Bairen funktiot

LuK-tutkielma
Vilma Rahnasto
Y62443660
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2022

Sisällys

Johdanto

Baire funktiot luokittelevat funktioita sen mukaan, miten jatkuvia tai epäjatkuvia ne ovat. Konstruktio aloitetaan jatkuvista funktioista, jotka muodostavat ensimmäisen Bairen luokan. Seuraavaan luokkaan siirrytään jatkuvista funktioista induktiivisesti tarkastelemalla pisteittäisiä raja-arvoja.

Ensimmäisessä ja toisessa luvussa määritellään Baire funktioiden luokittelussa oleellisessa osassa olevat käsitteet jatkuva funktio ja pisteittäinen raja-arvo. Lisäksi esitellään näiden ominaisuuksiin liittyvät oleelliset lemmat, joita tarvitaan tutkielman todistuksissa ja esimerkkien perusteluissa.

Kolmannessa luvussa keskitytään käsittelemään tiheän ja ei-missään tiheän joukon määritelmät sekä esimerkit tällaisista joukoista. Luvussa käsitellään myös ei-missään tiheän joukon ominaisuuksiin liittyvä lause sekä tämän lauseen todistus.

Neljännessä luvussa määritellään Bairen kategoriat sekä annetaan esimerkki ensimmäisen kategorian joukosta. Lisäksi esitellään lause, jossa käsitellään, millainen joukko kuuluu toiseen kategoriaan.

Viidennessä ja viimeisessä luvussa käsitellään tämän tutkielman varsinaita aihetta eli Baire funktioita. Aluksi määritellään Baire funktioiden luokittelu ja sen jälkeen esitellään ja todistetaan oleellinen lause, joka yhdistää Baire kategoria käsitteet ja Bairen funktioiden luokat. Tässä luvussa esitellään myös lemma, liittyen Baire funktioiden ominaisuuksiin sekä annetaan useita esimerkkejä Baire-0, Baire-1 ja Baire-2 luokkien funktioista.

Tutkielmassa on käytetty lähteinä pääasiassa teoksia [1] ja [2].

1 Jatkuva funktio

Tässä luvussa määritellään, mitä tarkoitetaan jatkuvalla funktiolla sekä esitellään kaksi oleellista lemmaa.

Määritelmä 1.1. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}$ kun kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

kun $x \in \mathbb{R}$ ja $|x - a| < \delta$ eli kun

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) .$$

Funktio f on siis jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä $a \in \mathbb{R}$. Jos funktio f ei ole jatkuva, se on epäjatkuva.

Seuraavat lemmat saadaan jatkuvien funktioiden ominaisuuksista.

Lemma 1.2. *Funktio $f(x)$ on epäjatkuva pisteessä x, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono x_n, joka lähestyy pistettä x eli $x_n \to x$, siten, että*

$$|f(x_n) - f(x)| > \varepsilon$$

kaikilla n.

Lemma 1.3. *Oletetaan, että $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia kuvauksia. Tällöin kuvaukset $f + g$, fg, $|f|$ ja λf (kun $\lambda \in \mathbb{R}$ on vakio) ovat jatkuvia.*

2 Pisteittäinen raja-arvo

Määritellään, mitä tarkoitetaan pisteittäisellä raja-arvolla. Funktiojonon f_n pisteittäinen raja-arvo tarkoittaa sitä funktiota f, jonka arvoja funktiojonon f_n arvot lähestyvät muuttujan n lähestyessä ääretöntä.

Määritelmä 2.1. Funktiojonon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ raja-arvofunktio on funktio f, jos kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, joka voi riippua x:stä, siten että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

kun $n > n_0$. Funktiojonon raja-arvofunktiota merkitään

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

3 Tiheä joukko ja ei-missään tiheä joukko

Tässä luvussa määritellään tiheä joukko ja ei-missään tiheä joukko sekä esitellään esimerkit molemmista. Esitellään ja todistetaan myös ei-missään tiheään joukkoon liittyvä lause.

Määritelmä 3.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on ei-missään tiheä joukko, jos jokaiselle avoimelle välille $]a,b[\subset \mathbb{R}$ on olemassa epätyhjä osaväli $]c,d[\subset]a,b[$, siten, että osavälillä ei ole yhtäkään joukon A pistettä.

Esimerkki 3.2. $\mathbb{Z}$ on ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$.

Todistus. Osoitetaan, että jokaiselle epätyhjälle avoimelle reaalilukuvälille $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ on olemassa osaväli $J =]c,d[\subset I$, joka ei sisällä yhtään kokonaislukua. Tarkastellaan erikseen kolmea tapausta:

1. Väli I ei sisällä kokonaislukuja:
Koska väli $]a,b[$ ei sisällä yhtään kokonaislukua, eli $I \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, niin voidaan valita $J = I$, joka ei sisällä yhtäkään kokonaislukua.

2. Väli I sisältää täsmälleen yhden kokonaisluvun:
Koska väli $]a,b[$ sisältää täsmälleen yhden kokonaisluvun $z \in \mathbb{Z}$, eli $I \cap \mathbb{Z} = \{z\}$, niin voidaan valita $J =]a,z[$, joka ei sisällä yhtään kokonaislukua. Vaihtoehtoisesti voitaisiin valita myös $J =]z,b[$.

3. Väli I sisältää ainakin kaksi kokonaislukua:
Koska väli sisältää ainakin kaksi kokonaislukua, niin välillä täytyy olla ainakin kaksi peräkkäistä kokonaislukua, merkitään näitä lukuja z ja $z + 1$, eli $\{z,z + 1\} \subset I \cap \mathbb{Z}$. Voidaan valita $J =]z,z + 1[$, joka ei sisällä yhtään kokonaislukua.

Näin löydetään aina välin $]a,b[$ osaväli $]c,d[\subset]a,b[$, joka ei sisällä yhtäkään kokonaislukua eli $J \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, joten $\mathbb{Z}$ on ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$.

□

Määritelmä 3.3. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on tiheä joukko avaruudessa $\mathbb{R}$, jos joukon A leikkaus jokaisen joukon $\mathbb{R}$ osavälin kanssa on erisuuri kuin tyhjäjoukko. Eli $A \subset \mathbb{R}$ on tiheä, jos $A\cap]a,b[\neq \varnothing$ kaikille $a,b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$

Esimerkki 3.4. $\mathbb{Q}$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$.

Todistus. Osoitetaan, että mille tahansa kahdelle reaaliluvulle $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on olemassa rationaaliluku $c \in \mathbb{Q}$ siten, että $c \in]a,b[$ eli $a < c < b$.

Olkoon $a,b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$ ja olkoon näiden kahden luvun erotus $b - a = \varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Jos $k \in \mathbb{N}$ on pienin kokonaisluku siten, että $\frac{k}{n} > a$, niin $\frac{k}{n} \in]a,b[$. Mikäli $\frac{k}{n} > b$, niin $b - a < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$. Tämä on ristiriita, sillä alussa määriteltiin, että $b - a > \frac{1}{n}$.

Näin löydetään jokaiselta epätyhjältä $]a,b[\subset \mathbb{R}$ väliltä rationaaliluku eli $\mathbb{Q} \cap]a,b[\neq \varnothing$, joten $\mathbb{Q}$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}$.

$\square$

Lause 3.5. *Ei-missään tiheän joukon osajoukko on ei-missään tiheä. Äärellisen monen ei-missään tiheän joukon unioni on myös ei-missään tiheä.*

Todistus. Todistetaan väittämät erikseen.

Todistetaan, että ei-missään tiheän joukon osajoukko on ei-missään tiheä.

Olkoon A ei-missään tiheä joukko avaruudessa $\mathbb{R}$ ja olkoon $B \subset A$. Todistetaan, että B on ei-missään tiheä joukko. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ epätyhjä avoin väli. Koska joukko A on ei-missään tiheä, niin on olemassa epätyhjä avoin väli $J \subset I$ siten, että $J \cap A = \varnothing$. Koska $J \cap A = \varnothing$ ja $B \subset A$, niin $J \cap B = \varnothing$. Eli B on ei-missään tiheä joukko.

Todistetaan, että äärellisen monen ei-missään tiheän joukon unioni on ei-missään tiheä.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ epätyhjä avoin väli ja olkoon $A_1, A_2, ..., A_n$ ei-missään tiheitä joukkoja. Koska A_1 on ei-missään tiheä, niin on olemassa $J \subset I$ siten, että $J \cap A_1 = \varnothing$. Edelleen, koska A_2 on ei-missään tiheä, niin on olemassa avoin väli $L \subset J$ siten, että $L \cap A_2 = \varnothing$. Täten $L \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing$. Siispä $A_1 \cup A_2$ on ei-missään tiheä. Tämä väite yleistyy induktiolla tapauksille $n \geq 3$.

$\square$

4 Bairen kategoriat

Tässä luvussa määritellään, mitä tarkoitetaan Bairen ensimmäisellä ja toisella kategorialla sekä annetaan esimerkki joukosta, joka kuuluu ensimmäiseen kategoriaan. Lisäksi esitellään lause, joka kertoo millainen joukko ei kuulu ensimmäiseen kategoriaan.

Määritelmä 4.1. Joukko $A \subset X$ kuuluu ensimmäiseen kategoriaan jos A on numeroituvan monen ei-missään tiheän joukon unioni. Joukko, joka ei kuulu ensimmäiseen kategoriaan, kuuluu toiseen kategoriaan.

Esimerkki 4.2. $\mathbb{Q}$ kuuluu ensimmäiseen kategoriaan.

Todistus. Olkoon $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, ...\}$ jokin rationaalilukujen numerointi. Nyt $\{q_n\}$ on ei-missään tiheä joukko kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kaikkien rationaalilukujen joukko voidaan esittää muodossa $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$. Koska $\mathbb{Q}$ on numeroituvan monen ei-missään tiheän joukon unioni, niin määritelmän 4.1 mukaan $\mathbb{Q}$ on ensimmäisen kategorian joukko. □

Lause 4.3. *Mikään suljettu väli $[a,b]$, kun $a < b$, ei kuulu ensimmäiseen kategoriaan.*

Todistus. Tämä lause on todistettu lähteessä [1, Theorem 1.18]. □

5 Baire funktioiden luokittelu

Määritellään Baire funktioiden luokat ja annetaan niistä esimerkkejä. Lisäksi määritellään Baire funktioiden luokitteluun liittyviä oleellisia lauseita sekä lemma. Baire luokat ovat reaalifunktioiden joukkoja. Luokkia merkitään B_n, jossa $n = 0, 1, 2, ...$. B_0 luokkaan kuuluu kaikki jatkuvat funktiot. B_1 luokkaan kuuluvat funktiot on saatu jatkuvien funktioiden jonojen pisteittäisinä raja-arvoina. Funktion sanotaan siis kuuluvan B_1 luokkaan, jos se on saatu jatkuvien funktioiden jonon raja-arvofunktiona. Yleisesti siis B_n luokkaan kuuluu B_{n-1} luokkaan kuuluvien funktiojonojen raja-arvofunktiot.

B_1 luokkaan kuuluu myös B_0 luokan funktiot. Siis $B_0 \subset B_1 \subset B_2$.

Määritelmä 5.1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$B_0 = jatkuvat\ funktiot$$

$$B_1 = \left\{ f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ f_n \in B_0 \right\}$$

$$B_2 = \left\{ f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ f_n \in B_1 \right\}$$

$$\vdots$$

$$B_{k+1} = \left\{ f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ f_n \in B_k \right\}$$

Lause 5.2. *Jokaisen B_1 luokkaan kuuluvan funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko kuuluu ensimmäiseen kategoriaan.*

Todistus. Osoitetaan, että luokkaan B_1 kuuluvan funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko saadaan numeroituvan monen ei-missään tiheän joukon unionia.

Merkitään

$$F(\varepsilon) = \{x : \exists\ x_n \to x,\ |\ f(x_n) - f(x)| > \varepsilon\}$$

Funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko voidaan esittää seuraavasti joukkojen $F(\varepsilon)$ numeroituvana unionina

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Osoitetaan, että $F(\varepsilon)$ on ei-missään tiheä ja siten määritelmän 4.1 mukaan $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F\left(\frac{1}{n}\right)$ on ensimmäisen kategorian joukko.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ epätyhjä avoin väli. Etsitään nyt epätyhjä avoin osaväli $J \subset I$ siten, että osaväli ei sisällä yhtäkään epäjatkuvuuspistettä joukosta $F(\varepsilon)$ eli $J \cap F(\varepsilon) = \varnothing$

Koska $f \in B_1$, niin määritelmän 5.1 mukaan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, missä f_n on jatkuvien funktioiden jono.

Olkoon

$$E_n = \bigcap_{i=n} \bigcap_{j=n} \left\{x \in I : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Olkoon $g(x) = |f_i(x) - f_j(x)|$ ja olkoon $E_{i,j} = \left\{x \in I : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Havaitaan, että $g(x)$ on jatkuva lemman 1.3 mukaan, joten $E_{i,j}$ on suljettu joukko. Koska joukko E_n on saatu joukkojen $E_{i,j}$ numeroituvana leikkauksena, niin myös joukko E_n on suljettu.

Osoitetaan seuraavaksi, että joukkojen E_n unioni on koko avaruus $\mathbb{R}$ eli

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}.$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, niin voidaan valita n_0 siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{8}$$

kun $n \geq n_0$. Jos $i,j \geq n_0$, niin kolmioepäyhtälön perusteella

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq |f_i(x) - f(x)| + |f(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}$$

kun $x \in E_{n_0}$.

Joukon $\mathbb{R}$ osavälinä I on lauseen 4.3 mukaan toisen kategorian joukko eli I ei ole ensimmäisen kategorian joukko. Siten tiedetään, että jokin joukoista E_n on tiheä jollakin osavälillä $J \subset I$. Koska E_n on suljettu, niin $J \subset E_n$.

Osoitetaan vielä, että $J \cap F(\varepsilon) = \varnothing$, minkä seurauksena $F(\varepsilon)$ on ei-missään tiheä joukko.

Olkoon $x \in J$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että $]x - \delta,\, x + \delta[\subset J$ ja

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

kun $|y - x| < \delta$. Tällainen δ löytyy, koska f_n on jatkuva. Koska $x,y \in J \subset E_n$, niin

$$|f_i(x) - f_n(x)|,\ |f_i(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Koska $f_i(x) \to f(x)$ ja $f_i(y) \to f(y)$, niin ylläolevasta saadaan myös arviot

$$|f(x) - f_n(x)|,\ |f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Nyt kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq |f(x) + f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

kaikilla $x \in J$. Siten $J \cap F(\varepsilon) = \varnothing$ ja $F(\varepsilon)$ kuuluu näin ollen määritelmän 4.1 mukaan ensimmäiseen kategoriaan.

$\square$

Lemma 5.3. *Jos $f,g \in B_n$ niin myös $f + g \in B_n$*

Todistus. Todistetaan induktiolla.

Alkuaskel: $f,g \in B_0$ eli ne ovat jatkuvia funktioita. Tiedetään, että jatkuvien funktioiden summafunktio on myös jatkuva, joten alkuaskel pätee.

Induktioaskel:

Oletus: Jos $f,g \in B_n$, niin $f+g \in B_n$.
Väite: Jos $f,g \in B_{n+1}$, niin $f+g \in B_{n+1}$.

Koska $f,g \in B_{n+1}$, niin määritelmän 5.1 mukaan on olemassa jonot $f_n,g_n \in B_n$ siten, että $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ja $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Nyt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n + g_n)(x)$$

jossa $f_n + g_n \in B_n$ induktio-oletuksen mukaan, jolloin summafunktio $f+g \in B_{n+1}$.

$\square$

Esimerkki 5.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + x^{\frac{2}{n}}$ jatkuvien funktioiden jono. Tällöin siis $f_n(x) \in B_0$. Nyt funktiojonon raja-arvoksi saadaan siis

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x + x^{\frac{2}{n}} = x + 1 = f(x)$$

Saatu raja-arvofunktio $f(x)$ kuuluu siis B_1 luokkaan, koska se on saatu jatkuvien funktioiden jonon raja-arvofunktiona. Koska $f(x)$ on jatkuva funktio, kuuluu se siis myös B_0 luokkaan.

B_1 luokkaan kuuluva funktio on usein jatkuva, mutta seuraava esimerkki osoittaa, että se voi olla myös epäjatkuva.

Esimerkki 5.5. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ jatkuvien funktioiden jono. Siis $f_n(x) \in B_0$. Kun $x = 1$, raja-arvofunktion arvoksi saadaan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Kun $0 \le x < 1$, raja-arvofunktion arvoksi saadaan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Siispä raja-arvofunktioksi saadaan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , jos\ x \neq 1 \\ 1 & , jos\ x = 1 \end{cases}$$

Saatu raja-arvofunktio $f(x)$ kuuluu siis B_1 luokkaan. Koska $f(x)$ ei ole jatkuva funktio, se ei kuulu B_0 luokkaan.

Lause 5.6. *Jatkuvan funktion f derivaattafunktio f' kuuluu B_1 luokkaan.*

Todistus. Osoitetaan, että derivaattafunktio f' voidaan esittää jatkuvien funktioiden jonon pisteittäisenä raja-arvona.

Olkoon $f(x)$ jatkuva ja derivoituva. Koska $f(x)$ on derivoituva, niin sen derivaattafunktio $f'(x)$ voidaan määritellä seuraavasti raja-arvon avulla

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Olkoon nyt

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

jatkuvien funktoiden jono. Lemman 1.3 mukaan, $f_n(x)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun $n \to \infty$, niin $f_n(x) \to f'(x)$, sillä

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \ .$$

Koska $f_n(x)$ on jatkuvien funktoiden jono, jonka pisteittäinen raja-arvofunktio on $f'(x)$, niin määritelmän 5.1 mukaan $f' \in B_1$. □

Huomautus 5.7. Funktion f derivaattafunktio $f^{'}$ voi olla myös epäjatkuva, jolloin $f^{'} \notin B_0$. Esimerkki tällaisesta funtiosta löytyy lähteestä [3].

Esimerkki 5.8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2^{-n(x-1)^2}$ jatkuvien funktioiden jono. Siis $f_n(x) \in B_0$. Kun $x = 1$, raja-arvofunktion arvoksi saadaan

$$\lim_{n \to \infty} 2^{-n(x-1)^2} = \lim_{n \to \infty} 2^{-n \cdot 0^2} = \lim_{n \to \infty} 2^0 = 1$$

Kun $x < 1$, raja-arvofunktion arvoksi saadaan

$$\lim_{n \to \infty} 2^{-n(x-1)^2} = 0$$

Kun $x > 1$, raja-arvofunktion arvoksi saadaan

$$\lim_{n \to \infty} 2^{-n(x-1)^2} = 0$$

Siis raja-arvofunktioksi saadaan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , kun\ x = 1 \\ 0 & , kun\ x \neq 1 \end{cases}$$

Saatu raja-arvofunktio $f(x) \in B_1$, sillä se on saatu jatkuvien funktioiden jonon raja-arvona, mutta $f(x) \notin B_0$, sillä se ei ole jatkuva funktio.

Yleisesti voidaan esittää $f_n(x) = 2^{-n(x-x_0)^2}$, jolle raja-arvofunktioksi saadaan

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & , kun\ x = x_0 \\ 0 & , kun\ x \neq x_0 \end{cases}$$

Valitaan rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, ...\}$. Olkoon

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & , jos\ x \in \{q_1, q_2, q_3, ..., q_n\} \\ 0 & muuten \end{cases}$$

Nyt voidaan merkitä $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{q_k}$. Koska $f_{q_k} \in B_1$ ja g_n saadaan B_1 luokkaan kuuluvien funktioiden summana, lemman 5.3 mukaan myös $g_n \in B_1$. Nyt

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & , kun\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , kun\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Koska g on saatu B_1 luokkaan kuuluvan funktiojonon g_n raja-arvofunktiona, niin $g \in B_2$. Tarkastellaan seuraavaksi kuuluuko g myös B_1 luokkaan. Jotta g kuuluisi B_1 luokkaan, lauseen 5.2 mukaan, funktion g tulisi olla jatkuva kaikkialla muualla paitsi ensimmäiseen kategoriaan kuuluvassa joukossa.

Kuitenkin g on epäjatkuva kaikkialla joukossa $\mathbb{R}$. Koska $\mathbb{R}$ ei ole ensimmäisen kategorian joukko, niin $g \notin B_1$.

Viitteet

[1] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson, *Real analysis.* Prentice-Hall, 1997.

[2] J. C. Oxtoby, *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] A. M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions.* Springer Berlin Heidelberg, 2006.