Anna Kuivamäki

Desimaalilukujen hallinnan kehittäminen intervention avulla seitsemännellä luokalla

Pro gradu -tutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Erityispedagogiikka
2022

Oulun yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta
Desimaalilukujen hallinnan kehittäminen intervention avulla seitsemännellä luokalla (Anna Kuivamäki)
Pro gradu, 54 sivua, 5 liitesivua
Toukokuu 2022

Matemaattinen osaaminen on yhteydessä yksilön myöhempään kouluttautumiseen ja siihen, miten hyvin yksilö selviytyy arkielämän matemaattisista vaatimuksista. Lapsista ja nuorista 15–20 prosentilla on haasteita matematiikan oppimisessa. Desimaalilukujen hallinta on tärkeä osa-alue matemaattisessa osaamisessa, mutta usealla oppilaalla desimaalilukujen osaaminen on heikkoa. Koska desimaalilukujen hallinta on tärkeää myöhemmälle matemaattiselle osaamiselle, tulisi näiden taitojen oppimista tukea toimivilla menetelmillä. Matemaattisia oppimisvaikeuksia koskeva interventiotutkimus on kuitenkin suhteellisen kapeaa ja tukikeinoja, joilla on tieteellistä näyttöä, ei ole tarjolla laajasti.

Tämän pro gradu -tutkielman tavoitteena on selvittää, voidaanko seitsemännen luokan oppilaiden desimaalilukujen osaamiseen vaikuttaa intervention avulla. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, saavuttavatko interventioon osallistuvat oppilaat kontrolliryhmän tasoa intervention avulla. Tutkimus koostui alkumittauksesta, interventiojaksosta ja loppumittauksesta. Interventioon osallistuvat oppilaat (n = 2) valittiin alkumittauksen tulosten perusteella, jossa käytettiin desimaalilukukartoitusta, joka mittasi oppilaiden desimaalilukukäsitettä ja peruslaskutaitoja desimaaliluvuilla. Intervention vaikuttavuutta tarkasteltiin vertailemalla interventioon osallistuneiden oppilaiden loppumittaustuloksia alkumittaustuloksiin ja kontrolliryhmän kokonaispisteiden keskiarvoon.

Interventiojakso kesti kaiken kaikkiaan neljä viikkoa, mutta tutkittavien interventiotunnit jäivät vähäisemmäksi kuin aluksi suunniteltiin. Tutkimuksen tulosten mukaan vaikuttaisi siltä, että oppilaiden osaamiseen pystyttiin vaikuttamaan positiivisesti intervention avulla. Molemmat tutkittavat oppilaat paransivat tulostaan loppumittauksessa. Oppilas A paransi suoritustaan kuusi pistettä ja oppilas B 11 pistettä. Oppilas B saavutti myös kontrolliryhmän osaamistason, mutta oppilas A jäi loppumittauksessa kontrolliryhmän osaamistason alapuolelle.

Tutkimuksen tulosten perusteella näyttäisi siltä, että suunnitellulla desimaalilukuihin kohdistuvalla interventiolla voidaan vaikuttaa positiivisesti oppilaiden desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen. Intervention vaikuttavuuden voimakkuutta on kuitenkin vaikea arvioida. Tämä tutkielma tarjoaa uutta tietoa siitä, miten oppilaiden desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen voidaan vaikuttaa intervention avulla. Tutkielma lisää myös uutta tietoa desimaalilukujen oppimisesta ja desimaalilukujen oppimisen tukemisesta sekä siitä, miten interventio voidaan toteuttaa luonnollisessa ympäristössä eli koulussa.

Avainsanat: desimaaliluvut, interventio, matematiikka, matemaattiset oppimisvaikeudet, oppimisen tuki

University of Oulu
Faculty of Education
Developing the skills in decimal numbers through intervention in the seventh grade (Anna Kuivamäki)
Master’s thesis, 54 pages, 5 appendices
May 2022

Mathematical competence is related to an individual's further education and how well the individual copes with the mathematical requirements of everyday life. It is estimated that 15–20% of children and young people have difficulties in learning mathematics. Mastering decimal numbers is an important part of mathematical competence, but many children have poor decimal number skills. Since the decimal number skills are important for later learning in mathematics, the learning of these skills should be supported by effective instructional methods. However, intervention research on mathematical learning difficulties is relatively narrow and there is a lack of widely available means of support with research-based evidence.

The aim of this master’s thesis is to find out whether the performance in decimal numbers of seventh-grade students can be improved by intervention. In addition, the purpose is to find out whether the students participating in the intervention reach the level of the control group through the intervention. The study consisted of a pretest, intervention period, and a posttest. Pupils participating in the intervention ($n = 2$) were selected based on the results of the pretest, which was conducted using decimal number test, which measured students' concept of decimal numbers and basic numeracy skills in decimal numbers. The results of the study were obtained by comparing the posttest results of the students participating the intervention with the pretest results and the average of the total scores of the control group.

The intervention period lasted four weeks, but the intervention hours completed were less than initially planned. According to the results of the study, it suggests that students' competence could be positively influenced by the intervention. Both students improved their results in the final measurement. Student A improved his performance by six points and Student B by eleven points. Student B also reached the achievement level of the control group, but student A was below the achievement level of the control group in the posttest.

Based on the results of the study, it would appear that the planned intervention for decimal numbers can have a positive impact on students' skills and competence in decimal numbers. However, it is difficult to assess the effectiveness of the intervention. This thesis provides new information about how an intervention can affect students’ skills and competence in decimal numbers. The research also adds new information about the learning of decimal numbers and supporting the learning of decimal numbers, as well as how an intervention can be implemented in the natural environment, for example in school.

Keywords: decimal numbers, intervention, mathematics, mathematical learning difficulties, support in learning

Sisältö

1 Johdanto

Matemaattinen osaaminen vaikuttaa yksilön myöhempään kouluttautumiseen ja kykyyn selviytyä arjen matemaattisista vaatimuksista (Räsänen, 2012). Aikuisista joka neljännellä ovat heikot taidot matematiikassa (Korhonen ym., 2018). Lapsista ja nuorista 15–20 prosentilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa (Mononen ym., 2017). Hakkaraisen (2017) mukaan vaikeudet matematiikan oppimisessa ovat yhteydessä opintojen loppumiseen toiseen asteeseen ja siihen, että nuori jää sekä koulutuksen että työelämän ulkopuolelle. Matematiikan haasteet näyttäisivät siis ulottuvan myös perusopetuksen jälkeiseen aikaan (Hakkarainen, 2017). Huomioitavaa on myös se, että oppimisen haasteilla matematiikassa on vahvempi vaikutus koulun keskeyttämiseen kuin lukemisen vaikeuksilla (Korhonen ym., 2018). Tästä syystä on tärkeää, että matematiikan oppimisen haasteisiin pyritään löytämään toimivia tukikeinoja.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, voidaanko systemaattisen ja suunnitellun intervention avulla vaikuttaa 7. luokan oppilaiden matemaattiseen osaamiseen desimaalilukujen osalta. Desimaalilukujen hallinta on välttämätöntä myöhemmälle matemaattiselle osaamiselle ja kyvylle menestyä useissa eri ammateissa (Lortie-Forgues ym., 2015). Lortie-Forguesin ja kollegoiden mukaan desimaalilukujen hallinta on kuitenkin heikkoa useilla lapsilla ja aikuisillakin. Tästä syystä on tärkeää saada tietoa siitä, minkälaisia haasteita desimaalilukujen oppimiseen liittyy ja millainen opetus tukisi oppilaiden oppimista. Interventiotutkimus matemaattisissa oppimisvaikeuksissa on verrattain suppeaa, eikä tutkimusperustaisia tukikeinoja ole paljon saatavilla (Parrila ym., 2019). Siksi koen, että interventiotutkimuksen tekeminen on merkityksellistä ja tutkimus voi tarjota hyödyllistä tietoa kasvatusalan työkentille.

Tein kandidaatintutkielmani matemaattisista oppimisvaikeuksista, joten tuntui luonnolliselta jatkaa tätä työtä saman aihepiirin parissa. Erityisopettajan työssä oppilaiden oppimisen tukeminen on keskiössä ja halusin lähteä keskittymään toimivien opetuskeinojen ja tuen mallien löytämiseen interventiotutkimuksen avulla. Tämän tutkimuksen tavoitteena onkin tarjota tietoa desimaalilukujen oppimisesta ja oppimisen tuesta sekä siitä, miten intervention toteuttaminen onnistuu luonnollisessa ympäristössä eli koulussa.

2 Matemaattisten taitojen kehittyminen

Tässä luvussa keskitytään matemaattisten taitojen kehittymiseen alkaen varhaisimmista matemaattisista taidoista. Luvussa käsitellään myös kymmenjärjestelmätaitojen ja paikka-arvo käsitteen hallinnan kehittymistä sekä vaikeuksia matematiikan oppimisessa. Näissä osissa keskitytään tutkimukselle olennaisimpiin taitoihin eli desimaalilukutaitoihin.

2.1 Varhaiset matemaattiset taidot

Matemaattiset taidot lähtevät kehittymään jo hyvin aikaisessa vaiheessa ja osa taidoista onkin synnynnäisiä (Koponen ym., 2019). Matemaattinen osaaminen koostuu useista eri osa-alueista kuten numeerisesta tiedosta, aritmeettisten yhdistelmien muistamisesta, matemaattisten käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämisestä, proseduraalisesta eli menetelmätietoudesta ja -taidoista sekä ongelmanratkaisutaidoista (Aunola & Nurmi, 2018). Aunolan ja Nurmen (2018) mukaan matemaattiset taidot kehittyvät hierarkkisesti, jolloin aiempi osaaminen tukee uuden oppimista. Ikäheimo (2021, s. 69) toteaa, että matematiikan oppiminen pohjautuu ajatteluun, ymmärrykseen ja harjoitteluun.

Matemaattisten taitojen oppiminen vaatii runsasta harjoittelua ja useita toistoja (Aunio & Nurmi, 2018). Harjoittelun lisäksi tulisi keskittyä myös käsitteiden ymmärtämiseen, sillä pelkkä mekaaninen harjoittelu ei luo pysyvää tulosta (Ikäheimo, 2021, s. 71). Aunolan ja Nurmen (2018) mukaan harjoittelun avulla matemaattiset peruskäsitteet ja -toiminnot automatisoituvat, jolloin niiden hyödyntäminen ei kuluta enää resursseja tarkkaavaisuudelta ja työmuistista, ja tällöin resursseja vapautuu ongelmanratkaisun monimutkaisempiin prosesseihin (Aunola & Nurmi, 2018). Myös Ikäheimo (2021, s. 71) toteaa, että käsitteellisen ymmärryksen ja algoritmien osaamisen vahvistuminen niiden hallinnaksi vaatii pitkäkestoista ja systemaattista harjoittelua.

Matemaattiset perustaidot muodostuvat useista eri taitoalueista ja kun ne kehittyvät, ne muodostavat yhdessä toisiinsa nojaavan kokonaisuuden (Koponen ym., 2019). Varhaisemmat matemaattiset taidot kehittyvät syntymästä noin kahdeksanvuotiaaksi asti (Mononen ym., 2017). Aunolan ja kollegoiden (2004) mukaan tiedetään, että varhaiset matemaattiset taidot ovat yhteydessä myöhempään matematiikan oppimiseen. Lisäksi varhaiset matemaattiset taidot myös ennustavat myöhempää matematiikan osaamista (Merkley & Ansari, 2016). Aunion (2008) mukaan keskeisimmät matemaattiset taidot on mahdollista jakaa neljään osa-alueeseen, jotka muodostuvat useammista osataidoista. Nämä neljä osa-aluetta ovat lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, aritmeettiset perustaidot ja laskemisen taidot (Aunio, 2008). Yhdessä nämä taidot luovat varhaiset matemaattiset taidot, joista Aunio ja Räsänen (2015) ovat luoneet mallin, joka koskee 5–8-vuotiaita lapsia.

Lukumääräisyyden tajulla tarkoitetaan taitoa erottaa lukumääriä toisistaan. Se on ei-kielellinen taito eli lukumäärien hahmottaminen ja erottaminen toisistaan tapahtuu ilman kieleen perustuvaa laskemista (Aunio & Räsänen, 2015). Lukumääräisyyden taju on perustavanlaatuinen matemaattinen taito, johon myöhempi formaalinen matematiikan oppiminen perustuu (Aunio & Räsänen, 2015; Aunio, 2008). Se on siis synnynnäinen taito ja on havaittu, että vauvat kykenevät erottamaan lukumääriä toisistaan ja lisäksi myös havaitsemaan lisäämisen ja vähentämisen vaikutukset pienillä määrillä (Wynn, 1992).

Aunion ja Räsäsen (2015) mukaan *matemaattisten suhteiden ymmärtämisellä* tarkoitetaan määrällisten ja ei-määrällisten suhteiden ymmärtämistä. He toteavat, että matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen liittyy eri taitoja: matemaattis-loogiset periaatteet, aritmeettiset periaatteet, matemaattisten symbolien ymmärtäminen sekä kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon hallinta. Matemaattis-loogisilla periaatteilla tarkoitetaan taitoja sarjoitella, luokitella ja vertailla sekä yksi-yhteen periaatteen ymmärtämistä (Aunio & Räsänen, 2015).

Aunion ja Räsäsen (2015) mukaan aritmeettisten periaatteiden hallitsemisella tarkoitetaan ymmärrystä vaihdannaisuudesta, liitännäisyydestä, käänteisyydestä ja siitä, että kokonaisuus muodostuu pienemmistä osista. Matemaattisten symbolien ymmärtämisellä tarkoitetaan esimerkiksi vähemmän kuin (<), enemmän kuin (>), yhtä kuin (=) ja ei yhtä kuin (≠) symbolien ymmärtämistä (Aunio & Räsänen, 2015). Paikka-arvon ymmärtäminen on yksi kehityksellinen tehtävä alkuopetuksessa. Ykkösten, kymmenien ja satojen ymmärtäminen kymmenjärjestelmässä on keskeinen tieto siinä, miten eri numerot saavat eri arvon riippuen niiden paikasta luvussa (Aunio & Räsänen, 2015).

Aunio (2008) toteaa, että *laskemisen taitoihin* kuuluu lukujonon luettelemisen taidot, lukumäärän laskemisen taito ja numerosymbolien hallinta. Näiden taitojen kehitys etenee usein lukujonon luettelusta lukumäärien laskemiseen ja lopulta yhteen- ja vähennyslaskutaitoihin. Aunio (2008) toteaa myös, että lukujonon luettelemisen taito on erittäin tärkeä matemaattisen osaamisen kehittymisen kannalta. Luettelemisen taitoa tarvitaan esimerkiksi siihen, että lapsi osaa laskea esineiden määrän ja se luo myös pohjaa yhteen- ja vähennyslaskutaidoille (Aunio, 2008).

Lukumäärien laskeminen edellyttää usean eri taidon hallitsemista (Aunio, 2008). Aunion (2008) mukaan ensin lapsi oppii luettelemaan lukujonon oikeassa järjestyksessä, jonka jälkeen lapsi oppii myös luomaan yksi yhteen -suhteen sanotun sanan ja laskettavan asian sekä osoittavan eleen välille. Tällöin muodostuu myös ymmärrys siitä, että viimeiseksi sanottu luku kertoo esineiden määrän (Aunio, 2008). Aunio (2008) toteaa, että lapsen täytyy myös oppia se, että kaikkia erilaisia asioita ja esineitä voi laskea ja laskeminen voi tapahtua missä järjestyksessä tahansa. Lukujonon luettelemisen taitojen sujuvuus on yksi merkittävimmistä taidoista, sillä se ennustaa myöhempää matemaattista osaamista (Mononen ym., 2013). Numerosymbolien hallinnalla tarkoitetaan sitä, että lapsi oppii yhdistämään lukusanan (yksi) numerosymboliin (1) (Aunio, 2008).

Aritmeettisilla perustaidoilla tarkoitetaan taitoja laskea yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja (Mononen ym., 2017). Aunio (2008) toteaa, että ennen kouluikää lapsi aloittelee yhteen- ja vähennyslaskujen ratkaisemisen harjoittelemista. Kun aritmeettiset taidot kehittyvät, lapsen ei tarvitse enää laskea usein toistuvia ja yksinkertaisia yhdistelmiä (esim. 3 + 6 tai 8 - 2), vaan hän kykenee palauttamaan vastauksen muistista, jota kutsutaan aritmeettisten yhdistelmien muistamiseksi (Aunio, 2008). Aunion ja Räsäsen (2015) mukaan varhaisissa aritmeettisissa perustaidoissa on keskeistä hallita yhteen- ja vähennyslaskut numerosymboleilla.

Aunolan ja Nurmen (2018) mukaan matemaattinen osaaminen kehittyy askelittain yksinkertaisemman osataidon oppimisesta kohti monimutkaisempia taitoja. Tähän kehityskulkuun vaikuttavat monet erilaiset tekijät, joista yksi merkittävimmistä on lukujen luettelemisen sujuvuus ennen kouluikää. Jopa 19 prosenttia aritmeettisten taitojen kehityksestä kouluvuosien aikana voidaan selittää lukujonotaitojen hallinnan sujuvuudella (Aunola ym., 2004). Aunolan ja kollegoiden (2004) mukaan mitä paremmat lukujonotaidot lapsella on, sitä nopeammin aritmeettiset taidot kehittyvät. Lisäksi motivaatiolla on vaikutusta siihen, miten hyvin matemaattisia taitoja opitaan (Aunio & Nurmi, 2018). Alkuopetukseen siirryttäessä matematiikan opetus keskittyy pääsääntöisesti aritmeettisiin taitoihin ja luonnollisten lukujen järjestelmän periaatteiden hallintaan (Hannula & Lepola, 2006, s. 133). Ensimmäisten kouluvuosien aikana yksi tärkeimmistä tavoitteista on saavuttaa sujuva peruslaskutaito (Aunio & Räsänen, 2015). Peruslaskutaito on merkittävä taito niin matematiikan oppimiselle koulussa kuin arjessa selviytymiselle (Räsänen, 2012).

2.2 Kymmenjärjestelmätaidot ja paikka-arvo

Kymmenjärjestelmä on matemaattisen osaamisen kulmakivi ja se onkin keskeinen osa vuonna 2014 uudistettua opetussuunnitelmaa (Ikäheimo, 2021, s. 34). Koposen (2012) mukaan kymmenjärjestelmän hallinta sekä sujuva peruslaskutaito muodostavat perustaa koulumatematiikan osaamiselle. Lisäksi niiden hallinta vaikuttaa myöhemmän matematiikan oppimisen vaikeuteen tai helppouteen (Koponen, 2012). Kymmenjärjestelmän ymmärtämiseen liittyy ymmärrys siitä, että vierekkäisten lukuyksiköiden suhde on kymmenkertainen (Mononen ym., 2017). Ikäheimo (2021, s. 34) toteaa, että kymmenjärjestelmän avulla voidaan ilmaista luonnollisia lukuja, desimaalilukuja ja laskuja. Hänen mukaansa kymmenjärjestelmän hallinnalla tarkoitetaan sitä, että oppilaat ymmärtävät, miten luvut rakentuvat ja osaavat sekä lukujen paikat, että hyödyntää tätä tietoa laskuissa. Lukujen rakenteen ymmärtäminen sisältää tiedon siitä, että esimerkiksi luku 253 muodostuu kahdesta sadasta, viidestä kymmenestä ja kolmesta ykkösestä (Mononen ym., 2017). Jotta lapsi kykenee ymmärtämään ja tuottamaan lukuja sekä laskemaan niillä, hänen tulee sisäistää kymmenjärjestelmään liittyvät säännöt ja periaatteet (Lawton, 2017).

Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan lukujen rakenteen ymmärtämiseen kytkeytyy vahvasti kymmenjärjestelmän ymmärtäminen ja paikka-arvon hallinta. Paikka-arvon hallintaan liittyy useita ydinperiaatteita, jotka lapsen täytyy sisäistää (Lawton, 2017). Näihin periaatteisiin kuuluu ymmärrys siitä, että numeroita on kymmenen (0-9), numeron paikka määrää sen arvon ja kymmenjärjestelmän kantaluku on kymmenen. Lawton (2017) toteaa myös, että lapsen tulee ymmärtää, että nolla ilmaisee tyhjän lukuyksikön paikkaa. Hänen mukaansa tämä voi tuottaa haasteita lapsille, jolloin oppilas kirjoittaa luvun ”kaksituhatta kolmekymmentäkaksi” 232 eli lapsi ei ymmärrä, että satojen puuttuessa paikalle laitetaan nolla. Haylock ja Cockburn (2008) toteavat, että lukusanojen yhdistäminen numerosymboleihin on tärkeää, sillä niiden välinen yhteys ei ole aina selkeää. Tällöin lapsi saattaa esimerkiksi kirjoittaa luvun ”kolmesataayhdeksänkymmentäviisi” 30095 eli lapsi ei ymmärrä luvun paikka-arvoa ja sen tarkoitusta (Haylock & Cockburn, 2008). Kymmenjärjestelmään liittyy myös ryhmittelyn ja vaihtamisen periaate, jolloin kymmenestä pienemmästä lukuyksiköstä muodostuu yksi isompi lukuyksikkö sekä päinvastoin (Van de Walle ym., 2014; Lawton, 2017).

Lähtökohdat kymmenjärjestelmän oppimiselle tulevat varhaisista matemaattisista taidoista ja lukujärjestelmän omaksumisesta (Van de Walle ym., 2014). Hannulan ja Lepolan (2006, s. 136) mukaan, ymmärrys paikka-arvosta ja kymmenjärjestelmästä tukevat lasta oppimaan ja käyttämään toimivia ja monipuolisia laskustrategioita. Jos lapsella ei ole ymmärrystä kymmenjärjestelmästä, ulottuu sen vaikutus laajalle ja tuottaa haasteita uusien asioiden oppimiselle (Korhonen, 2013). Ikäheimon (2021, s. 35) mukaan jos lukujärjestelmää ei hallitse, tuottaa se yleensä haasteita laskujen ja esimerkiksi mittayksiköiden muunnosten ymmärtämisessä. Hänen mukaansa myöskin pienten ja suurten lukujen lukeminen ja kirjoittaminen tuottaa tällöin haasteita. Vähennys- ja jakolaskujen vaikeudet voivat johtua siitä, että oppilaalla ei ole ymmärrystä vähentämisestä ja jakamisesta lukuyksiköittäin (Ikäheimo, 2021, s. 34).

Kymmenjärjestelmän hallinta vaatii ymmärrystä ja siihen perustuva kymmenjärjestelmän osaaminen luo vankan perustan esimerkiksi allekkain laskuille (Ikäheimo, 2021, s. 34). Jos ymmärrykseen perustuvaa hallintaa ei muodostu, tuottaa se monia vaikeuksia matematiikan perusasioiden oppimiselle. Ikäheimon (2021, s. 35) mukaan kymmenjärjestelmäosaamista tulee myös laajentaa desimaalilukujen puolelle. Kun oppilaat osaavat ja ymmärtävät kymmenjärjestelmän, he todennäköisimmin ymmärtävät myös desimaalilukuja ja -laskuja (Ikäheimo, 2021, s. 35).

2.3 Desimaaliluvut

Kymmenjärjestelmä laajenee loputtomasti kahteen eri suuntaan: todella suuriin lukuihin ja todella pieniin lukuihin eli desimaalilukuihin (Van de Walle ym., 2020). Van de Walle ja kollegat (2020) toteavat, että desimaaliluvut ovat keino kirjoittaa murtolukuja kymmenjärjestelmässä ja myös desimaaliluvuissa vierekkäisten lukuyksiköiden suhde on kymmenkertainen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa tavoitteena 3.–6. luokalla on desimaalilukuihin perehtyminen osana kymmenjärjestelmää ja peruslaskutoimituksen harjoittelu desimaaliluvuilla (Opetushallitus, 2014, s. 235). Tämän lisäksi opetussuunnitelmassa korostetaan murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisten yhteyksien hyödyntämistä. Kuudennen luokan arvosanan kahdeksan arviointikriteereihin sisältyy kymmenjärjestelmän hallinta myös desimaaliluvuissa (Opetushallitus, 2014, s. 238). Yläkoulussa taas tavoitteena on syventää desimaalilukujen laskutoimitusten hallintaa sekä vahvistaa ymmärrystä tarkan arvon ja likiarvon erosta sekä pyöristämisestä (Opetushallitus, 2014, s. 375).

Desimaalilukujen oppimisessa on tärkeää, että oppilaat ovat sisäistäneet kymmenjärjestelmän lukukäsitteen luonnollisissa luvuissa (Ikäheimo, 2012, s. 24), sillä se tarjoaa vahvan pohjan desimaalilukujen käsitteen ymmärtämiselle (Van de Walle ym., 2014). Kymmenjärjestelmän sisäistämisen lisäksi myös paikka-arvojärjestelmän ymmärtäminen on olennaista desimaalilukujen oppimisessa (Van de Walle ym., 2020). Myös Malaty (2003, s. 28–29) toteaa, että desimaalilukujen ymmärtämisessä on keskeistä oppia, että luvun suuruus määräytyy desimaaliosien mukaan eli onko numero kymmenesosien, sadasosien vai tuhannesosien paikalla. Tämän lisäksi on tärkeää, että kukin yksikkö on aina edellistä kymmenen kertaa suurempi riippumatta siitä, onko lukujen välissä pilkku vai ei (Malaty, 2003, s. 28–29). Desimaalilukujen hallinnassa olennaista on ymmärtää, että esimerkiksi luvussa 3,15 on 3 kokonaista ja 1 kymmenesosa ja 5 sadasosaa tai 3 kokonaista ja 15 sadasosaa tai 3 kokonaista ja 150 tuhannesosaa (Ikäheimo, 2012, s. 24).

2.4 Vaikeudet matematiikan oppimisessa

Haasteet matematiikan osaamisessa ovat moninaisia ja niiden vaikeusaste sekä taustasyyt vaihtelevat (Koponen ym., 2019). Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan matemaattiset oppimisvaikeudet ovat kuitenkin kapea-alaisia ja ne voivat ilmetä lievinä, kohtalaisina tai vaikeina. Matemaattisilla oppimisvaikeuksilla voidaan tarkoittaa joko dyskalkuliaa (vrt. mathematical learning disability) tai heikkoa osaamista matemaattisissa taidoissa (Mononen ym., 2017). Matemaattisten oppimisvaikeuksien on havaittu olevan suhteellisen pysyviä, sillä noin puolella niistä oppilaista, joilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa viidennellä luokalla, on niitä myös aikuisena (Shalev ym., 2005). Malin ja kollegat (2013) toteavat, että noin 13 prosentille suomalaisista aikuisista peruslaskutaitojen hallinta tuottaa vaikeuksia.

Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan matematiikan tutkimuskirjallisuudessa pyritään yleensä tekemään rajanveto niiden lasten välille, joilla on dyskalkulia, ja niiden, joilla on heikko matemaattinen osaaminen. Dyskalkulialla tarkoitetaan laskemiskyvynhäiriötä (F81.2, ICD-10), joka ilmenee vaikeuksina oppia ja hallita peruslaskutaitoja (Stakes, 1995, Lindholm ym., 2016). Tällöin haasteet eivät johdu älykkyystasosta, näön ongelmista, neurologisesta sairaudesta tai puutteellisesta opetuksesta (Lindholm ym., 2016). Gearyn (2011) mukaan dyskalkuliaa ilmenee 5–7 % ihmisistä. Niillä lapsilla, joilla standardoidulla testillä arvioitu matemaattinen osaaminen jää alle 10. persentiilin ainakin kahtena vuotena peräkkäin, voidaan määritellä olevan dyskalkulia (Geary, 2011). Puolestaan lapset, jotka sijoittuvat matemaattisessa osaamisessa 11.

ja 25. persentiilin välille ainakin kahtena vuotena perättäin, ovat matemaattiselta osaamiseltaan heikkoja. Lapsista ja nuorista 10–15 prosentilla ilmenee heikkoa osaamista matemaattisissa taidoissa (Mononen ym., 2017). Tällöin haasteet ovat lievempiä kuin dyskalkuliassa, mutta tuottavat lapselle vaikeuksia oppia matematiikkaa ja selvitä sellaisista arjen asioista, joissa tarvitaan matemaattista osaamista. Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan heikko suoriutuminen matemaattisissa taidoissa voi selittyä esimerkiksi motivaatioon tai oppimisympäristöön liittyvillä tekijöillä tai kognitiivisilla tekijöillä. Olipa kyse sitten dyskalkuliasta tai heikosta osaamisesta matemaattisissa taidoissa, on tärkeää, että oppilaat, joilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa, tunnistetaan koulussa (Mononen ym., 2017).

Gearyn (2011) mukaan lukumääräisyyden taju on heikompi lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Myös kehitysviive aritmeettisten laskutoimitusten oppimisessa on yleistä näillä lapsilla (Geary, 2011). Kyky tallentaa aritmeettisia yhdistelmiä muistiin sekä noutaa niitä sieltä, on yksi yleisimmistä haasteista lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia (Geary, 2011; Koponen ym., 2019). Tällöin esimerkiksi lapsella on haasteita muistaa yksinkertaisten yhteen- ja vähennyslaskujen vastauksia tai kertotaulua (Koponen ym., 2019). Tutkimusten mukaan aritmeettisten yhdistelmien hakeminen muistista on vaikeaa lapsille, joilla on dyskalkulia ja osalle niistä lapsista, joilla on heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa (Mononen ym., 2017). Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan nämä ongelmat ovat suhteellisen pysyviä.

Aritmeettisten yhdistelmien muistamisen vaikeudet saattavat myös ilmetä väärinä vastauksina laskutoimituksissa tai hitaina laskustrategioina (Mononen ym., 2017). Koposen ja kollegoiden (2019) mukaan lapset, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tukeutuvat yleensä laskustrategioihin, joissa joutuu luettelemaan lukuja paljon. Tällöin vaihdannaisuuden periaatetta ei ymmärretä hyödyntää, vaan lasku lasketaan siinä järjestyksessä kuin se on esitetty. Esimerkiksi lasku 4 + 7 kannattaisi aloittaa luvusta seitsemän, mutta lapsi aloittaa laskemisen luvusta neljä ja lisää siihen seitsemän yksittäin luettelemalla, jolloin laskeminen on hidasta (Koponen ym., 2019).

Lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, on usein heikompi lukumääräisyyden taju verrattaessa ikätovereihin (Desoete ym., 2012). Haasteet näkyvät vaikeuksina arvioida lukumäärien suuruutta ja pienten lukumäärien (1–4) nopeassa tunnistamisessa (Mononen ym., 2017). Matematiikan oppimisen ongelmien takana voi olla myös lukujen suuruusluokkien ja määrien heikko ymmärtäminen, jolloin haasteet saattavat ilmetä vasta silloin, kun lapselta vaaditaan lukujärjestelmätiedon soveltamista (Koponen ym., 2019). Myös Hanich ja kollegat (2001) toteavat, että suurien lukujen rakenteen ja paikka-arvon sisäistäminen tuottaa vaikeuksia lapsille, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Koposen ja kollegoiden (2019) mukaan lapselle saattaa olla hankalaa ymmärtää, miten luku rakentuu ja myös vertailla lukuja tai laskea isoilla luvuilla. He toteavat, että tällöin myös kymmenjärjestelmän ymmärtäminen voi olla lapselle vaikeaa eikä lukuyksiköiden väliset suhteet ole selkeitä. Tämä taas näkyy vaikeuksina esimerkiksi kertoa tai jakaa kymmenillä, sadoilla ja tuhansilla. Lapsen haasteet lukujen rakenteiden ymmärtämisessä voivat myös ilmetä virheinä silloin, kun lapsen täytyy kirjoittaa sanottu luku numeroilla (Lawton, 2014).

Proseduraaliset taidot eli taidot suorittaa laskutoimituksia ovat usein heikkoja lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, vaikka he käyttäisivätkin samoja ongelmanratkaisukeinoja kuin muut ikätoverinsa (Geary, 2011). Geary ja kollegat (2007) toteavat, että numeerisen tiedon käsittely on heikompaa niillä lapsilla, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa. Heidän mukaansa heikosti menestyvät lapset pärjäävät tietyillä taitoalueilla samoin kuin ikätoverinsa, mutta heikkoutta esiintyy numeerisen tiedon käsittelyn sujuvuudessa ja lukujonotaidoissa.

Ikäheimon (2012, s. 6) mukaan desimaaliluvun käsite ja desimaaliluvuilla operoiminen eivät suju tarpeeksi hyvin peruskoululaisilta. Myös Ubuz ja Yayan (2010) toteavat, että desimaaliluvut ovat aihealue, jossa esiintyy huomattava määrä oppimisen vaikeuksia. Vaikeudet desimaalilukujen oppimisessa liittyvät usein desimaaliluvun käsitteen ja paikka-arvon ymmärtämiseen (Ubuz & Yayan, 2010). Ubuz ja Yayan (2010) toteavat, että yleensä vaikeuksia esiintyy myös yhteen- ja vähennyslaskuissa desimaaliluvuilla. Heidän mukaansa yleisin virhe laskuissa tulee, kun oppilaat laskevat desimaalipilkun jälkeen viimeisenä tulevat numerot yhteen tai vähentävät ne toisistaan ottamatta huomioon paikka-arvoa. Tällöin esimerkiksi laskusta 0,21 + 0,2 saadaan tulokseksi 0,23, vaikka oikea vastaus olisi 0,41. Myös Korhosen (2013) mukaan hankaluuksia saattaa esiintyä desimaalilukujen yhteenlaskuissa, joihin sisältyy kymmenylitys. Lortie-Forgues ja kollegat (2015) toteavat, että aritmeettisten proseduurien piirteet desimaaliluvuilla joiltakin osin koskevat vain desimaalilukuja, jolloin niiden perusteet ovat oppilaille epäselviä. Esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskuissa voidaan samaa logiikkaa käyttää niin kokonaisluvuilla kuin desimaaliluvuilla laskettaessa, mutta kertomisessa ja jakamisessa samat periaatteet, jotka toimivat kokonaisluvuilla laskettaessa, eivät päde laskettaessa desimaaliluvuilla (Lortie-Forgues ym., 2015).

Desimaalilukujen hallinnan perustana on vahva lukukäsite (Ikäheimo, 2021, s. 366). Thipkong ja Davies (1991) toteavat, että oppilailla saattaa ilmetä vaikeuksia ja väärinymmärryksiä desimaalilukujen sisäistämisessä ja niillä operoimisella, koska heidän käsityksensä desimaaluvuista ei ole kehittynyt tarpeeksi. Heidän mukaansa oppilailla saattaa puuttua ymmärrys desimaalilukujen suuruuksista. Ubuz ja Yayan (2010) toteavat, että jos oppilaan lukukäsite on heikko, he yrittävät muuttaa vieraan asian tutuksi, jolloin he kohtelevat desimaalilukuja kuin kokonaislukuja. Tällöin lukujen suuruus on epäselvää ja esimerkiksi 55 prosenttia kuudennen ja seitsemännen luokan oppilaista laittoi luvut 0,07; 0,1 ja 0,23 väärin suuruusjärjestykseen: 0,1; 0,07 ja 0,23 (Ubuz & Yayan, 2010). Oppilailla on myös havaittu olevan haasteita löytää lähin desimaaliluku annetusta desimaaliluvusta, jolloin esimerkiksi kysyttäessä kumpi luku on lähempänä lukua 0,19: 0,2 vai 0,21, oppilaat valitsevat usein luvun 0,21 (Van de Walle ym., 2020). Lisäksi oppilaat saattavat myös ajatella, että luku 0,3 on lähellä lukua 0,4, mutta kaukana luvusta 0,317 (Van de Walle ym., 2020). Kun oppilaat yleistävät kokonaislukuihin liittyvää tietoutta väärin desimaalilukuihin, he usein ajattelevat, että desimaaliluku, jossa on enemmän numeroita, on suurempi (Loehr & Rittle-Johnson, 2017). Tällöin he esimerkiksi merkitsisivät luvun 0,125 isommaksi kuin 0,5, koska 125 on isompi luku kuin viisi.

3 Interventiot matematiikassa

Interventiolla eli ”väliintulolla” voidaan tarkoittaa opetuksen lähestymistapaa, joka on tutkimuksellisempaa verrattuna perinteiseen opetukseen (Björn ym., 2018). Björnin ja kollegoiden (2018) mukaan interventiomaisella lähestymistavalla tarkoitetaan joko suunniteltua opetusjaksoa tai tutkittua interventio-ohjelmaa. Heidän mukaansa lähestymistavassa myös arvioidaan ennakoitua edistymistä valitussa ohjelmassa ja määritellään interventiojakson kesto ja annettavan tuen tiheys. Interventiotutkimus koskien matemaattisia oppimisvaikeuksia on vielä vähäistä ja vahvoja tutkimusperustaisia tukikeinoja ei ole laajasti saatavilla (Parrila ym., 2019).

Kun oppimista tutkitaan, yksi keskeisimmistä tavoitteista on tuottaa tietoa, jota ammattilaiset pystyvät hyödyntämään työssään ja tekemään perusteltuja valintoja oppilaiden oppimisen tukikeinoja valittaessa (Parrila ym., 2019). Parrila ja kollegat (2019) kuitenkin toteavat, että on huomioitava, että tutkimus ja käytäntö eivät välttämättä kohtaa. Heidän mukaansa tutkimuksista tehdyt johtopäätökset opetusmenetelmien toimivuudesta voivat vaikuttaa vierailta käytännön opetuksen perspektiivistä ja jotta tutkimuksen ja käytännön välinen kuilu voidaan ylittää, tulee tutkimuksen tuloksia pyrkiä kääntämään koulun kielelle ja opetuksen tuen keinoja muokata paremmin koulun toimintaan soveltuviksi. Tuen keinojen soveltuvuutta ja toimivuutta tulisikin tutkia aidoissa oppimisympäristöissä (Parrila ym., 2019).

Intervention tarve syntyy, kun havaitaan, että oppilaalla on haasteita jossain opetettavassa asiassa tai oppilaalla on aiemmin havaittu olevan oppimisvaikeuksia (Björn ym., 2019). Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan oppilaalle tehdyn arvioinnin avulla päätetään, mihin taitoalueeseen harjoittelu kohdennetaan ja kuinka tiheästi tukea annetaan. Suunniteltaessa harjoittelujaksoa tulee päättää, millaisiin tavoitteisiin pyritään ja millä keinoin sekä miten ja missä opetusjakso toteutetaan ja kenen toimesta (Mononen ym., 2017). Björn ja kollegat (2018) puolestaan toteavat, että interventioissa on tärkeää, että oppimista arvioidaan tiiviisti, jotta intervention opetusta ja oppimisen tukea voidaan muokata tarpeisiin sopivaksi. Interventiossa oppilaan osaamista arvioidaan ennen interventiojakson alkua sekä heti sen loputtua ja jos mahdollista viivästetysti tietyn ajan kuluttua interventionjakson jälkeen (Björn ym., 2018). Arvioinnin avulla voidaan nähdä, miten harjoittelujakso on vaikuttanut oppimiseen (Mononen ym., 2017). Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan arvioinnilla pystytään tekemään päätelmiä siitä, onko tarjottu tuki ollut tarpeeksi tiheää ja ovatko käytetyt tuen keinot olleet tarpeeksi riittäviä. Jos oppilas hallitsee opetetut asiat tavoitteisiin nähden odotetulla tavalla, voidaan olettaa, että harjoittelujakso on ollut tehokas (Mononen ym., 2017). Matematiikan interventiojakson voidaan siis katsoa koostuvan neljästä pääkohdasta: 1. tuen tarpeen tunnistaminen ja päätös siitä, mihin matemaattiseen taitoon harjoittelu kohdennetaan, 2. tavoitteiden asettaminen harjoittelujaksolle, 3. harjoitusohjelman ja menetelmän määrittely ja 4. harjoitusjakson vaikutusten arviointi harjoittelun edetessä ja sen päätyttyä (Mononen ym., 2017).

3.1 Tehokkaat interventiomenetelmät

Oppilaita, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa tai jollakin tietyllä matematiikan osa-alueella, voidaan tukea säännöllisellä ja intensiivisellä harjoittelulla (Koponen ym., 2019). Tärkeää intervention toteuttamisessa on se, että opettaja ymmärtää, mitä ollaan opettamassa, miten oppilasta tuetaan ja millaisia menetelmiä hyödynnetään (Salminen, 2016). Lisäksi Geary (2011) toteaa, että harjoittelun tulisi kohdistua varhaisempiin taitoihin, joissa vaikeudet ilmenevät. Tiedetään kuitenkin, että yläkoulussa opetussuunnitelma ja materiaalisidonnaisuus hankaloittavat mahdollisuuksia järjestää tukea niihin tietoihin ja taitoihin, jotka alakoulussa ovat jääneet heikoiksi (Makkonen ym., 2019). Fuchs ja kollegat (2008) toteavat, että oppimisen haasteiden ollessa laajoja, tarvitaan pitkäkestoista, yksilöllistä ja intensiivistä harjoittelua. Tällöin on tärkeää, että tuen vaikuttavuutta arvioidaan ja tarvittaessa tukea muokataan.

Tutkimuksissa on pyritty määrittelemään interventioille vähimmäiskestoa ja interventioiden pituudesta on esitetty erilaisia mielipiteitä. Björn ja kollegat (2015) toteavat, että interventioita tulisi tarjota sykleittäin esimerkiksi 5–7 viikon mittaisissa jaksoissa, jolloin interventioita toteutettaisiin 3–4 kertaa viikossa. Tässä on ajatuksena se, että yksi interventiojakso voi olla kestoltaan lyhyempi, mutta jaksoja tarjottaisiin oppilaille useampana kertana lukuvuodessa. Jitendra ja kollegat (2018) puolestaan havaitsivat meta-analyysissään koskien matematiikan intervention toteuttamista yläkouluikäisille oppilaille, että interventioiden vaikuttavuus näytti olevan vahvempi, kun interventio kesti yhteensä yli kymmenen tuntia. Heidän mukaansa tämä osoittaa, että intervention pituus on merkittävä tekijä, joka vaikuttaa oppimisen tehokkuuteen.

Fuchs ja kollegat (2008) määrittelevät seitsemän tehokkaan intervention periaatetta, joita ovat opetuksen eksplisiittisyys, opetuksen suunnittelu oppimisen esteiden vähentämiseksi, vahva käsitteellinen perusta, drillaus ja harjoittelu, kumulatiivinen arviointi, oppilaiden motivointi ja jatkuva oppimisen edistymisen tarkkailu. Kroesbergen ja kollegat (2004) toteavat, että eksplisiittisellä opetuksella tarkoitetaan menetelmää, jossa opettaja mallintaa erilaisten tehtävätyyppien ratkaisemista ja samalla tarjoaa esimerkin hyvästä ratkaisutavasta. Oppilaat, joilla esiintyy matemaattisia oppimisvaikeuksia, hyötyvät tutkimusten mukaan eksplisiittisestä opetuksesta (Fuchs ym., 2008; Gersten ym., 2009). Tutkimukset ovat myös osoittaneet, että pienryhmissä toteutettu eksplisiittinen opetus osana intensiivistä ja strategista interventiota, hyödyttää myös suurimpia haasteita omaavia oppilaita (Bryant ym., 2016). On kuitenkin huomioitava, että menetelmä on tehokas, kun sitä toteutetaan pitämällä useita oppitunteja pidemmällä aikavälillä (Geary, 2011).

Eksplisiittisessä opetuksessa käytetään myös havainnollistamisvälineitä (Kroesbergen ym., 2004). Myös Dräger (2015, s. 18) toteaa, että oppilaiden kanssa tulisi käyttää konkreettisia välineitä. Ikäheimon (2012, s. 3) mukaan on tärkeää, että niille oppilaille, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, luodaan pysyviä ankkureita matematiikassa. Tällaisia ankkureita voidaan luoda havainnollistamisvälineillä kuten esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineillä (Ikäheimo, 2012, s. 3). Gersten ja kollegat (2009) havaitsivat tutkimuksessaan, että visuaalisten mallien käyttäminen opetuksessa vaikutti merkitsevästi oppimiseen. On kuitenkin huomioitava, että vaikuttavuus oli suurempaa silloin, kun visuaalisia malleja käytettiin yhdessä jonkin muun opetusmenetelmän kanssa (Gersten ym., 2009). Havainnollistavat välineet tukevat oppilaiden ymmärrystä abstrakteista matemaattisista käsitteistä ja laskutoimituksista (Mononen ym., 2017). Witzelin ja kollegoiden (2003) mukaan matemaattiset periaatteet ymmärretään parhaiten silloin, kun oppilaat pääsevät työskentelemään konkreettisilla välineillä, jonka jälkeen siirrytään kirjallisiin esimerkkeihin ja lopulta abstrakteihin aritmeettisiin symboleihin. Tällaisia konkreettisia välineitä voivat olla esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet tai opetusrahat. Korhosen (2013) mukaan välineillä voidaan visuaalisesti esittää esimerkiksi laskutoimituksia ja laskulakeja. On tärkeää, että oppilas itse pääsee käyttämään välineitä, eikä toiminta saa jäädä vain opettajan rakentamien mallien varaan (Korhonen, 2013).

Pelkkä opetuksen eksplisiittisyys ei ole kuitenkaan riittävää (Fuchs ym., 2008). Fuchsin ja kollegoiden (2008) mukaan toinen ja usein myös huomaamatta jäävä periaate on opettamisen suunnittelu oppimisen esteiden minimoimiseksi. Tavoitteena on olettaa mahdollisia väärinymmärryksiä ja estää ne tarkoilla selityksillä (Fuchs ym., 2008). Fuchs ja kollegat (2008) toteavat, että tämä voi olla erityisen tärkeää matematiikassa, joka koostuu monista osa-alueista ja joihin liittyvät omat proseduraaliset ja konseptuaaliset (eli käsitteelliseen ymmärtämiseen liittyvät) vaatimuksensa. Myös Gersten ja kollegat (2009) toteavat, että opetuksen suunnittelu ja tarkka esimerkkien valinta näyttäisivät vaikuttavan oppilaiden matemaattiseen osaamiseen.

He uskovat, että erilaiset esimerkkitehtävät ovat tärkeitä etenkin silloin, kun oppilaille opetetaan uutta taitoa. Opettajien tulisi siis käyttää laajasti erilaisia esimerkkejä (Gersten ym., 2009).

Kolmas tehokkaan intervention periaate on vahva käsitteellinen perusta (Fuchs ym., 2008). Fuchsin ja kollegoiden (2008) mukaan erityisopetus perustuu usein neljänteen periaatteeseen eli drillaukseen ja harjoitteluun, mutta käsitteellinen perusta jää tällöin usein huomioimatta. Käsitteellisen perustan puuttuminen johtaa usein hämmennykseen, osaamiseroihin ja aiemmin opitun tiedon integroimisen ja ylläpitämisen epäonnistumiseen (Fuchs ym., 2008).

Neljäs tehokkaan intervention periaate on siis drillaus ja harjoittelu (Fuchs ym., 2008). Runsaalla harjoittelulla ja drillaavilla harjoituksilla pyritään parantamaan oppilaiden lukujen välisten yhteyksien muodostumista ja aritmeettisten yhdistelmien muistamista (Koponen ym., 2019). Koposen ja kollegoiden (2019) mukaan olennaista harjoittelussa ovat toistomäärät ja palautteen välitön antaminen. Viides periaate on kumulatiivinen kertaus, joka tarjoaa oppilaille mahdollisuuksia harjoitella toistuvasti matematiikan perustaitoja erilaisissa ongelmissa, mikä vahvistaa matemaattista käsitteellistä ymmärrystä (Fuchs ym., 2008). Kuudes periaate on oppilaiden motivointi, jotta he kykenevät keskittymään ja työskentelemään tehokkaasti. Seitsemäs periaate on jatkuva oppimisen seuranta, jonka avulla tarkastellaan, onko valittu interventiomenetelmä riittävän tehokas tietylle oppilaalle (Fuchs ym., 2008). Fuchs ja kollegat (2008) toteavat, että koulujen täytyy seurata interventioiden vaikuttavuutta jokaisen oppilaan oppimisessa, jotta interventioita voidaan muokata tarvittaessa toimivammaksi.

Eksplisiittinen opetusmenetelmä näyttäisi siis olevan tutkitusti yksi tehokkaimmista menetelmistä niiden oppilaiden taitojen tukemiseen, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Kroesbergen ja kollegat (2004) tutkivat eksplisiittisen opetuksen lisäksi myös konstruktiivista opetusmenetelmää, jossa keskeisintä on keskustella oppilaiden kanssa mahdollisista ratkaisumenetelmistä ja strategioista. Tässä menetelmässä opettaja esittää ratkaistavan ongelman, joka oppilaiden pitää itse ratkaista, eikä opettaja mallina, miten tiettyä strategiaa hyödynnetään. Kroesbergen ja kollegat (2004) havaitsivat, että verrattuna kontrolliryhmään, jolle annettiin tavanomaista opetusta, konstruktiivinen opetusmenetelmä oli tehokasta. Heidän mukaansa oppilaiden ongelmanratkaisukyvyt ja laskemisen automaatio kehittyivät. Huomioitavaa on kuitenkin se, että eksplisiittinen opetus havaittiin tehokkaammaksi menetelmäksi kuin konstruktiivinen opetus (Kroesbergen ym., 2004).

3.2 Desimaalilukujen oppimisen tukeminen

Desimaalilukuihin keskittyvää interventiotutkimusta on tehty verrattain vähän. Tiedetään kuitenkin, että ennen kuin opetuksessa lähdetään siirtymään desimaalilukuihin, on tärkeää varmistaa, että oppilaat ymmärtävät 10-järjestelmän lukukäsitteen luonnollisilla luvuilla (Ikäheimo, 2012, s. 24). Van de Walle ja kollegat (2014) toteavat, että myös paikka-arvon käsitettä tulisi kerrata kokonaisluvuilla ennen desimaalilukuihin siirtymistä. Ikäheimon (2021, s. 366) mukaan oppilaiden on helpompi sisäistää desimaaliluvun käsite ja oppia peruslaskutoimitukset, kun he ymmärtävät desimaaliluvut osana kymmenjärjestelmää. Desimaaliluvun rakenteen ymmärtämiselle luodaan pohja lukemalla aluksi lukuja ääneen sekä harjoittelemalla lukujen kirjoittamista (Ikäheimo, 2021, s. 367). Ikäheimon (2021, s. 367) mukaan aluksi on siis hyvä käyttää termejä kymmenesosa, sadasosa ja tuhannesosa. Koska desimaalilukujen oppimisessa esiintyy usein oppimisen vaikeuksia, tulee käsitteellinen ymmärrys desimaaliluvuista ja niiden yhteydestä murtolukuihin rakentaa vähitellen (Van de Walle ym., 2020). Ikäheimo (2012, s. 6) kuitenkin toteaa, että jos desimaaliluvun käsitettä lähestytään vain murtolukujen kautta, voi käsitteen sisäistäminen jäädä vajaaksi.

Opetuksessa huomioita tulisi kiinnittää käytettävään kieleen. Van de Wallen ja kollegoiden (2020) mukaan desimaalilukuja tulisi lukea esimerkiksi ”kolme ja kaksi kymmenesosaa” ei ”kolme pilkku kaksi”. Heidän mukaansa tämä tukee oppilaiden ymmärtämistä ja samalla yhdistää desimaaliluvut murtolukuihin. Tutkimukset ovat myös osoittaneet, että paikka-arvoa korostava lukutapa tukee oppilaiden osaamista desimaalilukujen vertailussa, kun luvussa täytyy ottaa huomioon numero nolla (Loehr & Rittle-Johnson, 2017). Malatyn (2003, s. 29) mukaan desimaaliluvusta tulisi antaa myös useita eri vaihtoehtoja. Tällöin oppilaalle tulee käsitys siitä, että luvussa 1,25 on yhden kokonaisen lisäksi kaksi kymmenesosaa ja viisi sadasosaa tai 25 sadasosaa. Desimaalilukuja opeteltaessa on tärkeää, että oppilaat ymmärtävät desimaalipilkun tarkoituksen (Liu ym., 2014). Malatyn (2003, s. 27) mukaan desimaalipilkulla erotetaan kokonaisluvut ja desimaaliosat toisistaan. Luvussa 1,23 numero 1 ilmaisee yhtä kokonaista, kun taas numerot 2 ja 3 ilmaisevat desimaaliosia. Jotta desimaaliluvut voidaan sisäistää ja oppia, täytyy oppilaan lukukäsite ja ymmärrys lukujen välisistä suhteista olla vahva sekä oppilaan täytyy ymmärtää desimaalipilkun merkitys osana kymmenjärjestelmää (Van de Walle ym., 2020).

Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa olennaista on laskea yhteen tai vähentää toisistaan numerot, joilla on sama paikka-arvo (Van de Walle ym., 2020). Van de Wallen ja kollegoiden (2020) mukaan desimaalilukujen laskemisen opettamisessa on tärkeää luoda konteksti ja visualisoida laskeminen esimerkiksi välineillä. He toteavat, että huomiota tulee kiinnittää siihen, minkälaisia lukuja laskuissa aluksi käytetään. Lortie-Forgues ja kollegat (2015) toteavat, että desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa voidaan hyödyntää samaa periaatetta kuin kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa. Kokonaisluvuilla laskettaessa lasketaan yhteen tai vähennetään ykköset ykkösistä kympit kympeistä ja desimaaliluvuissa puolestaan sadasosat sadasosista, kymmenesosat kymmenesosista (Lortie-Forgues ym., 2015). Laskeminen tulisi aloittaa ensin luvuilla, joissa on sama määrä desimaaliosia esimerkiksi 2,3 + 1,2 tai 0,56 – 0,33 (Van de Walle ym., 2020). Tutkimukset osoittavat myös, että paikka-arvon ja desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskujen opettaminen samalla opetuskerralla johtavat parempiin oppimistuloksiin (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Alun jälkeen laskemisessa voidaan siirtyä sellaisiin lukuihin, joissa esiintyy eri määrä desimaaliosia kuten esimerkiksi 1,25 + 0,2 tai 2,3 - 1,02 (Van de Walle ym., 2020). Kun luvussa esiintyy eri määrä desimaaliosia, on tärkeää, että oppilas oppii linjamaan luvut desimaalipilkun mukaan, jolloin hän vähentää tai lisää oikeat luvut (Lortie-Forgues ym., 2015).

Van de Walle ja kollegat (2020) toteavat, että desimaaliluvuilla kertominen on hankala oppia. Tämä voi johtua esimerkiksi siitä, että kokonaisluvuilla kertominen tuottaa aina suuremman luvun kuin kertoja tai kerrottava, mutta tämä ei pädekään desimaaliluvuilla kerrottaessa (Lortie-Forgues ym., 2015). Van de Wallen ja kollegoiden (2020) mukaan desimaaliluvuilla kertomista opetettaessa tulisi oppilaille tarjota konkreettisia malleja tai piirroksia, laskemisstrategioita ja heille tulisi avata tarkasti laskemisen taustalla olevat syyt. Myös jakaminen desimaaliluvuilla tuottaa haasteita usealle oppilaalle (Lortie-Forgues ym., 2015). Palaamalla kokonaisluvuilla jakamiseen ja sen ymmärtämiseen, voidaan auttaa oppilaita ymmärtämään desimaaliluvuilla jakamista (Van de Walle ym., 2020).

4 Tutkimuksen toteutus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, voidaanko systemaattisen ja suunnitellun intervention avulla vaikuttaa oppilaiden matemaattiseen osaamiseen desimaaliluvuissa. Seuraavaksi esittelen käytetyn tutkimusasetelman ja tutkimuskysymykset. Lisäksi tässä luvussa tuon myös esille tutkittavan joukon, aineistonkeruumenetelmät, käytetyt mittarit, tutkimuksen kulun ja tutkimuksessa käytetyn interventio-ohjelman.

4.1 Tutkimusasetelma ja tutkimuskysymykset

Tutkimus on interventiotutkimus, joka sisältää alkumittauksen, interventiojakson ja loppumittauksen. Interventioon osallistuvat oppilaat valitaan alkumittauksen perusteella. Toteutettava interventio kohdistuu desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen. Lisäksi tutkimuksessa hyödynnetään kontrolliryhmää, joka koostuu interventioon osallistuneiden oppilaiden, eli tutkittavien, kanssa saman ikäisistä oppilaista. Interventiojakson vaikuttavuutta mitataan vertaamalla tutkittavien osaamista alku- ja loppumittauksessa sekä vertaamalla tutkittavien osaamista kontrolliryhmän taitotasoon.

Tämä tutkimus toteutettiin tapaustutkimuksena. Laine ja kollegat (2015) toteavat, että tapaustutkimus sisältää usein erilaisia tutkimusmenetelmiä. Heidän mukaansa tapaustutkimus ei ole varsinainen metodi, vaan tutkimustapa tai -strategia, jossa voidaan hyödyntää erilaisia aineistoja ja menetelmiä. Tapaustutkimus menetelmänä soveltuu määrälliseen ja laadulliseen tutkimukseen (Vilkka ym., 2018). Tässä tutkimuksessa kerättiin sekä määrällistä että laadullista aineistoa. Määrällinen aineisto muodostui oppilaiden tuloksista desimaalilukujen arviointitehtävissä alku- ja loppumittauksissa. Laadullinen aineisto kerättiin puolestaan havainnoimalla interventioon osallistuvia oppilaita ja raportoimalla interventiotuntien sisällöt ja toteutus.

Tapaustutkimuksessa kohde on yleensä pieni joukko tapauksia tai tarkastellaan yhtä tiettyä kohdetta (Laine ym., 2015). Kun tutkimuksen kohdetta tai tutkittavia lähdetään valitsemaan, täytyy valinnan olla relevantti tutkimuskohteen ja tavoiteltavan tiedon kanssa (Vilkka ym., 2018). Tässä tutkimuksessa tapaustutkimuksen tutkittavina oli kaksi interventioon osallistuvaa oppilasta. Koska kyseessä on pieni tutkittava joukko, eivät tutkimuksen tulokset ole laajasti yleistettävissä (Vilkka ym., 2018).

Tutkimuskysymyksiä on kaksi:

1. Millaisia vaikutuksia interventiolla on tutkittavien desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen?

2. Saavuttavatko tutkittavat kontrolliryhmän osaamistason intervention avulla?

4.2 Aineistonkeruu ja tutkimuksen osallistujat

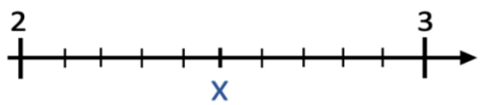
Tutkielman tekijä keräsi aineiston ja toteutti intervention talvella 2021–2022 eräässä suomalaisessa peruskoulussa seitsemännen luokan oppilailla (N = 18). Ennen aineiston keräämistä ja intervention pitämistä koulun rehtorilta haettiin tutkimuslupaa, joka myönnettiin. Tutkittava joukko koostui kahden seitsemännen vuosiluokan oppilaista, joiden huoltajat antoivat luvan osallistua tutkimukseen. Tutkimusjoukossa oli kahdeksan tyttöä ja kymmenen poikaa. Tästä joukosta valittiin interventioon osallistuvat oppilaat alkumittauksen tulosten perusteella. Tutkittavaksi valikoitui kaksi oppilasta, yksi tyttö ja yksi poika. Interventiojakson aikana kahden tutkittavan oppilaan interventiotunnit ja niiden sisällöt raportoitiin kirjallisena. Interventiojakson jälkeen koko tutkimusjoukolle tehtiin loppumittaus.

4.3 Tutkimuksen mittarit

Tutkimuksen alku- ja loppumittaus toteutettiin desimaalilukukartoituksella (Liite 1). Molemmilla mittauskerroilla kartoitus oli tehtävätyypeiltään sama, mutta sen sisältämät luvut olivat osittain erit. Tutkimuskoulun matematiikan opettajalta kysyttiin arvioita tehtävätyypeistä. Desimaalikartoitus pohjautuu osittain Hanne Ikäheimon (2015) KYMPPI-kartoitus 2 testistöön. Ikäheimon (2015) kartoitus sisältää sekä luonnollisten lukujen että desimaalilukujen käsitteisiin liittyviä tehtäviä, laskutoimituksia ja mittayksiköiden muunnoksia. KYMPPI-kartoitus 2 sisältää 4–6 vuosiluokan keskeisimpiä sisältöjä, joiden hallinta tulisi olla 5. luokan kevääseen mennessä arvosanan 10 tasoa.

KYMPPI-kartoitus 2:sta valikoitui ne tehtävät, joissa mitattiin desimaalilukujen hallintaa. Desimaalikartoitukseen haluttiin sisällyttää sellaiset tehtävät, jotka testaavat oppilaiden perustaitojen osaamista. Tarkoituksena oli, että tehtävät ovat sellaisia, jotka seitsemännen luokan oppilaiden tulisi jo hallita. Kartoituksen avulla mitattiin oppilaiden taitoa vertailla desimaalilukujen suuruutta, lukujono- ja lukusuorataitoja desimaaliluvuilla, yhteen- ja vähennyslaskutaitoja desimaaliluvuilla sekä taitoa kertoa ja jakaa desimaalilukuja luvuilla kymmenen ja kaksi. Kartoituksessa oli kuusi tehtävää. Oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen ja väärästä vastauksesta nolla pistettä. Kartoituksen kokonaismaksimipistemäärä oli 36 pistettä. Tehtävät suunniteltiin siten, että kartoitus voidaan toteuttaa opetusryhmässä ja sen tekemiseen menee 5–10 minuuttia. Kartoituksen Cronbachin alfa oli ensimmäisellä mittauskerralla 0.838 ja toisella mittauskerralla 0.736. Molempien mittauskertojen alfakertoimet olivat hyväksytyn raja-arvon (>0.70) yläpuolella (Metsämuuronen, 2011). Alla olevassa taulukossa 1 on eriteltynä desimaalikartoituksen tehtävätyypit ja niiden esimerkit sekä maksimipisteet tehtävätyypeittäin.

Taulukko 1. Desimaalikartoituksen tehtävätyypit

Tehtävätyyppi	Tehtävän sisältö	Maksimipisteet
Lukujen suuruusvertailu	Oppilaiden tuli ympyröidä kahdesta desimaaliluvuista suurempi. Esim. 0,50 0,125	6
Lukujono	Oppilaiden tuli jatkaa lukujonoa eteenpäin. Esim. 1,06, 1,07, 1,08, ____, ____,____,____	2
Lukusuora	Oppilaiden tuli kirjoittaa oikea desimaaliluku, joka oli merkitty lukusuoralle kirjaimella x. Esim. 	2
Yhteen- ja vähennyslaskut ilman kymmenylitystä	Oppilaiden tuli laskea yhteen- ja vähennyslaskut. Esim. 0,3 + 1,5= 2,27 – 0,2 =	8
Yhteen- ja vähennyslaskut kymmenylityksellä	Oppilaiden tuli laskea yhteen- ja vähennyslaskut. Esim. 0,6 + 0,8= 0,16 – 0,9 =	10
Kertominen ja jakaminen luvuilla 10 ja 2	Oppilaiden tuli kertoa ja jakaa desimaalilukuja luvuilla kymmenen ja kaksi Esim. 2 · 0,4 = 10 · 0,3 = 4,6 : 2 = 0,5 : 10 =	8

4.4 Interventio-ohjelma

Interventio-ohjelmaa lähdettiin suunnittelemaan sen perusteella, mitä desimaalilukujen oppimisesta tiedetään tutkimusten perusteella ja missä interventioon osallistuvat oppilaat tarvitsevat tukea. Interventio-ohjelman tavoitteena on vahvistaa oppilaiden lukukäsitettä desimaaliluvuissa ja harjoitella perustaitoja desimaaliluvuilla, kuten peruslaskutoimituksia. Interventiotunnit koostuvat pääsääntöisesti opettajan opetuksesta, esimerkiksi käsiteltävän aiheen mallintamisesta, harjoittelusta välineillä ja kynä-paperi -työskentelystä. Interventiojakson aikana opetuksessa hyödynnetään konkreettisia ja havainnollistavia välineitä, kuten kymmenjärjestelmävälineitä ja niistä etenkin desimaaliosia. Lisäksi interventiotunneilla opetetaan erilaisia laskustrategioita. Opetuksen suunnittelussa tukena toimi tutkimuskoulun matematiikan opettaja. Interventiojakso suunniteltiin toteutettavaksi silloin, kun tutkittavat oppilaat käyvät matematiikassa läpi desimaalilukujen opetusjaksoa.

Interventio-ohjelma suunniteltiin kestävän neljä viikkoa, joiden aikana suunnitelmana oli pitää kahdeksan interventiotuntia. Molemmat oppilaat osallistuisivat viikossa kaksi kertaa interventiotunnille ja yhden kerran oman luokan matematiikan tunnille. Interventiotunnin kesto oli yhden oppitunnin pituinen eli 45 minuuttia. Tarkoituksena oli pitää interventiotunnit joko yksilöopetuksena tai pareittain. Taulukossa 2 esitetään interventio-ohjelman suunnitellut oppitunnit ja niiden tavoitteet.

Taulukko 2. Interventio-ohjelman suunnitelma

Interventiotunti	Interventiotunnin aihe	Interventiotunnin tavoitteet
Viikko 1		
1.	Lukukäsite	Tavoitteena lukukäsitteen vahvistaminen desimaaliluvun osalta. Desimaaliluvun rakenteeseen, desimaaliosien termeihin ja niiden välisiin suhteisiin tutustuminen.
2.	Lukukäsite Yksinkertaiset yhteen- ja vähennyslaskut	Tavoitteena vahvistaa edelleen lukukäsitettä ja lähteä harjoittelemaan yksinkertaisia yhteen- ja vähennyslaskuja.
Viikko 2		
3.	Lukukäsite Yhteen- ja vähennyslaskut	Tavoitteena on kerrata lukukäsitettä. Yhteen- ja vähennyslaskujen laskeminen pelin avulla (paljon toistoa).
4.	Yhteen- ja vähennyslaskut	Tavoitteena vahvistaa edelleen taitoa laskea yhteen- ja vähennyslaskuja desimaaliluvuilla.
Viikko 3		
5.	Kertominen ja jakaminen luvuilla 2 ja 10	Tavoitteena lähteä harjoittelemaan desimaalilukujen jakamista ja kertomista
6.	Kertominen ja jakaminen luvuilla 2 ja 10	Tavoitteena vahvistaa edelleen taitoa kertoa ja jakaa desimaalilukuja luvuilla 2 ja 10.
Viikko 4		
7.	Desimaalien kertominen ja jakaminen muilla luonnollisilla luvuilla Kertominen ja jakaminen luvuilla 2 ja 10	Tavoitteena harjoitella desimaalilukujen kertomista ja jakamista muilla luonnollisilla luvuilla ja kerrata myös luvuilla 2 ja 10 kertomista ja jakamista.
8.	Lukukäsite Yhteen- ja vähennyslaskut Kertominen ja jakaminen luvuilla 2 ja 10.	Tavoitteena vahvistaa ja kerrata jo opittua.

4.5 Tutkimuksen kulku

Ensimmäisenä tutkimuksen alussa koko tutkimusjoukolle toteutettiin alkumittaus. Alkumittaus teetettiin oppilaille marraskuussa 2021. Mittaus toteutettiin ryhmätesteinä poissulkien kaksi oppilasta, jotka tekivät kartoituksen yksin poissaolon takia. Alkumittauksen tulosten perusteella valittiin joukosta kaksi oppilasta, joiden tulokset olivat tutkimusjoukon heikoimmat ja jotka tulosten perusteella tarvitsevat tukea desimaalilukujen oppimisessa ja niiden hallinnassa.

Kun tutkittavat oppilaat oli valittu, tutkimuksen toteuttaja suunnitteli interventio-ohjelman, joka mahdollisimman hyvin tukisi oppilaiden desimaalilukujen oppimista. Interventiojakson sisällöstä keskusteltiin tutkimuskoulun matematiikan opettajan kanssa. Lisäksi myös intervention aikataulutus suunniteltiin opettajan kanssa yhdessä. Interventiojakson aikana kontrolliryhmä osallistui tavanomaiseen matematiikan opetukseen.

Interventiojakso toteutettiin marras-joulukuussa talvella 2021. Interventiojakso kesti neljä viikkoa, jonka jälkeen loppumittaus toteutettiin välittömästi. Loppumittaus toteutettiin myös ryhmätestinä, kuten alkumittauskin. Mittaukseen osallistui koko tutkimusjoukko poissulkien oppilas B. Oppilas B:n viimeinen interventiotunti ja loppumittaus toteutettiin kolme viikkoa myöhemmin tammikuussa 2022 johtuen poissaoloista ja lomasta. Interventiojakson ja loppumittauksen jälkeen kerätty aineisto taulukoitiin aineiston analyysiä varten.

4.6 Aineiston analyysi

Tutkimuksen määrällinen aineisto koostui alku- ja loppumittauksesta. Molempien mittauskertojen tulokset taulukoitiin Exceliin anonyymisti. Ennen analysointia taulukkoon määriteltiin mitattavat muuttujat. Taulukkoon kirjattiin jokaisen tutkimukseen osallistuvan alku- ja loppumittauksen tehtäväkohtaiset pisteet. Jokaisen tutkittavan osalta koodattiin, oliko tehtäväosio mennyt oikein vai väärin. Näiden pisteiden avulla jokaiselle tutkittavalle laskettiin yhteispisteet kustakin tehtäväkokonaisuudesta.

Aineiston analyysissä aineistosta laskettiin molempien mittauskertojen kokonaispistemäärien keskiarvo ja keskihajonta kontrolliryhmän osalta. Lisäksi laskettiin osataitojen keskiarvot ja keskihajonnat. Nämä osataidot olivat desimaalilukujen suuruusvertailu, lukujonotaidot (sisältää sekä lukujono- että lukusuoratehtävän), yhteenlaskut ilman kymmenylitystä, vähennyslaskut ilman kymmenylitystä, yhteenlaskut kymmenylityksellä, vähennyslaskut kymmenylityksellä, desimaaliluvun kertominen luvuilla 2 ja 10 sekä desimaaliluvun jakaminen luvuilla 2 ja 10.

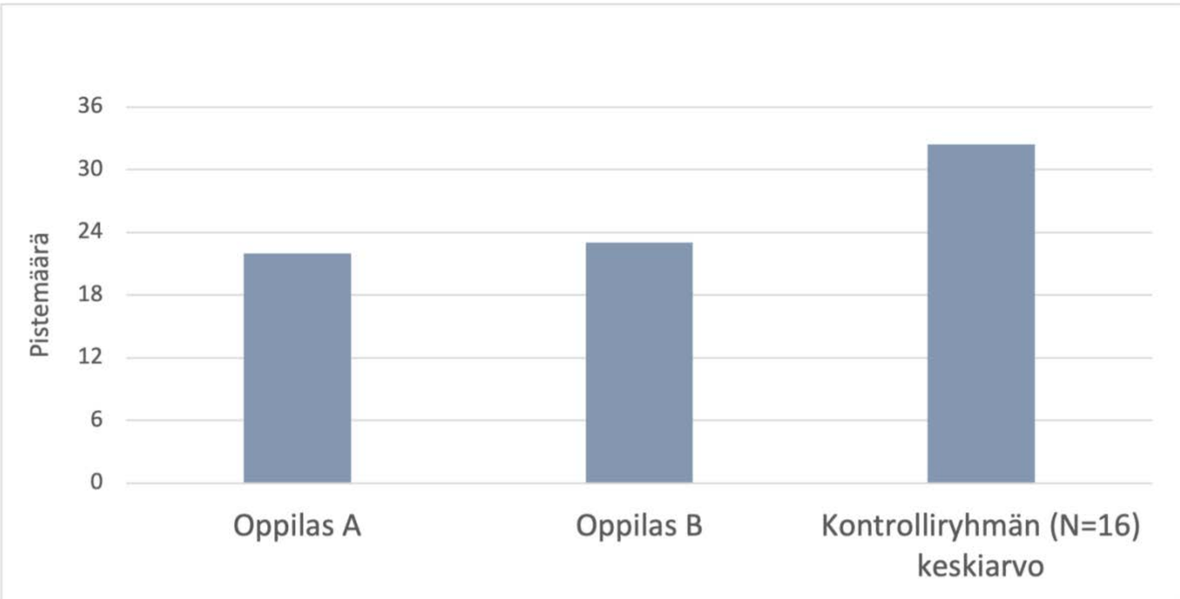
Tutkimuksen laadullinen aineisto syntyi interventiotuntien sisältöjen ja havaintojen raportoimisesta. Aineistosta pyrittiin nostamaan esille sellaisia asioita, jotka ovat merkityksellisiä tälle tutkimukselle. Tavoitteena oli luoda selkeä ja paikkansapitävä kuva toteutetusta interventiojaksosta. Aineistosta nostettiin esille interventiotuntien sisällöt ja toteutukset sekä sellaiset havainnot, jotka koettiin tärkeiksi tuoda esille.

5 Tulokset

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen tuloksia. Tuloksissa tuodaan esille alkumittauksen tulokset, intervention vaikutukset tutkittavien oppilaiden osaamiseen ja interventiojakson toteutus. Intervention vaikutusta tutkittavien oppilaiden osaamiseen käydään läpi ensin kokonaisvaltaisesti, jonka jälkeen vaikutuksia tarkastellaan tehtävätyypeittäin. Luvussa vertaillaan myös tutkittavien oppilaiden osaamista kontrolliryhmän tasoon.

5.1 Alkumittaus

Alkumittauksessa kontrolliryhmän (N = 16) keskiarvo oli 32,4 pistettä (kh = 3,05) maksimipistemäärän ollessa 36 pistettä. Tutkittavien oppilaiden kokonaispistemäärät jäivät alkumittauksessa useamman keskihajonnan verran alle kontrolliryhmän keskiarvon. Oppilas A sai alkumittauksessa kokonaispistemääräksi 22 ja oppilas B sai kokonaispistemääräksi 23. Kuvioissa 1 on esitelty alkumittauksen tulokset.



Kuvio 1. Alkumittauksen tulokset

Taulukkoon 3 on kuvattu oppilaiden A ja B sekä kontrolliryhmän suoriutuminen alkumittauksessa tehtävätyypeittäin. Tehtävätyypeittäin tarkasteltuna oppilas A suoriutui kontrolliryhmää heikommin yhteen- ja vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä ja kymmenylityksellä. Lisäksi jakaminen luvuilla 2 ja 10 oli heikompaa verrattuna kontrolliryhmään. Oppilas A suoriutui desimaalilukujen suuruusvertailussa, lukujono- ja lukusuoratehtävissä ja desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 samalla tasolla tai hiukan paremmin kuin kontrolliryhmä. Alkumittauksen kokonaispistemäärä jäi alle kontrolliryhmän keskiarvon.

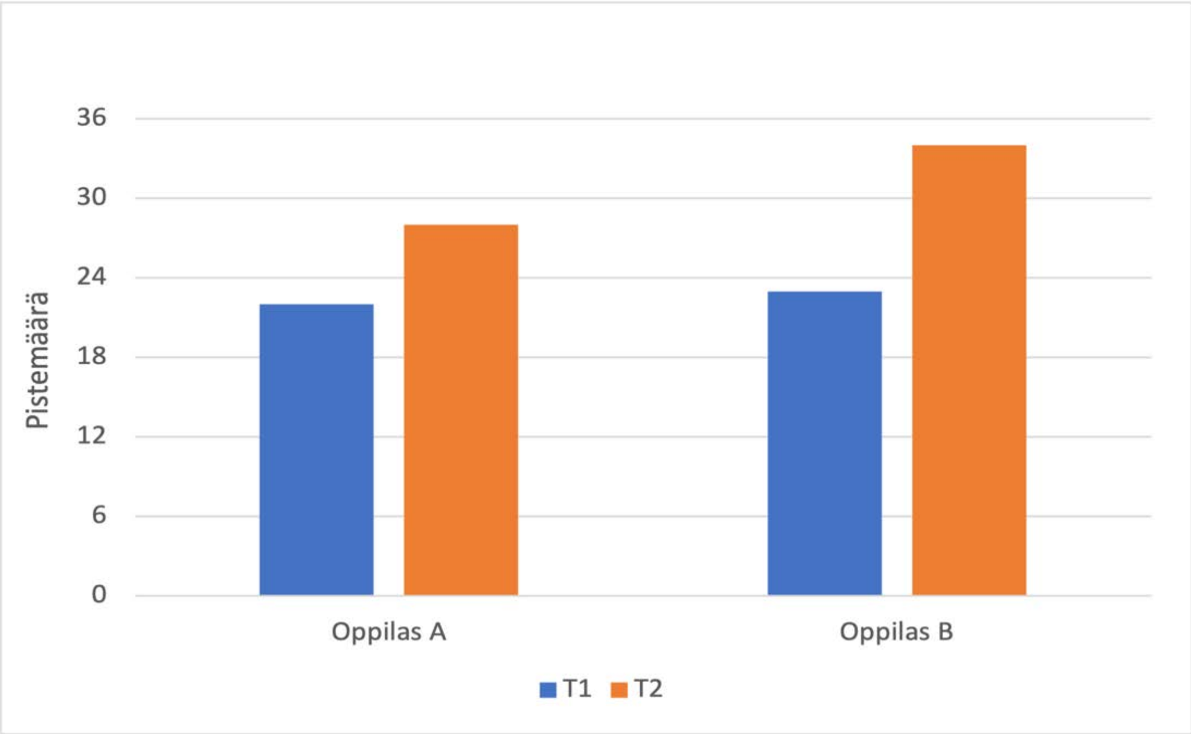
Tehtäväkohtaisesti tarkasteltuna oppilas B suoriutui kontrolliryhmään verrattuna heikommin desimaalilukujen suuruusvertailussa, yhteen- ja vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä sekä vähennyslaskuissa kymmenylityksellä. Myös jakaminen luvuilla 2 ja 10 oli heikompaa verrattuna kontrolliryhmään. Oppilas B:n osaaminen lukujono- ja lukusuoratehtävissä sekä desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 oli joko samaa tasoa tai hiukan parempaa kuin kontrolliryhmällä. Oppilas B:n kokonaispistemäärä jäi alle kontrolliryhmän keskiarvon.

Taulukko 3. Alkumittaustulokset tehtäväkohtaisesti

Tehtävä	**Oppilas A pistemäärä**	**Oppilas B pistemäärä**	**Kontrolliryhmä (N = 16) ka (kh)**	**Maksimipistemäärä**
Desimaalilukujen suuruusvertailu	6	3	5,8 (0,58)	6
Lukujono	2	2	1,9 (0,25)	2
Lukusuora	2	2	2 (0)	2
Yhteenlaskut ilman kymmenylitystä	2	2	3,4 (1,02)	4
Vähennyslaskut ilman kymmenylitystä	3	2	3,6 (0,51)	4
Yhteenlaskut kymmenylityksellä	1	4	4,6 (0,73)	5
Vähennyslaskut kymmenylityksellä	2	2	3,7 (0,95)	5
Kertominen luvuilla 2 & 10	4	4	3,9 (0,25)	4
Jakaminen luvuilla 2 & 10	0	2	3,6 (0,73)	4
Yhteensä	**22**	**23**	**32,4 (3,05)**	**36**

5.2 Intervention vaikutus tutkittavien osaamiseen

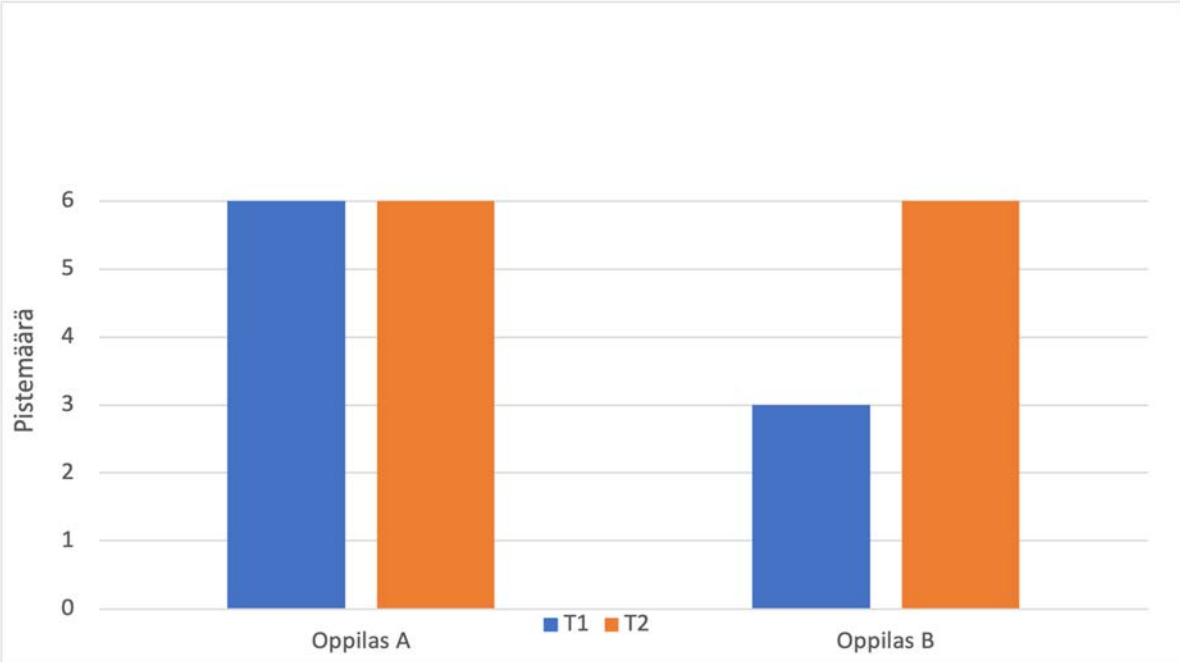
Tutkimuksessa pyrittiin selvittämään, voidaanko suunnitellulla interventiolla vaikuttaa tutkittavien desimaalilukujen osaamiseen ja saavuttavatko tutkittavat kontrolliryhmän osaamistason intervention avulla. Toisella mittauskerralla molemmat tutkittavat paransivat tulostaan (Kuvio 2). Oppilas A sai toisella mittauskerralla kokonaistuloksesi 28 pistettä ja oppilas B 34 pistettä. Molempien osaaminen siis kehittyi interventiojakson aikana. Oppilas A paransi suoritustaan 6 pistettä ja oppilas B 11 pistettä. Kontrolliryhmän (N = 16) loppumittauksen kokonaispisteiden keskiarvo oli 33,3 (*kh* =2,77). Kontrolliryhmän osaaminen kasvoi myös alku- ja loppumittauksen välillä lähes pisteellä. Kokonaispisteitä tarkasteltaessa oppilas B:n osaaminen oli parempaa interventiojakson jälkeen kuin kontrolliryhmän. Oppilas A:n suoriutuminen loppumittauksessa jäi alle kontrolliryhmän keskiarvon.



Kuvio 2. Tutkittavien oppilaiden kokonaispistetulokset alku- ja loppumittauksessa

5.1.1 Desimaalilukujen suuruusvertailu

Kuviossa 3 on esiteltynä tutkittavien oppilaiden osaaminen desimaalilukujen suuruusvertailutehtävässä. Oppilas A:n osaaminen desimaalilukujen suuruusvertailuissa pysyi loppumittauksessa samana kuin alkumittauksessa. Oppilas sai molemmilla mittauskerroilla tehtävästä täydet pisteet. Oppilas B:n osaaminen desimaalilukujen suuruusvertailuissa kehittyi interventiojakson aikana. Alkumittauksessa oppilas sai tehtävästä puolet oikein ja interventiojakson loputtua oppilas sai tehtävästä täydet pisteet. Kontrolliryhmän keskiarvo loppumittauksessa desimaalilukujen suuruusvertailussa oli 5,9 (*kh*=0,25). Molempien oppilaiden suoriutuminen tehtävässä oli loppumittauksessa kontrolliryhmän kanssa samaa tasoa.



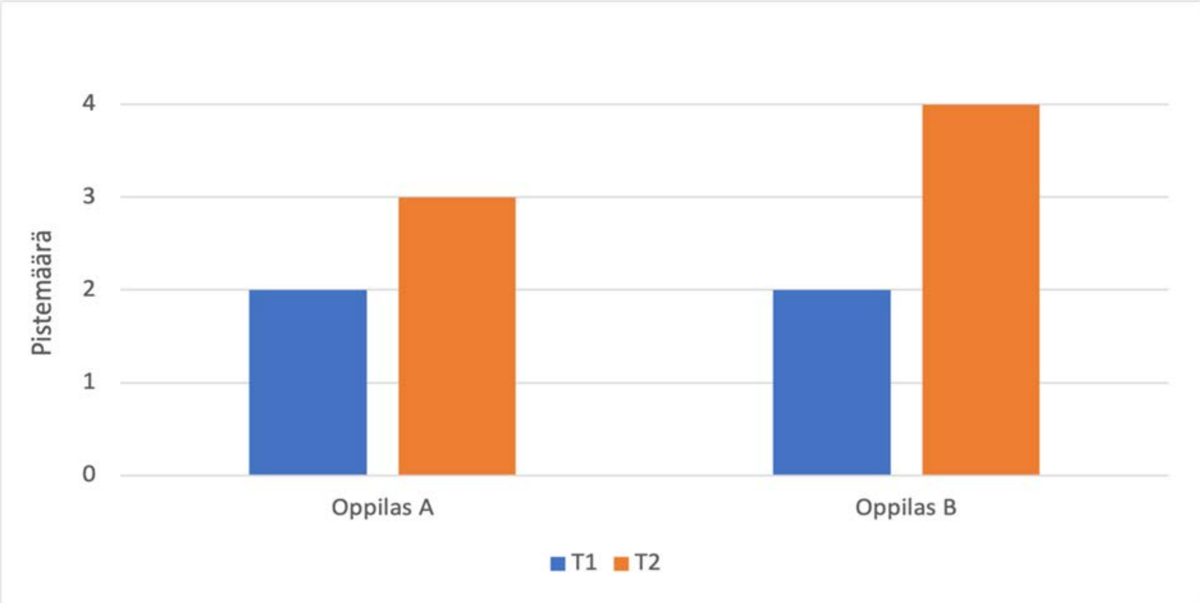
Kuvio 3. Desimaalilukujen suuruusvertailutehtävän pistemäärät

5.1.2 Lukujonotaidot

Molemmat oppilaat saivat sekä lukujono- että lukusuoratehtävistä täydet pisteet (4 pistettä) molemmilla mittauskerroilla. Kontrolliryhmän keskiarvo toisella mittauskerralla oli 3,9 (*kh*=0,25) eli tutkittavien oppilaiden osaaminen lukujonotaidoissa oli molemmilla mittauskerroilla kontrolliryhmän tasolla.

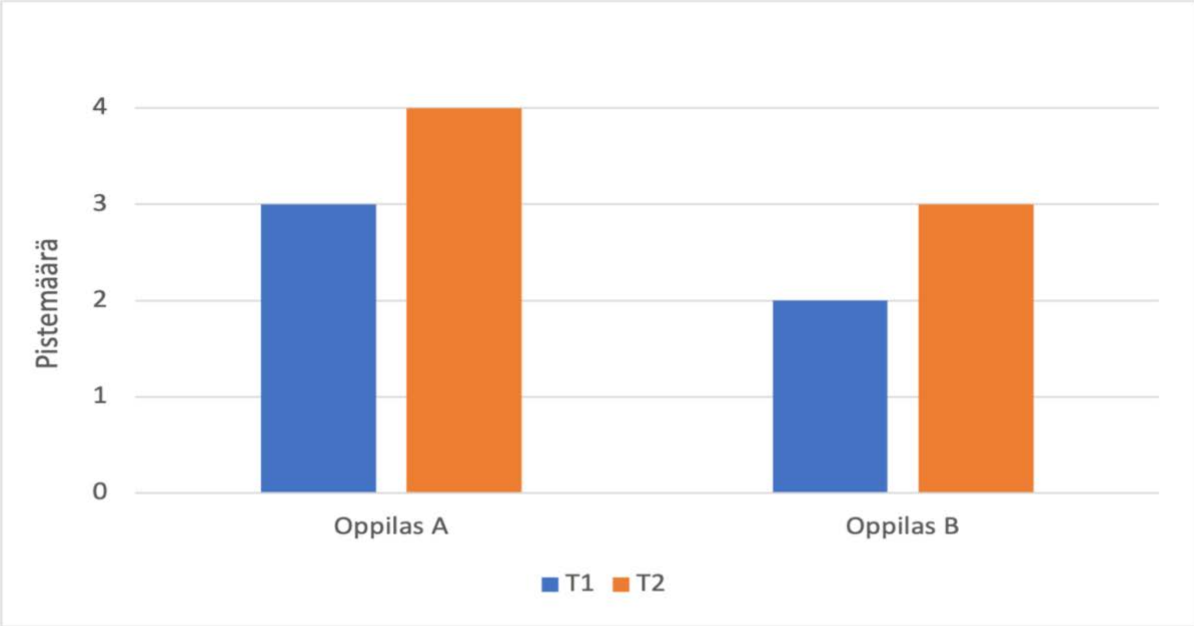
5.1.3 Yhteen- ja vähennyslaskut ilman kymmenylitystä

Kuten kuvioista 4 nähdään, molemmat oppilaat paransivat osaamistaan yhteenlaskuissa ilman kymmenylitystä. Oppilas A sai ensimmäisellä mittauskerralla tehtävästä 2 pistettä ja toisella mittauskerralla 3 pistettä. Oppilas B sai ensimmäisellä mittauskerralla pisteiksi 2 ja toisella mittauskerralla oppilas sai pisteitä 4, joka oli tehtävän maksimipistemäärä. Verrattaessa tulosta kontrolliryhmän tehtäväkohtaiseen keskiarvoon 3,7 (*kh*=0,6) voidaan todeta, että oppilas B suoriutui tehtävästä keskivertoa paremmin ja oppilas A jäi osaamistasoltaan alle kontrolliryhmän osaamistason.



Kuvio 4. Yhteenlaskut ilman kymmenylitystä

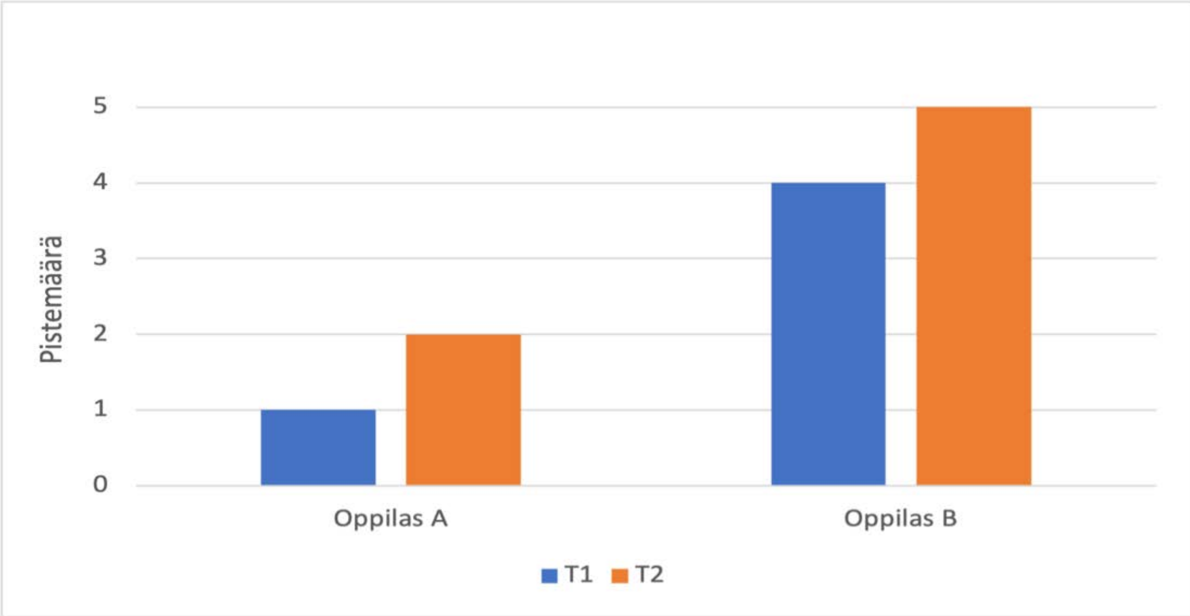
Kuviossa 5 on esiteltynä oppilaiden tulokset vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä alku- ja loppumittauksessa. Molemmat oppilaat paransivat myös osaamistaan vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä. Oppilas A sai toisella mittauskerralla tehtävästä täydet pisteet ja paransi suoritustaan yhdellä pisteellä. Oppilas B paransi myös suoritustaan yhdellä pisteellä saaden tehtävästä kolme pistettä. Oppilas A saavutti kontrolliryhmän tason, jonka keskiarvo tehtävästä oli 3,8 (*kh*=0,77) ja suoriutui tehtävästä keskivertoa paremmin. Oppilas B:n suoriutuminen tehtävästä jäi alle kontrolliryhmän tason.



Kuvio 5. Vähennyslaskut ilman kymmenylitystä

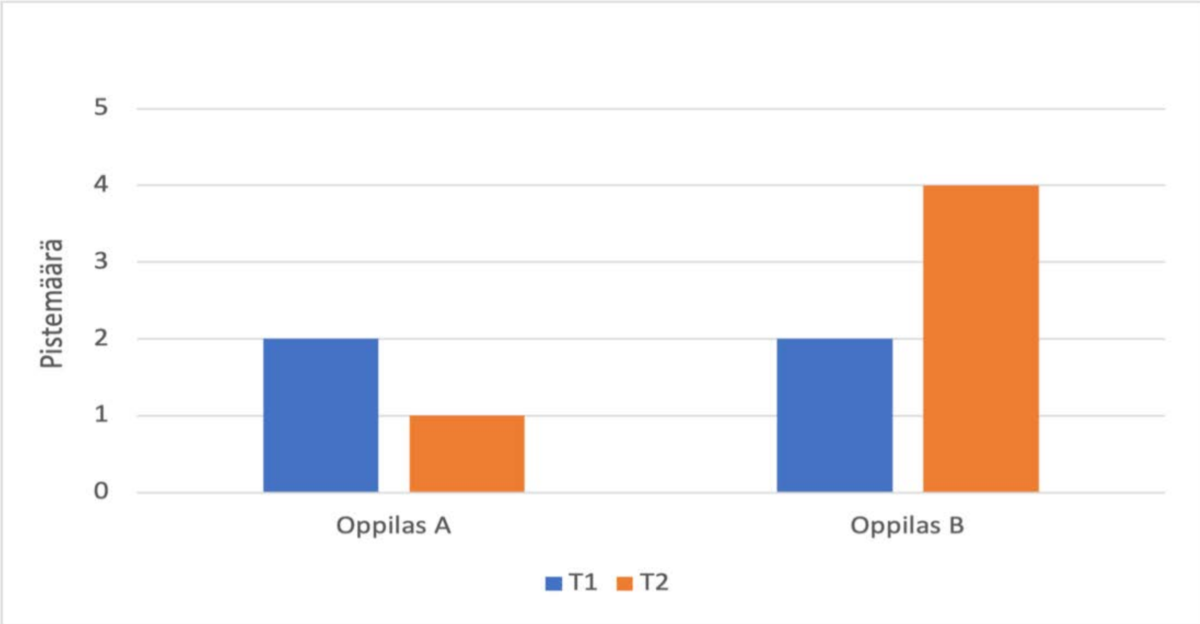
5.1.4 Yhteen- ja vähennyslaskut kymmenylityksellä

Molemmat oppilaat paransivat suoritustaan yhteenlaskuissa, joissa oli kymmenylitys, mikä voidaan nähdä Kuviosta 6. Oppilas A paransi suoritustaan yhdellä pisteellä saaden tehtävästä kaksi pistettä. Oppilas B paransi myös yhdellä pisteellä ja sai toisella mittauskerralla tehtävästä täydet viisi pistettä. Kontrolliryhmän keskiarvo tehtävässä oli 4,6 (*kh*=0,62). Oppilas B siis saavutti kontrolliryhmän tason ja suoriutui tehtävästä keskivertoa paremmin. Oppilas A jäi kontrolliryhmän osaamistason alapuolelle.



Kuvio 6. Yhteenlaskut kymmenylityksellä

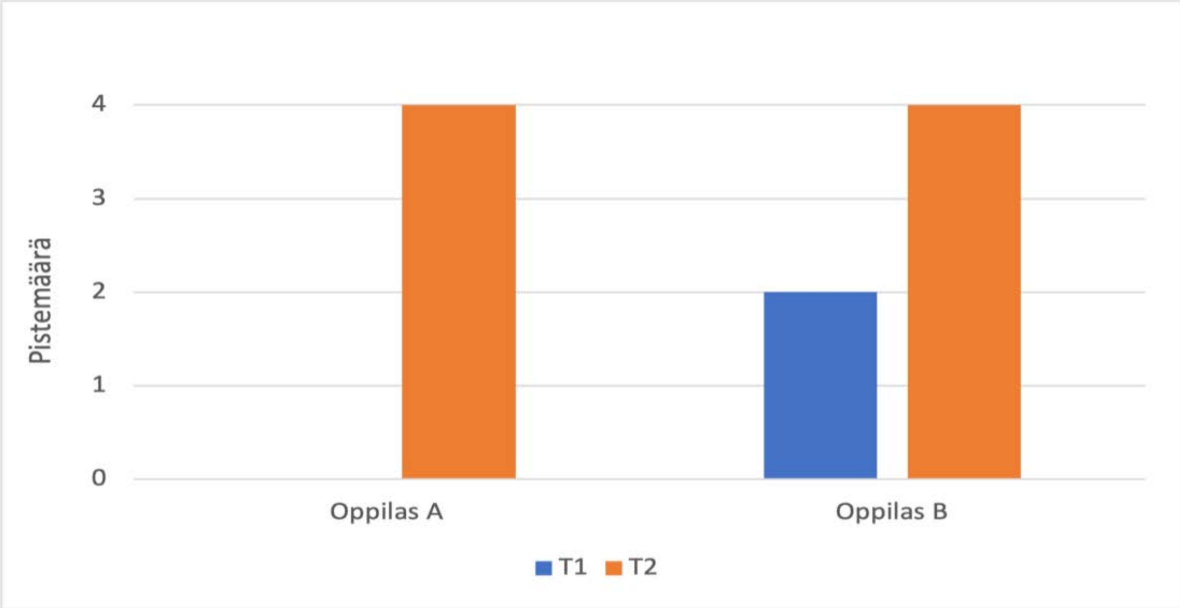
Kuviossa 7 on esiteltynä tutkittavien oppilaiden tulokset vähennyslaskuissa, joissa oli kymmenylitys. Oppilas A suoriutui tehtävästä heikommin toisella mittauskerralla kuin ensimmäisellä mittauskerralla saaden toisella mittauskerralla yhden pisteen. Oppilas B:n osaaminen kehittyi interventiojakson aikana ja hän sai tehtävästä neljä pistettä parantaen suoritustaan kahdella pisteellä. Kontrolliryhmän keskiarvo tehtävästä oli 4,1 (*kh*=0,88). Oppilas B saavutti kontrolliryhmän osaamistason. Oppilas A jäi osaamistasoltaan kontrolliryhmän alapuolelle.



Kuvio 7. Vähennyslaskut kymmenylityksellä

5.1.5 Kertominen ja jakaminen luvuilla 2 ja 10

Oppilaiden osaaminen desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 pysyi samana interventiojakson lopussa. Molemmat oppilaat saivat täydet neljä pistettä tehtäväosioista ensimmäisellä ja toisella mittauskerralla. Kontrolliryhmän keskiarvo toisella mittauskerralla oli 3,9 (*kh*=0,34), joten molempien oppilaiden osaamistaso oli kontrolliryhmän kanssa samaa tasoa.



Kuvio 8. Desimaalilukujen jakaminen luvuilla 2 ja 10

Kuten yllä olevasta Kuvioista 8 voidaan nähdä, oppilaiden osaaminen desimaalilukujen jakamisessa luvuilla 2 ja 10 kehittyi molemmilla interventiojakson aikana. Oppilas A paransi osaamistaan neljällä pisteellä saaden täydet pisteet tehtäväosiosta. Oppilas B paransi osaamistaan kahdella pisteellä saaden myös täydet pisteet tehtävästä. Kontrolliryhmän tehtäväkohtainen keskiarvo oli 3,2 (*kh*=1,28). Molemmat oppilaat saavuttivat kontrolliryhmän osaamistason ja suoriutuivat tehtävästä kontrolliryhmää paremmin.

5.3 Interventiojakson toteutuminen

Interventiotuntien määrä jäi alun perin suunnitellusta määrästä pienemmäksi. Tutkittava A:lle interventiotunteja kertyi seitsemän ja tutkittava B:lle kuusi. Tähän vaikutti kouluarjen alati muuttuvat aikataulut ja esimerkiksi joulua edeltävän ajan koulutapahtumat sekä oppilaiden poissaolot. Interventiotuntien vähäisyys vaikutti selkeästi siihen, miten kauan tiettyä aihetta pystyttiin oppilaiden kanssa käsittelemään. Alun perin interventiotunnit oli tarkoitus pitää yksilöllisinä tunteina, mutta yhdessä matematiikan opettajan kanssa näimme paremmaksi vaihtoehdoksi sen, että tutkittavat tulevat yhdessä jonkun muun oppilaan kanssa interventiotunnille. Näin pyrittiin vähentämään kynnystä lähteä interventiotunnille. Kummallakin tutkittavalla oli siis omat tuntinsa, joissa heillä molemmilla oli toinen saman luokan oppilas mukana, jotka eivät olleet osa kontrolliryhmää.

Seuraavaksi lähden tarkastelemaan, miten kummankin tutkittavan interventiojakso toteutui. Taulukossa 4 on esiteltynä molempien tutkittavien toteutuneet interventiotunnit. Esittelen pääpiirteittäin läpi interventiotuntien tavoitteet ja sisällöt.

Taulukko 4. Tutkittavien oppilaiden interventiotunnit

Interventiotunti ja sen tavoite	Oppilas A	Oppilas B
1. Lukukäsitteen vahvistaminen desimaaliluvun osalta. Desimaaliluvun rakenteeseen, desimaaliosien termeihin ja niiden välisiin suhteisiin tutustuminen.	Harjoitusmoniste sisälsi yksinkertaisia tehtäviä, joissa käytettiin pääsääntöisesti kymmenesosia ja sadasosia. Tehtävät onnistuivat oppilaalta pääsääntöisesti hyvin. Haasteita esiintyi sellaisten lukujen puolittamisessa, jossa luku ei puolitu kokonaisluvuiksi. Esimerkiksi luvussa 9,4 yhdeksän ei puolitu kokonaisluvuiksi vaan siitä tulee 4,5, johon täytyy vielä lisätä kaksi kymmenesosaa, kun luvun kymmenesosatkin puolitetaan. Tässä tarjosin tueksi kymmenjärjestelmävälineitä, joiden avulla lähdimme yhdessä ratkomaan, miten luku oikein puolittuu. Välineillä konkretisoiminen näytti auttavan oppilasta. Oppilaan lukukäsitettä tulisi siis kuitenkin lähteä vahvistamaan seuraavilla tunneilla, jotta voidaan siirtyä sulavammin laskutoimituksiin.	Aloitimme tunnin keskustelemalla siitä, mitä desimaaliluvut ovat, mistä ne koostuvat ja mitä paikka-arvo merkitsee. Kävimme keskustelua kymmenjärjestelmävälineiden avulla. Oppilas osasi nimetä desimaaliluvun osat ja kysyttäessä hän osasi kertoa desimaaliosien suhteista toisiinsa esimerkiksi sen, että tarvitaan kymmenen tuhannesosaa, jotta saadaan yksi sadasosa ja yhteen kokonaiseen menee 1000 tuhannesosaa. Lukujen rakentaminen välineillä onnistui pääasiassa hyvin. Yksinkertaiset luvut (2,6 ja 1,05) onnistuivat helposti. Luvun 1,135 rakentaminen onnistui hyvin, jos luvun sanoi ”yksi kokonainen, yksi kymmenesosa, kolme sadasosaa ja 5 tuhannesosaa”. Jos luvun 0,365 sanoi ”nolla kokonaista ja 365 tuhannesosaa” oli luvun rakentaminen haastavampaa ja oikeiden paikkojen löytäminen vaikeutui. Käytiin kuitenkin läpi, miksi luvut voi sanoa eri tavoin: kun luvun 0,365 pilkkoo tuhannesosa välineisiin, saadaan 365 tuhannesosa ”palikkaa”. Seuraavana tehtävänä oppilaan tuli kirjoittaa sanottu desimaaliluku paperille. Tämä onnistui hyvin yksinkertaisilla luvuilla ja silloin, kun luvun desimaaliosat sanottiin erikseen. Ymmärrystä siitä, että desimaalilukuja voi sanoa monella

		eri tavalla, tulee vielä vahvistaa. Lopuksi oppilas teki monistetehtävän.
2. Vahvistaa edelleen lukukäsitettä ja lähteä harjoittelemaan yksinkertaisia yhteen- ja vähennyslaskuja.	Olimme oppilaan kanssa luokassa, sillä aiemmalla kerralla hän hieman vastusti mukaan lähtemistä, joten opettajan kanssa yhdessä päätimme, ettei oppilasta pakoteta mukaan, koska se voi vaikuttaa kielteisesti oppimiseen ja opetuksen vastaanottoon. Lähdimme vahvistamaan lukukäsitettä lukujonotehtävien ja lukujen suuruusvertailun kautta. Lukusuoratehtävä, jossa täytyi sijoittaa desimaaliluku oikeaan kohtaan, onnistui oppilaalta odotusten mukaisesti hyvin. Pyöristystehtävässä, jossa kysyttiin, kumpi on lähempänä yhdeksää kymmenesosaa 0,5 vai 1,5, oppilas vastasi 1,5. Tässä näkyi se, että oppilaan lukukäsitettä tulisi vielä vahvistaa. Kävimme oppilaan kanssa tämän tyyppiset tehtävät yhdessä läpi tarkkaan hyödyntämällä lukusuoraa. Desimaalilukujen hajotelmat onnistuivat oppilaalta hyvin, kun hyödynsimme kymmenjärjestelmävälineitä hajotelmia tehdessä. Myös desimaalilukujen suuruusvertailutehtävät sujuivat loistavasti. Tehtävässä, jossa täytyi kirjoittaa lukuja kirjallisten ohjeiden mukaan, oli haasteita. Kävimme oppilaan kanssa yhdessä läpi desimaaliosien nimet ja järjestyksen piirtämällä ja kymmenjärjestelmävälineillä.	Kertasimme ja vahvistimme lukukäsitettä kirjoittamalla desimaalilukuja ohjeiden mukaisesti. Lukujen kirjoittaminen sujui hyvin ja oppilas teki vain yhden virheen. Kävimme vielä yhdessä läpi paikka-arvon merkityksen ja desimaaliluvun rakenteen sekä desimaaliosien väliset suhteet. Seuraavaksi lähdimme orientoitumaan yhteen- ja vähennyslaskuihin desimaaliluvuilla. Oppilaan tehtävänä oli muodostaa kymmenjärjestelmävälineillä paikka-alustalle annettu laskutoimitus ja näyttää välineillä, miten se lasketaan. Ideana on, että oppilas saa konkreettisen kuvan siitä, miten laskuprosessi tapahtuu. Tavoitteena oli myös korostaa paikka-arvon merkitystä yhteen- ja vähennyslaskuissa. Koska yksinkertaiset laskut sujuivat hyvin, kokeilimme rakentaa sellaisia yhteen- ja vähennyslaskuja, joissa on kymmenylitys. Yhteenlaskuissa oppilas lisäsi paikka-alustalle desimaaliosia ja kun esimerkiksi kymmenesosien kohdalle kertyi kymmenen kymmenesosalevyä, kysyin, voiko niitä olla kymmenen. Oppilas korjasi laskun siten, että kymmenestä kymmenesosasta muodostuu yksi kokonainen. Vähennyslaskuissa mallinsin oppilaalle sen, että otamme yhden suuremman yksikön ja muutamme sen pienemmäksi yksiköksi, jolloin vähennyslaskun laskeminen

		onnistuu. Harjoitteluvaiheessa oppilas teki tehtävämonistetta.
3. Lukukäsitteen kertaus Yhteen- ja vähennyslaskujen harjoitteleminen desimaaliluvuilla	Kertasimme ja vahvistimme oppilaan lukukäsitettä desimaaliluvuissa. Keskustelimme, mikä desimaaliluku on ja mistä se koostuu. Kävimme esimerkkiluvun (1,125) kautta läpi, mitä ovat desimaaliosat (kymmenesosa, sadasosa ja tuhannesosa). Keskustelimme siitä, miksi esimerkiksi kymmenesosa on juuri kymmenesosa samalla kymmenjärjestelmävälineillä konkretisoiden: kymmenestä kymmenesosasta tulee yksi kokonainen ja sadasta sadasosasta yksi kokonainen. Kävimme myös välineiden avulla läpi desimaaliosien suhteita toisiinsa: esimerkiksi kymmenestä sadasosasta tulee yksi kymmenesosa ja kymmenestä tuhannesosasta yksi sadasosa. Seuraavaksi lähdimme harjoittelemaan lukujen kirjottamista. Oppilaan tehtävänä oli kirjoittaa se luku paperille, minkä kuuli minun sanovan. Lähdimme aluksi helpoimmista luvuista liikkeelle ja edettiin hieman vaikeampiin. Esimerkiksi alussa käytettiin luvusta 0,25 sanoja ”kaksi kymmenesosaa ja viisi sadasosaa” mutta myöhemmin sama luku luettiin ”25 sadasosaa”. Lukujen kirjoittaminen onnistui oppilaalta melko hyvin mutta aluksi haastavimmissa luvuissa (esim. 0 kokonaista 365 tuhannesosaa) oppilas kirjoitti 0,00365. Korjasin virheen perusteluineen, jonka jälkeen lukujen kirjoittaminen onnistui hyvin.	Kertasimme lukukäsitettä lukukäsitetestin avulla. Oppilas sai testistä täydet pisteen. Tavoitteena oli vahvistaa yhteen- ja vähennyslaskutaitoja. Oppilaat pelasivat peliä parina ja molempien tehtävänä oli ottaa kaksi desimaalilukulappua ja laskea ne yhteen tai vähentää ne toisistaan ja sanoa tulos ääneen. Pisteen sai se, kumman luku oli isompi. Peliä pelattaessa kannustin oppilasta käyttämään termejä kymmenesosa, sadasosa ja tuhannesosa. Tavoitteena oli siis vielä pitää oikeat termit mukana, jotta lukukäsite pysyisi vahvana. Laskemisen tueksi oppilaalla oli paperia ja kynä. Laskiessa muistutin paikka-arvon merkityksestä ja mitkä asiat ovat tärkeä huomioida yhteen- ja vähennyslaskuissa. Pelin tavoitteena oli saada oppilaalle laskemisessa paljon toistoja siten, ettei laskeminen kyllästytä ja oppilaan motivaatio säilyisi hyvänä. Lisäksi peli tarjosi harjoitusta myös lukujen suuruusvertailuun. Laskeminen sujui pääsääntöisesti hyvin. Kävimme virheen jälkeen aina laskun yhdessä läpi ja sen, missä virhe tapahtui.

	Lukujen kirjoittamisen lisäksi oppilas pääsi rakentamaan lukuja kymmenjärjestelmävälineillä. Tämä onnistui ti hyvin mutta välillä oppilaalla meni paikka-arvo ja välineiden nimet sekaisin. Lopuksi oppilas pelasi parinsa kanssa peliä, jossa molemmat nostavat lapun, joka sisältää desimaaliluvun, jonka jälkeen luku rakennetaan paikka-alustalle ja niiden suuruuksia vertaillaan. Se, jolla on isompi luku, saa pisteen.	
4. Lukukäsitteen kertaus (Oppilas A) Harjoitella yhteen- ja vähennyslaskujen laskemista desimaaliluvuilla Desimaalilukujen kertominen ja jakaminen luvuilla kaksi ja kymmenen (Oppilas B)	Kertasimme lukukäsitettä lukukäsitetestin avulla ja siirryimme yhteen- ja vähennyslaskuihin. Oppilaan lukukäsitetesti sujui melko hyvin. Lukuja kirjoittaessa oppilas sekoitti kymmenesosat sadasosiin. Vaikutti siltä, että oppilas osasi kyllä kirjoittaa luvut oikein mutta termit menivät sekaisin. Lukujen vertailu, naapurilukujen kirjoittaminen ja lukujonot onnistuivat loistavasti. Testin jälkeen siirryttiin laskemaan desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskuja pelin avulla. Korostin paikka-arvon merkitystä, jotta oppilas huomaa laskea oikeat desimaaliosat yhteen tai vähentää ne toisistaan. Oppilaalle laitettiin näkyviin desimaaliluvun rakenne paperille: ykköset, kymmenesosat, sadasosat ja tuhannesosat. Pelissä pelattiin pareittain ja molempien tehtävänä oli ottaa kaksi desimaalilukulappua ja laskea ne yhteen. Se, kummalla on isompi luku laskutoimituksen jälkeen, sai pisteen. Pyysin oppilasta sanomaan aina luvut ääneen, jotta desimaaliosien nimet kertautuisivat usein. Lisäksi kannustin käyttämään paperia laskujen tukena, jolloin	Kertasimme oppilaan kanssa vielä yhteen- ja vähennyslaskuja. Laskut sujuivat sekä ilman kymmenylitystä että kymmenylityksen kanssa. Seuraavaksi lähdimme harjoittelemaan desimaalilukujen kertomista ja jakamista luvulla 10. Ensin konkretisoin 10:llä jakamisen ja kertomisen kymmenjärjestelmävälineillä. Esimerkiksi 1,0/10 tapahtuu, kun ykköskuution jakaa kymmeneen kymmenesosalevyyn, jolloin 1,0/10= 0,1. Kertominen konkretisoitiin välineillä. Oppilas pääsi myös itse laskemaan laskuja välineillä. Seuraavaksi kävimme desimaalilukujen kertomista ja jakamista luvulla kaksi läpi opetusrahoilla. Oppilas muodosti opetusrahoilla annetun laskutoimituksen ja suoritti sen välineillä. Opetusrahojen käyttö vaikutti konkretisoivan laskua ja laskeminen onnistui sujuvasti. Tämän jälkeen siirryimme harjoitteluvaiheeseen ja oppilas teki monisteesta tehtäviä. Monisteeseen oli myös lisätty täytettävä taulukko, jossa oppilaan

	laskutoimitus on nähtävissä ja sitä oli helpompi laskea. Yhteenlaskujen jälkeen vaihdettiin vähennyslaskuihin. Peli vaikutti toimivan hyvänä laskemisen motivaattorina. Yhteen- ja vähennyslaskut sujuivat pääsääntöisesti hyvin, mutta sellaiset vähennyslaskut, joissa tuli kymmenylitys olivat haastavampia. Virheet korjattiin ja kerrattiin yhdessä apulapun avulla paikka-arvo ja sen merkitys. Yksinkertaiset yhteen- ja vähennyslaskut oppilas laski sujuvasti päässä. Havaintona oli, että kymmenylityksiä täytyisi vahvistaa seuraavilla tunneilla.	tehtävänä on ensin jakaa desimaaliluku 10:llä, 100:lla ja lopuksi 1000:lla. Sama taulukko täytettiin myös kertomalla 10:llä, 100:lla ja 1000:lla. Taulukot havainnollistivat hyvin, mitä tapahtuu, kun kerrotaan tai jaetaan 10:llä, 100:lla tai 1000:lla.
5. Lukukäsitteen vahvistaminen Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskujen harjoitteleminen (Oppilas A) Desimaalilukujen kertominen ja jakaminen luvuilla kaksi ja kymmenen	Kertasimme lyhyesti lukukäsitettä kirjoittamalla lukuja annetun ohjeen mukaisesti. Kertasimme paikka-arvon merkityksen yhteen- ja vähennyslaskuissa. Tämän jälkeen harjoiteltiin yhteen- ja vähennyslaskuja kymmenjärjestelmävälineillä. Oppilaan tehtävänä oli mallintaa annettu lasku välineillä, jonka jälkeen se kirjoitettiin paperille. Aluksi kävimme muutaman helpon esimerkin läpi, jotka oppilas osasi ilman ongelmia. Siirryimme sellaisiin laskuihin, joissa esiintyy kymmenylityksiä. Laskut suoritettiin ensin välineillä, jotta oppilaalle jäisi konkreettinen mielikuva siitä, mitä tapahtuu yhteen- ja vähennyslaskuissa, kun niissä on kymmenylitys. Kävimme vielä esimerkein läpi allekkainlaskustrategian ja piirtämisen käytön apuvälineenä. Tämän jälkeen siirryttiin harjoitteluvaiheeseen, jossa oppilas laski monisteesta yhteen- ja	Kertasimme desimaalilukujen kirjoittamista ohjeiden mukaisesti. Lukujen kirjoittaminen onnistui jo ilman virheitä myös silloin, kun kaikkia desimaaliosia ei erikseen sanottu, vaan esimerkiksi luku 0,125 sanottiin ”nolla kokonaista ja satakaksikymmentäviisi tuhannesosaa”. Tämän jälkeen lähdimme kertaamaan ja vahvistamaan desimaalilukujen kertomista ja jakamista luvuilla 2 ja 10. Molemmilla luvuilla kertominen sekä jakaminen onnistuivat melko sujuvasti ilman suurempia haasteita. Seuraavaksi lähdimme laajentamaan kertomista ja jakamista muilla luonnollisilla luvuilla. Luonnollisilla luvuilla kertomista mallinnettiin piirtämällä, jonka jälkeen oppilas pääsi itse tekemään laskun. Kävimme yhdessä läpi erilaisia laskustrategioita, joita voi hyödyntää kertomisessa ja jakamisessa. Strategioita olivat

	vähennyslaskuja. Yhteenlaskut kymmenylityksellä sujuivat hyvin mutta vähennyslaskuissa esiintyi haasteita. Kävimme yhdessä läpi, millaisia eri strategioita voi käyttää laskuissa, jossa on kymmenylitys. Lopputunnista lähdimme jo orientoitumaan kymmenellä ja kahdella kertomiseen sekä jakamiseen. Ensin kävimme läpi kymmenellä kertomista ja jakamista välineiden avulla: ”yksi ykköskuutio koostuu kymmenestä kymmenesosalevystä” ja siksi 1,0:10 = 0,1. Kertomista ja jakamista havainnollistettiin myös monistetehtävän avulla, jossa luku ensin jaetaan/kerrotaan 10:llä, sitten 100:lla ja vielä lopuksi tuhannella. Kahdella kertominen ja jakaminen onnistui hyvin mutta oli hieman hitaampaa sujuvuudeltaan. Kahdella kertominen ja jakaminen käytiin läpi esimerkin avulla, jossa desimaaliluvut esitettiin rahasummana. Desimaalilukujen esittäminen rahasummana vaikutti konkretisoivan laskua ja sitä kautta helpotti laskemista.	esimerkiksi allekkain kertominen ja jakaminen, piirtäminen ja murtolukujen hyödyntäminen laskuissa. Oppilas pystyi sujuvasti laskemaan esimerkkilaskuja. Kun esimerkiksi kertolaskussa tuli vastaan kymmenylitys, kävimme läpi kymmenjärjestelmävälineillä, miten laskutoimitus tehdään/suoritetaan. Harjoitteluvaiheessa oppilas laski monisteesta erilaisia kerto- ja jakolaskuja sekä kertasi myös yhteen- ja vähennyslaskuja. Laskeminen oli sujuvaa.

6. Kerrata desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskuja sekä harjoitella kerto- ja jakolaskujen laskemista desimaaliluvuilla (Oppilas A) Kerrata aiemmin opittua ja vahvistaa osaamista (Oppilas B)	Kertasimme yhteen- ja vähennyslaskuja kymmenylityksellä. Laskut onnistuivat kokonaisuudessaan hyvin, mutta vähennyslaskut olivat työläämpiä verrattuna yhteenlaskuihin eli vähennyslaskujen laskeminen kymmenylityksellä ei ollut vielä täysin sujuvoitunut. Jatkoimme kerto- ja jakolaskujen harjoittelua. Kertasimme 10:llä kertomisen ja jakamisen. Tämän lisäksi kävimme myös läpi 100:lla kertomisen ja jakamisen, sillä se toimi hyvänä jatkumona 10:llä kertomisen ja jakamisen jälkeen. Sekä luvuilla 10 ja 100 kertominen ja jakaminen onnistuivat sujuvasti. Lisäksi harjoittelimme muilla luonnollisilla luvuilla kertomista ja jakamista, koska se sisältyy seitsemännen luokan harjoiteltaviin asioihin. Tunti keskittyi pääsääntöisesti harjoitteluun. Vaikeassa tehtävässä kertasimme ja kävimme läpi, miten lasku lasketaan ja miksi. Yhtenä laskustrategiana kävimme läpi allekkain kertomisen. Lopuksi kertasimme vielä välineiden avulla desimaaliosien suhteet toisiinsa. Kävimme välineillä läpi, miksi 1,0:10 on 0,1 tai sadalla jaettuna 0,01. Oppilas osasi kertoa, että kymmenen kymmenesosalevyä muodostaa yhden ykköskuution ja sata sadasosasauvaa yhden ykköskuution. Oppilas ymmärsi myös, että 10 sadasosasauvaa muodostaa yhden kymmenesosa levyn. Vahvistettiin siis ymmärrystä kymmenjärjestelmästä.	Lähdimme vahvistamaan jo opittua. Kertasimme lukukäsitettä, yhteen- ja vähennyslaskuja sekä kertomista ja jakamista. Kävimme oppilaan kanssa keskustelua siitä, tuntuuko jokin aihealue vielä haastavalta tai onko jotain, mitä ei täysin vielä ymmärrä. Oppilaan mukaan kaikki sujuu suhteellisen hyvin ja eikä hän sanonut kokevansa minkään aiheuttavan vaikeuksia. Tunti koostui pääsääntöisesti harjoittelusta, jossa oppilas teki aiemmin käytyjä aiheita monisteen avulla. Laskeminen vaikutti sujuvalta, eikä oppilas tarvinnut juurikaan tukea laskemisessa.

7. Kerrata aiemmin opittua ja vahvistaa osaamista (Oppilas A)	Kertasimme jo opittua ja vahvistimme osaamista. Tunti koostui pääsääntöisesti harjoittelusta. Jos oppilaalle tuli haaste jossakin tehtävässä kävimme sen ja siihen liittyvät asiat läpi yhdessä joko välineillä tai antamani esimerkin avulla. Kertasimme lukukäsitettä, yhteen- ja vähennyslaskuja painottaen etenkin kymmenylitystä sekä kertomista ja jakamista. Tehtävien teko sujui lähes ongelmitta, mutta oppilas itse kertoi, että vähennyslaskut tuntuvat haastavammalta. Kävimme läpi eri vaihtoehtoja, miten vähennyslaskun, jossa on kymmenylitys, voidaan laskea. Esimerkiksi vaiheittain laskeminen hankalassa laskussa tai allekkain laskeminen, jos lasku tuntuu erittäin vaikealta, sillä oppilas osaa varmasti sen laskea allekkain.	

6 Pohdinta

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, voidaanko oppilaiden desimaalilukujen hallintaa ja osaamista kehittää suunnitellun ja systemaattisen intervention avulla. Tutkimuskysymykset olivat: 1. Millaisia vaikutuksia interventiolla on tutkittavien desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen? 2. Saavuttavatko tutkittavat kontrolliryhmän osaamistason intervention avulla? Tutkimusjoukkona toimi 18 seitsemännen luokan oppilasta, joista kaksi osallistui interventiojaksolle. Tutkimus on interventio- ja tapaustutkimus, jossa kerättiin sekä määrällistä että laadullista aineistoa. Tutkimuksen mittarina toimi tutkimuksen toteuttajan laatima desimaalikartoitus, jonka oppilaat tekivät alkumittauksessa ja toisen kerran loppumittauksessa. Tutkimuksen tulokset saatiin vertailemalla tutkittavien oppilaiden osaamista alku- ja loppumittauksessa sekä vertaamalla heidän loppumittauksensa tuloksia kontrolliryhmän loppumittauksen kokonaispisteiden keskiarvoon.

Molempien tutkittavien oppilaiden osaaminen parantui interventiojakson aikana. Oppilas A paransi suoritustaan yhteen- ja vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä, yhteenlaskuissa, joissa ilmeni kymmenylitys ja desimaalilukujen jakamisessa luvuilla 2 ja 10. Lukujono- ja lukusuoratehtävissä, desimaalilukujen suuruusvertailuissa ja desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 oppilas sai molemmilla kerroilla täydet pisteet eli osaaminen pysyi samana alku- ja loppumittauksessa. Huomioitavaa on se, että oppilaan suoriutuminen vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä oli heikompaa loppumittauksessa kuin alkumittauksessa. Jälkikäteen arvioituna ajattelen, että oppilas A:n kanssa olisi pitänyt keskittyä interventiojakson aikana vielä enemmän kymmenylitykseen etenkin vähennyslaskujen kohdalla. Oppilas saattaisi myös hyötyä opetuksesta, jossa keskitytäisiin kymmenylityksiin kokonaisluvuilla. Tiedetään, että desimaalilukujen oppimiselle on tärkeää, että oppilas ymmärtää kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon luonnollisten lukujen osalta (Ikäheimo, 2012; Van de Walle ym., 2014). Tällainen interventio voisi olla kuitenkin haastavaa toteuttaa yläkoulussa, sillä tiedetään, että esimerkiksi opetussuunnitelma rajoittaa mahdollisuuksia kohdistaa tukea sellaisiin taitoihin, jotka alakoulussa ovat jääneet heikoksi (Makkonen ym., 2019).

Oppilas B paransi suoritustaan kaikilla niillä osa-alueilla, joilla hän suoriutui heikommin alkumittauksessa. Oppilas paransi suoritustaan desimaalilukujen suuruusvertailussa, yhteen- ja vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä, yhteen- ja vähennyslaskuissa, joissa ilmeni kymmenylitys sekä desimaalilukujen jakamisessa luvuilla 2 ja 10. Osaaminen pysyi samana alku- ja loppumittauksessa lukujono- ja lukusuoratehtävissä ja desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10. Näistä tehtäväosioista oppilas sai molemmilla mittauskerroilla täydet pisteet.

Oppilas A:n osaaminen interventiojakson jälkeen jäi kontrolliryhmän osaamistason alapuolelle. Oppilas saavutti kontrolliryhmän tason vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä ja desimaalilukujen jakamisessa luvuilla 2 ja 10. Osaaminen lukujono- ja lukusuoratehtävissä, desimaalilukujen suuruusvertailussa ja desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 olivat kontrolliryhmän osaamistasolla jo ennen interventiota. Oppilas B:n osaamistaso intervention jälkeen oli parempaa kuin kontrolliryhmän keskimääräinen osaamistaso. Oppilas saavutti kontrolliryhmän osaamistason lähes jokaisessa tehtäväosiossa ja suoriutuminen oli näissä osioissa keskivertoa parempaa. Vähennyslaskuissa ilman kymmenylitystä oppilas B:n suoriutuminen oli alle kontrolliryhmän keskiarvon. Osaaminen lukujono- ja lukusuoratehtävissä ja desimaalilukujen kertomisessa luvuilla 2 ja 10 olivat kontrolliryhmän osaamistasolla jo ennen interventiota.

Näyttäisi siltä, että interventiolla oli positiivisia vaikutuksia oppilaiden desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen. Toinen oppilaista saavutti myös kontrolliryhmän osaamistason. Intervention vaikuttavuuden arvioinnissa ja tulosten luotettavuusarvioinnissa käytettiin kontrolliryhmää. Tutkittavien oppilaiden osaamistasoa pystyttiin vertaamaan kontrolliryhmään niin alku- kuin loppumittauksessakin. Ei voida kuitenkaan varmuudella sanoa, olisiko oppilaiden osaaminen kehittynyt samalla tavalla, jos he olisivat osallistuneet vain oman luokan matematiikan tunneille. Aiemmista tutkimusta kuitenkin tiedetään, että ne oppilaat, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa, hyötyvät pienemmissä ryhmissä tapahtuvasta opetuksesta (Bryant ym., 2014). Huomioitavaa on se, että myös kontrolliryhmän osaamistaso parani opetusjakson aikana kokonaispisteiden keskiarvon ollessa alkumittauksessa 32,4 (*kh* = 3,05) ja loppumittauksessa 33,3 (*kh* = 2,77).

Oppilaiden osaamisen kehittymiseen on voinut vaikuttaa moni tekijä. Oppilaille suunniteltu interventiojakso perustui tutkimuksissa aiemmin tehokkaiksi todettuihin opetusmenetelmiin kuten eksplisiittiseen opetukseen (Fuchs ym., 2008) ja havainnollistamisvälineiden käyttöön (Gersten ym., 2009), mikä on voinut tukea oppilaiden desimaalilukujen oppimista. Interventiotuntien aikana käytettiin paljon kymmenjärjestelmävälineitä havainnollistamaan desimaalilukuja ja niillä tehtäviä laskutoimituksia. Tiedetään, että havainnollistavien välineiden käyttö opetuksessa tukee matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä ja laskutoimitusten oppimista (Mononen ym., 2017). Interventiotunneilla oppilaat pääsivät itse käyttämään ja hyödyntämään havainnollistamisvälineitä, minkä tiedetään tukevan oppilaiden ymmärrystä matemaattisista periaatteista (Witzel ym., 2003).

Interventiojakso ei toteutunut täysin suunnitelmien mukaisesti. Tuloksia tarkasteltaessa täytyy ottaa huomioon, että oppilaiden interventiotunnit jäivät vähemmäksi, mitä alun perin oli suunniteltu. Tiedetään, että intervention vaikuttavuudessa merkittävä tekijä on intervention kesto ja pituus (Jitendra ym., 2018). Voidaan siis pohtia, olisiko intervention vaikuttavuus ollut suurempi, jos interventiotuntien määrä olisi toteutunut täsmälleen suunnitelman mukaisesti. Interventiotuntien poisjääminen vaikutti myös siihen, miten kauan tiettyä aihealuetta pystyttiin käsittelemään ja tästä syystä esimerkiksi tuntien sisällöt muuttuivat aiemmin suunnitellusta. Vaikka interventiojakso ei toteutunut täysin suunnitellusti, tarjoaa tutkimus mielestäni merkityksellistä tietoa interventioiden toteuttamisesta luonnollisessa ympäristössä eli koulussa. Kirjallisuudessa onkin peräänkuulutettu tukikeinojen vaikuttavuuden ja soveltuvuuden tutkimista aidoissa oppimisympäristöissä (ks. Parrila ym., 2019).

Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Tutkimuksen mittarin kyky mitata niitä asioita, joita halutaankin mitata, vaikuttaa tutkimuksen pätevyyteen (Vilkka, 2021). Lisäksi käytetyn mittarin luotettavuus vaikuttaa suoraan koko tutkimuksen luotettavuuteen (Metsämuuronen, 2011, s. 74). Tutkimuksen mittarina käytettiin tutkimuksen toteuttajan itse tekemää desimaalikartoitusta. Tehtävät perustuivat pitkälti KYMPPI-kartoituksen tehtävätyyppeihin, joka on kymmenjärjestelmätaitoja mittaava arviointiväline. Tiedetään, että desimaaliluvut ovat osa kymmenjärjestelmää ja desimaalilukujen hallinta perustuu pitkälti kymmenjärjestelmätaitoihin (Ikäheimo, 2012). Tehtävät valittiin siten, että niillä olisi teoreettista perustaa. Kartoitukseen pyrittiin valitsemaan sellaisia tehtäviä, jotka mittaisivat oppilaiden ymmärrystä desimaaliluvuista ja osaamista perustaidoissa desimaaliluvuilla.

Mittarin luotettavuuteen vaikuttaa se, ettei käytetty mittari ollut standardoitu. Mittauskerroilla käytetyt mittarit olivat pääpiirteittäin samat mutta toisella mittauskerralla tehtävien lukuja oli hieman muutettu. Tällä pyrittiin välttämään tehtävien oppimista. Toisaalta lukujen muuttaminen on voinut vaikuttaa kartoituksen koettuun vaikeusasteeseen, vaikkakin tehtävätyypit pysyivät samana molemmilla mittauskerroilla. Reliabiliteettkertoimella mitataan mittauksen toistettavuutta (Metsämuuronen, 2011, s. 75). Metsämuurosen (2011, s. 76) mukaan Cronbachin alfa kertoo mittarin sisäisestä konsistenssista eli siitä, mittaavatko kaikki mittarin osiot samaa asiaa. Tutkimuksen mittarin Cronbachin alfa oli ensimmäisellä mittauskerralla

0.838 ja toisella mittauskerralla 0.736. Molemmat arvot ovat hyväksytyn raja-arvon (> 0.70) yläpuolella. Nämä reliabiliteettiluvut ovat kuitenkin vain suuntaa antavia, sillä tutkimusjoukko on verrattain pieni.

Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys perustuu siihen, että tutkimuksessa noudatetaan hyviä tieteellisiä käytäntöjä. Tutkimuksen luotettavuutta on pyritty lisäämään kuvaamalla selkeästi tutkimuksen toteutus ja kulku. Lisäksi myös interventiojakson toteutus on kuvattu tutkimuksessa avoimesti. Kun tutkimuksen tuloksia julkaistaan, täytyy sen olla avointa ja vastuullista (Tutkimuseettinen neuvottelukunta, 2012). Huomioitava on kuitenkin se, että tutkimusjoukko oli suhteellisen pieni, eikä esimerkiksi kontrolliryhmän koko ollut niin suuri kuin toivottiin. Tämä vaikuttaa tutkimuksen luotettavuuteen. Lisäksi on huomioitava, että tutkimuksen kohteena oli kaksi tapausta, jolloin tulokset eivät ole yleistettävissä.

Desimaalikartoitusten tulokset tarkistettiin kahdesti ja aineiston analyysissä tietojen oikeellisuus varmistettiin myös kerran. Tarkistettaessa virheitä ilmeni yksi desimaalikartoituksen tuloksissa. Analyysivaiheessa on kuitenkin voinut käydä virheitä, mutta aineiston analyysi kuvattiin mahdollisimman tarkasti, jolloin sen luotettavuutta on mahdollista arvioida.

Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (2012) mukaan ennen tutkimuksen aloitusta, täytyy tutkimukselle hakea tarvittavat tutkimusluvat. Tähän tutkimukseen haettiin asianmukainen tutkimuslupa tutkimuskoulun rehtorilta, joka myönnettiin. Tutkimukseen osallistuvien oppilaiden huoltajilta pyydettiin kirjallinen lupa osallistua tutkimukseen. Oppilaiden tekemät kartoitukset säilytettiin tutkimuskoululla lukollisessa kaapissa, jolloin niihin ei päässyt käsiksi kukaan ulkopuolinen. Kartoitukset tuhotaan asianmukaisella tavalla, kun tutkimus valmistuu. Interventiotuntien raportointi toteutettiin myös nimettömänä ja raportit ovat tutkimuksen toteuttajan tietokoneella suojattuna salasanan taakse. Osallistujien anonymiteetti on suojattu käyttämällä aineistossa koodattuja tunnisteita. Tutkimuksessa ei myöskään mainita tutkimuskoulun nimeä tai kaupunkia, jossa koulu sijaitsee.

7 Johtopäätökset

Näyttäisi siltä, että suunnitellulla desimaalilukuihin kohdistuvalla interventiolla voidaan vaikuttaa positiivisesti oppilaiden desimaalilukujen hallintaan ja osaamiseen. On kuitenkin vaikea arvioida, kuinka voimakkaasti interventio vaikuttaa oppilaiden osaamiseen verrattuna siihen, jos he olisivat tavanomaisessa opetuksessa. Interventiotutkimusta tulisi tehdä vielä enemmän liittyen oppimisen haasteisiin matematiikassa, jotta saataisiin lisää tietoa siitä, millaiset interventiot ovat toimivia ja kuinka suuri niiden vaikuttavuus on.

Tämä tutkimus tarjoaa tietoa siitä, miten yläkoulun puolella on mahdollista toteuttaa interventio liittyen siihen aihealueeseen, jota oppilaat sillä hetkellä käyvät läpi. Tuen tarve arvioitiin ennakoivasti ennen kuin aihealueen opetus alkoi. Näin pystyttiin havaitsemaan joukosta ne, jotka todennäköisimmin tarvitsevat tukea oppimisessaan ennen kuin itse opetus alkoi. Lisäksi tämä tutkimus tarjoaa tietoa siitä, miten desimaalilukuja voisi mahdollisesti opettaa. Esimerkiksi välineiden hyödyntäminen siten, että myös oppilaat pääsevät niitä käyttämään, oli interventiotunneilla useasti käytössä. Tutkimuksen tavoitteena oli tuoda käytännön opetustyöhön mahdollisesti toimivia tuen keinoja. Lisäksi tämä tutkimus toimii vastaaville tutkimuksille pilottitutkimuksena ja esimerkkinä kohdennetusta erityispedagogisesta tuesta, jota voidaan suunnitella ja toteuttaa koulussa yleisopetuksen yhteydessä.

Jatkossa olisi mielenkiintoista jatkaa interventiotutkimusta liittyen kymmenjärjestelmätaitoihin. Desimaaliluvutkin ovat osa kymmenjärjestelmää, joten voisi olla hyödyllistä tutkia, miten oppilaiden kymmenjärjestelmätaitoja voitaisiin parantaa. Kymmenjärjestelmätaidot ovat perustana monelle muulle matematiikan taidolle, joten tällaisesta tutkimuksesta saattaisi olla paljon hyötyä. Interventioiden toteuttamista kouluympäristössä voisi tutkia vielä lisää, sillä se saattaisi tarjota kentän työhön käytännön työvälineitä ja toimivia tukikeinoja. Esimerkiksi voitaisiin tutkia, miten yläkoulussa pystyttäisiin toteuttamaan interventio koskien kymmenjärjestelmätaitoja, sillä yläkoulun puolella näitä taitoja ei enää erikseen käydä läpi. Onnistuisiko koulussa siis kohdentaa interventio varhaisempiin taitoihin samalla, kun matematiikassa käydään jo vaikeampia aihekokonaisuuksia läpi.

Lähteet

Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. NMI Bulletin, 18:4, 63–74.

Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators, European Early Childhood Education Research Journal. 24:5, 684─704. https://doi.org/10.1080/1350293X.2014.996424

Aunola, K. Leskinen, E., Lerkkanen, M-K. & Nurmi, J-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. Journal of Educational Psychology, 96:4, 699–713. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699

Aunola, K. Nurmi, J-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 54–68.

Björn, P., Aro, M. & Koponen, T. (2018). Matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimusperustainen tuki. J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 54–68.

Bryant, B. R., Bryant, D. P., Portfield, J., Dennis, M. S., Falcomata, T., Valentine, C., Brewer, C. & Bell, K. (2016). The effects of a tier 3 intervention on the mathematics performance of second grade students with severe mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 49:2, 176–188. https://doi.org/10.1177/0022219414538516

Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerdt, F. & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. British Journal of Educational Psychology, 82, 64─81. https://doi.org/10.1348/2044-8279.002002

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., & Fletcher, J. M. (2008). Intensive Intervention for Students with Mathematics Disabilities: Seven Principles of Effective Practice. Learning Disability Quarterly, 31:2, 79─92. https://doi.org/10.2307/20528819

Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics, 33, 250─263 https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e318209edef

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Caven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. Child Development, 78:4, 1343–1359. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x

Hakkarainen, A. (2017). Matematiikan ja lukemisen vaikeuksien yhteys toisen asteen koulutuspolkuun ja jatko-opintoihin tai työelämään sijoittumiseen. eEriKa: erityispedagoginen tutkimus- ja menetelmätieto, 2, 25–30.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D. & Dick, J. (2001). Performance Across Different Areas of Mathematical Cognition in Children With Learning Difficulties. *Journal of educational psychology,* 93(3), 615-626. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.615

Hannula, M. & Lepola, J. (2006). Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä? Teoksessa J. Lepola, & M. Hannula (toim.), *Kohti koulua – kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys.* Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos, 129–153.

Haylock, D. & Cockburn, A. (2008). *Understanding Mathematics for Young Children. A guide for foundation stage and lower primary teachers*. Sage.

Ikäheimo, H. (2012). *KYMPPI-kirja: Matematiikan osaamisen perusta vahvaksi 10-järjestelmällä.* Oy Opperi Ab.

Ikäheimo, H. (2015). Kymppi-kartoitus 2. Teoksessa *Kymppi-kartoitus. 10-järjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnan kartoitus sekä ohjeet korjaavaa opetusta varten.* ELLI Early Learning Oy. K-print

Ikäheimo, H. (2021). *Matematiikan osaaminen vahvaksi – Iloa opetukseen ja oppimiseen.* ELLI Early Learning.

Jitendra, A. K., Lein, A. E., Im, S., Alghamdi, A. A., Hefte, S. B. & Mouanoutoua, J. (2018). Mathematical Interventions for Secondary Students With Learning Disabilities and Mathematical Difficulties: A Meta-Analysis. *Exceptional Children* 84(2), 177–196. https://doi.org/10.1177/0014402917737467

Koponen, T. (2012). Peruslaskutaito matematiikan kivijalka. NMI-Bulletin, 22, 59–62.

Koponen, T., Salminen, J. & Sorvo, R. (2019). Matematiikan perustaitojen oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Niilo Mäki Instituutti, 324–349.

Korhonen, H. (2013). Kymmenjärjestelmä – matematiikan osaamisen kulmakivi. Dimensio 77 (2), 38–40.

Korhonen J., Hakkarainen, A., Holopainen, L., Linnanmäki, K., Savolainen, H. & Taipale, A. (2018). Matematiikan vaikeudet ja nuorten koulutuspolut. Teoksessa J. Joutsenlahti, H.

Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 258–275.

Kroesbergen, E., Van Luit, J.E.H. & Maas, C. (2004). Effectiveness of Explicit and Constructivist Mathematics Instruction for Low-Achieving Students in the Netherlands. The Elementary School Journal, 104:3, 176─188. https://doi.org/10.1086/499751

Laine, M., Bamberg, J. & Jokinen, P. (2015). Tapaustutkimuksen taito (3. painos.). Gaudeamus.

Lawton, F. (2014). Number: number and place value. Teoksessa A. Hansen (toim.) *Children´s errors in Mathematics*. Sage, 21–58.

Lindholm, P., Loukusa, S. & Paavola-Ruotsalainen, L. (2016). Puheen, kielen, motoriikan ja oppimiskyvyn kehityshäiriöt. Teoksessa K. Kumpulainen, E. Aronen, H. Ebeling, E. Laukkanen, M. Marttunen, K. Puura & A. Sourander (toim.), Lastenpsykiatria ja nuorisopsykiatria. Kustannus Oy Duodecim, 203–216.

Liu, R.-D., Ding, Y., Zong, M. and Zhang, D. (2014), Concept Development of Decimals. Sch Sci Math, 114: 326-338. https://doi.org/10.1111/ssm.12085

Loehr, A. M. & Rittle-Johnson, B. (2017). Putting the "th" in Tenths: Providing Place-Value Labels Helps Reveal the Structure of Our Base-10 Numeral System. Journal of cognition and development, 18(2), 226-245. https://doi.org/10.1080/15248372.2016.1243118

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? Developmental review, 38, 201−221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Makkonen, K., Thuneberg, H., Jahnukainen, M. & Hotulainen, R. (2019). Yhteisopettajuus ja joustavat oppimisryhmät yläkoulun matematiikan opetuksen tukena. Ainedidaktiikka, 3(1), 2–20. https://doi.org/10.23988/ad.71163

Malaty, G. (2003). Johdatus matematiikan rakenteeseen. Opetushallitus.

Malin, A., Sulkunen, S., & Laine, K. (2013). PIAAC 2012. Kansainvälisen aikuistutkimuksen ensituloksia. (Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja No. 19). Opetus- ja kulttuuriministeriö.

Merkley, R. & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. Current Opinion in Behavioral Sciences, 10, 14─20. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.006

Metsämuuronen, J. (2011). Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä: Tutkijalaitos (4. korjattu laitos.). International Methelp.

Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. (2013). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. NMI Bulletin, 23:4, 12–25.

Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. PS-kustannus.

Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Määräykset ja ohjeet 2014:96.

Parrila, R., Gadsden, D. & Aro, M. (2019). Näyttöön perustuva tuki oppimisen vaikeuksissa. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet.* Niilo Mäki Instituutti. 66–76.

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. British Journal of Educational Psychology, 79, 483–500. https://doi.org/10.1348/000709908X398106

Räsänen, P. (2012). Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. Duodecim: lääketieteellinen aikakauskirja, 128:11, 1168–1177.

Salminen, J. (2015). Response to computer-assisted intervention in children most at risk for mathematics difficulties. Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 543. Jyväkylän yliopisto.

Shalev, R. S., Manor, O., & Gross-Tsur, V. (2005). Developmental dyscalculia: A prospective six-year follow-up. Developmental Medicine & Child Neurology, 47(2), 121–125. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2005.tb01100.x

Stakes. (1995). Tautiluokitus ICD-10. Sosiaali- ja terveysalan tutkimus- ja kehittämiskeskus 1995.

Thipkong, S. & Davis, E. J. (1991). Preservice Elementary Teachers' Misconceptions in Interpreting and Applying Decimals. School science and mathematics, 91(3), 93-99. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1991.tb12056.x

Tuomi, J & Sarajärvi, A. (2018). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tutkimuseettinen neuvottelukunta. (2012). Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. Saatavilla: https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf

Ubuz, B. & Yayan, B. (2010). Primary teachers' subject matter knowledge: Decimals. International journal of mathematical education in science and technology, 41(6), 787-804. https://doi.org/10.1080/00207391003777871

Van de Walle, J. A., Karp, K. & Bay-Williams, J. M. (2014). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (Eighth edition.). Pearson Education.

Van de Walle, J. A., Karp, K. & Bay-Williams, J. M. (2020). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (Tenth edition. Global edition.). Pearson.

Vilkka, H. (2021). Tutki ja kehitä (5. uud. p.). PS-kustannus.

Vilkka, H., Saarela, M. & Eskola, J. (2018). Riittääkö yksi?: Tapaustutkimus kuvaajana ja selittäjänä. Teoksessa R. Valli & E. Aarnos (toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin: 1, Metodin valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle* (5., uudistettu painos.). PS-kustannus.

Witzel, B. S., Mercer, C. D. & Miller, M. D. (2003). Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties: An Investigation of an Explicit Instruction Model. Learning disabilities research and practice, 18(2), 121–131. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00068

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. Nature (London), 358(6389), 749-750. https://doi.org/10.1038/358749a0

Liite 1

Desimaaliluvut

Nimi:_____________________________________ Luokka:_______

Kellonaika___________ kun aloitat. Pvm._________

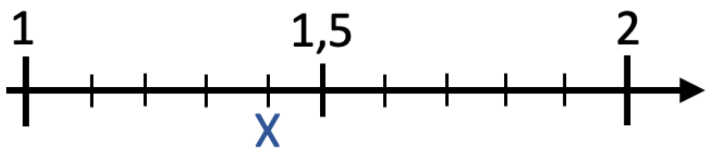
1. Ympyröi vierekkäisistä luvuista suurempi.			**___/6p.**
a.	4,04	4,3	
b.	1,9	1,89	
c.	0,50	0,125	
d.	2,39	2,4	
e.	1,175	1,60	
f.	8,08	8,3	

2. Jatka lukujonoja ___/2p.

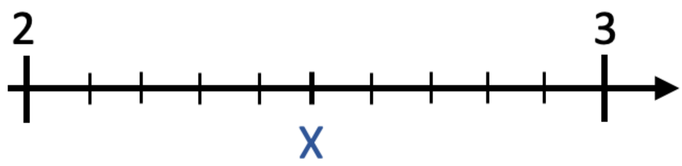
a. 2,2 , 2,4 , 2,6 , _______ , ________ , ________ , _________

b. 1,06 , 1,07 , 1,08 , ________ , _________ , _________ , ________

3. Merkitse, mitä lukua X merkitsee lukusuoralla. ___/2p.



X =________



X = ________

4. Laske. ___/8p.

0,3 + 1,5 =	2,27 – 0,2 =
2,4 + 0,3 =	0,69 – 0,06 =
1,36 + 0,2 =	1,7 – 0,4 =
1,32 + 0,4 =	3,54 – 0,02 =

5. Laske.	**___/10p.**
0,6 + 0,8 =	2 – 0,4 =
0,06 + 0,09 =	0,2 – 0,02 =
3,3 + 0,73 =	0,16 – 0,09 =
1,5 + 0,7 =	3 – 0,03 =
2,06 + 0,07 =	10,5 – 5,05 =

6. Laske.	___/8p.
$2 \cdot 0{,}4 =$	$4{,}6 : 2 =$
$10 \cdot 0{,}3 =$	$0{,}5 : 10 =$
$2 \cdot 0{,}7 =$	$1{,}8 : 2 =$
$10 \cdot 0{,}6 =$	$0{,}7 : 10 =$

Kellonaika __________ kun lopetat.

____/36p.