

# Ikäjakaantuneen kasvumallin optimaalisesta kontrollista

FM-tutkielma  
Valteri Heikkilä  
Matemaattisten tieteiden yksikkö  
Oulun yliopisto  
Kevät 2022

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Työssä käytettyjä määritelmiä</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Ikäjakaantuneeseen kasvumalliin liittyvää teoriaa</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Ikäjakautuneen populaation kontrolli</b>	<b>13</b>
4.1	Optimaalisen kontrollin olemassaolo . . . . .	14
4.2	Maksimiperiaate . . . . .	15
4.3	Numeerinen ratkaisu . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>22</b>
	<b>Lähdeluettelo</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>Koodit</b>	<b>24</b>
A.1	Algoritmi 4.1 . . . . .	24

# 1 Johdanto

Kautta aikain, ihmiset ovat pyrkineet optimoimaan toimintaansa [3]. Oli kyse sitten kylvämisestä, rakentamisesta tai vaikka sodankäynnistä. Alkuun menetelmät eivät ole olleet hyvin tieteellisiä, turvautuen uskomuksiin, rituaaleihin tai nyrkkisääntöihin. Kuitenkin matemaattisen ymmärryksen kasvaessa, matematiikkaa alettiin käyttämään optimoinnin rakentamiseen. Nykypäivänä optimointi on hyvin tärkeässä asemassa teollisuudessa, fysiikassa, markkinoilla, lääketieteessä, matematiikassa ynnä muualla. Niinpä on hyödyllistä, että on olemassa matemaattisia metodeja ja malleja, mitä kautta optimointia voidaan toteuttaa.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan ikäjakaantuneen kasvumallin optimaalista kontrollia: mikä se on, sen merkitys ja miten se määritellään. Rakenteeltaan työ etenee seuraavasti: toisessa kappaleessa käydään läpi työn kannalta tärkeitä määritelmiä, kolmannessa kappaleessa esitellään ikäjakaantuneeseen kasvumalliin liittyvää teoriaa ja neljännessä kappaleessa käydään läpi ikäjakautuneen populaation kontrollia. Pääasiallisena lähteenä toimi Sebastian Aničan, Viorel Arnăuțun sekä Vincenzo Capasson *An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics* [2].

Tietokoneiden synnyn ja kehityksen myötä on otettu suuria harppauksia eteenpäin myös optimoinnin saralla. Optimointitekniikat ovat kehittyneet, ja tietokoneiden tehokkuuden kasvaessa on ollut mahdollista optimoida ongelmia, jotka vielä jokin aika sitten tuntuivat mahdottomilta.

Matematiikassa, optimointi on käytännön tasolla lähinnä maksimointia ja minimointia. Tehtaassa voidaan haluta maksimoida tuottavuutta tai minimoida kustannuksia, maanviljelyssä maksimoida satoa, ja lääketieteessä minimoida annosteltavan lääkkeen määrää, kuitenkin saavuttaen tavoiteltava tulos. Näitä varten kehitellään erilaisia tekniikoita, metodeja, toimintamenetelmiä ja algoritmeja, joilla voidaan löytää optimaalinen ratkaisu.

Optimointia voi lähestyä erilaisilla metodein. On analyyttisiä metodeja, graafisia metodeja, kokeellisia metodeja ja numeerisia metodeja. Näistä numeeriset menetelmät on todettu tärkeimmiksi, ja niitä hyödynnetään tässäkin työssä. Ratkaisua lähdetään etsimään alun arvioinnista, minkä perusteella rakennetaan iteratiivisesti aina parempia ja parempia ratkaisuja. Prosessi päättyy, kun päästään ennalta määriteltyjen raja-arvojen sisälle. Numeerisilla metodeilla voidaan ratkaista hyvinkin kompleksisia optimoinnin ongelmia, joita ei esimerkiksi analyyttisesti voitaisi ratkaista. Lisäksi numeeristen metodien muodon vuoksi ne voidaan helposti muuntaa ohjelmakoodiksi jonka tietokone voi sitten käsitellä. Tätä käsittelyä varten muun muassa seuraava työkalu on hyödyllinen.

Numeerisen ratkaisun mallintamiseen on työssä käytetty MATLAB:ia.

MATLAB (MATrix LABoratory) on MathWorks:n kehittämä ohjelmointityökalu, jolla voidaan muun muassa tehokkaasti mallintaa matemaattisia ongelmia ja tuottaa helposti luettavia kuvajia [1]. Graafinen käyttöliittymä ja MATLAB:in omat valmiit funktiot tekevät käytöstä varsin helppoa. Jos on kokemusta ohjelmoinnista millään kielellä, on MATLAB:ista varsin yksinkertaista ottaa kiinni alkuun. Työkalusta on toki hyötyä hyvinkin vaativissa tarkoituksissa, mutta tämän työn kannalta pärjää hyvin perusasioilla. MATLAB:ia hyödyntävät algoritmit on esitelty tekstissä, ja algoritmia vastaava MATLAB-koodi löytyy liitteistä.

## 2 Työssä käytettyjä määritelmiä

**Määritelmä 2.1.** Jos ominaisuus  $P$  pätee koko joukossa  $A$ , lukuun ottamatta sen nollapituista osajoukkoa  $N \subset A$ , ominaisuus  $P$  pätee *melkein kaikkialla* (m.k.) joukossa  $A$  [8].

**Määritelmä 2.2.** Vektoriavaruuden  $V$  sanotaan olevan normitettu, mikäli  $V$ :lle on funktio (kutsutaan *normiksi*, merkitään  $\|x\|$ ,  $x \in V$ ), joka toteuttaa

- 1)  $\|\bar{0}\| = 0$  ja  $\|x\| > 0$  jos  $x \neq \bar{0}$ ,
- 2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
- 3)  $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$  mille tahansa  $t \in \mathbb{R}$ .

Banachin avaruus [4]  $(V, \|\cdot\|)$  on täydellinen normitettu avaruus. Täydellisyys tulee ehdosta, että mille tahansa jonolle  $(x_n)$  pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

**Määritelmä 2.3.** Olkoon  $A \subset \mathbb{R}$  rajoitettu joukko ja  $\mathcal{U}(A)$  on kokoelma kaikista numeroituvista avoimien välien yhdisteistä, jotka kattavat joukon  $A$ . Tällöin Lebesguen ulkomitta [5] määritellään seuraavasti

$$\mu^*(A) = \inf_{\{U_n\} \in \mathcal{U}(A)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{len}(U_n) \right\},$$

missä  $\text{len}(U_n)$  on välin  $U_n$  pituus. Jotkin joukot  $A$  toteuttavat myös mille tahansa  $B \subset \mathbb{R}$

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

Tällaisille joukoille  $A$  Lebesgue-mitta määritetään niiden Lebesgue-ulkomittana  $\mu(A) = \mu^*(A)$ . Tutkielman kannalta oleellinen tieto on myös, että numeroituvien, reaaliluvuista koostuvien joukkojen Lebesgue-mitta on nolla.

Tutkielmassa suuressa osassa on  $L^p$ -avaruudet. Käydään niistä läpi tämän tutkielman kannalta oleelliset asiat

**Määritelmä 2.4.**  $L^p$ -avaruudet ovat funktio-avaruuksia jotka määritellään äärellisulotteisten vektoriavaruuksien  $p$ -normien avulla.  $p$ -normi (myös  $L^p$ -normi) on siis

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p},$$

kun  $1 \leq p < \infty$ . Jos taas  $p = \infty$ ,  $p$ -normi on

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Olkon  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $L^p$ -avaruuteen kuuluvat funktiot määritellään seuraavasti välillä  $0 < p < \infty$  [6]

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Tällaisia funktioita sanotaan  $p$ -summautuviksi funktioiksi, kun  $\|f\|_p < \infty$ . Kun  $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \inf\{B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0\},$$

näitä kutsutaan myös oleellisesti rajoitetuiksi funktioiksi. Näissä  $\mu(x)$  on Määritelmän 2.3 Lebesgue-mitta. Tutkielmassa vastaan tulee seuraavia  $L^p$ -avaruuksia:

- $L^p(\Omega)$ : kaikkien  $\Omega$ :ssa  $p$ -summautuvien funktioiden avaruus
- $L^p_{loc}([0, A] \times [0, T])$ : kaikkien funktioiden  $f : [0, A] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  joukko, jotka kuuluvat  $L^p((0, \tilde{A}) \times (0, T))$ , mille tahansa  $\tilde{A} \in (0, A)$
- $L^\infty(0, T; X)$ : kaikkien oleellisesti rajoitettujen funktioiden  $f : (0, T) \rightarrow X$  joukko.  $X$  on Määritelmän 2.2 Banachin avaruus.

**Määritelmä 2.5.** Sarjan  $(x_n) \in H$  sanotaan suppenevan heikosti kohti  $x$ :ää, jos

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

millä tahansa  $y \in H$ . Tässä  $H$  on Hilbertin avaruus [7], ja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on sisätulo. Yllä olevasta voidaan käyttää lyhennettä (käytetään tässäkin tutkielmassa)

$$x_n \rightarrow x.$$

**Määritelmä 2.6.** Funktion  $f$  positiivinen osa määritellään seuraavasti

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

### 3 Ikäjakaantuneeseen kasvumalliin liittyvää teoriaa

Tästä eteenpäin  $A, T \in (0, +\infty)$ ,  $Q_T = (0, A) \times (0, T)$  ja  $Dy$  on  $y$ :n suunnattu derivaatta suuntaan  $(1, 1)$ , eli

$$Dy(a, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(a+h, t+h) - y(a, t)}{h}.$$

Käsitellään yksittäisen biologisen lajin populaatiota, jossa  $y(a, t)$  merkitsee yksilömäärän tiheyttä iällä  $a \in [0, A]$  ajan hetkellä  $t \in [0, T]$ . Oletetaan  $y$  tarpeeksi sileäksi.

Olkoon  $\mu(a, t)$  yksilöiden kuolleisuusaste iällä  $a \in [0, A]$  ajan hetkellä  $t \in [0, T]$ . Tämä antaa suhteellisen osuuden menehtyvistä yksilöistä, ja riippuu iästä  $a$  ja ajan hetkestä  $t$ . Tasapainolain mukaan aikavälillä  $[t, t+dt]$  menehtyvien yksilöiden (ikä  $a$  ajan hetkellä  $t$ ) määrä on

$$y(a, t) - y(a+dt, t+dt) = \mu(a, t)y(a, t)dt.$$

Kun tämä jaetaan  $dt$ :lla, saadaan

$$Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = 0.$$

Jos yksilöitä saapuu populaatioon jostain ulkopuolelta, populaatiota kuvaa yhtälö

$$Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t), \quad (a, t) \in Q_T. \quad (1)$$

$A$  on siis maksimi-ikä, minkä yksilö voi saavuttaa, ja  $f(a, t)$  on iältään  $a$  ajan hetkellä  $t$  sisääntulevan populaation tiheys.

Syntymisprosessia voidaan kuvata uudistumislailalla

$$y(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

missä  $y(0, t)$  on vastasyntyneiden määrä ajan hetkellä  $t$  ja  $\beta(a, t)$  on hedelmällisyysaste, mikä antaa suhteellisen osan  $a$  ikäisistä vastasyntyneiden vanhemmista ajan hetkellä  $t$ .

Lähtökohta populaatiojakaumalle ajanhetkellä  $t = 0$  on annettu seuraavasti

$$y(a, 0) = y_0(a), \quad a \in (0, A), \quad (3)$$

missä  $y_0$  on tunnettu funktio.

Reaalisissa tilanteissa on todettu, että mille tahansa määrätyle  $t \geq 0$ , hedelmällisyys- ja kuolleisuusasteet noudattavat yhtälöitä  $\beta(a) = 10a^2(A - a)(1 + \sin((\pi/A)a))$  ja  $\mu(a) = \exp(-a/(A - a))$ , missä  $A = 1$ . Huomaa, että  $A$  on skaalattu 1:ksi.

Yhtälöt (1), (2) ja (3) muodostavat näin yhtälöryhmän

$$\begin{cases} Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da, & t \in (0, T) \\ y(a, 0) = y_0(a), & a \in (0, A). \end{cases} \quad (4)$$

Seuraavat hypoteesit  $\beta$ :lle,  $\mu$ :lle ja  $y_0$ :lle seuraavat käytännön havainnoista biologisissa väestöissä

- (H1)  $\beta \in L^\infty(Q_T)$ ,  $\beta(a, t) \geq 0$  m.k.  $(a, t) \in Q_T$
- (H2)  $\mu \in L^1_{loc}([0, A] \times [0, T])$ ,  $\mu(a, t) \geq 0$  m.k.  $(a, t) \in Q_T$
- (H3)  $y_0 \in L^1(0, A)$ ,  $y_0 \geq 0$  m.k.  $a \in (0, A)$   
 $f \in L^1(Q_T)$ ,  $f(a, t) \geq 0$  m.k.  $(a, t) \in Q_T$ .

**Lause 3.1.** *Yhtälöryhmällä (4) on yksikäsitteinen ratkaisu. Tämä ratkaisu on ei-negatiivinen.*

*Todistus.* Olkoon  $y$  yhtälöryhmän (4) ratkaisu. Ratkaisun määritelmän perusteella voidaan johtaa

$$\begin{aligned} y(a, t) = & \exp\left\{-\int_0^a \mu(s, t - a + s)ds\right\}b(t - a) \\ & + \int_0^a \exp\left\{-\int_s^a \mu(\tau, t - a + \tau)d\tau\right\}f(s, t - a + s)ds \end{aligned} \quad (5)$$

m.k. joukossa  $\{(a, t) \in Q_T; a < t\}$  ja

$$\begin{aligned} y(a, t) = & \exp\left\{-\int_0^t \mu(a - t + s, s)ds\right\}y_0(a - t) \\ & + \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \mu(a - t + \tau, \tau)d\tau\right\}f(a - t + s, s)ds \end{aligned} \quad (6)$$

m.k. joukossa  $\{(a, t) \in Q_T; a > t\}$ . Tässä siis

$$b(t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da \quad \text{m.k. } t \in (0, T). \quad (7)$$



Yhtälöstä (7) ja funktioiden  $\beta$  ja  $y$  ominaisuuksista voidaan päätellä, että  $b \in L^\infty(0, T)$ . Jos nyt oletetaan  $b \in L^\infty(0, T)$ , niin yhtälöiden (5) ja (6) antama  $y$  on yksikäsitteinen ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} Dz(a, t) + \mu(a, t)z(a, t) = f(a, t), & (a, t) \in Q_T \\ z(0, t) = b(t), & t \in (0, T) \\ z(a, 0) = y_0(a), & a \in (0, A). \end{cases} \quad (8)$$

Tässä yhtälöryhmän (8) ratkaisulla tarkoitetaan funktiota  $z \in L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , joka on aidosti jatkuva melkein kaikkia karakteristisia suoria pitkin, ja toteuttaa

$$\begin{cases} Dz(a, t) + \mu(a, t)z(a, t) = f(a, t) & \text{m.k. tasossa } Q_T \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} z(\varepsilon, t + \varepsilon) = b(t) & \text{m.k. } t \in (0, T) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} z(a + \varepsilon, \varepsilon) = y_0(a) & \text{m.k. } a \in (0, A) \end{cases}$$

Yhtälöryhmän (4) ratkaisu  $y$  toteuttaa yhtälöt (5) ja (6), missä  $b$  on (7). Näin voidaan johtaa

$$\begin{aligned} b(t) &= \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da \\ &= \int_0^t \beta(a, t)\exp\left\{-\int_0^a \mu(s, t - a + s)ds\right\}b(t - a)da \\ &\quad + \int_0^t \beta(a, t)\int_0^a \exp\left\{-\int_s^a \mu(\tau, t - a + \tau)d\tau\right\}f(s, t - a + s)ds da \\ &\quad + \int_t^A \beta(a, t)\exp\left\{-\int_0^t \mu(a - t + s, s)ds\right\}y_0(a, t)da \\ &\quad + \int_t^A \beta(a, t)\int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \mu(a - t + \tau, \tau)d\tau\right\}f(a - t + s, s)ds da, \end{aligned}$$

melkein kaikilla  $0 < t < \min\{T, A\}$ , ja

$$\begin{aligned} b(t) &= \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da \\ &= \int_0^A \beta(a, t)\exp\left\{-\int_0^a \mu(s, t - a + s)ds\right\}b(t - a)da \\ &\quad + \int_0^A \beta(a, t)\int_0^a \exp\left\{-\int_s^a \mu(\tau, t - a + \tau)d\tau\right\}f(s, t - a + s)ds da, \end{aligned}$$

melkein kaikilla  $\min\{T, A\} = A < t < T$  (jos  $A < T$ ).

Niinpä  $b$  toteuttaa seuraavan Volterran integraaliyhtälön [10]

$$b(t) = F(t) + \int_0^t K(t, t-s)b(s)ds \quad \text{m.k. } t \in (0, T) \quad (9)$$

(tunnetaan myös *uudistumisyyhtälönä*). Tässä

$$\begin{aligned} F(t) &:= \int_0^t \beta(a, t) \int_0^a \exp\left\{-\int_s^a \mu(\tau, t-a+\tau)d\tau\right\} f(s, t-a+s)ds da \\ &\quad + \int_t^A \beta(a, t) \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \mu(a-t+\tau, \tau)d\tau\right\} f(a-t+s, s)ds da \\ &\quad + \int_t^A \beta(a, t) \exp\left\{-\int_0^t \mu(a-t+s, s)ds\right\} y_0(a-t)da \end{aligned}$$

melkein kaikilla  $0 < t < \min\{T, A\}$ , ja

$$F(t) := \int_0^A \beta(a, t) \int_0^a \exp\left\{-\int_s^a \mu(\tau, t-a+\tau)d\tau\right\} f(s, t-a+s)ds da$$

melkein kaikilla  $\min\{T, A\} = A < t < T$  (jos  $A < T$ ), ja

$$K(t, a) := \begin{cases} \beta(a, t) \exp\left\{-\int_0^a \mu(s, t-a+s)ds\right\} & \text{m.k. } (a, t) \in Q_T, a < t, \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Hypoteesien avulla voidaan johtaa

$$\begin{cases} K \in L^\infty(Q_T), & K(t, a) \geq 0 & \text{m.k. } (a, t) \in Q_T \\ F \in L^\infty(0, T), & F(t) \geq 0 & \text{m.k. } t \in (0, T). \end{cases} \quad (10)$$

Todistetaan Banachin kiintopistelauseen [9] avulla, että uudistumisyyhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu  $b \in L^\infty(0, T)$ . Tätä varten käsitellään seuraavaa normia avaruudessa  $L^\infty(0, T)$ .

$$\|w\| = \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} (e^{-\gamma t} |w(t)|), \quad w \in L^\infty(0, T),$$

missä  $\gamma > 0$  on myöhemmin ilmenevä vakio; tämä normi on yhtäsuuri yleisen normin kanssa avaruudessa  $L^\infty(0, T)$ .

Tutkitaan operaattoria

$$\mathcal{F} : L^\infty(0, T) \rightarrow L^\infty(0, T),$$

jolla

$$(\mathcal{F}w)(t) = F(t) + \int_0^t K(t, t-s)w(s)ds \quad \text{m.k. } t \in (0, T).$$

Mille tahansa  $b_1, b_2 \in L^\infty(0, T)$ :

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{F}b_1)(t) - (\mathcal{F}b_2)(t)\| \\ &= \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} \left( e^{-\gamma t} \left| \int_0^t K(t, t-s)(b_1 - b_2)(s)ds \right| \right) \\ &\leq \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} \left( e^{-\gamma t} \|K\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^t e^{\gamma s} e^{-\gamma s} |(b_1 - b_2)(s)| ds \right) \\ &\leq \text{Ess sup}_{t \in (0, T)} \left( e^{-\gamma t} \|\beta\|_{L^\infty(Q_T)} \cdot \|b_1 - b_2\| \cdot \frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} \right). \end{aligned}$$

Niinpä mille tahansa  $\gamma > \|\beta\|_{L^\infty(Q_T)}$ ,  $\mathcal{F}$  on kontraktio avaruudessa  $(L^\infty(0, T), \|\cdot\|)$ . Banachin kiintopistelauseen avulla voidaan johtaa yksikäsitteisen ratkaisun  $b \in L^\infty(0, T)$  olemassaolo yhtälölle (9) ja  $b$  on jonon  $\{b_n\}$  raja-arvo avaruudessa  $(L^\infty(0, T), \|\cdot\|)$ , joka määritellään seuraavasti

$$\begin{aligned} b_0(t) &= F(t) & \text{m.k. } t \in (0, T), \\ b_{n+1}(t) &= F(t) + \int_0^t K(t, t-s)b_n(s)ds & \text{m.k. } t \in (0, T), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Yhtälön (10) perusteella voidaan päätellä, että  $b_n(t) \geq 0$  m.k.  $t \in (0, T)$  melkein kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Näin ollen yhtälön (9) yksikäsitteinen ratkaisu  $b$  on ei-negatiivinen välillä  $(0, T)$ .

Olkoon  $y$  yhtälöiden (5) ja (6) mukainen, missä  $b$  on yhtälön (9) yksikäsitteinen ratkaisu. Hypoteeseistä (H1)-(H3) ja yhtälöistä (5) ja (6) voidaan johtaa, että  $y(a, t) \geq 0$  m.k. tasossa  $Q_T$  ja että  $\mu y \in L^1(Q_T)$ .

Jälleen, yhtälöistä (5) ja (6) seuraa, että  $y$  on ratkaisu yhtälöryhmälle (4). Ratkaisu on yksikäsitteinen, koska yhtälön (9) ratkaisu  $b$  on yksikäsitteinen. Lisäksi ratkaisu on ei-negatiivinen, koska  $b$ ,  $y_0$  ja  $f$  ovat ei-negatiivisia.  $\square$

**Lause 3.2.** *Jos kuolleisuusaste toteuttaa*

$$(H4) \quad \int_0^A \mu(a, t - A + a)da = +\infty \quad \text{m.k. } t \in (0, T),$$

missä  $\mu$  on jatkettu nollassi alueella  $(0, A) \times (-\infty, 0)$ . Tällöin yhtälöryhmän (4) ratkaisu  $y$  toteuttaa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(A - \varepsilon, t - \varepsilon) = 0 \quad \text{m.k. } t \in (0, T),$$

eli  $y(A, t) = 0$  m.k.  $t \in (0, T)$ .

*Todistus.* Yhtälön (6) perusteella melkein kaikilla  $t \in (0, \min\{T, A\})$ , ja millä tahansa tarpeeksi pienellä  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} y(A - \varepsilon, t - \varepsilon) &= \exp\left\{-\int_0^{t-\varepsilon} \mu(A - t + s, s) ds\right\} y_0(A - t) \\ &\quad + \int_0^{t-\varepsilon} \exp\left\{-\int_s^{t-\varepsilon} \mu(A - t + \tau, \tau) d\tau\right\} f(A - t + s, s) ds \\ &\longrightarrow \exp\left\{-\int_0^t \mu(A - t + s, s) ds\right\} y_0(A - t) \\ &\quad + \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \mu(A - t + \tau, \tau) d\tau\right\} f(A - t + s, s) ds = 0, \end{aligned}$$

kun  $\varepsilon \rightarrow 0+$  johtuen hypoteesistä (H4).

Yhtälön (5) ja hypoteesin (H4) avulla voidaan johtaa, että melkein kaikilla  $t \in (A, T)$  (jos  $A < T$ ) ja millä tahansa tarpeeksi pienellä  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} y(A - \varepsilon, t - \varepsilon) &= \exp\left\{-\int_0^{A-\varepsilon} \mu(s, t - A + s) ds\right\} b(t - A) \\ &\quad + \int_0^{A-\varepsilon} \exp\left\{-\int_s^{A-\varepsilon} \mu(\tau, t - A + \tau) d\tau\right\} f(s, t - A + s) ds \\ &\longrightarrow \exp\left\{-\int_0^A \mu(s, t - A + s) ds\right\} b(t - A) \\ &\quad + \int_0^A \exp\left\{-\int_s^A \mu(\tau, t - A + \tau) d\tau\right\} f(s, t - A + s) ds = 0, \end{aligned}$$

kun  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . □

**Lause 3.3.** *Olkoon  $y$  ratkaisu yhtälöryhmälle (4)*

- (i) *Jos  $f(a, t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ , niin  $y(a, t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$*
- (ii) *Jos  $\beta_i, \mu_i, y_{0i}, f_i$  toteuttavat hypoteesit (H1)-(H3) ( $i \in \{1, 2\}$ ) ja*

$$\begin{aligned} \beta_1(a, t) &\geq \beta_2(a, t), & \mu_1(a, t) &\leq \mu_2(a, t) & \text{m.k. tasossa } Q_T \\ y_{01}(a) &\geq y_{02}(a) & & & \text{m.k. vlill } (0, A) \\ f_1(a, t) &\geq f_2(a, t) & & & \text{m.k. tasossa } Q_T \end{aligned}$$

*tällöin  $y^1(a, t) \geq y^2(a, t)$  m.k. tasossa  $Q_T$ , missä  $y^i$  on ratkaisu yhtälöryhmälle (4), joilla  $\beta := \beta_i, \mu := \mu_i, y_0 := y_{0i}, f := f_i, i \in \{1, 2\}$ .*

*Lisäksi, jos  $f_n \rightarrow f$  avaruudessa  $L^1(Q_T)$  ja  $f_n$  toteuttaa hypoteesin (H3), niin*

$$y_n \rightarrow y$$

*avaruudessa  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , missä  $y_n$  on yhtälöryhmän (4) ratkaisut, jotka vastaavat  $f := f_n$ .*

*Todistus.* [2]

□

**Seuraus 3.4.** *Olkoon  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jono reaalisessa Banachin avaruudessa  $X$  joka suppenee heikosti kohti  $x \in X$ . Tällöin on olemassa jono  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $y_n \in \text{supp}\{x_k; k \geq n + 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , s.e.  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee (vahvasti) kohti  $x$ .*

**Lemma 3.5.** *Seuraava suppeneminen pätee*

$$\frac{1}{\varepsilon}[y^{u^* + \varepsilon v} - y^{u^*}] \rightarrow z \text{ avaruudessa } L^\infty(0, T; L^1(0, A)), \text{ kun } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

*missä  $z$  on ratkaisu yhtälöryhmään*

$$\begin{cases} Dz(a, t) + \mu(a, t)z(a, t) = -vy^{u^*} - u^*z, & (a, t) \in Q_T \\ z(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)z(a, t)da, & t \in (0, T) \\ z(a, 0) = 0, & a \in (0, A). \end{cases} \quad (12)$$

## 4 Ikäjakautuneen populaation kontrolli

Optimoimisen tarkoituksena on yleensä minimoida tai maksimoida haluttuja muuttujia. Tätä minimointia ja maksimointia voidaan ohjata kontrollilla. Käytännön esimerkkinä optimoinnista ja kontrollista voidaan miettiä esimerkiksi kalastusta. Tarkoituksena on maksimoida kalasaaliin tuotto pitkällä aikavälillä. Jotta tuottoa saataisiin pitkällä aikavälillä, ei kaikkea kalaa voi kalastaa kerralla pois. Sen sijaan populaatiota täytyy pitää yllä, joko antamalla populaation kasvaa luonnollisesti tai tuomalla populaatiota systeemin ulkopuolelta. Jotta tuottoa kuitenkin saadaan, täytyy kalaa pyydystää jossain vaiheessa. Sitä, kuinka paljon kalaa pyydystetään, ohjataan kontrollilla. Tässä kappaleessa käytettävä kontrolli on ns. bang-bang-kontrolli. Tämä tarkoittaa esimerkin kannalta sitä, että riippuen ajan hetkestä ja kalan iästä, kalaa pyydystetään joko täydellä intensiteetillä, tai ei ollenkaan. Kalan ikä voi olla tärkeä tuoton maksimoinnin kannalta, jos tietyn ikäisestä kalasta saa parempaa tuottoa. Näin kontrollilla painotetaan näiden paremmin tuottavien kalojen pyydystämistä. Seuraavaksi kuitenkin tarkastellaan ikäjakaantuneen populaation kontrollia enemmän teoreettiselta puolelta, kuin käytännön esimerkkien kannalta.

Tässä kappaleessa tutkitaan seuraavanlaista ikäjakaantuneen populaation kontrolliongelmää

$$\text{Maksimoi } \int_0^T \int_0^A u(a, t) y^u(a, t) da dt, \quad (\text{IPK})$$

missä  $u \in K = \{w \in L^\infty(Q_T); 0 \leq w(a, t) \leq L \text{ m.k.joukossa } Q_T\}$  ja  $y^u$  on ratkaisu seuraavaan

$$\begin{cases} Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t) - u(a, t)y(a, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da, & t \in (0, T) \\ y(a, 0) = y_0(a), & a \in (0, A). \end{cases} \quad (13)$$

Tässä  $L > 0$ ,  $K$  on rajoitettujen kontrollien joukko. Funktio  $u \in K$  on kontrolli, joka kuvaa säädön tehoa. Funktiolla  $u$  on myös rooli kuolleisuusasteen lisänä. Integraali  $\int_0^T \int_0^A u(a, t)y^u(a, t)da dt$  kuvaa kokonaiskorjuuta. Tavoitteena on löytää kontrolli, joka antaa suurimman mahdollisen sadon. Kutsomme tätä optimaaliseksi kontrolliksi. Tehtävänä on ensin todistaa, että tällainen optimaalinen kontrolli on olemassa. Sitten tutkitaan, millä kontrollin arvolla Ongelma (IPK) saadaan maksimoitua. Näiden jälkeen voidaan alkaa rakentaa numeerista ratkaisua, joka voidaan sitten ohjelmoida MATLAB:in avulla.

Koska  $\mu := \mu + u$  toteuttaa (H2), voidaan päätellä että yhtälöryhmällä (13) on yksikäsitteinen ratkaisu  $y^u$ . Tämä ratkaisu on ei-negatiivinen.

## 4.1 Optimaalisen kontrollin olemassaolo

**Lause 4.1.** *Ongelmalla (IPK) on ainakin yksi optimaalinen kontrolli.*

*Todistus.* Määritellään

$$\Psi(u) = \int_0^T \int_0^A u(a, t) y^u(a, t) da dt, \quad u \in K$$

ja olkoon

$$d = \sup_{u \in K} \Psi(u)$$

Lauseen 3.3 avulla saadaan

$$0 \leq \Psi(u) \leq L \int_0^T \int_0^A y^0(a, t) da dt < +\infty$$

mille tahansa  $u \in K$  ja näin ollen  $d \in [0, +\infty)$ . Yhtälöryhmällä (13) on ratkaisu  $y^0$ , kun  $u = 0$ .

Olkoon  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset K$  jono kontrolleja jotka toteuttavat

$$d - \frac{1}{n} < \Psi(u_n) \leq d.$$

Lause 3.3 antaa myös

$$0 \leq y^{u_n}(a, t) \leq y^0(a, t) \quad \text{m.k. tasossa } Q_T$$

näin saadaan osajonolle (merkitään  $\{y^{u_n}\}$ )

$$y^{u_n} \longrightarrow y^* \quad \text{heikosti avaruudessa } L^2(Q_T).$$

Mazurin lemmän seurausta 3.4 käyttäen saamme jonon  $\{\tilde{y}_n\}$ , joka toteuttaa

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}, \quad \lambda_i^n \geq 0, \quad \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n = 1,$$

missä  $k_n \geq n + 1$  ja

$$\tilde{y}_n \rightarrow y^* \quad \text{avaruudessa } L^2(Q_T).$$

Kontrollit  $\tilde{u}_n$  määritellään seuraavasti

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a,t) u_i(a,t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a,t)}, & \text{jos } \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a,t) \neq 0, \\ 0 & \text{jos } \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a,t) = 0. \end{cases}$$

Kontrollit toteuttavat  $\tilde{u}_n \in K$  ja

$$\tilde{y}_n(a,t) = y^{\tilde{u}_n}(a,t) \quad \text{m.k. joukossa } Q_T.$$

Voidaan ottaa sellainen osajono (merkitään myös  $\{\tilde{u}_n\}$ ), että

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightarrow u^* & \text{heikosti avaruudessa } L^2(Q_T), \\ \Psi(\tilde{u}_n) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Psi(u_i) \rightarrow d & \text{kun } n \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

näin voidaan johtaa

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(\tilde{u}_n) = \int_0^T \int_0^A u^*(a,t) y^*(a,t) da dt. \quad (14)$$

Toisaalta heikko suppeneminen  $\tilde{u}_n \rightarrow u^*$  avaruudessa  $L^2(Q_T)$  tarkoittaa, että  $y^{\tilde{u}_n} \rightarrow y^{u^*}$  heikosti avaruudessa  $L^2(Q_T)$ , ja tämä johtaa tulokseen

$$y^*(a,t) = y^{u^*}(a,t) \quad \text{m.k. tasossa } Q_T.$$

Näin yhtälöstä (14) saadaan  $d = \Psi(u^*)$  ja näin ollen  $u^*$  on optimaalinen kontrolli Ongelmalle (IPK).  $\square$

## 4.2 Maksimiperiaate

**Lause 4.2.** *Oletetaan lisäksi, että  $f(a,t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ . Jos  $u^*$  on optimaalinen kontrolli Ongelmalle (IPK) ja  $p$  on ratkaisu yhtälöryhmälle*

$$\begin{cases} Dp - \mu p = u^*(1+p) - \beta(a,t)p(0,t), & (a,t) \in Q_T \\ p(A,t) = 0, & t \in (0,T) \\ p(a,T) = 0, & a \in (0,A), \end{cases} \quad (15)$$

*niin meillä on*

$$u^*(a,t) = \begin{cases} 0 & \text{jos } 1 + p(a,t) < 0 \\ L & \text{jos } 1 + p(a,t) > 0. \end{cases} \quad (16)$$



*Todistus.* Millä tahansa  $v \in L^\infty(Q_T)$ , jolla  $u^* + \varepsilon v \in K$  ja millä tahansa tarpeeksi pienellä  $\varepsilon > 0$ , saadaan

$$\int_0^T \int_0^A u^* y^{u^*} da dt \geq \int_0^T \int_0^A (u^* + \varepsilon v) y^{u^* + \varepsilon v} da dt$$

ja tästä johdetaan

$$\int_0^T \int_0^A u^* \frac{y^{u^* + \varepsilon v} - y^{u^*}}{\varepsilon} da dt + \int_0^T \int_0^A v y^{u^* + \varepsilon v} da dt \leq 0. \quad (17)$$

Suppeutumisen  $y^{u^* + \varepsilon v} \rightarrow y^{u^*}$  avaruudessa  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , kun  $\varepsilon \rightarrow 0+$  seuraa Lauseesta 3.3.

Etenemällä raja-arvoon yhtälössä (17) Lemman 3.5 avulla voidaan päätyä tulokseen

$$\int_0^T \int_0^A (u^* z + v y^{u^*}) da dt \leq 0. \quad (18)$$

Kertomalla yhtälöryhmän (15) ensimmäistä yhtälöä  $z$ :lla ja integroimalla yli  $[0, T] \times [0, A]$ , saadaan

$$\int_0^T \int_0^A (Dp - \mu p) z da dt = \int_0^T \int_0^A [u^* (1 + p) z - \beta(a, t) p(0, t) z(a, t)] da dt.$$

Yhdistämällä (15) ja yhtälöryhmän (12) toinen yhtälö, saadaan

$$- \int_0^T \int_0^A p(Dz + \mu z) da dt = \int_0^T \int_0^A u^* (1 + p) z da dt. \quad (19)$$

Yhtälön (19) mukaan saadaan

$$\int_0^T \int_0^A p v y^{u^*} da dt = \int_0^T \int_0^A u^* z da dt,$$

ja yhtälöstä (18) seuraa

$$\int_0^T \int_0^A v(a, t) (1 + p(a, t)) y^{u^*}(a, t) da dt \leq 0,$$

mille tahansa  $v \in L^\infty(Q_T)$ , s.e.  $u^* + \varepsilon v \in K$  mille tahansa tarpeeksi pienelle  $\varepsilon > 0$ . Tästä seuraa

$$u^*(a, t) = \begin{cases} 0 & \text{jos } (1 + p(a, t)) y^{u^*}(a, t) < 0 \\ L & \text{jos } (1 + p(a, t)) y^{u^*}(a, t) > 0. \end{cases}$$

Koska  $f(a, t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ , voidaan johtaa että  $y^{u^*} > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ , ja näin ollen (16) pätee.  $\square$

*Huomautus 4.3.* Lauseen 4.2 seurauksena saadaan  $p$  (yhtälöryhmän (15) ratkaisu) joka on ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} Dp - \mu p = L(1+p)^+ - \beta(a,t)p(0,t), & (a,t) \in Q_T \\ p(A,t) = 0, & t \in (0,T) \\ p(a,T) = 0, & a \in (0,A). \end{cases} \quad (20)$$

Optimaalisen kontrollin yksikäsitteisyyttä selvennetään seuraavalla tuloksella.

*Huomautus 4.4.* Olkoon  $u^*$  optimaalinen kontrolli Ongelmalle (IPK). Oletetaan lisäksi  $f(a,t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ , ja että

$$(H5) \quad \begin{cases} \mu(a,t) > 0 \quad \text{m.k. tasossa } Q_T, \\ \text{ja melkein mille tahansa } t \in (0,T), \frac{\beta}{\mu}(\cdot,t) \\ \text{ei ole aidosti positiivinen vakio mille} \\ \text{tahansa positiivimittaiselle osajoukolle.} \end{cases}$$

Näiden lisäehtojen nojalla yhtälöryhmän (15) ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että joukon

$$\mathcal{D} = \{(a,t) \in Q_T; p(a,t) = -1\}$$

Lebesgue-mitta on nolla ja  $u^*$  on bang-bang-kontrolli, eli kontrolli vaihtelee kahden arvon välillä, eikä saa arvoja muualta.

Lisäksi optimaalinen kontrolli on yksikäsitteinen.

*Huomautus 4.5.* Jos Huomautuksen (4.4) hypoteesi pätee, voidaan päätellä että liittotila  $p$  (yhtälöryhmän (20) ratkaisu) ei riipu  $f$ :stä eikä  $y_0$ :sta.

Tätä optimaalista kontrollia merkitään  $u^*$ :lla.

Huomautuksen (4.5) avulla voidaan muodostaa seuraava tulos yleiselle tapaukselle  $f(a,t) \geq 0$  m.k. tasossa  $Q_T$ :

**Lause 4.6.** *Jos hypoteesit (H1)-(H4) pätevät, niin kontrolli  $u^*$  on optimaalinen myös Ongelmalle (IPK) vastaten ei-negatiivista sisäänvirtausta  $f$ .*

*Todistus.* Olkoon  $f_n \in L^1(Q_T)$  s.e.  $f_n(a,t) > 0$  m.k. tasossa  $Q_T$  ja  $f_n \rightarrow f$  avaruudessa  $L^1(Q_T)$ , kun  $n \rightarrow +\infty$ .  $\Psi_n(u)$ :lla merkitään kustannusfunktioita, joka vastaa  $f := f_n$ :ää Ongelmassa (IPK) ja  $y_n^u$ :lla merkitään yhtälöryhmän (13) ratkaisua vastaten  $u$ :ta ja  $f := f_n$ :ää.

Lauseen 3.3 nojalla saadaan, että mille tahansa  $u \in K$ ,

$$y_n^u \rightarrow y^u$$

avaruudessa  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , kun  $n \rightarrow +\infty$ . Tästä seuraa

$$\Psi_n(u) \rightarrow \Psi(u) \quad \text{kun } n \rightarrow +\infty.$$

Koska mille tahansa  $u \in K$  pätee  $\Psi_n(u^*) \geq \Psi_n(u)$ , ja käyttämällä viimeistä suppeumaa, voidaan johtaa että  $u^*$  on optimaalinen kontrolli Ongelmalle (IPK).  $\square$

### 4.3 Numeerinen ratkaisu

Lause 4.2 ja siitä johdettava yhtälöryhmä antavat yksinkertaisen tavan saada numeerinen ratkaisu optimaalisen kontrollin ongelmalle. Algoritmi on seuraavanlainen.

- OS1: Laske  $p$  seuraavan Lauseesta 4.2 johdetun yhtälöryhmän ratkaisuna

$$\begin{cases} Dp - \mu p = L(1+p)^+ - \beta(a)p(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ p(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ p(a, T) = 0, & a \in (0, A). \end{cases}$$

Tässä  $(1+p)^+$  on funktion  $(1+p)$  positiivinen osa.

- OS2: Laske optimaalinen kontrolli  $u^*$  yhtälön (16) mukaan.

Ongelma (OS1) ratkaistaan kulkemalla aikavälejä taaksepäin.

Diskretisoidaan yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö eksplisiittisellä metodilla

$$\frac{p_i^{(j)} - p_{i-1}^{(j-1)}}{h} - \mu_i p_i^{(j)} = L\Pi(p_i^{(j)}) - \beta_i p_1^{(j)}. \quad (21)$$

Tässä siis

$$\Pi(p) = (1+p)^+$$

ja

$$p_i^{(j)} \approx p(a_i, t_j).$$

Näin ollen saadaan

$$p_{i-1}^{(j-1)} = (1 - h\mu_i)p_i^{(j)} - h[L\Pi(p_i^{(j)}) - \beta_i p_1^{(j)}].$$

Numeerisissa testeissä eksplisiittisen metodin kanssa kohdataan kuitenkin ongelma. Kuolleisuusasteelle käytetään funktiota

$$\mu(a) = \frac{e^{-a}}{A - a}.$$

On selvää, että tämä funktio ei ole määritelty kun  $a = A$ . Tällaisella tapauksessa MATLAB antaa funktiolle arvon  $+\infty$ , minkä vuoksi  $p$  ei saa arvoja monessa kohtaa algoritmia.

Näin ollen korvataan  $\mu_i$   $\mu_{i-1}$ :lla ja saadaan

$$\frac{p_i^{(j)} - p_{i-1}^{(j-1)}}{h} - \mu_{i-1} p_{i-1}^{(j-1)} = L\Pi(p_i^{(j)}) - \beta_i p_1^{(j)},$$

mistä voidaan johtaa

$$p_{i-1}^{(j-1)} = (1 - h\mu_{i-1})^{-1} [p_i^{(j)} - h(L\Pi(p_i^{(j)}) - \beta_i p_1^{(j)})].$$

Algoritmi  $p$ :n ja  $u$ :n laskemiselle on täten seuraavanlainen

#### Algoritmi 4.1

```

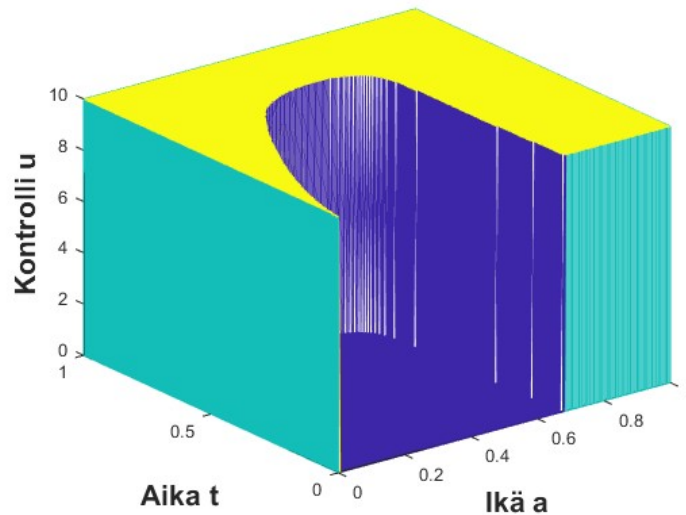
for  $j = 1$  to  $N$ 
   $p(M, j) = 0$ 
end-for
for  $i = 1$  to  $M$ 
   $p(i, N) = 0$ 
end-for
for  $j = N$  downto 2
  for  $i = 2$  to  $M$ 
     $temp = h * (L * p(p(i, j)) - \beta(i) * p(1, j))$ 
     $p(i - 1, j - 1) = (p(i, j) - temp) / (1 + h * \mu(i))$ 
  end-for
end-for
for  $i = 1$  to  $M$ 
  for  $j = 1$  to  $N$ 
    if  $(1 + p(i, j)) > 0$ 
       $u(i, j) = L$ 
    else
       $u(i, j) = 0$ 
    end-for
  end-for
end-for
end-for

```

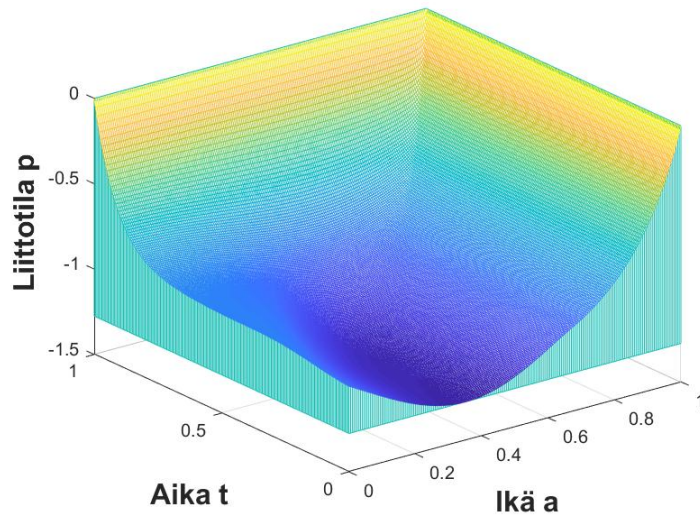
Tässä  $pp$  vastaa matemaattisten yhtälöiden II:tä. Algoritmia vastaava MATLAB-koodi löytyy Liitteestä A.1. Koodissa kysytään arvot muuttujille, lasketaan  $u$  ja  $p$  sekä piirretään ratkaisusta kuvaajat.  $\mu$ :lle on käytetty edellä esitettyä yhtälöä ja  $\beta$ :lle

$$\beta = Ba^2(A - a)\left(1 + \sin \frac{\pi}{A}a\right).$$

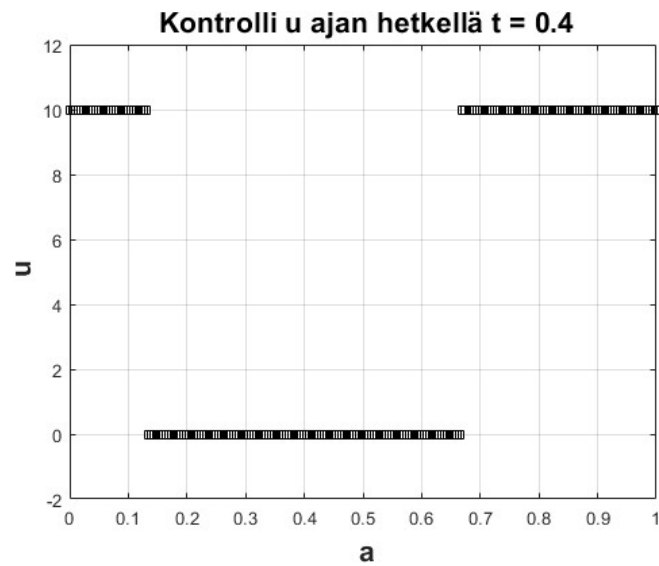
Liitteen A.1 koodia on testattu arvoilla  $A = 1$ ,  $T = 1$ ,  $h = 0.005$ ,  $L = 10$  ja  $B = 10$ . Näitä vastaava optimaalinen kontrolli löytyy Kuvasta 1. Liittotilan  $p$  arvot löytyvät Kuvasta 2. Lisäksi Kuvasta 3 nähdään kontrollin  $u$  arvot tietyllä ajanhetkellä, tässä tapauksessa  $t = 0.4s$ .



Kuva 1: Kontrollin  $u$  arvot tasossa  $[0, T] \times [0, A]$



Kuva 2: Liittotilan  $p$  arvot tasossa  $[0, T] \times [0, A]$



Kuva 3: Kontrollin  $u$  arvo välillä  $[0, A]$  hetkellä  $t = 0.4s$

## 5 Yhteenveto

Tässä työssä kontrollina toimi bang-bang-kontrolli. Kontrollin arvo oli siis joko nolla tai määritelty arvo. Se, kumman arvon kontrolli sai, riippui iästä ja ajan hetkestä. Kalastusesimerkin kannalta tämä tarkoitti, että tietyn ikäistä kalaa pyydystetään täydellä intensiteetillä, ja muun annetaan kasvaa. Bang-bang-kontrollin toisen arvon ei tarvitse olla nolla, vaan arvot ovat riippuvaisia käyttökohteesta.

Vaihtoehto bang-bang-kontrollin tilalle olisi jatkuva kontrolli. Nimensä mukaisesti kontrolli on jatkuva, joka saa arvoja riippuen tason pisteestä. Arvot voivat olla mitä tahansa määriteltyjen ääriarvojen välillä. Esimerkkinä voisi pitää autolla ajoa. Tavoitteena on minimoida matkaan kuluva aika. Kontrollina toimisi kaasupolkimen painaminen. Bang-bang-kontrolli olisi tällaisessa tapauksessa ongelmallinen, sillä kaasupoljin ei oletettavasti voisi olla joko vapaana tai pohjassa. Sen sijaan arvot ovat näiden ääripäiden välillä.

Kontrolleista on muitakin malleja, riippuen käyttötarkoituksesta. Tutkielmia saisi tehtyä jokaisesta. Tämän työn bang-bang-kontrolli oli hyvä ensiaskel optimaalisen kontrollin tutkimiseen, kontrolli oli käytännön kannalta ymmärrettävissä ja MATLAB:lla saadut kuvaajat helpottivat myös käytännön ymmärrystä.

## Lähdeluettelo

- [1] URL: <https://se.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [2] Sebastian Anița, Viorel Arnăutu ja Vincenzo Capasso. *An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics*. Birkhäuser, 2011.
- [3] Andreas Antoniou ja Wu-Sheng Lu. *Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications, Second Edition*. Springer, 2021.
- [4] Stefan Banach. *Theory of linear operations*. North-Holland, 1987.
- [5] John Franks. *Notes on Measure and Integration*. 2009.
- [6] Loukas Grafakos. *Classical and modern fourier analysis*. Upper Saddle River, 2004.
- [7] Norman B. Haaser. *Real analysis*. Van Nostrand Reinhold Co, 1971.
- [8] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Springer-Verlag, 1974.
- [9] Pascal Hitzler ja Anthony Seda. *Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics*. CRC Press, 2011.
- [10] Emanuel Parzen. *Stochastic processes*. Holden-Day, 1962.



# A Koodit

## A.1 Algoritmi 4.1

```
% tiedosto ipk1.m
% Ohjelma optimaaliselle kontrollille
%   ik jakautuneessa populaatiossa
clear
A = input('Maksimi-ik A = ');
T = input('Loppuaika T = ');
h = input('Askel h = ');
L = input('L = ');
vb = input('Vakio betalle : ');
M = 1 + A/h;
N = 1 + T/h;
N1 = N + 1;
for i = 1:M
    a(i) = (i-1)*h;
end
for j = 1:N
    t(j) = (j-1)*h;
end
beta = vb*a.^2.*(A-a).*(1+sin(pi/A*a));
mu = exp(-a)./(A-a);
p = zeros(M,N);
u = zeros(M,N);
for j = 1:N
    p(M,j) = 0;
end
for i = 1:M
    p(i,N) = 0;
end
for k = 1:N-1
    j = N1-k;
    for i = 2:M
        temp = h*(L*pp(p(i,j)) - beta(i)*p(1,j));
        p(i-1,j-1) = (p(i,j) - temp)/(1+h*mu(i-1));
    end
end
for i = 1:M
    for j = 1:N
```

```

        temp = 1 + p(i,j);
        if (temp>0)
            u(i,j) = L;
        end
    end
end
for i = 1:M
    for j = 1:N
        ika(i,j) = a(i);
        aika(i,j) = t(j);
    end
end
% Kuvaajien tekeminen
K = max(max(u));
meshz(ika,aika,u);
axis([0 A 0 T 0 K]);
xlabel('\bf Ik  a','FontSize',16)
ylabel('\bf Aika t','FontSize',16)
zlabel('\bf Ohjain u','FontSize',16)
figure(2)
meshz(ika,aika,p)
xlabel('\bf Ik  a','FontSize',16)
ylabel('\bf Aika t','FontSize',16)
zlabel('\bf Liittotila p','FontSize',16)
at = input('Aikataso : ');
tval = t(at);
for i = 1:M
    w(i) = u(i,at);
end
mw = max(w) + 2;
figure(3)
plot(a,w,'ks');grid
axis([0 1 -2 mw])
xlabel('\bf a','FontSize',16)
ylabel('\bf u','FontSize',16)
title(['\bf Ohjain u ajan hetkell  t = ',num2str(at)
    *h-h]),'FontSize',16)

```

### Ohjelmassa käytettävä funktio *pp*

```
function out = pp(p)
p1 = p + 1;
if (p1 >= 0)
    out = p1;
else
    out = 0;
end
```