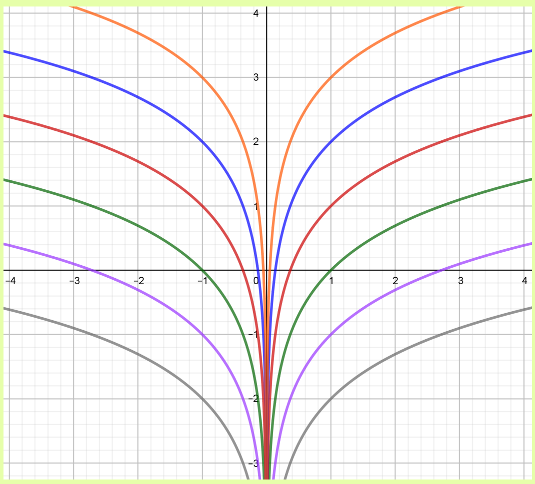
Huomautus A.7 Tähän väliin on hyvä mainita seuraava matemaattisesti rehellinen taustahuomautus. Yleensä kaavakirjoissa – kuten myös tässä kirjassa – esiintyy funktion $\frac{1}{x}$ integroimissääntö lauseen A.6 muodossa tai siten, että määrittelyjoukkona on $x \neq 0$. Lause toimii sellaisenaan kaikissa tilanteissa, missä ei tarvitse miettiä ovatko vakiot samat nollan molemminpuolin integroitaessa.

Selitys: Funktion $\frac{1}{x}$ määrittelyvälit ovat $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$, joten integrointi täytyy suorittaa erikseen näillä väleillä.

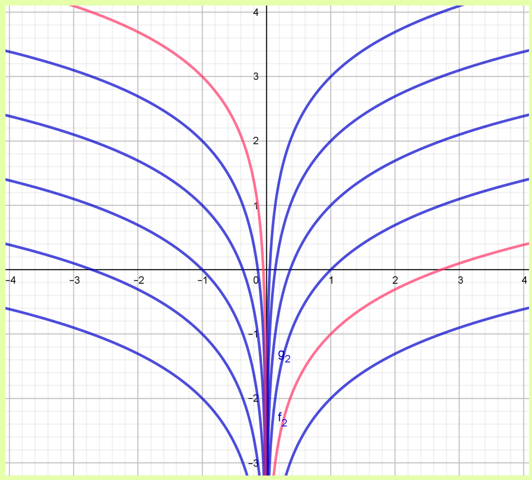
Luonnollinen logaritmi on määritelty positiivisilla reaaliluvuilla, joten integraaliksi saadaan

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(-x) + C, & \text{kun } x < 0 \\ \ln x + C, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Mutta nyt, jos tämä funktiopari yhdistettäisiin funktioksi $\ln x$, huomataan etteivät vakiot nollan molemmanpuoleisilla funktioilla välttämättä ole samat! Seuraavissa kuvaajissa näytetään tilanteiden erot siten, että vasemmanpuoleinen on epätäydellinen vastaus ja oikeanpuoleinen täydellinen.



$\ln|x| + C$



$\ln(-x) + C$, kun $x < 0$
$\ln(x) + E$, kun $x > 0$

Vasemmanpuoleisen kuvan mukaan kaikille integraalifunktioille $\ln|x| + C$ kuvaajien kumpikin puoli on pareittain samalla tasolla. Oikeanpuoleisessa kuvassa on punaisella yhden integraalifunktion kuvaaja, mutta sen puolien ei tarvitse vastata toisiaan.

Näin ollen edellisen lauseen A.6 kaava ei ole oikeastaan koko totuus, vaan algebrallisesti oikein funktion $\frac{1}{x}$ määräämätön integraali koko alueella saadaan paloittain määritellyllä funktiolla

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(-x) + C, & \text{kun } x < 0 \\ \ln x + E, & \text{kun } x > 0. \end{cases} \tag{A.8}$$

Integroimissäännöt perustellaan derivointisääntöjen kautta.

Pohdinta A.9 Integroimissäännön A.6 todistus derivoimalla on mennyt sekaisin. Laita todistuksen vaiheet oikeaan järjestykseen.

1. $\ln|x| = \ln x$, kun $x > 0$ ja
2. Integroimissääntö toimii molemmissa tapauksissa. $\square$
3. $\mathrm{D}\ln|x| = \mathrm{D}\underbrace{\ln(-x)}_{u(s(x))} = \underbrace{\dfrac{1}{-x}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(-x)}_{s'(x)} = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$
4. Kun $x < 0$,
5. Itseisarvon määritelmästä seuraa, että
6. $\mathrm{D}\ln|x| = \mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}$.
7. Kun $x > 0$,
8. $\ln|x| = \ln(-x)$, kun $x < 0$.

Päätellään seuraavaksi toinen käyttökelpoinen integroimissääntö.

Pohdinta A.10

a) Derivoi funktio $f(x) = \ln|2x + 1|$.

b) Anna esimerkki funktiosta, jonka derivaattafunktio on $g(x) = \frac{3}{3x-5}$.

c) Derivoi funktio $p(x) = \ln\left|x^2 + 5\right|$.

d) Anna esimerkki funktiosta, jonka derivaattafunktio on $q(x) = \frac{2x+7}{x^2+7x+1}$.

Pohdintatehtävän perusteella voidaan päätellä seuraava integroimissääntö:

Lause A.11 Funktion $\frac{f'(x)}{f(x)}$ integrointi. Oletetaan, että $f(x) \neq 0$ ja funktio on derivoituva välillä I. Tällöin

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + C,$$

kun $x \in I$.

Pohdinta A.12 Todista lause A.11. Käytä apuna pohdinnan A.9 ratkaisua.

Mietitään sitten rajoitteita lauseille, joita tähän mennessä on tarkasteltu.

Pohdinta A.13 Muodosta parillesi kolme rationaalifunktiota, joista yksi **ei ole** integroituva tähän mennessä tunnettujen tietojen avulla. Pyydä pariasi integroimaan ne ja tarkista ratkaisut. Selvittäkää, miksi funktiot voi tai ei voi integroida. Voiko "ei-integroitavan" funktion integroida GeoGebralla?

Voidaan huomata, ettei kaikkia rationaalifunktioita siis voida tämän opintojakson tiedoilla integroida käsin.

Pohdinta A.14 *Mikä meni pieleen?*

Seuraavissa ratkaisuissa on jotain vikaa. Valitkaa parisi kanssa omat tehtävänne ja tutkikaa niitä hetki itsekseen. Käykää sitten ratkaisut läpi vaiheittain selittäen mikä niissä on mennyt pieleen ja korjatkaa ne. Mitä integroimiskaavoja on käytetty ratkaisuissa?

Tehtävä 1: Määritä $f(x)$, kun $f'(x) = -\frac{x}{2x^2+1}$ ja $f(0) = \frac{1}{2}$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int -\frac{x}{2x^2+1}\,dx \\ &= \int -\frac{2}{2} \cdot \frac{x}{2x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{2x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|2x^2+1\right| + C. \\ f(0) &= \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 0. \end{aligned}$$

Vastaus: $f(x) = \frac{1}{2}\ln(2x^2+1)$.

Tehtävä 2: Laske funktion $g(x) = \frac{6x}{x^2+2} - x$ kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteiden rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: Integroimisväli saadaan selville funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauskohtien avulla.

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{6x}{x^2+2} - x &= 0\\
6x &= x(x^2+2)\\
x^3 - 4x &= 0\\
x = 0 \ \text{ tai } \ x^2 - 4 &= 0\\
x = 0 \ \text{ tai } \ x = 2 \ &\text{ tai } \ x = -2.
\end{aligned}$$

Väli on [-2,2]. Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} \frac{6x}{x^2+2} - x\,dx\\
&= \int_{-2}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx - \int_{-2}^{2} x\,dx\\
&= \frac{1}{3}\Big/_{-2}^{2} \ln(x^2+2) - \Big/_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\\
&= \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 2) - (2-2)\\
&= \frac{\ln 2}{3}.
\end{aligned}$$

Vastaus: $A = \frac{\ln 2}{3}$.

Lauseen A.6 todettiin pätevän kokonaisluvuille lukuunottamatta lukua -1. Kun potenssifunktio on muotoa $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, missä n on positiivinen kokonaisluku, kyseessä on juurifunktio. Juurifunktiot ovat siis potenssifunktioiden erikoistapaus.

Kokeillaan toimiiko potenssifunktion integroimissääntö juurifunktioille.

Pohdinta A.15

a) Derivoi funktio $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

b) Minkä funktion derivaattafunktio on funktio $g(x) = \sqrt{x}$?

c) Integroi funktiot $q(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ja $p(x) = x^{-\frac{1}{3}}$.

d) Voiko potenssifunktioiden integrointisääntöä käyttää, kun integroidaan juurifunktiota?

Pohdintatehtävän perusteella voidaan sanoa, että potenssifunktion integroimissääntö toimii juurifunktioiden integroimissääntönä.

Pohdinta A.16

a) Tutki GeoGebran avulla funktioiden $f(x) = x^{\frac{1}{k}}$, $k = 2, 3, 4, 5$ kuvaajia. Mitä huomaat? Miksi jotkin kuvaajista ovat poikkeavia? Mitä rajoitteita juurifunktion integroimissäännöllä on?

b) Kuvaile vaiheittain miten integroit juurifunktion integroimissäännön avulla funktion $f(x) = \sqrt{x^3}$

c) Muodosta opiskelukaverillesi laskutehtävä, jossa integroidaan jokin funktio ainakin juurifunktion integroimissääntöä käyttäen. Tarkista hänen ratkaisunsa ja anna palautetta.

Juurifunktiot kannattaa aina ensin muuttaa potenssifunktion muotoon integroidessa.

Huomautus A.17 Aiemmin kirjassa on käsitelty *yhdistetyn funktion integroimissääntö*:

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x))\, dx = g(f(x)) + C.$$

Pohdinta A.18 *Entä jos juuren sisällä on funktio?*

a) Mitä integroimissääntöjä täytyy ainakin käyttää, kun integroidaan funktio $\sqrt[k]{f(x)}$?

b) Integroi funktio $\sqrt[3]{1-x}$ ja kirjoita sanallisesti mitä teet ratkaisun eri vaiheissa.

c) Määritä $\int_{-1}^{2} \frac{5x^2}{\sqrt[3]{2x^3+5}}\, dx$. Vertailkaa parin kanssa ratkaisujanne ja tarvittaessa korjatkaa niitä.

Pohdinta A.19 Muodosta parillesi tehtävä, jossa lasketaan käsin määrätty integraali funktiolle, jolla on vähintään kaksi termiä ja ainakin yksi termeistä on juurifunktio. Laskun ratkaisemisen jälkeen tarkista parisi vastaus ja korjaa virheet tarvittaessa. Selvitä parillesi mitä virheitä ilmeni ja keskustelkaa miten virheet olisi voitu välttää.

A.1.1 Harjoitustehtävät

1. Laske ilman laskinta.

a) $\int \frac{4x}{3x^2-2}\,dx$

b) $\int \frac{x^4-2x^3-x+1}{x^2}\,dx,$ kun $x > 0$

c) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx,$ kun $x > 0$

d) $\int \tan x\,dx$

e) $\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ [S20/2.5]

f) $\int_{-1}^{4/9} \frac{1}{\sqrt{x+5}}\,dx$ [S09/3b].

2. Aluetta rajoittavat koordinaattiakselit, suora $x = 4$ ja käyrä $y = 1 + 15(x+1)^{-2}$. Jaa alue kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. [S1994/7a]

3. Olkoon funktio $f(x) = \frac{1}{3x+1}$. Määritä se integraalifunktio $F(x)$, jonka kuvaaja leikkaa funktion $f(x)$ kuvaajan kohdassa $x = 2$.

4. Laske funktion $f(x) = -(x^2 + 2x + 1)^{-1}$ ja sen integraalifunktion kuvaajien välisen pinta-alan suuruus välillä $[0, 4]$.

A.2 Eksponenttifunktion integrointi

Derivaattakurssilta on tuttua ja huomioonotettavaa, että eksponenttifunktion derivointikaava on mukavan yksinkertainen. Koska integraali on tavallaan derivointia toisinpäin, voidaan intuitiivisesti päätellä eksponenttifunktion integraalinkin olevan yksinkertainen.

Lause A.20 Eksponenttifunktion integroimissääntö:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Lause A.20 toimii vain silloin kun integrandi on muotoa e^x. Jos eksponentissa on muutakin kuin muuttuja x, tulee käyttää yhdistetyn funktion integroimissääntöä.

Pohdinta A.21

Ana ja Bea keskustelevat kahdesta integroitavasta funktiosta, jotka ovat

a) $f'(x) = e^{-x}$ ja

b) $g'(x) = e^{x^2}$.

Ana: No toi lause A.20 sanoo, että mitään ei tapahdu ja vastaus on toi sama, eli $f(x) = \int e^{-x} \, dx = e^{-x} + C$ eikö?

Bea: Ei mutta kato toi $f'(x) = e^{-x}$ on *yhdistetty funktio*, eli pitää käyttää tota yhdistetyn funktion integroimissääntöä.

Ana: Aa, joo. Miten toi sisäfunktion derivaatta tonne taiotaan?

Bea: Sinne voi laittaa kertoimeksi 1, jonka voi muuttaa murtoluvuksi.

Ana: Eli a-kohdassa

$$\int e^{-x} \, dx = \int 1 \cdot e^{-x} \, dx = \int \frac{-1}{-1} e^{-x} \, dx = -1 \int -1 \cdot e^{-x} \, dx.$$

Ja tässä toi -1 on nyt se sisäfunktion derivaatta!

Bea: Joo hyvä. Nyt pitäs päteä toi yhdistetyn funktion integroimissääntö.

Ana: Eli vastaus on $-e^{-x} + C$.

Bea: Super. Mä yritän tota b-kohtaa sitten. Äskösen perusteella pitäs saada siitä ykkösestä nyt murtoluku $\frac{2x}{2x}$ eli

$$\int e^{x^2} \, dx = \int 1 \cdot e^{x^2} \, dx = \int \frac{2x}{2x} e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2x} \int 2x \cdot e^{x^2} \, dx \ \ldots$$

Ana: Hei, tota $\frac{1}{2x}$ ei voi ottaa tuolta pois nyt kun siinäkin on tota x:ää ja se pitää kans integroida!

Bea: Äh, tosi. Ja määrittelyjoukkokin muuttuu kun nollalla ei voi jakaa.

No voiko tätä ollenkaan integroida?

Pohdi parin kanssa seuraavia kysymyksiä:

1. Voitko integroida ilman laskinta seuraavat funktiot? Perustele.

a) $e^{2x}(e^x + 1)$

b) $3xe^{-x^3}$

c) $\frac{e^x}{\sqrt{e^x}}$

2. Millainen funktion $f(x)$ täytyy olla, jotta funktion $e^{f(x)}$ integrointi onnistuu tämän moduulin tiedoilla?

Funktioita, joita ei voi integroida tämän moduulin tiedoilla, voi yrittää sijoitusintegroida tai osittaisintegroida. Toisaalta joillekin funktioille ei ole määritelty alkeisfunktioista muodostuvaa integraalia, joten niille on määritelty omat funktionsa.

Arvaaminen ja vastauksen tarkistaminen on hyvä vaihtoehto silloin, kun ei ole aivan varma mitä kautta lähteä lähestyä tehtävää. Arvausvastaukset pitää tarkistaa tunnetuilla tiedoilla, jotta voidaan kehittää parempia arvauksia.

Pohdinta A.22

Tehtävä: Integroi funktio $f(x) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-2e^{2x}}}$.

Ratkaisu:

Ratkaistaan tehtävä arvaamalla. Funktio näyttää sisältävän kaikkia tähän mennessä eteen tulleita funktiotyyppejä, joten yhdistetyn funktion integroimissääntö on tärkeä lähtökohta. Sen käyttämiseen kuuluu olennaisesti sisäfunktion derivaatta.

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1 - 2e^{2x}}} = \frac{1}{2} \cdot {\color{red}4e^{2x}}(1 - 2e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$$

Saatiin aika hyvännäköinen sisäfunktion derivaatta.

Arvataan vastaukseksi $\frac{1}{2}(1 - 2e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$ ja tarkistetaan derivoimalla.

Tarkistus:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(1-2e^{2x})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1-2e^{2x})^{-\frac{3}{2}}\cdot(-4e^{2x}) = \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{(1-2e^{2x})^3}}$$

Tarkistuksen tulos on lupaavan näköinen ja arvaus oli oikean suuntainen, mutta juuren sisään on ilmennyt eksponenttiin kolmonen ja osoittajan kertoimeksi -1.

Pienen pohdinnan jälkeen muodostetaan parempi arvaus $-\frac{1}{2}(1-2e^{2x})^{\frac{1}{2}}$.

Tarkistus:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(1-2e^{2x})^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1-2e^{2x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-2e^{2x}}}.$$

Tarkistus todistaa arvauksen oikeaksi, joten integraalifunktio on

$\int f(x)\,dx = \int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-2e^{2x}}}\,dx = \frac{-1}{2\sqrt{1-2e^{2x}}} + C.$

---

a) Miksi arvaus ei ensimmäisellä kertaa mennyt oikein?

b) Millä perusteilla paranneltu arvaus muodostettiin?

Huomautus A.23

Muistutus luonnollisen logaritmin ja Neperin luvun yhteydestä:

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Päätellään vielä yleisen kannan eksponenttifunktion a^x integroimissääntö, kun $a \neq 0$.

Pohdinta A.24 *Yleisen kannan eksponenttifunktio*

a) Olkoon funktio $f(x) = a^x$. Derivoi se seuraavien vaiheiden mukaisesti:

1) Muunna $f(x)$ e-kantaiseksi.

2) Derivoi $f(x)$.

3) Muunna $f'(x)$ takaisin a-kantaiseksi.

b) Anna esimerkki funktiosta, jonka derivaattafunktio on a^x.

c) Päättele a-kantaisen eksponenttifunktion integroimissääntö.

d) Laske saamasi säännön avulla $\int_1^3 5^x\,dx$. Tarkista vastaus GeoGebrassa käyttämällä komentoa `IntegraaliVäli()`.

Lause A.25 Funktion a^x integroimissääntö:

Olkoon $a > 0$. Tällöin

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C.$$

Pohdinta A.26 *Bakteeriviljelmän kasvu*

Tehtävä:

Petrimaljassa A olevan bakteeriviljelmän kasvunopeutta kuvaa funktio $q(t) = (2{,}5)^t$, missä t on aika tunteina ja funktio antaa arvoja yksikössä tuhat bakteeria tunnissa. Kun viljelmä aloittaa kasvunsa 9000 bakteerista, mikä on funktio $Q(t)$, joka antaa petrimaljassa olevien bakteerien lukumäärän ajanhetkellä t? Mikä on bakteerien lukumäärä maljassa kolmen tunnin päästä?

Ratkaisu:

$$Q(t) = \int (2{,}5)^t dt \;= \frac{(2,5)^t}{\ln(2,5)} + C$$

Ajanhetkellä $t = 0$ saadaan arvo $Q(0) = 9 = \frac{1}{\ln(2{,}5)} + C$, joten $C \approx 7{,}909$.

Funktio on siis

$$Q(t) = \frac{(2{,}5)^t}{\ln(2{,}5)} + 7{,}909.$$

Ajankohdalla $t = 3$ bakteerien lukumäärä tuhansissa on

$$Q(3) = \frac{(2{,}5)^3}{\ln(2{,}5)} + 7{,}909 \approx 24{,}961.$$

Vastaus: Kolmen tunnin kuluttua petrimaljassa on noin 25000 bakteeria.

---

a) Piirrä funktiot $q(t)$ ja $Q(t)$ GeoGebrassa. Miten saatu vastaus nähdään kuvaajista?

b) Petrimaljassa B on aluksi 15000 bakteerin populaatio, jonka kasvunopeutta kuvaa käyrä $4^{\frac{1}{2}x}$. Kuinka pitkän ajan jälkeen populaatio on yhtä suuri kuin esimerkin petrimaljan A populaatio kolmen tunnin jälkeen?

Tähän mennessä kaikki lukiossa tarpeelliset alkeisfunktioiden integroimissäännöt on käsitelty. Näillä työkaluilla voi jo aika pitkälle arvioida onko alkeisfunktioista muodostuva funktio integroitavissa.

A.2.1 Harjoitustehtävät

5. Integroi funktio

a) e^{π} b) $\frac{3e^x}{2} + 2^{-x}$ c) $e^{\frac{x}{3}}$ d) $5xe^{x^2}$ e) $-x^2e^{\frac{x^3}{3}}$ f) $x^e + e^x + e^e$ g) 4^xe^{2x}.

6. Laske käyrän xe^{x^2} ja x-akselin välinen pinta-ala välillä $[0, 3]$.

7. a) Laske GeoGebran avulla funktiolle $f(x) = -e^{-3x} + 1$ määrätty integraali välillä $[0, 2]$.

b) Määritä se funktion $f(x)$ integraalifunktio, jonka pienin arvo on 0.

c) Laske funktioiden kuvaajien leikkauspisteiden väliin väliin jäävä pinta-ala, kun funktiot ovat $f(x)$ ja sen integraalifunktio, jonka pienin arvo on 0.

8. Määritä funktion $f(x) = -xe + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{6}{5}$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.

9. Funktion $g(x) = \frac{1}{2}e^{x-10} + \frac{x}{2}$, sen integraalifunktion ja suoran $x = a$ $(a > 2)$ kuvaajien väliin jää kahteen osaan jakautuva alue. Määritä vakio a siten, että osien pinta-alojen suuruus on sama.

10. Bakteereja tutkivassa kokeessa erästä bakteeriviljelmää kasvatetaan petrimaljassa. Alkuperäisen bakteeripopulaation arvioidaan olevan 1200 solua ja sen kasvunopeudeksi arvioidaan $P'(t) = 1000e^{0.2t} \left(\frac{\text{kpl}}{\text{vrk}}\right)$.

a) Kuinka suuri populaatio on millä tahansa ajanhetkellä $t \geq 0$?

b) Kuinka suureksi populaatio kasvaa viikossa?

Lisätehtävä:

11. Ratkaise pohdintatehtävän A.26 esimerkkitehtävä määrätyn integraalin avulla. Vertaa ratkaisuasi esimerkkiratkaisuun.

B Opettajan opas

Opettajan opas sisältää lukujen tavoitteet ja niiden tuntijakoehdotuksen sekä avaa oppimateriaalin pohdintatehtävien tarkoitusta, kulkua ja vastaukset.

Luvun rationaali- ja juurifunktioiden integrointi tavoitteena opiskelijoille on

- osata integroida rationaalifunktioita sekä juurifunktioita
- hallita sisäfunktion derivaatan muodostaminen integrointia varten
- osata käyttää GeoGebraa rationaali- ja juurifunktioita sisältävien integraalilaskujen ratkaisemiseksi
- kehittää yhteistyö- ja argumentointitaitoja
- osata perustella omia ratkaisumenetelmiä.

Luvun eksponenttifunktioiden integrointi tavoitteena opiskelijoille on

- osata integroida eksponenttifunktioita
- hallita yhdistetyn funktion integroimissäännön käyttö
- osata käyttää GeoGebraa eksponenttifunktioita sisältävien integraalilaskujen ratkaisemiseksi
- kehittää yhteistyö- ja argumentointitaitoja
- osata perustella omia ratkaisumenetelmiä.

Tämän oppimateriaalin pohdintatehtävät sisältävät reilusti ryhmätyöskentelyä, mikä asettaa opettajallekin monia vaatimuksia. On mahdollista, että osa opiskelijoista saattaa passivoitua ja "matkustaa" ryhmän mukana tehtävien läpi nopeasti virheitä tehden.

Materiaalia käyttävän opettajan rooli on tärkeä ja hänen onkin varmistettava, että opiskelijat

- käyttävät aikaa eivätkä kiirehdi tehtävien suorittamisessa,
- selittävät ja kirjoittavat perustelunsa,
- haastavat toisensa, kun he ovat eri mieltä,
- löytävät vaihtoehtoisia tapoja tarkistaa vastaukset (esim. käyttämällä laskimia, määrittämällä pinta-aloja eri tavoin ja manipuloimalla funktioita).

Opettajan kannattaa tehtävien ohessa myös

- kannustaa opiskelijoita syvällisempään pohdintaan ehdottamalla, että he kokeilevat muita esimerkkejä ("Pitääkö tämä edelleen paikkansa desimaaliluvuilla tai negatiivisilla luvuilla?" "Entä kun otan tämän välin tarkasteluun? Miten se muuttaa integraalia ja pinta-alaa?")

- haastaa opiskelijat esittämään vakuuttavampia perusteluja. ("Näen tuossa väitteessä virheen." "Mitä tapahtuu, kun. . . ?")
- leikkiä "paholaisen asianajajaa". ("Uskon, että tämä on totta, koska. . . Voitko vakuuttaa minut siitä, että olen väärässä?")
- selittää ja tukea ongelmanmuodostusprosessia
- rohkaista opiskelijat tukemaan toisiaan kysymysten ratkaisemisessa
- haastaa opiskelijat selittämään, miksi joihinkin ongelmiin näyttää olevan useita vaihtoehtoisia ratkaisuja.

B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Seuraava suunnitelmaehdotus jakaa tunnit lukujen pituuden perusteella seuraavasti:

- **Rationaali- ja juurifunktion integroiminen** 2 x 45 min tai 1 x 75 min
- **Eksponenttifunktion integroiminen** 1 x 45 min tai 1 x 75 min.

B.2 Pohdintatehtävät

Pohdinta A.1

b) Vasemman sarakkeen funktiot ylhäältä alas: $f(x) = \frac{4}{3x^2}$, $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Oikean sarakkeen funktiot ylhäältä alas: $h'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$, $g'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$ ja $f'(x) = -\frac{8}{3x^3}$.

Kohdassa **c)** opiskelijat voivat huomata jo millaisia integroimissääntöjä on luvassa. Potenssifunktion integroimissääntö tunnetaan ja sen avulla voidaan integroida kaksi näistä derivaattafunktioista. Eksponenttifunktion derivoinnista voi huomata, että sen integroiminenkin on varsin yksinkertaista.

Rationaali- ja juurifunktion integrointi

Pohdinta A.2

Tämän pohdintatehtävän tavoitteena on huomata, että kun $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, potenssifunktion integroimissääntö toimii edelleen. Viimeistään tehtävän b-kohdassa opiskelija kohtaa tapauksen, joka voi jäädä vaivaamaan poikkeavana säännöstä. Tätä tutkitaan lisää tulevissa pohdintatehtävissä.

Vastaukset:

b) $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$, $G(x) = -\frac{1}{8x^8}$ ja $G(x) = \ln|x|$.

Pohdinta A.4

Väittämä on virheellinen, koska määrättyä integraalia ei ole määritelty välillä [-1,2] funktiolle x^{-2}. Opiskelijoille voi vinkata integrandin kuvaajan tutkimisen, jos kysymykseen ei löydy vastausta.

Pohdinta A.5

Tehtävän c-kohdassa opiskelija muokkaa funktiota tietyin ehdoin, minkä pitäisi johtaa siihen, että logaritmin sisäisen muuttujan ympärille lisätään itseisarvomerkit. Opettaja voi ohjata pohdintaa tässä antamalla johdattelevia kysymyksiä viitaten esimerkiksi kuvaajiin ja b-kohtaan.

Vastauksia:

a) $g'(x) = \frac{1}{x}$

b) $x > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$

c) $g(x) = \ln|x|$

e) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, kun $x > 0$ tai $x < 0$.

Pohdinta A.9

Oikea järjestys: 5,1,8,7,6,4,3,2 (tai 5,1,8,4,3,7,6,2).

Pohdinta A.10

Vastaukset:

a) $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$

b) $G(x) = \ln|3x - 5|$

c) $p'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$

d) $Q(x) = \ln\left|x^2 + 7x + 1\right|$.

Pohdinta A.13

Pohdintatehtävä on hyvä tilaisuus matemaattisen keskustelun seuraamista varten.

Pohdinta A.14

Pohdintatehtävän tarkoitus on kiinnittää huomiota siihen, miten opitut integroimissäännöt toimivat oikeasti. Tehtävässä 2 on myös tärkeä hoksata pinta-alan ja määrätyn integraalin ero. Jos tehtävän 2 analysointi ei näytä opiskelijoilta onnistuvan, pitää huomattaa opiskelijoille, että funktion kuvaajan kulkua pitää tutkia GeoGebralla/kulkukaaviolla.

Tehtävän 2 oikea vastauksen voi huomauttaa opiskelijoille, mikäli he eivät huomaa kaikkia virheitä.

Tehtävien oikeat vastaukset:

Tehtävä 1: $f(x) = -\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + \frac{1}{2}$ **Tehtävä 2:** $A = 6\ln 3 - 4$.

Virheiden sijainnit:

Tehtävä 1: Ratkaisun kolmannella rivillä on otettu virheellisesti kerroin -2 osoittajaan lausetta A.11 sovellettaessa. Viidennellä rivillä kerroin on ratkaistu väärin: $\frac{1}{2}\ln(2 \cdot 0^2 + 1) = 0$

Tehtävä 2: Ratkaisussa ei ole tutkittu kuvaajan kulkua ollenkaan, vaan on suoraan laskettu integraali välillä $[-2{,}2]$. Jotta saadaan kysytty pinta-ala, määrätty integraali täytyy jakaa kahteen osaan väleille $[-2{,}0]$ ja $[0{,}2]$, missä ensimmäisen integraalin vastaluku summataan jälkimmäiseen. Toinen mahdollisuus on kertoa välin [0,2] integraali kahdella. Analysoitavan ratkaisun integraalista pitäisi tulla oikeasti vastaukseksi $A = 0$, mutta ratkaisussa on tehty laskennallisia virheitä:

- Kerroin on otettu väärin 3. rivillä ja sen pitäisi olla 3 eikä $\frac{1}{3}$.
- Määrätyn integraalin laskemisessa 3. ja 4. rivin välillä välivaiheet on jätetty merkitsemättä ja ensimmäisen erotuksen pitäisi olla $\int_{-2}^{2} \ln(x^2+2)\,dx = \ln 6 - \ln 6 = 0$, jolloin lopulliseksi vastaukseksi tulisi 0.

Pohdinta A.15

a) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

b) $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

c) $Q(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ ja $P(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

d) Kyllä, mutta tapauksessa x^{-1} täytyy käyttää lausetta A.6.

Pohdinta A.16

a) Parillisilla k funktion määrittelyjoukko on $x \geq 0$ ja parittomilla k funktion määrittelyjoukko on $x \in \mathbb{R}$.

Pohdinta A.18

Kohdassa a) on annettu vinkkinä värit funktioon, jotta yhdistetyn funktion muoto tulisi huomattua helpommin.

b) Integraalifunktio: $-\frac{3}{4}(1-x)\sqrt[3]{1-x} + C$

c) 6,91.

Eksponenttifunktion integrointi

Pohdinta A.21

1. a) Kyllä b) Ei c) Kyllä.

Kohdassa 2. tarkoitus on päätyä seuraavanlaiseen päätelmään: Silloin kun yhdistetyn funktion ulkofunktiona on eksponenttifunktio, tätä integroimissääntöä voi käyttää vain, kun sisäfunktion derivaatta on jokin vakio.

Opiskelijalla saattaa jäädä vaivaamaan voiko funktiota e^{x^2} lopulta integroida. Vastaus on lyhyesti se, ettei sitä voida määritellä alkeisfunktioiden avulla vaan pitää määritellä uusi funktio. Kyseisessä tapauksessa niin sanottu virhefunktio Erf on avuksi. Sitä käytetään mm. todennäköisyyslaskennassa ja statistisessa mekaniikassa. Matematiikassa löytyy monia tällaisia funktioita, joita ei lukiomatematiikan tiedoilla voida integroida.

Pohdinta A.22

a) Otettu väärin sisäfunktion derivaatta ja arvausvastauksen eksponentti on väärin.

Pohdinta A.24 d) $\frac{120}{\ln 5}$

Pohdinta A.26 b) $2,79$ h.

C Tehtävien vastaukset

C.1 Rationaali- ja juurifunktion integrointi

Tehtävä 1:

a) $\frac{2}{3}\ln\left|3x^2-1\right|+C$

b) $\frac{1}{3}x^3-x^2-\ln x-\frac{1}{x}+C$

c) $\sqrt{2}\ln\left|x^2-5\right|+C$

d) $-\ln|\cos x|+C$

e) 4

f) $\frac{2}{3}$

Tehtävä 2: 16

Tehtävä 3: $F(x)=\frac{1}{3}\ln|3x+1|-\frac{\ln 7}{3}+\frac{1}{7}$

Tehtävä 4: 2,41

C.2 Eksponenttifunktion integrointi

Tehtävä 5:

a) $xe^{\pi}+C$

b) $\frac{3e^x}{2}-\frac{1}{2^x\ln 2}+C$

c) $3e^{\frac{x}{3}}+C$

d) $\frac{5}{2}e^{x^2}+C$

e) $-e^{\frac{1}{3}x^3}+C$

f) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+e^x+e^e x+C$

g) $\frac{(2e)^{2x}}{2(\ln 2+1)}+C$

Tehtävä 6: 4051,01

Tehtävä 7: a) 1,667 b) $\frac{1}{3}e^{-3x}+x-\frac{1}{3}$ c) 0,453

Tehtävä 8: -1,094

Tehtävä 9 : $a=3$

Tehtävä 10: a) $5000e^{\frac{1}{5}x}+5\ln\frac{12}{5}$ b) 20269 bakteeria.