Talouden tasapainomallit

LuK-tutkielma

Manu Markunpoika Puronhaara
Y58128440
Matemaattisten tieteiden yksikkö
Oulun yliopisto

Syksy 2022

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [1]. Max-min-ongelmat ovat merkittävässä roolissa jokaisella laskennallisen matematiikan kurssilla. Paikallisen maksimin ja minimin löytäminen käyttämällä derivaattaa, ja käyrän luonnostelu soveltamalla ensimmäisen ja toisen derivaatan testiä on asian ydin soveltavissa tehtävissä. Taloustieteen opiskelija, joka tulee tällaiselle kurssille, tuntee itsensä helposti petetyksi. Käy ilmi, että talopustieteen opiskelijat eivät käytä aikaansa maksimien ja minimien etsintään. Taloustieteilijä olettaa yrityksen tai kuluttajan vaistomaisesti maksimoivan hyödyn. Perusolettamuksena on, että taloudellisella toimijalla on sisäänrakennettu malli toimia niin, että he maksimoivat käyttäytymistään. Keskeinen kysymys taloustieteilijälle ei ole löytää maksimia, vaan: miten talouden toimija sopeutuu maksimoivaan ajatteluun, jos jokin muuttuja, mihin ei voi vaikuttaa, muuttuu. Esimerkiksi, miten torilla myytävien välipalakeksien myynnin määrä muuttuu, jos keksien kanssa samassa paikassa myytävän coca-colan hinta nousee. Tässä esimerkissä oletetaan, että asiakas haluaa mahdollisimman suuren hyödyn ostamastaan tuotteesta, kohdatessaan korkeamman coca-colan hinnan, he voivat miettiä uudestaan kulutustaan, joka taas voi vaikuttaa keksien myyntiin.

Taloustieteijät yleensä toivovat, että toisen derivaatan ehto olisi paremminkin välttämättön kuin riittävä optimin löytämiseen. Muistelemalla toisen derivaatan testiä: jos c on funktion $f(x)$ kriittinen piste (eli $f'(c) = 0$), niin $f"(c) < 0$ on riittävä ehto sille, että c on funktion maksimi. Tämä ehto ei kuitenkaan ole välttämätön, esimerkiksi funktiolla $f(x) = 9 - x^4$ on maksimi kriittisessä pisteessä $c = 0$, mutta $f"(0) = 0$. Matematiikan opiskelijat voivat käyttää toisen derivaatan testiä todetakseen, onko kriittinen piste c funktio maksimi. Taloustieteen opiskelija ajattee eri tavalla: jos tiedetään, että c antaa funktion maksimin, voidaan päätellä, että $f"(c) < 0$. Valitettavasti voidaan ainoastaan päätellä, että $f"(c) \leq 0$. Mahdollisuus, että $f"(c) = 0$ on usein ongelma talouden analyysissä, sillä analyysissä tämä esiintyy nimittäjässä ja silloin jakana olisi nolla, joka on ongelma. Moni taloustieteilijä kuitenkin ajattelee liian optimistisesti, että tämä tilanne on epätodennäköinen, ja siten tilanne voidaan jättää huomioimatta.

Jatkossa oletetaan toisen asteen ehtojen olevan vain riittäviä maksimin käsittelylle. Toteutuksen kannalta ei ole muuta mahdollisuutta. Joko tehdään tämä oletus ja saadaan mielenkiintoisia taloustieteellisiä johtopäätöksiä, tai ei tehdä oletusta, eikä saada mitään lopputulosta.

2 Yhden tuotteen tasapainomalli

On helpointa lähteä tutustumaan aiheeseen yksinkertaisella esimerkillä, jolla on hyvä havainnollistaa kahta erilaista perusmenetelmää. Esimerkkinä on yksikertainen kysynnän ja tarjonnan ongelma.

$$Q^D = a - bP, \tag{1}$$

$$Q^S = c + dP. \tag{2}$$

Tässä Q^D on tietyn tuotteen kysyntä ja Q^S saman tuotteen tarjonta. Molemmat riippuvat tuotteen hinnasta P ja nämä kysynnän ja tarjonnan käyrät ovat suoria. Oletetaan, että kolme parametria a, b, d ovat positiivisia ja c voi olla positiivinen tai negatiivinen luku. Siten kysyntäkäyrä on viistosti alaspäin laskeva suora ja tarjontakäyrä viistosti ylöspäin nouseva suora. Ongelma ei kuitenkaan ole reaalimaailman ongelma, sillä kysynnän ja tarjonnan käyrät eivät ole oikeasti suoria ja maailmassa on myös paljon muita tuotteita kuin yksi ainoa tuote. Lisäksi kaikki nämä tuotteet ovat vuorovaikutuksessa monimutkaisilla tavoilla. Tämä idealisoitu tilanne toimii kuitenkin hyvänä esimerkkinä aiheeseen.

Ongelmaa lähdettäisiin ratkaisemaan piirtämällä kysyntä- ja tarjokäyrät samaan kaavioon ja etsimällä näiden käyrien leikkaupiste (P^*, Q^*), joka kertoo tasapainohinnan P^* ja tasapainomäärän Q^* staattiset tasapainoarvot. Tässä P^* on hyödykkeen markkinahinta. Staattinen tasapainohinta ja -määrä muuttuvat, jos kysyntä- tai tarjontakäyrä muuttuvat. Tässä muuttujan a arvon nousu kertoo kysyntkäyrän siirtymistä ylöspäin kaaviossa ja muuttujan c arvon nousu kertoo tarjontakäyrän siirtymistä ylöspäin kaaviossa.

Muuttujien P^* ja Q^* arvot ovat numeroarvoja, joita pyritään ymmärtämään. Neljän muuttujan a, b, c, d arvot ovat numeroita, jotka vaikuttavat P^* ja Q^* arvoihin. Tasapainohinnan P^* muutoksen suunta on yleensä asia, mitä tarkastellaan, eikä niinkään muutoksen suuruus. Esimerkiksi aiemmin käsitellyssä esimerkissä, muuttujan a kasvu aiheuttaa P^* ja Q^* arvojen nousun. Muuttujan c arvon nousu taas laskee P^* arvoa. Tätä kutsutaan taloustieteessä vertailevaksi tasapainoksi.

Ongelmaa on hyvä lähteä ratkaisemaan laskennallisesti. Staattinen tasapaino löytyy, kun kysyntä ja tarjonta ovat tasapainossa. Eli $Q^D = Q^S$. Sijoittamalla nyt $Q^D = a - bP$ ja $Q^S = c + dP$, saadaan

$$a - bP = c + dP,$$

josta ratkaistaan P

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Nyt $P^* > 0$, kun $a > c$. Sijoittamalla P^* arvon kysynnän- tai tarjonnankäyrään, saadaan

$$Q^* = \frac{ad+bc}{b+d}.$$

Tästä kaavasta nähdään, että Q^* kasvaa, jos a tai c kasvaa. Muuttujien b ja d vaikutus määrään Q^* ei sensijaan ole itsestään selvää. P^* arvon nousuun vaikuttaa selvästi muuttujan a arvon nousu ja muuttujan c nousu laskee hinnan arvoa. Myös b ja d arvoje nnousu pienentää P^* arvoa.

Muuttujien arvon vaikutusta voidaan tutkia kvantitatiivisesti osittaisderivaattojen avulla. Osittaisderivaatat hinnasta P^* muuttujien a, b, c, d suhteen ovat

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{1}{b+d} > 0\ ,\ \frac{\partial P^*}{\partial c} = -\frac{1}{b+d} < 0,$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial b} = \frac{\partial P^*}{\partial d} = -\frac{a-c}{(b+d)^2} < 0.$$

Osittaisderivaatat määrästä Q^* muuttjujien suhteen ovat

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a} = \frac{d}{b+d} > 0,\ \frac{\partial Q^*}{\partial c} = \frac{b}{b+d} > 0,$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial b} = -\frac{d(a-c)}{(b+d)^2} < 0, \ \frac{\partial Q^*}{\partial d} = \frac{b(a-c)}{(b+d)^2} > 0.$$

Nyt nähdään esimerkiksi helpommin, että muuttujan a muutos vaikuttaa tasapainohinnan P^* arvon muutokseen selvemmin, jos $b+d$ on pieni, mutta jos $b+d$ on suuri, niin a arvon muutos on lähes merkityksetön.

Jatketaan edelleen yksinkertaistetulla esimerkillä, mutta luovutaan yksinkertaisista lineaarisista tarjonnan ja kysynnän funktioista. Oletetaan, että

$$Q^D = f(P, a), \tag{3}$$

$$Q^S = g(P, b), \tag{4}$$

missä kysyntä ei riipu pelkästään hinnasta, vaan myös muuttujasta a. Nyt tarjonta riippuu edelleen hinnasta, mutta myös muuttujasta b. Nyt ongelman lähestyminen on hieman vaikeampaa. Käytetään osittaisderivaatoille alaindeksimerkintää notaatioiden selventämiseksi. Järjestetään kaikki taloudelliset informaatiot, joita saatamme käyttää:

$$f_P(P, a) = \frac{\partial f}{\partial P} < 0, \ g_P(P, b) = \frac{\partial g}{\partial P} > 0.$$

Ei kuitenkaan tiedetä funktioiden f ja g osittaisderivaattojen merkkejä muuttujien a ja b suhteen, mutta voidaan olettaa

$$f_a(P, a) = \frac{\partial f}{\partial a} > 0, \ g_b(P, b) = \frac{\partial g}{\partial b} > 0.$$

Keskitytään seuraavaksi osittaisderivaattoihin muuttujien a ja b suhteen. Tuntemattoman P^* arvon täytyy toteuttaa staattinen tasapainovaatimus:

$$Q^D = Q^S,$$

josta saadaan

$$Q^D - Q^S = f(P^*, a) - g(P^*, b) = 0.$$

Kun halutaan tietää, miten P^* muuttuu, kun a muuttuu, on järkevää differentioida tämä yhtälö muuttujan a suhteen ja muistaa, että P^* on funktio a:n suhteen

$$f_P(P^*, a)\frac{\partial P^*}{\partial a} + f_a(P^*, a) - g_P(P^*, b)\frac{\partial P^*}{\partial a} = 0.$$

Yllä olevassa yhtälössä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä. On kuitenkin tärkeää muistaa keskittää tarkkaavaisuutta ketjusäännön käyttöön, sillä siinä tulee helposti tehtyä virheitä.

Haluttu vertailuarvo on nyt helppo ratkaista edellisestä yhtälöstä. Ratkaistaan edellisestä yhtälöstä haluttu muuttujan a vaikutus tasapainohintaan P^*. Tämä saadaan yhksinkertaisen välivaiheen kautta.

$$\frac{\partial P^*}{\partial a}(f_P(P^*,a) - g_P(P^*,b)) = -f_a(P^*,a),$$

josta saadaan

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{-f_a(P^*,a)}{f_P(P^*,a) - g_P(P^*,b)} > 0.$$

Vastaavalla tavalla saadaan myös ratkaistua muuttujan b muutoksen vaikutus tasapainohintaan P^*.

Tämä ei kuitenkaan vielä riitä, vaan on myös kaksi muuta vertailevaa tasapaino arvoa. Muuttujien a tai b vaikutus tasapainomäärään Q^*. Nämä saadaan, kun sijoitetaan P^* arvon kysyntä- tai tarjontakäyrään. Ei ole väliä, kumpaan sen sijoittaa. Jos sijoitetaan tasapainohinta tarjontakäyrään saadaan

$$Q^* = g(P^*,b).$$

Derivoimalla muuttujan a suhteen, saadaan

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a} = g_p(P^*,b)\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{-f_a(P^*,a)g_p(P^*,b)}{f_p(P^*,a) - g_p(P^*,b)},$$

jossa käytettiin jo tunnettua P^*. Sama tulos saataisiin myös sijoittamalla P^* kysyntäkäyrään. Samalla tavalla, kuin muuttujan a vaikutus saatiim tasapainomäärään Q^*, saadaan myös b:n muutoksen vaikutus siihen.

On vielä hyvä pysähtyä hetkeksi miettimään puhtaasti matemaattisesti näitä ratkaisuja. Ratkaisemisessa käytettiin derivointia tasapainohinnan ratkasemiseksi, jotta saatiin yksinkertainen lineaarinen yhtälö tasapainohinnalle ja -määrälle. Huomioitavaa on, että tulos on jakolasku, tällaisissa laskuissa nimittäjä vaikuttaa eniten tulokseen. Tuloksessa jakaja oli muotoa $f_P - g_P$. Vertaamalla tätä yhtälöön $Q^D - Q^S = f - g = 0$, huomataan, että nimittäjä on tämän yhtälön derivaatta hinnan P suhteen. Lisäksi huomioidaan, ettei nimittäjä voi olla nolla, sillä nollalla ei voi jakaa. Nollalla jakamisen ongelma aiheuttaa ongelmia myös jatkossa käsiteltäessä aihetta. Tiedetään, että kunhan nimittäjä ei ole nolla, ei ole ongelmaa. On toki hyvä tietää nimittäjän merkki, jotta voidaan tietää staattisen tasapainon merkki.

3 Kahden tuotteen tasapainomalli

Tässä osassa tarkastellaan staattisen tasapainon ongelmaa, jossa on kaksi tuotetta A ja B. Nyt kysynnän- ja tarjonnanfunktiot molemmille tuotteille ovat

$$\begin{aligned} Q_A^D &= f(P_A, P_B, a),\ Q_A^S = g(P_A, b), \\ Q_B^D &= F(P_A, P_B, c),\ Q_B^S = G(P_B, d), \end{aligned} \tag{5}$$

Huomioitavaa on, että kysyntä riippuu molempien tuotteiden hinnasta, mutta tarjonta riippuu ainoastaan tuotteen omasta hinnasta. Lisäksi kysyntä- ja tarjontafunktiot riippuvat molemmat ulkoisista muuttujista, jotka on merkitty a, b, c, d. Talouden periaatteiden mukaan voidaan päätellä, että

$$f_{P_A} < 0,\ g_{P_A} > 0,\ F_{P_B} < 0, G_{P_B} > 0.$$

Tiettyjä muita asioita voidaan päätellä, jos tiedetään ovatko A ja B toisiaan täydentäviä, korvaavia tai toisistaan riippumattomia tuotteita. Voimme arvella, että f_{P_B} on positiivinen, jos A ja B ovat korvaavia tuotteita keskenään. Jos A ja B ovat toisiaan täydentäviä, niin f_{P_B} on negatiivista ja f_{P_B} on nolla jos ne ovat toisistaan riippumattomia. Vastaavasti voitaisiin päätellä, myös F_{P_A} arvot.

Staattiset tasapainotilat ovat

$$\begin{aligned} Q_A^D - Q_A^S &= f(P_A^*, P_B^*, a) - g(P_A^*, b) = 0 \\ Q_B^D - Q_B^S &= F(P_A^*, P_B^*, c) - G(P_B^*, d) = 0 \end{aligned}$$

Näistäkään ei voida ratkaista tapainohintoja ja -määriä, ellei tiedetä enemmän spesiaali tietoa tarjota- ja kysyntäfunktioista. Kuitenkin derivaatan avulla saadaan lisää tietoa näistä. Esimerkiksi, jos halutaan saada tietää muuttujan a vaikutuks tasapainoarvoihin, voidaan ottaa osittaisderivaatat molemmista yhtälöistä muuttujan a suhteen, ja saadaan

$$f_{P_A}\frac{\partial P_A^*}{\partial a}+f_{P_B}\frac{\partial P_B^*}{\partial a}+f_a-g_{P_A}\frac{\partial P_A^*}{\partial a}=0$$

ja

$$F_{P_A}\frac{\partial P_A^*}{\partial a}+F_{P_B}\frac{\partial P_B^*}{\partial a}-G_{P_B}\frac{\partial P_B^*}{\partial a}=0.$$

Tässä huomataan, että muutos muuttujassa a vaikuttaa heti A:n kysyntään ja siten A:n hintaan, joka vaikuttaa välillisesti A:n tarjontaan. Toisaalta A:n hinnan muutosella on vaikutusta tuotteen B kysyntään ja siten tuotteen B hintaan. Ei siis kannata tehdä tyhmää olettamusta, että tasapainoyhtälön vasen puoli on vakio tuotteelle B, kun a muuttuu, vaikka a ei esiinnykkään yhtälössä.

Tarkastellaan tarkemmin kahta viimeistä yhtälöä. Tässä on kaksi yhtälöä, jotka pitävät sisällään kaksi haettua vertailevaa tasapaino arvoa $\frac{\partial P_A^*}{\partial a}$ ja $\frac{\partial P_B^*}{\partial a}$. Nämä ovat yksinkertaisia lineaarisia yhtälöitä. Ennen niiden ratkaisemista, luetellaan erilaisia tapoja ratkaista tällaisia systeemejä

1. Ensimmäinen tapa ratkaista systeemi, on opittu jo mahdollisesti algebran kurssilla. Se on tapa, jossa ensin ratkaistaan ensimmäinen yhtälö toisen tuntemattoman muuttujan suhteen ja sijoittamalla tulos toiseen yhtälöön. Tätä menetelmää kutsutaan korvausmenetelmäksi. Toinen tyyli on kertoa molempia yhtälöitä sopivalla kertoimella ja vähentämällä ne toisistaan tai summaamalla yhteen, jolloin yksi tuntematon vähenee pois. Tämä on hyvin yksinkertainen tapa ratkaista yhtälö.

2. Tällainen systeemi voidaan ratkaista myös determinantin avulla, tätä tyyliä kutsutaan Cramerin säännöksi. Tapa on opittu luultavasti lineaarialgebrassa. Tämä tapa on yleisesti talostieteilijöiden käytössä.

3. Kolmas tapa on uudelleen kirjoittaa yhtälö matriisiyhtälöksi. siitä tulisi 2 x 2 matriisi, joka voitaisiin ratkaista kertomalla matriisiyhtälön molemmat puolet matriisin käänteismatriisilla. Kaikki matriisin neljä

osaa ovat osittaisderivaattoja lukujen sijaan, joten ei ole kovin järkevää ratkaista sitä käänteisesti käyttämällä Gaussin eliminointimenetelmää lisätylle matriisile. On siis parempi tehdä käänteismatriisi käyttämällä kofaktoreita. Tämä menetelmä pitäisi olla opetettu lineearialgebrassa.

Näistä menetelmistä kahta viimeisintä tullaan käyttämään myöhemmin käsiteltäessä useamman yhtälön ratkaisuja. Tulokset ovat

$$\frac{\partial P_A^*}{\partial a} = \frac{-f_a(F_{P_B} - G_{P_B})}{\Delta}, \ \frac{\partial P_B^*}{\partial a} = \frac{f_a F_{P_A}}{\Delta},$$

missä

$$\Delta = (f_{P_A} - g_{P_A})(F_{P_B} - G_{P_B}) - f_{P_B} F_{P_A}.$$

Näiden kahden vertailevan tasapaino arvon osoittajiin on helppo kiinnittää etumerkki. Ensimmäisellä osoittajalla on yksiselitteisesti sama merkki, kuin f_a eli negatiivinen etumerkki. Toisen osoittajan merkki riippuu siitä, ovatko A ja B toisiaan täydentäviä, korvaavia tuotteita tai toisistaan riippumattomia tuotteita. Nimittäjä ei aiheuta ongelmaa, jos A ja B ovat toisistaan riippumattomia, sillä tällöin Δ on suurempaa kuin nolla. A ja B ollessa toisiaan täydentäviä tai korvaavia tuotteita, Δ on muotoa positiivinen luku miinus positiivinen luku, ja riippuen kumpi on isompi luku, niin se määrää, onko Δ positiivinen vai negatiivinen luku. Taloustietelijät uskovat yleensä, että ensimmäinen luku on isompi, jolloin Δ on yksiselitteisesti positiivinen luku. Taloustieteessä yleensä ajatellaankin, että tuotteen oman hinnan muutos dominoi toisen tuotteen hinnan muutosta. Tällä periaatteella on helppoa yhtyä saatuihin tuloksiin.

4 Yrityksen tuoton maksimointi

Yritys, joka harjoittaa jonkin hyödykkeen valmitusta, tarvitsee pääomaa (K) ja työvoimaa (L). Resurssit on jaettava pääoman ja työvoiman kesken voittojen maksimoimiseksi. Jako tehdään riippuen pääoman ja työvoiman suhteellisista kustannuksista, sekä kummankin tehokkuudesta yrityksen tuotantofunktiossa. Oletetaan tässä, että yritys on kilpailukykyinen ja sen tuotanto ei vaikuta hintoihin, joten sen tuotteen hinta, sekä pääoma- ja työvoimakustannukset tiedetään.

Olkoon $f(K, L)$ yrityksen tuotantofunktio ja olkoon p yrityksen tuotteen yksikköhinta. Siten $pf(K, L)$ on yrityksen tulot. Yrityksen tuotto lukuunottamatta kiinteitä kustannuksia on tällöin

$$\pi(K, L) = pf(K, L) - \omega L - vK,$$

missä ω on työvoiman yksikkökustannus ja v on pääoman yksikkökustannus.

Lyhyellä aikavälillä pääomaa voidaan pitää vakiona, jolloin ongelmana on vain yksi endogeeninen muuttuja L. Tähän voidaan soveltaa yhden muuttujan laskentaa ja differentioida tuotto-funktiota muuttujan L suhteen muistaen, että työvoiman optimiarvon L^* on toteutettava

$$pf_L(K, L) - \omega = 0.$$

Jotta löydetään eksogeenisen muuttujan ω vaikutus L^*, käytetään tuttua implisiittistä differentiaalia ja saadaan

$$pf_{LL}(K, L^*)\frac{\partial L^*}{\partial \omega} - 1 = 0.$$

Haluttu vertaileva arvo saadaan ratkaistua lisäämällä yhtälön molemmin puolin ykkönen ja jakamalla $pf_{LL}(K, L^*)$. Voidaan varmasti olettaa, että yksikköhinta $p > 0$. Entä toinen arvo $f_{LL}(K, L^*)$? Olettamalla, että yritys maksimoi tuottonsa, tiedetään varmasti, että toinen derivaatta ei ole positiivinen, sillä silloin toinen derivaatta testi tarkoittaisi minimiä. Negatiivinen toinen derivaatta on riittävä, mutta ei välttämätön edellytys maksimille. On nimittäin mahdollista, että toinen derivaatta on nolla maksimiarvossa. Jotta voidaan edetä ongelmassa, pitää olettaa, että riittävä toisen asteen ehto pätee. Siten saadaan

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega} = \frac{1}{pf_{LL}(K, L^*)}.$$

Pitää huomioida, että toisen kertaluvun ehto ei ainoastaan salli jakamista, vaan kertoo, että kyseinen vertaileva staattinen arvo on negatiivinen. Siten palkkatason nousu johtaa yrityksen käyttämän työvoiman määrään vähenemiseen.

Seuraavaksi käsitellään pitkän aikavälin optimoinnin ongelmaa, jolloin pääoman arvoa K ei voida enää pitää vakiona. Tällöin on kaksi endogeenistä muuttujaa K ja L. Endogeenisten muuttujien suurempi määrä on lisätaakkana, mutta niiden lisääntymisen odotetaan lisäävän myös saatavaa tietoa.

Lähdetään ratkaisemaan ongelmaa normaaliin tapaan keräämällä ensin kaikki olemassa olevat tiedot yhteen tuotantofunktiosta $f(K, L)$. Oletetaan, että

$$f_K > 0,\ f_{KK} < 0,\ f_L > 0,\ f_{LL} < 0,$$

jolloin tuotanto kasvaa lisättäessä pääomaa tai työvoimaa, mutta saatu tuotto pienenee pääoman tai työvoiman kasvaessa. Mitä tiedetään f_{KL}:stä? Vektorilaskennan avulla tiedetään, että se on sama asia, kuin f_{LK}, jos funktion f toinen osittainen derivaatta on jatkuva. Tämän voidaan olettaa pitävän paikkansa. Jos toinen sekoitettu osittaisderivaatta on positiivinen, niin pääoma ja työvoima täydentävät toisiaan. Toisen sekoitetun derivaatan ollessa negatiivinen ne ovat toistensa korvikkeita ja sen ollessa nolla ne ovat toisistaan riippumattomia. Ensimmäisen asteen ehdoilla saadaan optimaaliset valinnat pääomalle K^* ja työvoimalle L^*, joiden on toteutettava yhtälöt

$$\pi_K(K^*, L^*) = pf_K(K^*, L^*) - v = 0,$$
$$\pi_L(K^*, L^*) = pf_L(K^*, L^*) - \omega = 0.$$

Ylläolevat yhtälöt voitaisiin ratkaista K^* ja L^* suhteen, mutta kiinnostavampaa ongelman kannalta on tietää, mikä on K^* ja L^* muutossuunta, jos joko palkkatason ω tai pääoman yksikkökustannuksen v pitäisi nousta marginaalisesti. Tällöin halutaan tutkia vertailevia tasapaino arvoja $\frac{\partial K^*}{\partial \omega}$ ja $\frac{\partial K^*}{\partial v}$ tai vastaavia arvoja työvoimalle L^*. Halutut arvot saadaan jälleen differentiaalien avulla. Palkkatason ω staattiset vertailutulokset saadaan derivoimalla molemmat yhtälöt puolittain muuttujan ω suhteen ja muistaen, että sekä K^*

ja L^* riippuvat ω:sta.

$$pf_{KK}(K^*,L^*)\frac{\partial K^*}{\partial\omega}+pf_{KL}(K^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial\omega}=0,$$
$$pf_{LK}(K^*,L^*)\frac{\partial K^*}{\partial\omega}+pf_{LL}(K^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial\omega}-1=0.$$

Näin saatiin kaksi lineaarista yhtälöä vertailevien tasapaino arvojen määrittämiseksi suhteessa muuttujaan ω. Lisäämällä alempaan yhtälöön puolittain numero yksi, voidaan yhtälö tämä jälkeen ratkaista Cramerin säännöllä ja saadaan

$$\frac{\partial K^*}{\partial\omega}=\frac{-f_{KL}(K^*,L^*)}{\Delta},$$
$$\frac{\partial L^*}{\partial\omega}=\frac{f_{KK}(K^*,L^*)}{\Delta},$$

missä $\Delta=p(f_{KK}(K^*,L^*)f_{LL}(K^*,L^*)-(f_{KL}(K^*,L^*))^2)$.

Jälkimmäisen vertailevan tasapaino arvon osoittaja on negatiivinen aiemmin päätellyn merkin perusteella. Tällöin olisi taloustieteen näkökulmasta järkevää, että nimittäjä osoittautuisi positiiviseksi, sillä tällöin vertaileva tasapaino arvo olisi negatiivinen. Negatiivinen vertaileva arvo kertoisi siitä, että työvoimakustannusten noustessa yritys työllistäisi vähemmän työvoimaa. Otetaan tarkasteluun toinen ylläolevista yhtälöistä. Talouden sovellutusten kannalta on järkevää, että $\frac{\partial L^*}{\partial\omega}<0$, joka tarkoittaa, että palkkakustannusten noustessa työvoima pienenee. Matemaattisesti tarkastelemalla tiedetään, että jos funktiolla $F(x,y)$ on kriittinen piste (x^*,y^*), niin piste on maksi, jos $F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2>0$. Tässä tapauksessa

$$\pi_{KK}=pf_{KK},\ \pi_{LL}=pf_{LL},\ \pi_{KL}=pf_{KL}.$$

Joten $D=p\Delta$ ja siten Δ:n ja D:n merkit ovat samat. Riittävän ehdon $\Delta>0$ toteutuessa (kuten taloustieteilijöt olettavat), saadaan $\frac{\partial L^*}{\partial\omega}<0$, mikä on järkevä tulos taloustieteen kannalta.

5 Monen muuttujan tasapainotehtävä

Tässä osiossa perehdytään n:n tuotteen tasapainomalliin. Lähdetään tutustumaan aiheeseen tarkastelemalla uudestaan yhtälöitä (3) ja (4). Aiemmin käytettiin staattisen tasapainon vaatimusta $Q_D = Q_S$, jotta saatiin pelkistettyä ongelma vain yhteen yhtälöön $f(P^*, a) - g(P^*, b) = 0$. Tarkastellaan ongelmaa uudestaan poistamatta toista yhtälöä, ja pidetään molemmat yhtälöt

$$Q^* - f(P^*, a) = 0,$$
$$Q^* - g(P^*, b) = 0.$$

Näistä voidaan tehdä vektorifunktio

$$F(P^*, Q^*, a, b) = \begin{bmatrix} Q^* - f(P^*, a) \\ Q^* - g(P^*, b) \end{bmatrix}.$$

Tätä yhtälöä voidaan kuvata yhdellä vektoriyhtälöllä

$$F(P^*, Q^*, a, b) = 0, \tag{6}$$

missä nolla on kaksi dimensioinen nollavektori. Jos yhtälö (6) on mahdollista ratkaista tasapaino arvoille P^* ja Q^* muuttujien a ja b suhteen, ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix} = H(a, b) = \begin{bmatrix} h_1(a, b) \\ h_2(a, b) \end{bmatrix}.$$

Derivoimalla funktiota F, saadaan $2x4$ matriisi. Nyt

$$F'(P^*, Q^*, a, b) = \begin{bmatrix} -f_P(P^*, a) & 1 & -f_a(P^*, a) & 0 \\ -g_P(P^*, b) & 1 & 0 & -g_b(P^*, b) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Tässä ylin rivi on funktion F ensimmäisen komponentin gradienttivektori eli neljä osittaisderivaattaa ensimmäisestä komponentista. Toinen rivi on gradienttivektori funktion F toisesta komponentista. Samalla tapaa H:n derivaatta on

$$H'(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a} & \frac{\partial h_1}{\partial b} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a} & \frac{\partial h_2}{\partial b} \end{bmatrix}.$$

F':n $2x2$ alimatriisia, mikä sisältää osittaisderivaatat endogeenisten muuttujien suhteen merkitään jatkossa $F_{(P,Q)}$ ja F':n $2x2$ alimatriisia, mikä sisältää osittaisderivaatat eksogeenisten muuttujien suhteen merkitään jatkossa $F_{(a,b)}$.

Vektoriyhtälöstä (6) on hyvä miettiä kahta merkittävää kysymystä. Ensimmäisenä on hyvä pohtia, onko ratkaisu olemassa muuttujien P^* ja Q^* osalta. Jos ongelmia tulee, pitää palata ajattelemaan asiaa uudestaan taloustieteen kannalta ja löytää, missä virhe tehtiin, sillä ainoa mahdollisuus on, että taloustieteen sääntöjä rikottiin jotenkin, eivätkä yhtälöt vastaa taloudellista todellisuutta. Toinen kysymys on, kuinka saadaan H', sillä huomataan, että H' osat vastaavat neljää vertailevaa tasapainoa, jotka haluttiin selvittää.

Kuuluisa implisiittinen lause vastaa yllä oleviin kysymyksiin. Lauseen ensimmäinen osa kertoo, että ainakin teoreettisesti vektoriyhälö voidaan ratkaista. Toinen osa antaa kaavan, jolla H' voidaan ratkaista.

Lause 5.1. *Oletetaan, että F on funktio, jonka määrittelyjoukko on $n + m$ ulotteinen ja arvojoukko on m ulotteinen. Funktio kirjoitetaan muodossa $F(x, y)$, missä x on n-vektori ja kuvaa endogeenisiä muuttujia ja y on m-vektori, joka kuvaa eksogeenisiä muuttujia. Oletetaan, että kaikki osittaisderivaatat, jotka ovat derivaattamatriisin F' alkioita ja jatkuvia jossain pisteen (y^*, x^*) ympäristössä ja $F(y^*, x^*) = 0$ eli (y^*, x^*) on tasapainopiste. Oletetaan edelleen, että $F_y(y^*, x^*)$ on kääntyvä. Silloin yhtälöstä $F(y, x) = 0$ voidaan ratkaista $y = H(x)$ pisteen x^* ympäristössä. Edelleen jokainen matriisin $H'(x)$ alkio on olemassa ja on jatkuva x^* ympäristössä ja $H'(x)$ voidaan laskea alla olevasta lausekkeesta*

$$F_y(y, x)H'(x) = -F_x(y, x),$$

missä $H(x) = y$. Matriisi $H'(x)$ sisältää kaikki vertailevat tasapainot tehtävälle. Huomaa, että F_y on mxm kokoinen matriisi vasemmasta puolesta $F'(y, x)$ matriisista ja F_x jäljelle jäävä osuus $F'(y, x)$ eli sen oikea puoli.

Lähdetään ratkaisemaan yhtälöitä (3) ja (4) implisiittisen funktio lauseen avulla. Oletetaan, että funktiolla on jatkuvat derivaatat ja markkinat ovat tällä hetkellä tasapainossa, jolloin hinta P^* ja määrä Q^* ovat todella arvoja, jotka saavat markkinat tasapainoon. Tällöin yhtälöillä on ratkaisu $H(a,b)$. Merkitään nyt $y^* = (P^*, Q^*)$ ja $x^* = (a,b)$. Nyt voidaan käyttää kaavaa $H'(x)$:lle. Nyt

$$F_y = F_{(P,Q)} = \begin{bmatrix} -f_P(P^*,a) & 1 \\ -g_P(P^*,b) & 1 \end{bmatrix}, \ F_x = F_{(a,b)} = \begin{bmatrix} -f_a(P^*,a) & 0 \\ 0 & -g_b(P^*,b) \end{bmatrix}.$$

$2x2$ matriisi $F_{(P,Q)}$ on helppo kääntää ja lause (5.1) antaa

$$\begin{aligned} H'(a,b) &= -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ g_P(P^*,b) & -f_P(P^*,a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_a(P^*,a) & 0 \\ 0 & -g_b(P^*,b) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -f_a(P^*,a) & g_b(P^*,b) \\ -g_P(P^*,b)f_a(P^*,a) & g_b(P^*,b)f_P(P^*,a) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

missä $\Delta = g_P(P^*,b) - f_P(P^*,a)$. Vertaamalla saatuja tuloksia aiemmin saatuihin tuloksiin yhtälöille (3) ja (4) huomataan, että tulokset ovat samoja. Tosin aikasemmin saadut tulokset saatiin pienemmällä työmäärällä, eikä lausetta (5.1) ole aina järkevää käyttää, sillä yksinkertaiset tehtävät saa helpommalla tehtyä ilman sitäkin.

Alle on vielä lyhyesti koottu vaiheet, joita implisiittifunktio theoreeman käytössä tarvitaan.

1. Kirjoitetaan ratkaistava yhtälö muodossa $F(y,x) = 0$, missä y on vektori sisältäen kaikki endogeeniset muuttujat, jotka halutaan ratkaista. Esim. tasapainohinta P^*. x on vektori, joka sisältää kaikki eksogeeniset muuttujat, kuten a ja b. Tarkitetaan myös, että yhtälöitä on yhtä monta kuin endogeenisiä muuttujia.

2. Ratkaistaan derivaatta matriisi $F'(x,y)$. Jos on m määrä endogeenisiä muuttujia, vasen mxm alimatriisi on $F_y(y,x)$ ja jäljelle jäävä oikea alimatriisi on $F_x(y,x)$.

3. Tarkistetaan, että F_y on kääntyvä. Monesti on vaikeaa tarkistaa kääntyvyyttä suurissa matriiseissa, sillä determinanttia on vaikea määrittää.

Taloustieteen oletuksien ja matematiikan työkalujen avulla se voidaan kuitenkin epäsuorasti todeta. Tämän jälkeen tiedetään, että yhtälö on ainakin teoreettisesti ratkaistavissa endogeenisille muuttujille y eksogeenisten muuttjien x suhteen.

4. Käytetään kaavaa $F_y H'(x) = -F_x$, josta ratkaistan $H'(x)$. F_y ollessa pieni, on käänteismatriisi sille löydettävissä determinantin avulla. $H'(x)$ on matriisi, joka pitää sisällään kaikki tasapainoarvot.

5. Jos ollaan kiinnostuneita vain yhdestä tasapaino arvosta, voidaan käyttää Cramerin sääntöä. Jos matriiseissa on nollia, niin vain muutamat determinantit vaativat laskemista.

Lähdeluettelo

[1] John Baxley: *Optimization Methods in Economics*. Wake Forest University, Lecture notes 2015. https://users.wfu.edu (08.12.2022)